КВАНТ
ЖУРНАЛ

1978

1 - 12

НОМЕР
1

Основан в 1970 году

Квант

1
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *В. Карцев.* Тайны не разгадывают, их дарят... (к 200-летию со дня рождения Ганса Христиана Эрстеда)
8 *Ю. Матиясевич.* Модели многогранников
18 *И. Кикоин, С. Лазарев.* ФЭМ-эффект

Лаборатория «Кванта»

23 *В. Майер, Е. Мамаева.* Два физических фокуса

Математический кружок

24 *Л. Курляндчик, Г. Розенблюм.* Метод бесконечного спуска

Задачник «Кванта»

28 Задачи М481—М485; Ф493—Ф497
30 Решения задач М436—М440; Ф448, Ф450—Ф452

По страницам школьных учебников

36 *А. Земляков, Б. Ивлев.* Вопросы по геометрии

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *Е. Семенов.* Доказать можно?— Доказать нельзя!

Практикум абитуриента

42 *М. Маринчук.* Первый закон термодинамики
47 *И. Габович, П. Горнштейн.* Скалярное умножение векторов
53 *А. Александров, А. Забоев, Н. Нарожный, Н. Шолохов.* Московский инженерно-физический институт

Рецензии, библиография

54 *Я. Гегузин.* Живой рассказ о живой науке

◆

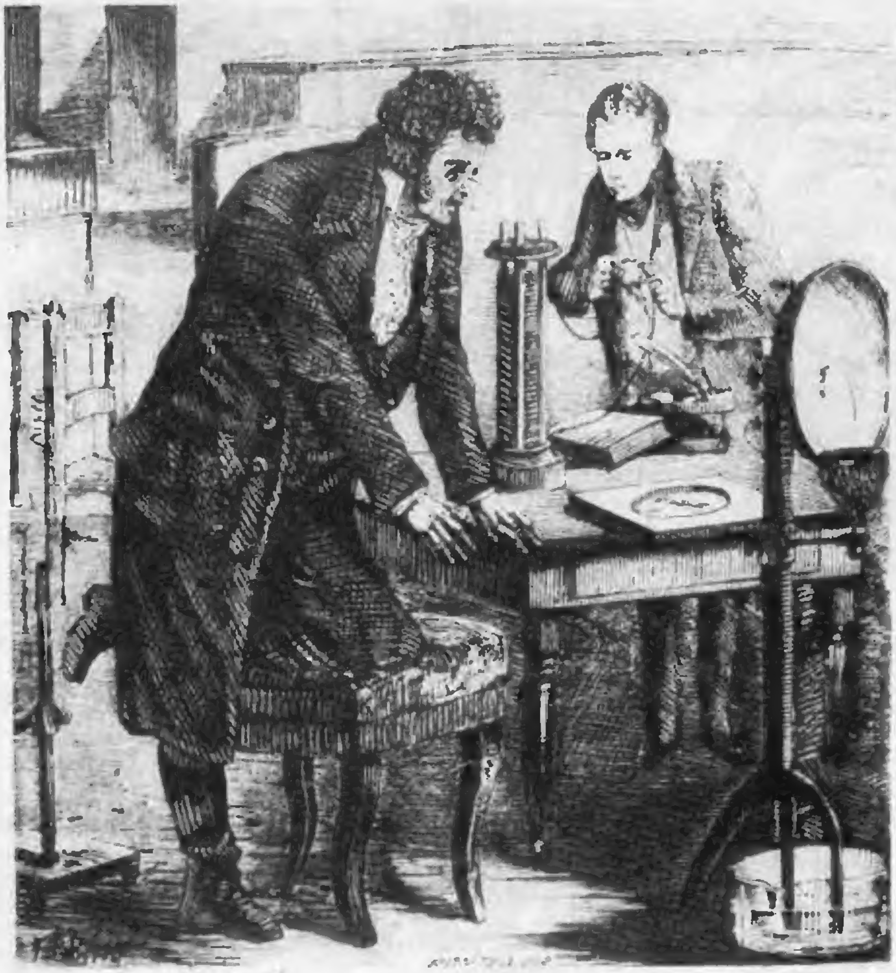
55 *В. Березин.* Винтовая линия

Информация

56 *Ж. Раббот.* Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
59 *В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чугунова.* Заочная физико-техническая школа
62 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*17, 22, 61*)

На первой странице обложки вы видите изображение прямого геликонда. Концы брусков, из которых склеена эта модель, расположены по двум конгруэнтным винтовым линиям. Подробнее о винтовой линии и прямом геликонде читайте на с. 55.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». «Квант», 1978



В. Карцев

Тайны не разгадывают, их дарят...

(к 200-летию со дня рождения Ганса Христиана Эрстеда)

Когда сорокатрехлетний копенгагенский профессор Ганс Христиан Эрстед разослал коллегам свой «памфлет» — четыре невесомые странички на латинском языке — и ученые Франции, Швейцарии, Англии и России смогли с ним ознакомиться: перед ними кроме научных проблем встали и такие, общечеловеческие. Как отнестись к автору этих страничек, как оценить его труд? Кем показался им этот человек: трудолюбивым ученым, фантазером, романтиком, счастливчиком? И вообще — кем он был? Физиком, химиком, фармацевтом, философом или поэтом?

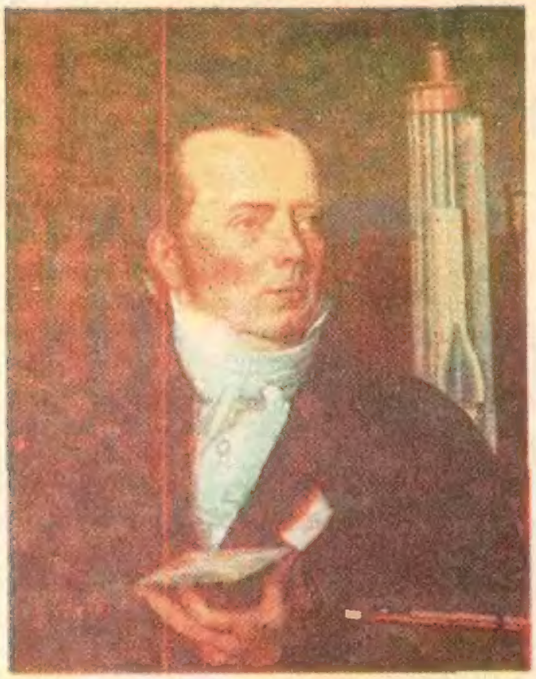
Чтобы ответить на эти нелегкие вопросы, безусловно, интересные и для нас, вернемся на два столетия назад и представим себе далекий датский островок Лангеланд и городок на нем под названием Рюдкобинг, и семью бедного аптекаря, в которой родился сын — Ганс Христиан. Нужда гналась за семьей по пятам, так что начальное образование братьям Гансу Христиану и Андерсу пришлось получать где придется: городской парикмахер учил их немецкому, его жена — датскому, пастор маленькой церквушки научил их правилам грамматики, познакомил с историей и литературой, землемер научил сложению и вычитанию, а заезжий студент впервые рассказал им удивительные вещи о свойствах минералов, посеял любопытство и приучил любить аромат тайны.

В двенадцать лет Ганс, раздразненный наукой и познавший лишь малую ее часть, уже был вынужден стоять за стойкой отцовской аптеки. Здесь медицина надолго пленила его, потеснив химию, историю, литературу, и еще более укрепила в нем уверенность в его научном предназначении. Он решает поступить в Копенгагенский университет, но по-прежнему одержим сомнениями: что изучать? Он берется за все — за медицину, физику, астрономию, философию, поэзию. Он увлечен всем сразу и всем — серьезно.

Ганс был счастлив в университетских стенах. Он писал позднее, что для того чтобы юноша был абсолютно свободен, он должен наслаждаться в великом царстве мысли и воображения, где есть борьба, где есть свобода высказаться, где побежденному дано право восстать и бороться снова. Он жил, упиваясь трудностями и своими первыми небольшими победами, добычей новых истин и устранением предыдущих ошибок. Чем он занимался? Золотая медаль университета 1797 года была присуждена ему за эссе «Границы поэзии и прозы». Следующая его работа, также высоко оцененная, касалась свойств щелочей, а диссертация, за которую он получил звание доктора философии, была посвящена медицине. Он разбрасывался и, казалось, заранее ставил крест на своей научной карьере, предпочитая разносторонность профессионализму.

Наступило новое столетие. В вихре французской революции, на полях сражений американской войны за независимость рождалось новое восприятие мира, происходило очищение умов и душ от устоявшихся догм, ветер свободы манил молодых. Начавшийся промышленный переворот затопил традиционный мир техники нескончаемым потоком новых практических изобретений, невиданных ранее. Девятнадцатый век заявил о себе новым образом жизни и мыслей, новыми социальными и политическими идеями, новой философией, новым восприятием искусства и литературы. Все это захватывает Ганса. Он стремится попасть туда, где бурлит жизнь, где решаются главные научные и философские вопросы — в Германию, Францию, другие европейские страны. Дания, конечно, была в этом смысле европейской провинцией, и Эрстед не хотел и не мог там оставаться. Его талант, упорство и случайность сплелись в счастливый клубок — и вот он, блестяще защитив диссертацию, едет по направлению университета на стажировку во Францию, Германию, Голландию. Там Эрстед слушал лекции о возможностях исследований физических явлений с помощью поэзии, о связи физики с мифологией. Ему нравились лекции блиставших с трибун философов, но он никогда не смог бы согласиться с ними в отказе от экспериментального исследования физических явлений. Его поразил Шеллинг (как ранее поразил Гегель) и прежде всего шеллинговская идея о всеобщей связи явлений. Эрстед увидел в ней оправдание и смысл своей кажущейся разбросанности — все изучавшееся им оказывалось, по этой философии, взаимосвязанным и взаимообусловленным. Он стал одержим идеей связи всего со всем. Быстро нашлась и родственная душа, мыслящая так же, как он, столь же разбросанная и романтичная. Это был немецкий физик Риттер, изобретатель аккумулятора, гениальный фантазер, генератор сумасброднейших идей. Он, например, «вычислил» (исходя из сугубо астрономических соображений), что эпоха новых открытий в области электричества наступит в 1819 или 1820 году. И это предсказание действительно сбылось: открытие произошло в 1820 году, сделал его Эрстед, но Риттеру не пришлось быть свидетелем — он умер за десять лет до этого.

Идея всеобщей связи не давала Эрстеду покоя. Необычайная энергия, свойственная ему с детства, вела его к новым и новым поискам. В



Ганс Христиан Эрстед (1777—1851).
С картины голландского художника Хвида.

1813 году во Франции выходит его труд «Исследования идентичности химических и электрических сил». В нем он впервые высказывает идею о связи электричества и магнетизма. Он пишет: «Следует испробовать, не производит ли электричество ... каких-либо действий на магнит...». Его соображения были простыми: электричество рождает свет — искру, звук — треск, наконец, оно может производить тепло — проволока, замыкающая зажимы источника тока, нагревается. Не может ли электричество производить магнитных действий? Говорят, Эрстед не расставался с магнитом. Этот кусочек железа должен был непрерывно заставлять его думать в этом направлении. Магнит совершил, видимо, немало миль в эрстедовом сюртуке, пока... Нет, магнит Эрстеду так и не пригодился.

Идея связи электричества и магнетизма, восходящая к простейшему сходству притяжения пушинок янтарем и железных опилок магнитом, носилась в воздухе, и многие лучшие умы Европы были ею увлечены. Еще в 1747 году ее подметил петербургский академик Эпинус, а француз Араго потратил немало лет для сбора таинственных, на первый взгляд, историй о кораблях, сокровищах и необычных небесных явлениях, в которых он тоже видел эту ускользающую связь.

Однажды на рейде Пальмы, главного порта Майорки, появилось французское военное судно «Ля-Ралейн». Состояние его было настолько жалким, что корабль едва дошел своим ходом до причала. Когда команда сошла на берег и уступила палубу нескольким именитым французским ученым, в том числе и Араго, выяснилось, что корабль был разрушен молнией. Пока комиссия осматривала судно, покачивая головами при виде сгоревших мачт и надстроек, Араго поспешил к компасам и там увидел примерно то, что ожидал: стрелки компасов, перемагниченных молнией, указывали в разные стороны.

Через год, копаясь в том, что еще несколько дней назад было генуэзским судном (оно разбилось, наскочив на скалы вблизи алжирских берегов), Араго снова обнаружил, что стрелки компасов были перемагничены. В кромешной тьме южной туманной ночи капитан, направив по компасу судно к северу, подальше от опасных мест, на самом деле неудержимо двигался к тому, чего так упорно старался избежать. Корабль шел к югу, прямо к скалам, обманутый пораженным молнией магнитным компасом.

А вот и обещанные сокровища. Они лежали в сундуке у уэкфильдского купца и состояли из весьма ценных, по тем временам, столовых принадлежностей, а предназначены были для отправки в новую английскую колонию — Америку. После удара молнии часть предметов расплавилась, а часть очень сильно намагнитилась.

Все эти, на первый взгляд, малозначащие и не связанные между собой факты Араго собирал не зря. Только что отгремели эксперименты с молнией, проводимые Франклином в Америке и Ломоносовым и Рихманом в России. *Молния* — это гигантская *электрическая* искра! Сейчас нам трудно почувствовать сенсационность такого утверждения, но в то время многие простые люди, не то что уче-

«Те самые» компас и «памфлет».

ные, восторженно приветствовали это открытие. Араго, собравший множество фактов, свидетельствующих о связи *молнии с магнетизмом*, чувствовал, что он на пороге нового открытия. Радость и досада — вот, возможно, те чувства, которые он испытал, увидев решение долго не дававшейся ему задачи. Решение, найденное Эрстедом.

Историки науки, наверно, еще долго будут оставаться в неведении и недоумении относительно обстоятельств открытия, которое стало сейчас чуть ли не классическим примером счастливой случайности. Не известна точно дата этого открытия: некоторые исследователи относят его к 1819, некоторые — к 1820 году. Кое-кто сомневается даже в авторстве Эрстеда. Однако не будем забегать вперед.

15-го февраля 1820 года Эрстед, уже заслуженный профессор химии Копенгагенского университета, читал своим студентам лекцию. Лекция сопровождалась демонстрациями. На лабораторном столе находились источник тока, провод, замыкающий его зажимы, и компас. В то время, когда Эрстед замыкал цепь, стрелка компаса вздрагивала и поворачивалась. При размыкании цепи стрелка возвращалась обратно. Это было первое экспериментальное подтверждение *связи электричества и магнетизма*, того, что так долго искали многие ученые.

Казалось бы, все ясно. Эрстед продемонстрировал студентам еще одно подтверждение давнишней идеи о всеобщей связи явлений. Но почему же возникают сомнения? Почему вокруг обстоятельств этого события впоследствии разгорелось так много споров? Дело в том, что студенты, присутствовавшие на лекции, рассказывали потом совсем другое. По их словам, Эрстед хотел продемонстрировать на лекции всего лишь интересное свойство электричества нагревать проволоку, а компас оказался на столе совершенно случайно. И именно случайностью объясняли они то, что компас лежал рядом с этой проволокой, и совсем случайно, по их мнению, один из зорких студентов обратил внимание на поворачивающуюся стрелку, а удивление и восторг профессора, по их словам, были неподдельными. Сам же Эрстед, в своих позднейших работах, писал: «Все присутствовавшие в аудитории свидетели того, что я заранее объявил о результате эксперимента. Открытие, таким образом, не было случайностью, как бы хотел заключить профессор Гильберт из тех выражений, которые я использовал при первом оповещении об открытии». Так ли это важно в действительности — случайным или нет было открытие Эрстеда? И вообще, что это значит — «случайное открытие»? Случайно ли, например, что химик Эрстед читал лекции об электричестве? Разумеется, нет. Электричество было открыто сравнительно недавно *), багаж знаний по электричеству в ту пору был невелик, занятия им не требовали какой-нибудь особой подготовки. Так что им могли заниматься и физики, и химики, и механики. Оборудование тоже было несложным, его могли сделать в любой мастерской. Поэтому в лекции Эрстеда, да и в ее оснащении ничего случайного в общем не было. Набор для электрических и магнитных исследований был в то время весьма непритязателен — вольтов столб, проводнички, лягушачьи лапки, магнит да компас. Как писал Брэгг (разработавший рентгеноструктурный анализ кристаллов), приходится удивляться не тому, что Эрстед случайно открыл действие электрического тока на магнитную стрелку, а тому, что открытия нужно было ждать целых двадцать лет, с момента изобретения вольтова столба. В десятках лабораторий имелись и вольтовы столбы, и проводнички, и компасы, и в течение двадцати лет эти предметы тысячи раз оказывались рядом. Неминуемо должно было однажды создаться такое положение, когда магнитная стрелка окажется, наконец, по соседству с проволочкой, замыкающей концы вольтова столба, повернется, и исследователь это заметит. И такого события пришлось ждать целых двадцать лет! Неизвестный студент на лекции Эрстеда выполнил, в известном смысле, свою историческую роль, взглянув на компас в подходящий момент. Его роль можно сравнить, в чем-то, с ролью матроса, крикнувшего Христофору Колумбу о новой земле — Америке. И еще. Случайно ли то, что именно Эрстед сделал открытие? Ведь счастливое сочетание нужных приборов, их взаимного расположения и «режимов работы» могло получиться в любой лаборатории? Да, это так. Но в данном случае случайность закономерна — Эрстед был в числе тогда еще немногих исследователей, изучающих *связи между явлениями*.

---

*) Имеется в виду, прежде всего, изобретение в 1800 году итальянским физиком Алессандро Вольта первого непрерывно действующего источника электрического тока — так называемого вольтова столба.

Вернемся, однако, к сути открытия Эрстеда. Нужно сказать, что отклонение стрелки компаса в лекционном опыте было весьма небольшим. В июле 1820 года Эрстед снова повторил эксперимент, используя более мощные батареи источников тока. Теперь эффект стал значительно сильнее, причем — тем сильнее, чем толще была проволока, которой он замыкал контакты батареи *). Кроме того, он выяснил одну странную вещь, не укладывающуюся в ньютоновские

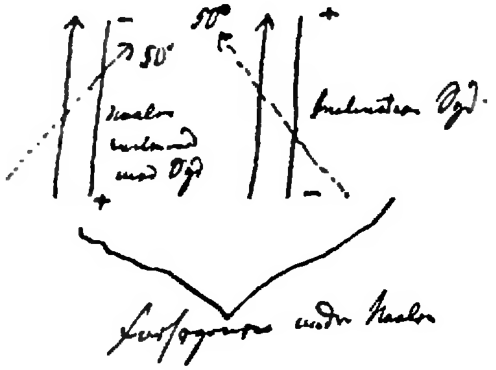


Рисунок Эрстеда из его лабораторных записей: при перемене полярности источника тока стрелка компаса (пунктирная стрелка) меняет направление.

представления о действии и противодействии. Сила, действующая между магнитом и проволокой, была направлена не по соединяющей их прямой, а *перпендикулярно* к ней. Выражаясь словами Эрстеда, «магнитный эффект электрического тока имеет круговое движение вокруг него». Магнитная стрелка никогда не указывала на проволоку, но всегда была направлена по касательной к окружностям, эту проволоку опоясывающим. Как будто бы вокруг проволоки вихрились невидимые сгустки магнитных сил, влекущих легкую стрелку компаса. Вот чем поражен ученый. Вот почему в своем четырехстраничном «памфлете» он, опасаясь недоверия и насмешек, тщательно перечисляет свидетелей, не забывая упомянуть ни об одной из их научных заслуг.

Эрстед, давая в общем неправильное теоретическое толкование эксперименту, заронил глубокую мысль о вихревом характере электромагнитных явлений. «Вихреобразность» процесса долго не находила сторонников, большинство ученых были убеждены в том, что силы, действующие между проводником с током и магнитной стрелкой, — это обычные силы притяжения и отталкивания, подобные ньютоновским силам всемирного тяготения или кулоновским силам взаимодействия между электрическими зарядами. Опыт Эрстеда доказывал не только связь между электричеством и магнетизмом. То, что открылось Эрстеду, было новой тайной, не укладывающейся в рамки известных законов.

---

*) Сейчас нам это кажется само собой разумеющимся: чем больше диаметр проволоки, тем меньше ее сопротивление и, стало быть, больше ток.

Памятная медаль, выпущенная в честь Эрстеда американской ассоциацией учителей физики.

Мемуар Эрстеда вышел в свет 21 июля 1820 года. Мы не случайно датируем так точно. Дальнейшие события развивались в весьма непривычном для неторопливой тогда науки темпе. Уже через несколько дней мемуар появился в Женеве, где в то время был с визитом Араго. Первое же знакомство с опытом Эрстеда доказало ему, что найдена разгадка задачи, над которой бился и он, и многие другие. Впечатление от опытов было столь велико, что один из присутствующих при демонстрации поднялся и с волнением произнес, ставшую впоследствии знаменитой, фразу: «Господа, происходит переворот!».

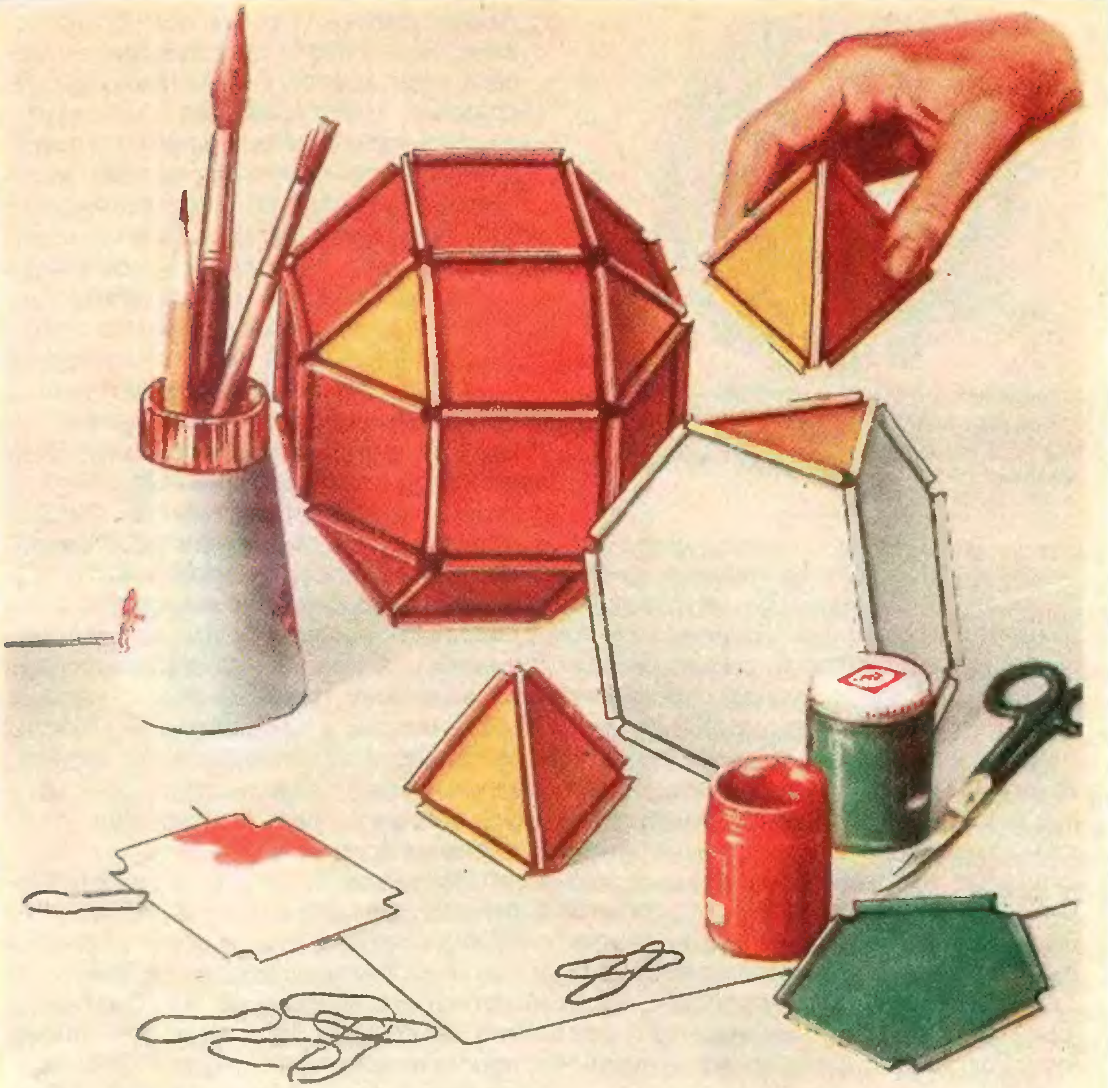
Араго возвращается в Париж потрясенный. На первом же заседании Академии, на котором он присутствовал сразу же по возвращении, 4 сентября 1820 года он делает устное сообщение об опытах Эрстеда. Записи, сделанные в академическом журнале ленивой рукой протоколиста, свидетельствуют, что академики просили Араго уже на следующем заседании, 22 сентября, показать всем присутствующим опыт Эрстеда, что называется, «в натуральную величину».

Сообщение Араго с особым вниманием слушал академик Ампер. Он, может быть, почувствовал в тот момент, что пришла его пора перед лицом всего мира принять из рук Эрстеда эстафету открытия. Он долго ждал этого часа — около двадцати лет — как Араго и как Эрстед. И вот час пробил — 4 сентября 1820 года Ампер понял, что должен действовать. Всего через две недели он сообщил миру о результатах своих исследований. Он высказал гениальную идею и сумел подтвердить ее экспериментально — все магнитные явления можно свести к электрическим. Так зародилась новая наука — электродинамика, теоретически связывающая электрические и магнитные явления. А еще через сорок лет электродинамика влилась составной частью в теорию электромагнитного поля Максвелла, до сих пор являющуюся нашим компасом в мире всех электромагнитных явлений.

После открытия почести посыпались на Эрстеда, как из рога изобилия. Он был избран членом многих авторитетнейших научных обществ, в том числе Лондонского Королевского общества и Французской Академии. Англичане присудили ему медаль за научные заслуги, а из Франции он получил приз в 3000 золотых франков, некогда назначенный Наполеоном для авторов самых крупных открытий в области электричества.

Принимая все эти почести, Эрстед не забывает о том, что новый век требует нового подхода к обучению науке. Он основывает в Дании общество для поощрения научных занятий и литературный журнал, читает просветительские лекции для женщин, поддерживает «маленького Ганса Христиана», своего тезку, будущего великого писателя Ганса Христиана Андерсена. Эрстед становится национальным героем.

К сожалению, Эрстеду не пришлось долго быть свидетелем своего триумфа. Девятого марта 1851 года Эрстед скончался. Хоронили его ночью. Толпа из двухсот тысяч человек, освещая путь факелами, провожала его в последний путь. Звучали траурные мелодии, специально сочиненные в его память. Ученые, правительственные чиновники, члены королевской семьи, дипломаты, студенты, простые датчане ощущали его смерть, как личную потерю. За многое они были благодарны ему. И не в последнюю очередь за то, что он подарил миру новые тайны.



Ю. Матиясевич

Модели многогранников

В недавно изданном переводе книги М. Веннинджера «Модели многогранников» (М., «Мир», 1974) рассказано, как можно самому сделать модели симметричных многогранников, и приведены фотографии моделей, сделанных автором. Это, несомненно, очень красивые модели, способные украсить математический уголок в школе или комнату юного математика. Однако вот что пишет автор по поводу их создания: «В среднем каждая модель отнимала у меня около восьми часов; еще три-четыре часа я тратил на подготовку исходного материала».

В этой статье рассказано о конструкторе, придуманном американским архитектором Фредом Бассети. Потратив два-три часа на его изготовление, читатели получат возможность собрать желаемый многогранник за несколько минут. Конечно, получающиеся модели не столь красивы, как клееные, однако простота изготовления, а также возможность разборки моделей и повторного использования их частей окупают этот недостаток. Процесс сборки многогранников несомненно доставит много удовольствия и читателям, и их друзьям и знакомым.

Изготовление конструктора

Начинать надо с главной и единственной крепежной детали конструктора — резиновых колечек, которых потребуется несколько десятков (тем больше, чем больше хочется иметь одновременно собранных многогранников). Такие резинки можно нарезать, например, из велосипедной камеры или же сделать из резиновых жгутов, которые продаются для изготовления моторов авиамоделей — узелки не помешают. Годятся и обычные резинки, используемые в аптеках для прикрепления рецептов к лекарствам, однако важно, чтобы все они имели одинаковые размеры и упругость.

Запасясь резинками, можно приступать к изготовлению второй детали — граней будущих многогранников, которые делают из картона. Грани имеют вид правильных многоугольников, у которых обрезаны уголки, а к сторонам добавлены отгибающиеся клапаны — см. рисунок 1. С помощью этих клапанов и резинок грани легко соединяются друг с другом. Для начала можно ограничиться гранями в виде правильных треугольников, четырехугольников (т. е. квадратов), пяти- и шестиугольников — уже это позволит собрать большое количество разнообразных многогранников.

Все многоугольники должны иметь равные стороны, длину которых выбирают исходя из соотношения упругости резинок и жесткости картона — надо, чтобы грани скреплялись прочно, но не деформировались. Лучше всего определить длину экспериментально, сделав сначала несколько пар граней разной величины.

Грани хорошо иметь разных цветов. Удобно для каждого типа граней выбрать свою окраску. Хорошо также, чтобы наиболее часто используемые треугольные грани были бы нескольких цветов. Для того чтобы клапаны хорошо отгибались, надо по периметру многоугольника провести по линейке, скажем, тупым концом ножниц. Поскольку потребуется изготовить несколько десятков граней каждого типа (больше всего треугольных, затем четырех- и пятиугольных и меньше всего шестиугольных), то сначала сделайте, как можно точнее, шаблоны граней с клапанами и без них, а затем просто обводите эти шаблоны карандашом.

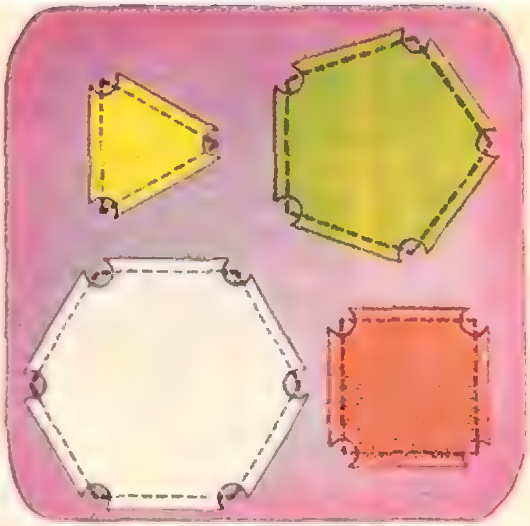


Рис. 1.

* *
*

Что же можно собрать из такого конструктора? Приведем здесь лишь некоторые сведения из теории многогранников — обширный список доступной литературы имеется в упомянутой выше книге М. Веннинджера.

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани — одинаковые правильные многоугольники и в каждой вершине сходится равное число граней. Существует ровно 5 правильных многогранников: тетраэдр (грани треугольные, сходятся по три в вершине, символически это можно записать в виде 3^3), октаэдр — 3^4 (т. е. грани треугольные, сходятся по четыре в вершине), куб (или гексаэдр) — 4^3, икосаэдр — 3^5, додекаэдр — 5^3.

Чтобы собрать эти многогранники, достаточно взять грани нужного типа и при сборке следить лишь за тем, чтобы в каждой вершине сходилось нужное число граней.

Правильные многогранники были известны еще в древней Греции и их часто называют платоновыми телами в честь великого древнегреческого ученого Платона.

Доказательство того, что не существует правильных многогранников, отличных от перечисленных выше, очень просто. Пусть существует многогранник типа n^m (грани n-угольные, сходятся по m в вершине). Углы правильного n-угольника равны $(1-2/n)\pi$, сумма же плоских углов при вершине выпуклого многогранника должна быть меньше 2π, следовательно, $m(1-2/n)\pi<2\pi$, т. е.

$$1<\frac{2}{m}+\frac{2}{n}. \qquad (1)$$

Очевидно, что $m\geqslant 3$ и $n\geqslant 3$, что вместе с неравенством (1) дает неравенства $n\leqslant 5$ и $m\leqslant 5$. Легко проверить, что если $\langle m, n\rangle$ — одна из пар $\langle 4, 4\rangle$, $\langle 4, 5\rangle$, $\langle 5, 4\rangle$ или $\langle 5, 5\rangle$, то неравенство (1) нарушено. Остается еще пять возможностей — $\langle 3, 3\rangle$, $\langle 3, 4\rangle$, $\langle 3, 5\rangle$, $\langle 4, 3\rangle$ и $\langle 5, 3\rangle$, которые и приводят к пяти платоновым телам.

Полуправильные многогранники

Снимем теперь требование, чтобы грани были одинаковыми правильными многоугольниками, но по-прежнему будем требовать, чтобы одинаковы были вершины. При этом кроме 5 платоновых тел возникают новые многогранники, из которых в первую очередь мы рассмотрим 13 так называемых архимедовых тел. Они будут перечислены в той же символической записи: усеченный тетраэдр — $6^2\cdot 3$ (в каждой вершине сходятся две шестиугольные грани и одна треугольная) усеченный октаэдр — $6^2\cdot 4$, усеченный куб $8^2\cdot 3$, усеченный икосаэдр — $6^2\cdot 5$, усеченный додекаэдр — $10^2\cdot 3$, кубооктаэдр — $4\cdot 3\cdot 4\cdot 3$ (в каждой вершине сходятся две квадратные и две треугольные грани, причем грани одного типа не имеют общих ребер), икосододекаэдр — $5\cdot 3\cdot 5\cdot 3$, ромбоикосододекаэдр — $5\cdot 4\cdot 3\cdot 4$, усеченный кубооктаэдр — $8\cdot 6\cdot 4$, усеченный икосододекаэдр — $10\cdot 6\cdot 4$, плосконосый куб — $4\cdot 3^4$, плосконосый додекаэдр — $5\cdot 3^4$, ромбокубооктаэдр — $4^3\cdot 3$.

Имея в своем распоряжении конструктор (пополненный восьми- и десятиугольными гранями), можно начать собирать архимедовы тела. Сборка первых восьми многогранников не вызовет никаких затруднений, если сначала собрать грани, окружающие одну вершину, а затем добавлять новые грани, руководствуясь следующим правилом:

Один из углов добавляемой грани должен попадать в вершину, в которой уже собраны по крайней мере две грани.

Весь процесс сборки этих многогранников идет совершенно однозначно.

При сборке следующего многогранника — усеченного кубооктаэдра — неоднозначность возникает уже на первом этапе: если считать, что мы перечисляем типы граней, идя вокруг вершины по часовой стрелке, то окружение первой вершины может быть как типа $8\cdot 6\cdot 4$, так и типа $8\cdot 4\cdot 6$ (и других возможностей нет: окружение типа, например, $6\cdot 4\cdot 8$ — это то же самое, что и окружение $8\cdot 6\cdot 4$). Дальнейшая сборка идет однозначно, если следовать указанному правилу. В результате получается один и тот же многогранник, независимо от типа первой вершины — у него половина вершин имеет тип $8\cdot 6\cdot 4$, а другая половина — зеркальный тип $8\cdot 4\cdot 6$. Аналогичная картина имеет место и при сборке усеченного икосододекаэдра.

Более интересная ситуация возникает при сборке одиннадцатого многогранника — плосконосого куба. Сначала треугольное окружение квадратной грани собирается однозначно, а вот потом надо делать выбор между двумя вариантами присоединения новой квадратной грани — см. схему на рисунке 2. Когда этот выбор сделан, дальнейшая сборка идет однозначно, если в качестве вершины, упоминаемой в правиле сборки, всегда брать вершину, где уже собраны или все четыре треугольника, или квадратная грань (такая вершина всегда найдется). В результате полу-

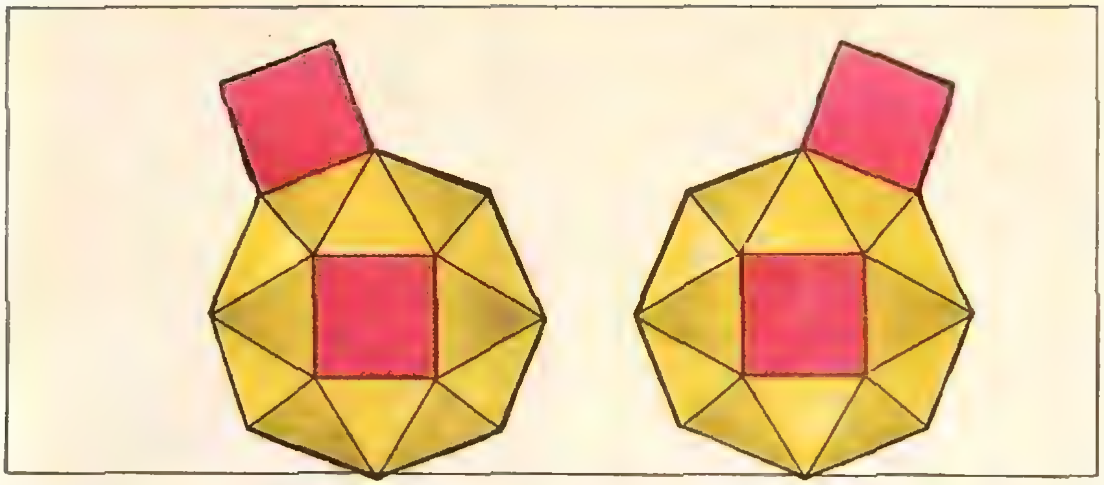


Рис. 2.

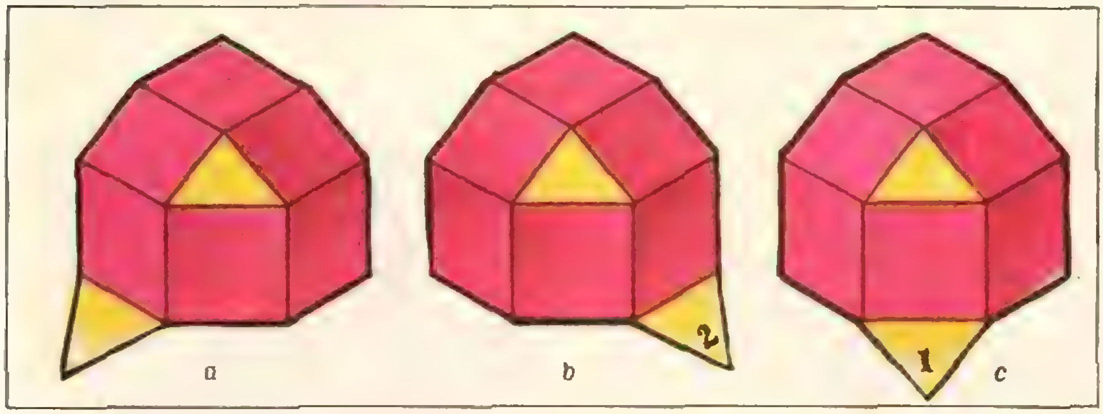


Рис. 3.

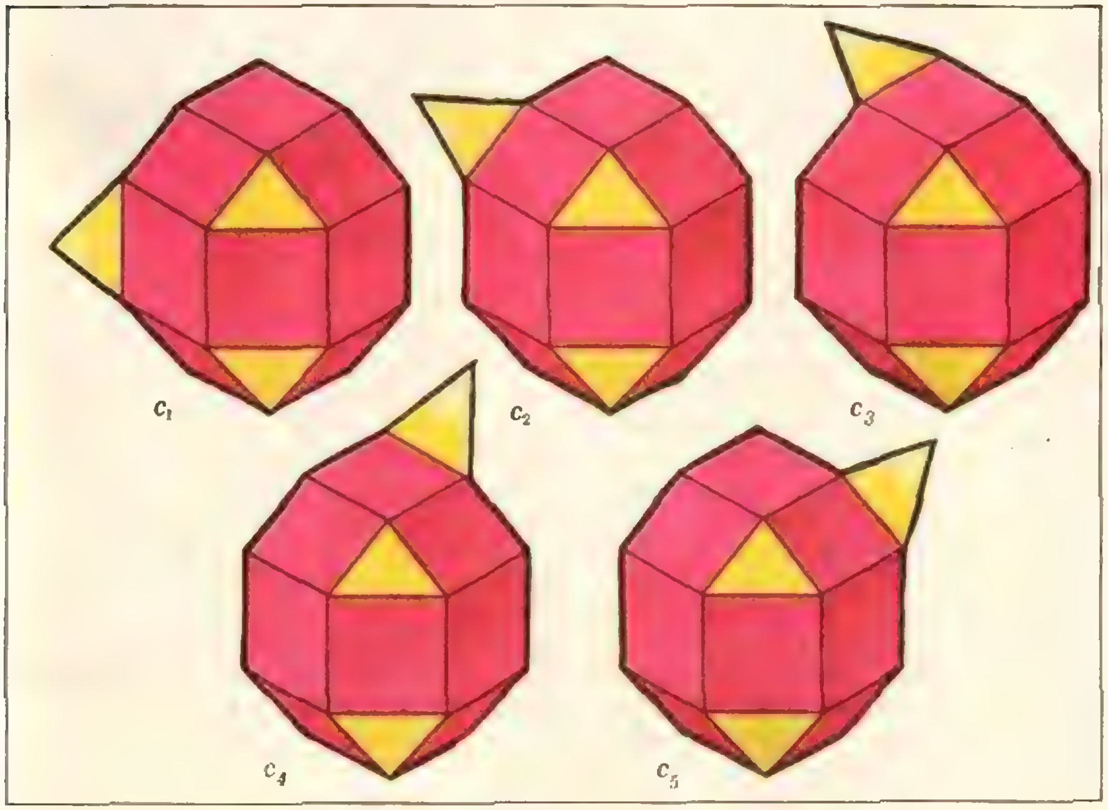

c_1
c_2
c_3
c_4
c_5

Рис. 4.

чаются два многогранника, являющиеся зеркальными отражениями друг друга. Они оба носят одно и то же название и считаются за один многогранник, когда говорят о 13 архимедовых телах. Точно так же два зеркальных варианта имеет плосконосый додекаэдр.

Самая интересная картина возникает при сборке последнего архимедова тела — ромбокубооктаэдра. Здесь после однозначного окружения треугольной грани квадратными возникает возможность выбора между тремя продолжениями — см. схему на рисунке 3. Первые два варианта имеют однозначное завершение, а вот в третьем, после однозначного окружения второго треугольника, возникают пять способов присоединения третьего треугольника — см. схему на рисунке 4.

Сколько же получается разных многогранников? Семь? Нет, всего лишь два. Варианты *a*, *b*, *c*1, *c*3 и *c*4 приводят к одному и тому же многограннику, показанному на рисунке 5, а варианты *c*2 и *c*5 — к этому многограннику и к многограннику, изображенному на рисунке 6. Именно этот последний многогранник называется ромбокубооктаэдром, и только он является архимедовым телом.

Чем же многогранник с рисунка 5 «хуже» остальных 13 архимедовых тел? Вспомним, что в начале этого раздела мы отказались от требования одинаковости граней, но сохранили требование одинаковости вершин. Можно считать, что две вершины одинаковы, если их можно совместить так, что сходящиеся в них грани попарно совпадают друг с другом (при этом разрешается замена на зеркальные отражения). В смысле этого определения все вершины многогранника с рисунка 5 одинаковы. Чем же тогда «плохо» приведенное определение одинаковости вершин? Дело в том, что это определение имеет локальный характер — в нем говорится о попарном совпадении только тех граней, которые сходятся в рассматриваемых вершинах. Архимедовы же тела обладают более сильным свойством: любые две вершины можно совместить так, что все грани многогранника попарно совпадут друг с другом. Многогранник с рисунка 5 этим свойством не обладает. Древние греки обладали высокоразвитым чувством гармонии и не удивительно, что этот многогранник не попал в число архимедовых тел. В течение двух тысячелетий он «находился в тени» и был «изобретен» в середине нашего столетия независимо несколькими математиками в разных странах. В нашей литературе этот многогранник часто называют телом Ашкинузе по имени советского математика, который первым обратил на него внимание.

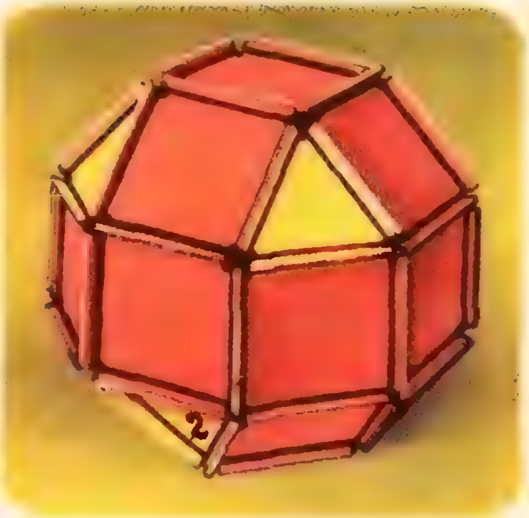


Рис. 5.

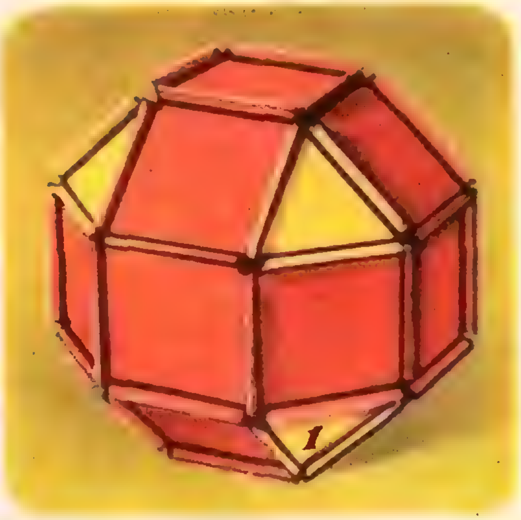


Рис. 6.

Как узнать, нет ли еще полуправильных многогранников? Схема рассуждений здесь в принципе такова же, как и в случае платоновых тел. В вершине должно сходиться не менее трех и не более пяти граней (почему?), следовательно, достаточно рассмотреть три типа вершин: $x \cdot y \cdot z$, $w \cdot x \cdot y \cdot z$, $u \cdot w \cdot x \cdot y \cdot z$ (среди u, w, x, y, z могут быть и одинаковые числа). Соответственно получаются три неравенства, аналогичные неравенству (1):

$$1 < \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}, \qquad (2)$$

$$2 < \frac{2}{w} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}, \qquad (3)$$

$$3 < \frac{2}{u} + \frac{2}{w} + \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z}. \qquad (4)$$

Мы должны найти все решения этих неравенств в целых числах u, w, x, y, z, которые не меньше 3.

Начнем с последнего неравенства. Так же, как и в случае платоновых тел, из неравенств $u \geqslant 3$, $w \geqslant 3$, $x \geqslant 3$, $y \geqslant 3$ и $z \geqslant 3$ и неравенства (4) легко вывести, что $u \leqslant 5$, $w \leqslant 5$, $x \leqslant 5$, $y \leqslant 5$, $z \leqslant 5$. Дальше остается (на долю читателей) конечный перебор возможностей.

Неравенство (3) выполнено при любом z, если $w = x = y = 3$. Это дает бесконечную серию полуправильных многогранников типа $3^3 \cdot z$, называемых антипризмами. Никакой другой полуправильный многогранник (с четырьмя гранями, сходящимися в одной вершине) не может иметь более чем одиннадцатиугольную грань, ибо система неравенств $w \geqslant 3$, $x \geqslant 3$, $y \geqslant 4$, $z \geqslant 12$ противоречит (3). Таким образом, дальше мы можем считать, что $w \leqslant 11$, $x \leqslant 11$, $y \leqslant 11$, $z \leqslant 11$, и опять остается конечный перебор.

Больше всего хлопот вызывает первое неравенство, имеющее много решений, в том числе и таких, которые не соответствуют никакому полуправильному многограннику. Здесь нам поможет еще одно условие, являющееся аналогом неравенства треугольника: сумма плоских углов двух граней больше плоского угла третьей грани. Это приводит к неравенству

$$\frac{2}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{z} < 1 \qquad (5)$$

(не ограничивая общности, мы считаем, что $x \leqslant y \leqslant z$, и не выписываем еще два аналогичных неравенства). Оба неравенства (2) и (5) выполнены при любом z, если $x = 3$, $y = 6$ или $x = y = 4$. В последнем случае мы получаем бесконечную серию полуправильных многогранников типа $4^2 \cdot z$, называемых, как известно, призмами. Полуправильный многогранник типа $3 \cdot 6 \cdot z$ существует только при $z = 6$ (почему? как он называется?). При любых других значениях x и y либо $2/x + 2/y < 1$, и тогда z не может быть сколь угодно большим согласно (2), либо $2/x + 2/y > 1$, и тогда ограничение z сверху получается из (5). В любом случае дело опять сводится к конечному перебору.

Терпеливый читатель, рассмотрев все оставшиеся на его долю случаи, придет к выводу, что кроме 5 платоновых тел, 13 архимедовых тел, тела Ашкинузе и бесконечных серий призм и антипризм никаких других полуправильных многогранников не существует (даже при локальном определении одинаковости вершин).

Правильногранные многогранники

Откинем, наконец, и условие одинаковости граней, и условие одинаковости вершин, но сохраним требование, чтобы грани были правильными многоугольниками, и сам многогранник был выпуклым. Сколько же еще многогранников удастся при этом собрать? Оказывается, что количество новых многогранников конечно.

Доказательство этого факта использует аналог известной из школьного курса теоремы о том, что сумма внешних углов любого многоугольника равна 2π. Внешний угол — это дополнение угла многоугольника до предельного значения, равного π. Аналогично будем называть кривизной в вершине многогранника разницу между 2π (предельное значение) и суммой плоских углов всех граней, сходящихся в этой вершине. Например, кривизна вершины типа $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$ равна $\pi/6$. Оказывается, что если просуммировать кривизну по всем вершинам выпуклого многогранника, то всегда получится 4π (это можно проверить на любой модели; доказательство легко получается, если применить теорему Эйлера — см. «Квант», 1974, № 4, с. 29; № 5, с. 32; № 10, с. 17). Следовательно, вершин типа $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6$ может быть не больше, чем $4\pi : \pi/6 = 24$. Аналогично получается ограничение количества вершин любого другого типа. Число типов вершин, вообще говоря, бесконечно, но, перебирая все возможности при определении количества полуправильных многогранников, мы установили, что все вершины, за исключением конечного числа типов, попадают в одну из серий $4^2 \cdot z$, $3^3 \cdot z$ или $3 \cdot 6 \cdot z$. Теперь осталось показать, что при достаточно большом z правильногранный выпуклый многогранник с вершиной из первой серии обязательно является призмой, из второй серии — антипризмой, а из третьей — не может существовать.

После получения качественного результата о конечности числа правильногранных многогранников, отличных от призм и антипризм, хотелось бы узнать и их точное количество. Эта задача была полностью решена ленинградским математиком В. А. Залгаллером. Ее решение потребовало рассмотрения огромного числа вариантов, и к этой работе были привлечены члены математического кружка 239 школы Ленинграда. В книге В. А. Залгаллера «Выпуклые многогранники с правильными гранями» (Ленинград, 1967) приведено много лемм и названы их авторы — школьники, ставшие к тому времени студентами. Автор книги приносит им благодарность и указывает, что без их активного участия работа вряд ли была бы завершена. Кроме того, еще одним активным участником этого исследования была ЭВМ, которая «рассмотрела» много случаев и «доказала» соответствующие леммы (подробнее о характере вклада ЭВМ рассказано ниже).

Результат, полученный В. А. Залгаллером, состоит в следующем: кроме 5 платоновых тел, 13 архимедовых, призм и антипризм существует еще ровно 92 выпуклых многогранника с правильными гранями. Интересно, сколько из них удастся собрать читателям «Кванта»? Все девяносто два? Укажем, что для этого достаточно граней тех же типов, что были необходимы при сборке архимедовых тел, т. е. 3-, 4-, 5-, 6-, 8- и 10-угольных.

А может быть, кто-либо из читателей соберет из конструктора 93 новых многогранника? Не удивляйтесь, такое, вообще говоря, возможно, ведь сборка многогранника из деталей конструктора еще не гарантирует его «математического существования». Чтобы понять, в чем тут разница, рассмотрим пример многогранника, развертка которого приведена на рисунке 7, а общий вид — на рисунке 8. Сборка этого многогранника не вызывает никаких трудностей, но давайте проследим за ней внимательно.

Пусть для определенности длина сторон всех многоугольников равна единице. Грани *A*, *B* и *D* образуют жесткий трехгранный угол и тем самым фиксируют пространственное взаиморасположение точек *1—8*. Теперь мы хотим добавить грань *C*. Нам удастся это сделать, ибо точки *3* и *7* расположены симметрично точкам *2* и *6* и, следовательно, расстояние между ними равно 1. Точно так же можно будет отдельно собрать в жесткую конструкцию грани *K*, *L*, *M*, *N*. Поскольку обе собранные части одинаковы, то в них расстояния между точками *1* и *8* равны, и мы можем попарно совместить эти точки (см. рисунок 9). Получившаяся конструкция имеет всего одну степень свободы, а именно, две собранные жесткие части могут вращаться друг относительно друга вокруг оси, проходящей через точки *1* и *8*. На самом деле из соображений симметрии взаимное положение этих частей уже фиксировано, например, требованием параллельности отрезков *4—5* и *11—12*. Итак, уже к этому моменту пространственное расположение всех точек *1—14* друг относительно друга фиксировано. Но нам еще надо добавить грани *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *J*. Сможем ли мы это сделать? Из соображений симметрии видно, что расстояние между точками *2* и *13* равно расстоянию между точками

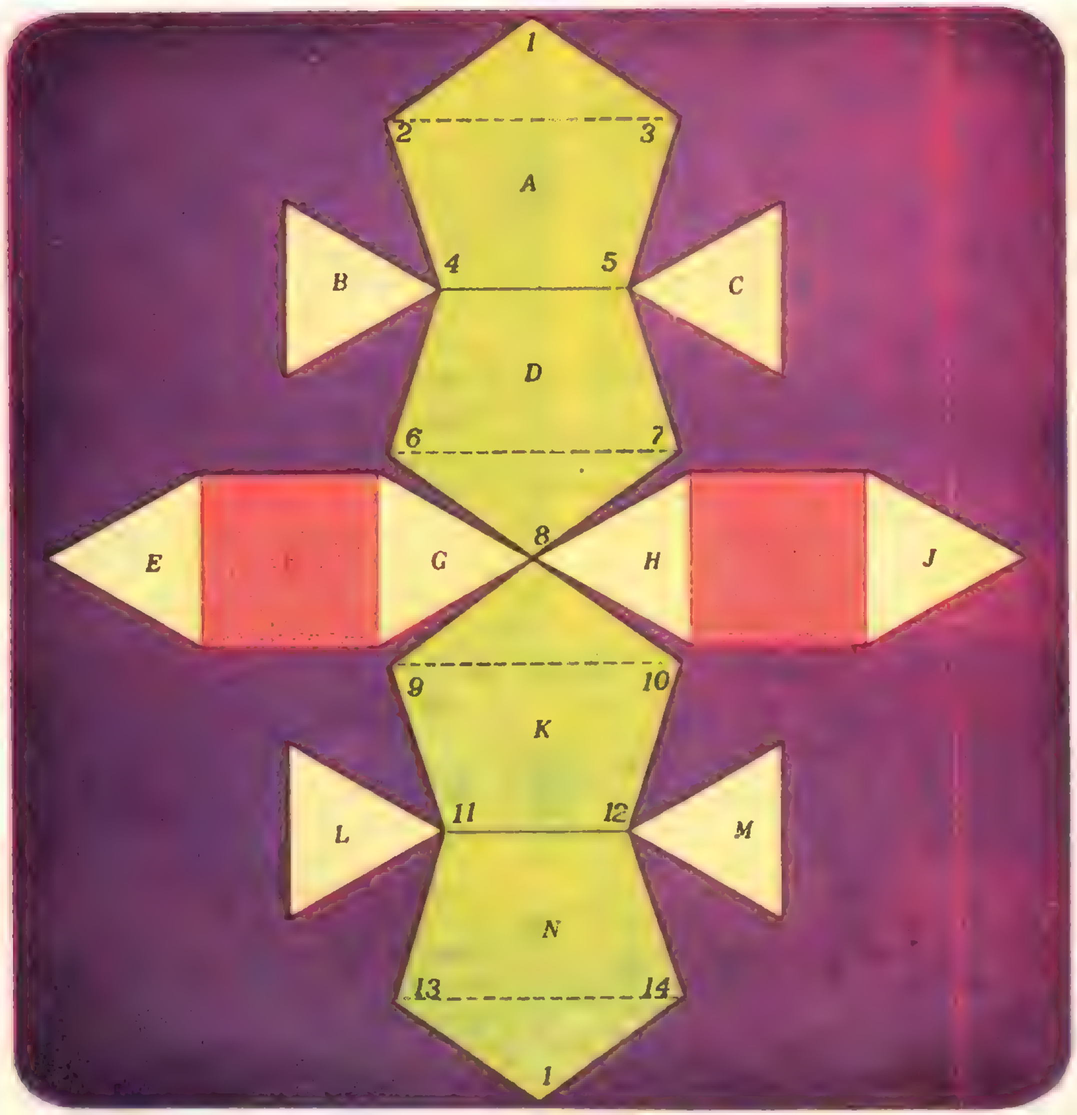

1
2
3
A
B
4
5
C
D
6
7
E
G
8
H
J
9
10
K
L
11
12
M
N
13
14
1

Рис. 7.

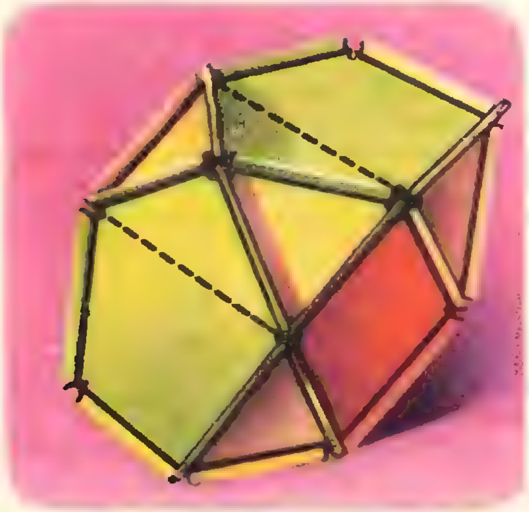


Рис. 8.

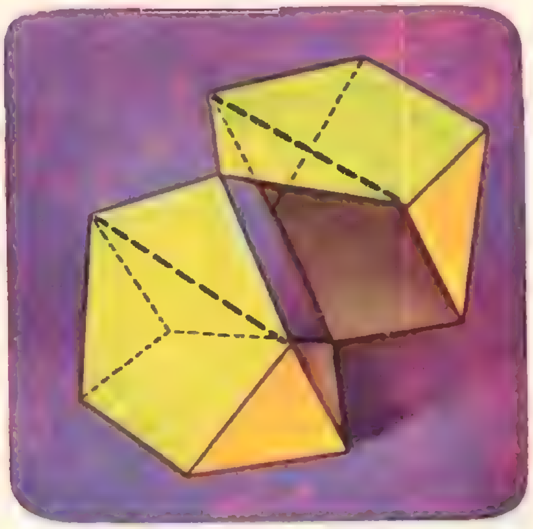


Рис. 9.

6 и *9*, *3* и *14*, *7* и *10*; обозначим это расстояние через a. Возможность практической сборки показывает, что с достаточно большой точностью $a \approx \approx 1$, но имеет ли место строгое равенство $a = 1$, необходимое и достаточное для существования рассматриваемого многогранника? В подобных ситуациях и может прийти на помощь ЭВМ. Конечно, если машина вычислит, что $a = 1{,}00000000$, то это еще вовсе не означает, что многогранник существует, ибо все вычисления машина производит с ограниченной точностью и a может отличаться от единицы, скажем, в двенадцатом знаке. Однако, если бы машина нашла, что, например, $a = 0{,}99998532$, а мы уверены, что по крайней мере шесть знаков у машины всегда верны, то это немедленно доказывало бы лемму о том, что многогранника с разверткой, приведенной на рисунке 7, не существует. Читатели «Кванта», в большинстве своем, по-видимому, не имеют пока доступа к ЭВМ, и им придется здесь использовать свое искусство тригонометрических преобразований.

Рассмотренный пример показывает, что плоская фигура, обладающая всеми внешними признаками развертки многогранника, может, вообще говоря, и не быть разверткой никакого трехмерного тела. Чтобы придать точный смысл словам «внешние признаки», введем понятие заготовки. А именно, будем понимать под заготовкой произвольную систему выпуклых многоугольников, не обязательно правильных, у которых вершинам присвоены натуральные числа (которые будут номерами вершин, если из заготовки удастся склеить многогранник), так, что если две соседние вершины какого-либо многоугольника получили номера i и j, то найдется еще ровно один многоугольник, в котором две соседние вершины также имеют номера i и j и, кроме того, ребро, соединяющее вершины i и j в одном многоугольнике, имеют ту же длину, что и в другом многоугольнике. Мы уже встречались с тремя условиями, легко проверяемыми по заготовке, которые необходимы для существования выпуклого многогранника:

I. В каждой вершине должно сходиться не меньше трех граней,

II. Сумма плоских углов граней, сходящихся в каждой вершине, меньше 2π.

III. Сумма кривизн всех вершин равна 4π.

Очевидно, что должно быть выполнено еще и следующее условие связности:

IV. Для любых двух граней A и B существует последовательность граней $C_1, \ldots, C_k$ такая, что грани A и C_1, C_1 и C_2, …, C_{k-1} и C_k, C_k и B имеют по общему ребру.

Оказывается, что перечисленные четыре условия являются и достаточными — если заготовка обладает свойствами I—IV, то из нее можно склеить некоторый выпуклый многогранник.

За работу, в которой этот глубокий геометрический результат является центральным, А. Д. Александров, ныне академик АН СССР, был удостоен в 1942 году Государственной премии СССР.

Вернемся теперь к рисунку 7. Нетрудно проверить, что все четыре условия I—IV выполнены; следовательно, из этой заготовки можно склеить выпуклый многогранник. Но почему же тогда у нас встретились трудности и сомнения? Дело в том, то теорема Александрова не утверждает, что исходная система многоугольников и будет системой граней многогранника. Условия I—IV достаточны лишь в том случае, если мы при склейке разрешим некоторым многоугольникам «переламываться». Например, согласно теореме Александрова на рисунке 10 изображена заготовка какого-то выпуклого многогранника. На первый взгляд, он имеет две квадратные и восемь треугольных граней, хотя на самом деле при склейке получится обыкновенный куб. В случае заготовки с рисунка 7 пятиугольные грани могли бы, например, переломиться по пунктирным линиям, увеличивая тем самым значение a. Иногда при сборке какого-либо многогранника углы переламывания граней настолько близки к π, что переломы не заметны на глаз, и читатели должны каждый раз не забывать доказывать

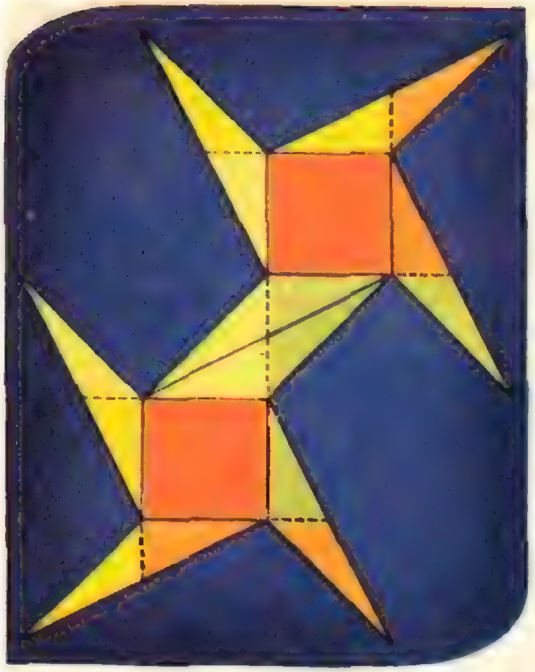


Рис. 10.

«математическое существование» собранного многогранника.

Теорема Коши

Наши резиночные соединения не мешают паре граней вращаться друг относительно друга вокруг общего ребра, и если в собираемом многограннике нет жестких трехгранных углов, то в ходе сборки незаконченную модель обычно можно немножко «пошевелить». Картина резко меняется после присоединения последней грани (или предпоследней, если последняя грань — треугольник) — модель приобретает свойства твердого тела, ни одна грань уже не может вращаться относительно другой. Такое поведение моделей объясняется одной из теорем знаменитого французского математика прошлого столетия Огюстена Луи Коши, который доказал, что из любой заготовки можно склеить не более одного (с точностью до симметрии) выпуклого многогранника. Первоначально эта теорема была доказана для случая, когда при склейке не допускается переламывания многоугольников из заготовки, однако теорема верна и в общем случае.

Вдумчивый читатель должен был заметить, что без ссылки на теорему Коши наш метод перечисления всех правильных, полуправильных и правильногранных многогранников был не полон — по существу мы перечисляли плоские заготовки, а не трехмерные тела.

Вниманию учащихся старших классов!

Магазин № 8 «Техническая книга» Москниги имеет в продаже и высылает наложенным платежом (без задатка) следующие книги:

Математика

Голомб С. В. Полимино («Мир»), ц. 46 к.

Дорофеев Г. В. и др. Пособие по математике для поступающих в вузы (избранные вопросы элементарной математики) («Наука»), ц. 1 р. 04 к.

Кантор И. Л., Солодовников А. С. Гиперкомплексные числа («Наука»), ц. 22 к.

Литлвуд Дж. Математическая смесь («Наука»), ц. 37 к.

Рудник А. Е. и др. Сборник задач по элементарной математике для техникумов («Наука»), ц. 55 к.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике («Наука»), ц. 2 р. 60 к.

Физика

Тригг Дж. Решающие эксперименты в современной физике («Мир»), ц. 41 к.

Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений («Наука»), ц. 70 к.

Физика. Часть 1. Вселенная («Наука»), ц. 1 р. 30 к.

Элементарный учебник физики (под ред. Г. С. Ландсберга). Том 3. Колебания, волны. Оптика. Строение атома («Наука»), ц. 1 р. 13 к.

Шахмаев Н. М. Физика. Часть 1. Молекулярная физика. Электричество («Высшая школа»), ц. 50 к.

Шахмаев Н. М. Физика. Часть 2. Колебания и волны. Оптика. Строение атома («Высшая школа»), ц. 53 к.

Бытько Н. Д. Физика. Части 1 и 2. Механика, молекулярная физика и теплота («Высшая школа»), ц. 51 к.

Бытько Н. Д. Физика. Части 3 и 4. Электричество, оптика и строение атома («Высшая школа»), ц. 58 к.

Заказы (открытками) направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15. Магазин № 8 «Техническая книга».

И. Кикоин, С. Лазарев

ФЭМ-эффект

Фотоэлектромагнитный (ФЭМ) эффект был открыт одним из нас в 1934 году. Заключается этот эффект в следующем. Если освещать полупроводник, помещенный в магнитное поле, то в нем возникает электродвижущая сила. На рисунке 1 приведена схема эксперимента, в котором обнаруживается фотоэлектромагнитный эффект. Полупроводник в виде прямоугольной пластинки помещен в магнитное поле, направленное вдоль оси X. Вдоль оси Y на поверхность пластинки падает пучок света. Тогда между гранями a и a' вдоль оси Z возникает разность потенциалов, которую мы в дальнейшем будем называть фотоэлектромагнитной э. д. с. Если на эти грани нанести электроды и замкнуть их проводником, то включенный в цепь измерительный прибор зарегистрирует наличие тока в цепи.

В первых экспериментах, в которых был обнаружен ФЭМ-эффект, использовались пластинки из закиси меди (Cu_2O). В то время закись меди была самым «модным» веществом, на котором подробно изучались основные закономерности, касающиеся полупроводников. Можно сказать, что в 30-х годах началась эра полупроводников, которым суждено было совершить революцию в радиоэлектронной технике. Описанные выше опыты проводились на образцах закиси меди при температуре жидкого азота (77 К). В небольшом магнитном поле (около 1 Т) при освещении образца довольно слабым светом от лампочки карманного фонарика разность потенциалов между точками A и A' (расстояние между ними было около 2 см) достигала 15—20 В!

Опыты показали, что знак э. д. с. ФЭМ-эффекта, а следовательно, и направление электрического поля в образце меняются при изменении направления внешнего магнитного поля. А при заданном направлении поля знак э. д. с. меняется, если изменить направление падающего на образец света, то есть осветить противоположную поверхность образца. При освещении образца в отсутствие магнитного поля э. д. с. не возникает.

Попытаемся объяснить происхождение ФЭМ-эффекта.

Итак, фотоэлектромагнитная э. д. с. возникает только при действии на освещаемый образец магнитного поля. Между тем известно, что магнитное поле действует только на движущиеся электрические заряды. Поэтому надо понять, каким образом создается движение зарядов в полупроводнике в отсутствие источника э. д. с.

Свет, падающий на поверхность пластинки полупроводника, поглощается в нем (если полупроводник не прозрачен для этого света). Во многих случаях свет поглощается электронами атомов полупроводника. При достаточной энергии ($h\nu$) квантов света (фотонов) поглотивший их электрон отрывается от атома, становится свободным и может перемещаться внутри освещаемого тела. В металлах и без всякого действия света имеется огромное количество свободных электронов. В полупроводниках

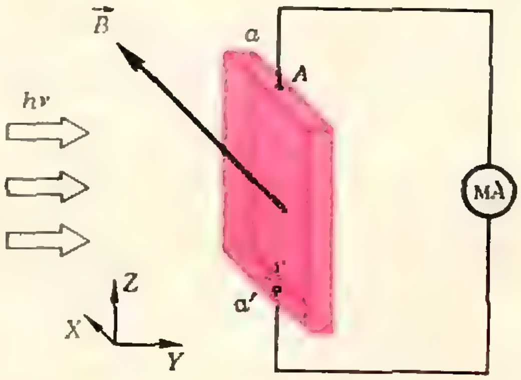


Рис. 1.

число свободных электронов обычно мало, а под действием поглощаемого света оно увеличивается. Раз полупроводник непрозрачен, падающий на его поверхность свет поглощается в тонком слое у поверхности, то есть проникает внутрь образца на небольшую глубину (порядка длины волны света). Следовательно, в тонком приповерхностном слое полупроводника увеличивается число свободных электронов. В остальной части полупроводника, куда свет не проникает, число электронов остается неизменным. Значит, в тонком слое вблизи освещаемой поверхности концентрация электронов оказывается больше, чем в толще образца. Из молекулярной физики известно, что когда в одной части тела концентрация частиц больше, чем в других его частях, наблюдается явление диффузии — перемещение частиц из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. То же происходит и с электронами, рожденными в полупроводнике светом: электроны диффундируют от освещаемой поверхности в глубь образца. Но перемещение электронов это — электрический ток. При освещении полупроводника поглощаемым светом возникает движение электронов от освещенной к неосвещенной поверхности образца. Иными словами, возникает ток, который мы назовем диффузионным электронным током. (Этот ток направлен от неосвещенной грани к освещенной.) Он возникает под действием света без внешнего источника тока. Точнее, свет и служит источником тока. На электроны, создающие диффузионный ток, и действует магнитное поле.

Как известно, сила Лоренца $\vec{F}_л$, действующая в магнитном поле на движущийся заряд, направлена перпендикулярно скорости $\vec{v}$ заряда и магнитной индукции $\vec{B}$ поля. Следовательно, если направление индукции магнитного поля и направление падающего света такие, как на рисунке 1, то под действием силы Лоренца электроны отклоняются к грани a' и скапливаются на ней. Следовательно, эта грань будет иметь отрицательный заряд. Таким образом, между гранями a и a' возникает разность потенциалов, и если наложить на эти грани электроды, соединенные проводником, то по проводнику потечет электрический ток.

Казалось бы, на этом можно считать объяснение возникновения ФЭМ-эффекта законченным. Однако существенным является тот факт, что электрический ток замыкания существует в цепи в течение длительного времени, пока на образец падает свет. А приведенные выше рассуждения недостаточны для объяснения этого эффекта. Действительно, для поддержания разности потенциалов между гранями a и a' пластинки необходим постоянный приток электронов на грань a', а следовательно, постоянный диффузионный ток электронов. Но диффузия электронов не может долго продолжаться, она должна прекратиться. В самом деле, часть электронов, диффундируя в глубь образца, достигает неосвещенной поверхности пластинки и оседает на ней. Со временем на этой поверхности должен накопиться отрицательный заряд, который будет тормозить диффундирующие электроны. Когда на неосвещенной поверхности образца накопится достаточное количество электронов, диффузионный ток прекратится, и следовательно, прекратится ток во внешней цепи. Как показывают расчеты, время существования диффузионного тока, зависящее от внешних условий (от интенсивности падающего света, значения индукции магнитного поля) и от свойств образца (его размеров, материала и пр.), обычно весьма мало — порядка 10^{-5} — 10^{-6} с.

Итак, для объяснения постоянного тока в цепи (постоянной разности потенциалов между гранями a и a') необходимо предположить, что скапливающийся на неосвещенной поверхности пластинки отрицательный заряд «нейтрализуется» точно таким же положительным зарядом. Представим себе, что при освещении поверхности образца рождаются не только электроны, но одновременно с ними такое же количество положительно заряженных частиц, заряд каждой из которых по абсолютному значению равен заряду электрона. Они тоже будут диффундировать в глубь образца. Тогда совместная диффузия электронов и этих положительных зарядов может продолжаться сколь угодно долго, поскольку, доходя до противоположной поверхности образца, они не заряжают ее. Правда, при этом суммарный диффузионный ток равен нулю, хотя перемещение разноименных зарядов происходит.

Именно такая картина и реализуется в действительности при освещении полупроводника. Но что это за положительные заряды, которые рождаются светом? Это — так называемые дырки. Представление о дырках порождено квантовой механикой. ФЭМ-эффект — одно из первых физических явлений, для объяснения которых понятие дырки оказалось совершенно необходимым. В современной теории электропроводности электронно-дырочное представление стало общепринятым.

Итак, при освещении поверхности полупроводниковой пластинки происходит одновременное рождение свободных электронов и дырок (или, как говорят, рождение электронно-дырочной пары), которые диффундируют в одном направлении. В магнитном поле сила Лоренца отклоняет движущиеся электроны и дырки в противоположные стороны, так что на грани a' оседают электроны, а на грани a — дырки. Очевидно, что при изменении направления падающего света или направления магнитной индукции знак э. д. с. ФЭМ-эффекта меняется на противоположный. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта можно определить по правилу левой руки: если левую руку расположить так, чтобы вектор магнитной индукции входил в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены вдоль падающего на образец светового пучка, то отогнутый на 90° большой палец укажет направление электрического поля в образце.

Такова в общих чертах качественная теория ФЭМ-эффекта. Конечно, эта теория была разработана после детального экспериментального исследования эффекта. Сам эффект был обнаружен неожиданно значительно раньше создания теории, и сначала он казался удивительным. Расчеты, выполненные на основе развитой теоретической модели, дают следующую приближенную формулу для силы фотоэлектромагнитного тока I в замкнутой цепи, когда электроды образца замкнуты накоротко (то есть когда сопротивление внешней цепи пренебрежимо мало по сравнению с сопротивлением самого полупроводника):

$$I = KeN|\vec{B}|,$$

где e — заряд электрона, N — количество квантов света, поглощаемых 1 м^2 поверхности образца в 1 секунду (очевидно, что N пропорционально освещенности образца), $|\vec{B}|$ — значение индукции магнитного поля, а K — коэффициент пропорциональности, значение которого зависит только от материала образца. Прямая пропорциональность тока интенсивности падающего света и индукции магнитного поля была выявлена уже в первых экспериментах.

При обычных условиях опыта в небольшом магнитном поле ~ 1 Т при освещенности, создаваемой естественным дневным светом (что соответствует $N \sim 10^{21}\ \frac{\text{квант}}{\text{м}^2\text{с}}$), через образец монокристаллического германия (шириной 0,01 м в направлении магнитного поля) течет фотомагнитный ток $\sim 10^{-3}$ А.

Зная внешние параметры (N, $|\vec{B}|$), можно, измеряя фотомагнитный ток, находить характеристики полупроводниковых материалов, которые определяют величину коэффициента K. ФЭМ-эффект в современных лабораториях стал простым и надежным инструментом для определения таких параметров, характеризующих качество полупроводниковых материалов, как время жизни носителей (электрона и дырки) τ, скорость поверхностной рекомбинации S, диффузионная длина L, подвижность носителей тока и некоторых других. Поясним кратко смысл этих величин.

Как мы уже знаем, под действием кванта света валентный электрон может «оторваться» от атома и стать электроном проводимости. Однако этот избыточный носитель тока не мо-

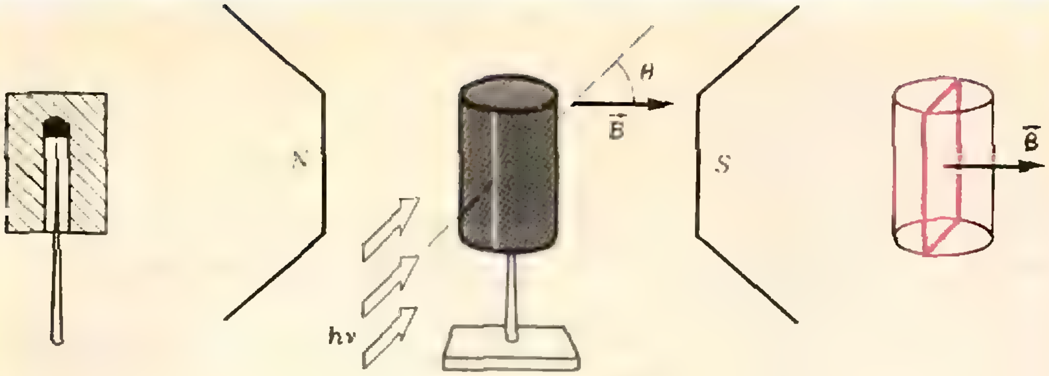


Рис. 2.

жет существовать в образце бесконечно долго. Довольно скоро после своего рождения он по тем или иным причинам снова становится связанным, например, присоединившись к ионизированному атому (этот процесс называется рекомбинацией). Среднее время τ существования носителя тока в свободном состоянии называют временем жизни. В разных полупроводниках это время различно — от 10^{-10} с до сотых долей секунды. Электроны (или дырки) рекомбинируют не только в объеме полупроводника, но и на его поверхности. Величина S, характеризующая скорость исчезновения носителей тока на поверхности, называется скоростью поверхностной рекомбинации. Длина диффузии носителей — L — равна приблизительно расстоянию, на которое успевают продиффундировать электроны или дырки за время своей жизни τ. Подвижность носителей — μ — это скорость их перемещения под действием электрического поля с напряженностью, равной единице. Эти параметры во многом определяют качества полупроводников, используемых в электронной технике.

В заключение опишем один красивый опыт, который иллюстрирует механизм возникновения ФЭМ-эффекта. Опыт состоит в следующем. Из полупроводника (германия) вырезается образец в виде маленького цилиндра. Внутри цилиндра высверливается тонкий канал, в который запрессовывается подпятник из твердого материала. Образец насаживается на иглу (как магнитная стрелка компаса). Цилиндр помещается между полюсами магнита (рисунок 2) и освещается светом (угол между направлением луча света и индукцией магнитного поля $\theta \sim 45^\circ$). Тогда образец начинает вращаться! Опыт наглядно демонстрирует непосредственное превращение энергии света в механическую энергию. Это явление можно назвать фотомагнитомеханическим эффектом. Попробуем объяснить происхождение этого эффекта.

Луч света, падающий на боковую поверхность цилиндрического образца, освещает узкую вертикальную полоску небольшой ширины по всей длине цилиндра. Рожденные светом электроны и дырки диффундируют из освещенной области в глубь цилиндрического образца. В результате действия силы Лоренца на диффундирующие в магнитном поле электроны и дырки возникает э. д. с. ФЭМ-эффекта. При этом все процессы диффузии и рекомбинации рожденных светом носителей разыгрываются в слое образца, протяженностью порядка диффузионной длины. Остальная же толща образца пассивна и служит как бы проводником, замыкающим на себя э. д. с. ФЭМ-эффекта. Весь образец можно представить в виде бесконечного числа замкнутых контуров-рамок (одна из сторон этих рамок — узкая освещенная полоска поверхности образца). На каждую такую рамку со стороны магнитного поля действует момент силы, максимальное значение которого пропорционально площади рамки и силе тока в ней. Однако в силу симметрии цилиндрического образца все эти рамки можно заменить одной «эквивалентной» рамкой, плоскость которой определяется направлением пучка падающего света. И если угол θ, который составляет плоскость рамки с направлением индукции магнитного поля, не равен 90°, то рамка поворачивается в магнитном поле (как рамка с током в обычном электродвигателе). В описанном нами опыте $\theta \approx 45°$, и вращающий момент, действующий на эквивалентную рамку, заставляет вращаться весь образец. При вращении цилиндра под пучок света попадают все новые участки его поверхности. Поэтому цилиндр будет вращаться непрерывно.

Если вы разобрались в механизме возникновения ФЭМ-эффекта, вы сможете ответить на такой вопрос: изменится ли направление вращения цилиндра, если направление поля поменять на противоположное?

Упражнения

1. Каков знак э. д. с. ФЭМ-эффекта в полупроводниках *n*- и *p*-типа?

2. Нарисуйте график зависимости э. д. с. ФЭМ-эффекта от силы света. Учтите при этом, что при освещении проводимость полупроводника σ состоит из двух составляющих — темновой проводимости $\sigma_т$, не зависящей от интенсивности света, и добавки aN (a — константа), пропорциональной силе падающего света N: $\sigma=\sigma_т+aN$.

3. Пусть поглощение света происходит на достаточной глубине образца. Гибель рожденных светом носителей у поверхности происходит быстрее, чем в объеме образца. Определите знак э. д. с. ФЭМ-эффекта.

Фильм о выдающемся математике

Эварист Галуа (1811—1832), выдающийся французский математик, навсегда вошел в историю науки *). Он не успел написать много работ. В русском издании его сочинения и черновые наброски занимают всего лишь 120 страниц в книге небольшого формата. Однако он по праву считается одним из творцов современной алгебры, ряд понятий которой носят его имя: теория Галуа, группа Галуа, поле Галуа, расширение Галуа...

Э. Галуа интересовался следующим вопросом: каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять коэффициенты алгебраического уравнения *n*-й степени, чтобы оно решалось в радикалах? Перед роковой дуэлью, оборвавшей его жизнь, Э. Галуа в течение одной ночи изложил в письме к другу свои результаты, дающие ответ на поставленный вопрос. Однако разработанный Э. Галуа аппарат имел значение, далеко выходящее за рамки указанной задачи, и явился идейной основой дальнейшего развития алгебры.

На снимке: Марио Гарриба в роли Эвариста Галуа.
(Газета «Паэзе сера»)

Жизнь Эвариста Галуа, короткая и трагическая, до краев заполненная творческим поиском и политической борьбой, постоянно привлекала внимание многих исследователей и писателей. Здесь можно напомнить широко известные книги, посвященные судьбе этого ученого: А. Дальма «Эварист Галуа — революционер и математик» (М., «Физматгиз», 1960); Л. Инфельд «Эварист Галуа — избранник богов» (М., «Молодая гвардия», 1966). Теперь образ Э. Галуа нашел свое воплощение и на экране.

---

*) Подробно о жизни и творчестве Галуа написано в 10 номере «Кванта» за 1973 год.

«У меня нет времени»

На голубые экраны Италии вышел трехсерийный фильм о великом французском математике. Фильм так и назван: «У меня нет времени». Создатель его, режиссер Ансано Джанарелли (сценарий написан им совместно с известным поэтом, публицистом и драматургом Эдоардо Сангвинети), раскрывает короткую и яркую, драматическую жизнь Галуа на фоне важнейших событий эпохи: последние годы жизни Наполеона, реставрация Бурбонов, революция 1830 года, появление на исторической арене пролетариата.

Критики особо отмечают исполнение главной роли молодым актером Марио Гарриба. Большой вклад в создание телефильма внес научный консультант, известный в стране математик, педагог и редактор журнала «Риформа делла скуола», публицист Лючио Ломбардо Радиче. Выступает он здесь и в совершенно новом для него качестве... актера. Радиче снялся в роли профессора математики — единственного, кто сумел оценить гений Галуа, творившего в обстановке полного непонимания и подозрительности со стороны представителей официальной, академической науки.

---

*«Иностранная литература», 1977, № 8.

В. Майер, Е. Мамаева

Два физических фокуса

Вы берете стеклянную трубку с оттянутым, как у пипетки, концом и показываете ее своим зрителям. Другой рукой берете за верхний край стакан с водой и тоже показываете его. Опускаете трубку оттянутым концом в стакан и ждете, пока в нее не войдет вода. Затем вы закрываете пальцем верхнее отверстие трубки и вынимаете ее из стакана.

При этом зрители обнаруживают, что у нижнего отверстия трубки образуются воздушные пузырьки (рис. 1). Они растут, отрываются от стенок и поднимаются внутри трубки вверх. А вода из трубки не выливается!

Затем, открыв верхнее отверстие трубки, вы выливаете воду обратно в стакан, несколько раз плавно машете перед собой пустой трубкой и вновь набираете воду из стакана в трубку. Закрыв верхнее отверстие трубки пальцем, вы быстро вынимаете ее из стакана и переворачиваете (рис. 2)— из трубки бьет мощный фонтан на высоту более метра.

Почти наверняка секрет этих фокусов не будет раскрыт. А он очень прост: в стакане находится вода, нагретая до 80—90°С, тогда как трубка имеет комнатную температуру около 20°С. С первым фокусом попробуйте разобраться сами, а второй мы поможем вам объяснить.

Когда в трубку из стакана попадает горячая вода, воздух в верхней части трубки (в силу его плохой теплопроводности) имеет практически комнатную температуру. После того, как вы закроете пальцем верхнее отверстие трубки и трубку перевернете, горячая вода по стенкам начнет стекать вниз, быстро нагревая воздух. Давление воздуха в трубке возрастает, и расширяющийся воздух «выбрасывает» через узкое отверстие трубки не успевшую опуститься вниз воду в виде фонтана.

В опыте мы рекомендуем использовать стеклянную трубку диаметром 8—12 мм и длиной 30—40 см, маленькое отверстие которой имеет диаметр около 1 мм. В промежутке между фокусами трубку надо как следует охладить (можно даже подуть в трубку), так как высота фонтана зависит от разности температур воздуха и воды, набранной в трубку. Оптимальное количество набираемой в трубку воды колеблется в пределах от $^1/_4$ до $^1/_8$ объема трубки и легко подбирается экспериментально.

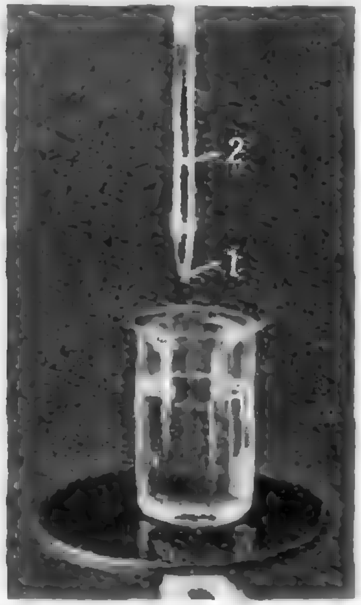


Рис. 1. Воздушные пузырьки внутри трубки с водой: 1 — растущий пузырек, 2 — всплывающий вверх пузырек воздуха.

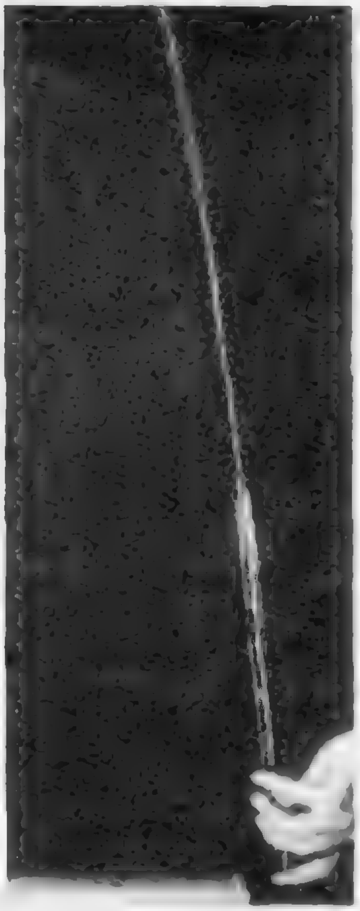


Рис. 2. Бьющий из трубки водяной фонтан.

Л. Курляндчик, Г. Розенблюм

Метод бесконечного спуска

Какое иррациональное число самое «старое»? Несомненно, $\sqrt{2}$. Мы не знаём точно, кто первый доказал иррациональность этого числа; однако мы убеждены, что сделано было это примерно так.

Доказательство первое

Допустим, что число $\sqrt{2}$ рационально. Геометрически это означает, что диагональ квадрата длины c соизмерима с его стороной длины a, то есть найдутся отрезок длины d и целые числа m и n такие, что $c = dm$, $a = dn$. Отметим $m-1$ точек на диагонали AC и $n-1$ точек на стороне DC, делящие эти отрезки на кусочки длины d. Отложим на $[AC]$ отрезок AK: $|AK| = |AD|$; на $[DC]$ — отрезок DE: $|DE| = |KC|$. Точки K и E попадут в отмеченные точки (рис. 1). Докажем, что треугольники ACD и KEC подобны. Угол C у них общий. Достаточно, значит, проверить равенство $\frac{|KC|}{|EC|} = \frac{|CD|}{|AC|}$.

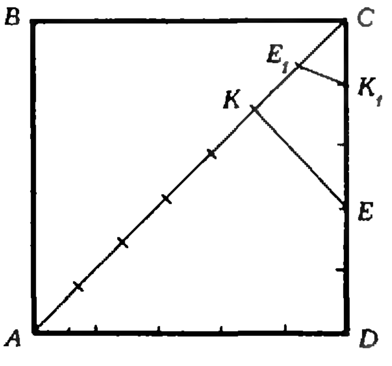


Рис. 1.

Заметим, что $|KC| = c - a$, $|EC| = 2a - c$. Поэтому $\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{c^2 + a^2 - 2ac}{c^2 + 4a^2 - 4ac}$. Поскольку $c^2 = 2a^2$,

$$\frac{|KC|^2}{|EC|^2} = \frac{3a^2 - 2ac}{6a^2 - 4ac} = \frac{1}{2} = \frac{|AD|^2}{|AC|^2}.$$

Таким образом, $\triangle KEC$, подобный $\triangle ACD$, — прямоугольный равнобедренный, и мы можем проделать на его сторонах такое же построение, как на сторонах треугольника ACD. Отложим на $[EC]$ отрезок EK_1: $|EK_1| = |KC|$; на $[KC]$ — отрезок KE_1: $|KE_1| = |K_1C|$. Точки K_1 и E_1 вновь попадут в точки деления. Треугольник K_1CE_1 снова окажется прямоугольным равнобедренным. Для него мы тем же способом построим треугольник K_2CE_2; эту процедуру можно продолжать без конца. При этом треугольники K_jCE_j становятся все мельче, но всякий раз точки K_j и E_j будут попадать в первоначальные точки деления отрезков AC и CD. Но ведь этих точек только конечное число! А треугольников K_jCE_j бесконечно много. Это противоречие и доказывает иррациональность $\sqrt{2}$.

Прошли века… Появилось алгебраическое доказательство, пожалуй, более простое.

Доказательство второе

Иррациональность $\sqrt{2}$ означает, что у уравнения $x^2 = 2y^2$ нет решений в натуральных числах x, y. Допустим, что такие решения есть, и $x = m$, $y = n$ — одно из них.

Из уравнения следует, что m — четное число, $m = 2m_1$. Подставляя $m = 2m_1$ в уравнение, получаем $n^2 = 2m_1^2$, то есть $x = n$, $y = m_1$ — тоже решение. Отметим при этом, что $n < m$, $m_1 < n$. Теперь видно, что и n — четное число, $n = 2n_1$, следовательно, $m_1^2 = 2n_1^2$. Таким образом, $x = m_1$, $y = n_1$ — решение уравнения, при этом $m_1 < n$, $n_1 < m_1$. Мы можем поступать так же и дальше, получая все меньшие и меньшие решения уравнения. Но здесь-то уже и есть противоречие. Ведь все числа $m, n, m_1, n_1, \ldots$ — натуральные, $m > n > m_1 > n_1 > \ldots$, а бесконечной убывающей последовательности натуральных чисел быть не может! Значит, наше предположение было ошибочно, и число $\sqrt{2}$ иррационально.

Оба рассуждения по существу проходили по одной схеме: предположив, что у задачи есть решение, мы строили некоторый бесконечный процесс, в то время как по самому смыслу задачи этот процесс должен на чем-то кончаться. Подобный метод и называется *методом бесконечного спуска* [*].

Часто метод спуска применяется в более простой форме. Предположив, что мы уже добрались до естественного конца процесса, мы видим, что «остановиться» не можем.

Доказательство третье

Пусть $x = m$, $y = n$ — решение уравнения $x^2 = 2y^2$ с наименьшим возможным x. Число m должно быть четным, $m = 2m_1$, следовательно, $x = n$, $y = m_1$ — тоже решение нашего уравнения. Однако $m > n$, что противоречит выбору решения m, n как «наименьшего».

Из этого варианта доказательства видно, что метод спуска сродни методу математической индукции. Оба метода основаны на том факте, что *любое непустое множество натуральных чисел имеет минимальный элемент*. Метод спуска наиболее удобен для доказательства «отрицающих» теорем.

Метод спуска в задачах

Задача 1. *Доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения*

$$8x^4 + 4y^4 + 2z^4 = t^4.$$

Решение. Допустим, что решения есть, и $x = m$, $y = n$, $z = p$, $t = r$ — решение с наименьшим возможным x. Из уравнения видно, что r — четное число, $r = 2r_1$.

Подставляя это решение в уравнение и деля на 2, получаем

$$4m^4 + 2n^4 + p^4 = 8r_1^4.$$

Теперь ясно, что p — четное, $p = 2p_1$, следовательно,

$$2m^4 + n^4 + 8p_1^4 = 4r_1^4.$$

Далее действуем так же: $n = 2n_1$,

$$m^4 + 8n_1^4 + 4p_1^4 = 2r_1^4.$$

Наконец, $m = 2m_1$,

$$8m_1^4 + 4n_1^4 + 2p_1^4 = r_1^4.$$

Таким образом, $x = m_1$, $y = n_1$, $z = p_1$, $t = r_1$ — решение нашего уравнения. Но ведь $m_1 < m$! Мы получили противоречие с выбором решения m, n, p, r как «наименьшего».

Рассмотрим задачу чуть сложнее.

Задача 2. *Доказать неразрешимость в натуральных числах уравнения*

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu.$$

Решение. Пусть x, y, z, u — решение.

Так как $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ — четное число, то среди чисел x, y, z, u — четное число нечетных, то есть либо четыре, либо два, либо нуль. Если все числа нечетные, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ делится на 4, а $2xyzu$ не делится. Если же только два нечетных числа, то $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$ не делится на 4, а $2xyzu$ делится. Поэтому все числа четные, то есть $x = 2x_1$, $y = 2y_1$, $z = 2z_1$, $u = 2u_1$. Подставив эти значения в уравнение, получаем

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2 = 8x_1y_1z_1u_1.$$

Как и прежде, видим, что все четыре числа нечетными быть не могут, иначе $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. Также не могут быть нечетными ровно два числа, ибо и тогда $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u_1^2$ не делится на 8. Итак, мы получаем, что все числа четные, то есть

$$x_1 = 2x_2,\quad y_1 = 2y_2,\quad z_1 = 2z_2,\quad u_1 = 2u_2.$$

---

[*] Метод бесконечного спуска изобрели, по-видимому, древнегреческие математики. Есть основания полагать, что Ферма пытался доказывать свою Великую теорему именно этим методом.

Поэтому
$$x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + u_2^2 = 32x_2y_2z_2u_2.$$
Рассуждая как и раньше, получаем, что x_2, y_2, z_2, u_2 — четные числа и так далее. Легко понять, что при всяком натуральном s
$$x_s^2 + y_s^2 + z_s^2 + u_s^2 = 2^{2s+1}x_sy_sz_su_s,$$
причем
$$x_k = 2x_{k+1};\ y_k = 2y_{k+1};$$
$$z_k = 2z_{k+1};\ u_k = 2u_{k+1};\quad k \geqslant 1.$$
То есть при любом натуральном s числа $\frac{x}{2^s}$, $\frac{y}{2^s}$, $\frac{z}{2^s}$, $\frac{u}{2^s}$ — целые. Ну, а это невозможно ни при каких натуральных x, y, z, u.

А вот уравнение, у которого бесконечно много решений, но которое исследуется тем же методом.

Задача 3. *Найти все решения в натуральных числах уравнения*
$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Решение. Очевидно, что $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ — решение данного уравнения. Докажем, что если пара x, y — решение, то пара $3x + 4y$; $2x + 3y$ — тоже решение. Это следует из тождества
$$(3x + 4y)^2 - 2(2x + 3y)^2 = x^2 - 2y^2.$$
Таким образом,
$$x_2 = 3\cdot 3 + 4\cdot 2 = 17,$$
$$y_2 = 2\cdot 3 + 3\cdot 2 = 12;$$
$x_3 = 99$, $y_3 = 70$, и так далее.

Мы указали бесконечную последовательность решений x_1, y_1; x_2, y_2;... Докажем теперь, что других чисел, удовлетворяющих уравнению, нет.

Пусть x, y — некоторое решение. В таком случае $3x-4y$, $3y - 2x$ — также решение, ибо
$$(3x - 4y)^2 - 2(3y-2x)^2 = x^2 - 2y^2.$$
Из условия $9 = 9x^2 - 18y^2 > -2y^2$ следует, что $3x > 4y$; а при $y > 2$ из условия $4 = 4x^2 - 8y^2 < y^2$ следует, что $3y > 2x$. То есть при $y > 2$ мы из решения x, y получаем решение $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ в натуральных числах, причем $x^{(1)} < x$, $y^{(1)} < y$. Так как этот процесс не может продолжаться бесконечно (в любом непустом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент!), то когда-нибудь мы получим решение $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, где $y^{(n)} \leqslant 2$. Так как $y^{(n)}$, очевидно, не может равняться 1, то $y^{(n)}=2$. Значит, $x^{(n)}=3$. А это и означает, что числа x и y принадлежат построенной ранее последовательности.

До сих пор мы рассматривали только уравнения. Теперь решим нашим методом «текстовую» задачу.

Задача 4. *Имеется $2n + 1$ гирь, каждая из которых весит целое число граммов. Известно, что любые $2n$ из них можно так разложить на чашки весов, по n на каждую, что наступит равновесие. Доказать, что все гири имеют одинаковый вес.*

Решение. Ясно, что все гири одновременно имеют или четный или нечетный вес: вес любых $2n$ гирь четен. Вычтем теперь из весов всех гирь вес самой легкой гири (или самых легких, если их несколько). Новая система гирь, очевидно, также удовлетворяет условию задачи, причем среди гирь есть «гири» нулевого веса. Поэтому веса всех гирь новой системы четны. Разделив веса всех гирь пополам, мы снова получаем систему гирь, удовлетворяющую условиям задачи, среди которых есть «гири» нулевого веса. Поэтому опять же получаем, что вес всех гирь четен, и так далее. Из «бесконечного спуска» следует, что все «гири» нулевые, а это и означает, что все исходные гири имеют одинаковый вес.

Идея бесконечного спуска позволяет решать некоторые задачи комбинаторной геометрии.

Задача 5. *Можно ли куб разрезать на несколько различных кубиков?*

Решение. Сделаем сначала одно очевидное замечание. Пусть квадрат P разбит на конечное число различных квадратов. Тогда самый маленький квадрат не прилегает к границе квадрата P.

Допустим теперь, что куб Q удалось разрезать на различные кубы Q_j; пусть P — одна из граней Q. Кубы Q_j, прилегающие к P, порождают разбиение P на попарно различные квадраты. Пусть P_1 — самый маленький из этих квадратов, Q_1 — соответствующий куб. P_1 не прилегает к границе P, следовательно, он окружен большими квадратами. Соответствующие кубы образуют «колодец», в котором лежит кубик Q_1.

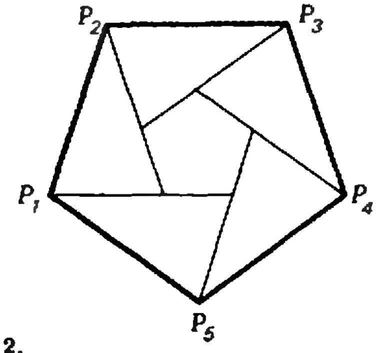


Рис. 2.

Пусть P_1' — «верхняя» грань (противоположная грани P_1) куба Q_1. Кубы, прилегающие к P_1', порождают разбиение P_1' на различные квадраты. Вновь самый маленький из них, P_2, расположен внутри P_1', следовательно, кубы, окружающие соответствующий кубик Q_2, больше Q_2 и снова образуют «колодец». Продолжая построение и дальше, мы получим бесконечную «башню», состоящую из все уменьшающихся кубов, а это невозможно.

В заключение — задача на клетчатой бумаге.

Задача 6. *Дан лист клетчатой бумаги. Доказать, что при $n \neq 4$ не существует правильного n-угольника с вершинами в узлах решетки.*

Решение. Вначале докажем, что не существует правильного треугольника с вершинами в узлах. Действительно, пусть a — длина стороны этого треугольника; тогда a^2 — целое число по теореме Пифагора. Площадь треугольника равна $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то есть иррациональна. С другой стороны, очевидно, что площадь любого многоугольника с вершинами в узлах рациональна.

Поскольку в правильный шестиугольник можно вписать правильный треугольник с вершинами в его вершинах, для $n=6$ утверждение тоже доказано.

Пусть $n \neq 3,4,6$. Допустим, что $P_1, P_2 \ldots P_n$ — n-угольник с вершинами в узлах. Отложим от точек $P_1, P_2, \ldots, P_n$ векторы, соответственно равные векторам $\overrightarrow{P_2P_3}$; $\overrightarrow{P_3P_4}$, ..., $\overrightarrow{P_1P_2}$ (рис. 2). Новые точки вновь попадут в узлы решетки и образуют правильный n-угольник внутри первоначального. С новым n-угольником можно поступить так же, и так далее, без конца. Однако квадрат длины стороны n-угольника — целое число, а при наших постороениях оно все время уменьшается!

Упражнения

1. Доказать, что основание и боковая сторона равнобедренного треугольника с углом при вершине 36° несоизмеримы.

2. Доказать, что число 7 нельзя представить в виде суммы квадратов трех рациональных чисел.

3. Решить в целых числах уравнения:
а) $x^3-3y^3-9z^3=0$;
б) $5x^3+11y^3+13z^3=0$.

4. Доказать, что уравнения
а) $x^2+y^2+z^2=2xyz$;
б) $x^4+y^4=z^4$
не имеют решений в натуральных числах.

5. Решить в натуральных числах уравнения:
а) $x^2+(x+1)^2=y^2+1$;
б) $3x^2-7y^2+1=0$;
в) $(x+1)^3-x^3=y^2$.

6. Доказать, что никакое число вида $4^n(8k-1)$, где k и n — натуральные, не является полным квадратом и не представимо в виде суммы двух или трех квадратов целых чисел.

7. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — набор попарно различных натуральных чисел ($n>2$). Из него получается новый набор $\frac{a_1+a_2}{2}$, $\frac{a_2+a_3}{2}, \ldots, \frac{a_{n-1}+a_n}{2}, \frac{a_n+a_1}{2}$; из него — следующий, по тому же правилу, и так далее. Доказать, что через несколько шагов обязательно получится набор, в котором не все числа будут целыми.

8. Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Доказать, что хотя бы один из перпендикуляров к плоскостям граней, проведенных через эту точку, пересекается с соответствующей гранью. Верен ли этот факт для невыпуклого многогранника?

9. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{2^n}$ — произвольный набор натуральных чисел. Доказать, что если образовать из него новый набор $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$ по правилу $b_k=|a_{k+1}-a_k|$, $k=1, 2, \ldots, 2^n$, $a_{2^n+1}=a_1$, затем из набора $b_1, b_2, \ldots, b_{2^n}$ по тому же правилу образовать набор $c_1, c_2, \ldots, c_{2^n}$, то через некоторое количество шагов мы придем к набору, состоящему только из нулей.

задачник кванта

Задачи

М481—М485; Ф493—Ф497

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 марта 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М481, М482» или «Ф493». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М481. В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ каждый член a_{k+1} равен сумме квадратов цифр в десятичной записи числа $a_k (k \geqslant 1)$. Докажите, что при любом a_1 в этой последовательности встретится число 1 или число 89.

В. Панфилов

М482. Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника больше $2a$, но меньше $3a$, где a — длина ребра тетраэдра.

В. Произволов, А. Савин

М483. а) Докажите, что отношение радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/5.

б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

Я. Темралиев

М484. При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)?

С. Н. Миронов

М485*. а) Докажите, что число e заключено между числами $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при любом натуральном n.

б) Докажите, что последовательность $c_n = \left(1 + \frac{1}{4n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а последовательность $d_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно убывает.

в) Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число e?

г) Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на восемь равных частей. В какой из них лежит e?

д) А если отрезок $[a_n; b_n]$ разделить на 2^k равных частей (в этой задаче интересно получить ответ для достаточно больших n, например, для $n > 2^k$)?

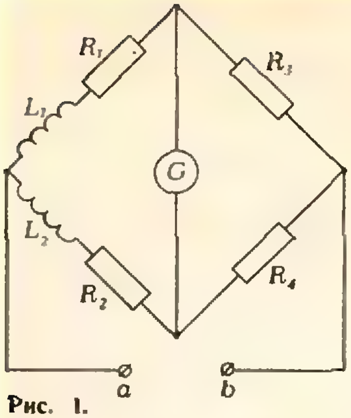


Рис. 1.

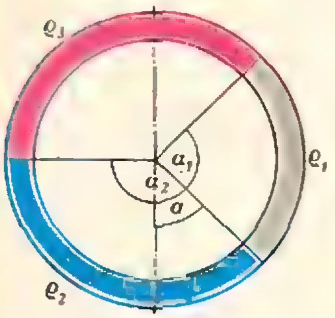


Рис. 2.

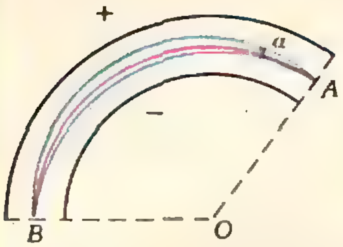


Рис. 3.

(Напомним, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$, — см. учебник «Алгебра и начала анализа 10», пп. 106, 113.)

Т. Мартыненко,
Р. Ушаков

Ф493. Какое влияние оказывает Луна на траекторию движения Земли вокруг Солнца?

Ф494. В схеме, изображенной на рисунке 1, $R_2 = 90$ Ом, $R_3 = 300$ Ом, $R_4 = 60$ Ом и $L_2 = 900$ Г. Каковы значения R_1 и L_1, если через гальванометр G ток не идет независимо от того, подключен к клемам a и $б$ источник постоянного или переменного тока?

XXIV Олимпиада ПНР (1975 г.)

Ф495. Три несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1, ρ_2 и ρ_3 заполняют замкнутую тонкую цилиндрическую трубку, образующую кольцо, плоскость которого вертикальна (рис. 2). Жидкость с плотностью ρ_1 заполняет дугу кольца с углом α_1, а жидкость с плотностью ρ_2 — дугу с углом α_2. Какой угол α образует с вертикалью радиус кольца, проведенный к границе этих жидкостей? Поверхностными эффектами пренебречь.

Ф496*. В цилиндрический конденсатор в точке A впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора α (рис. 3). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке A направлен перпендикулярно AO, движутся по окружности радиуса $|AO| = r_0$, концентрической с обкладками конденсатора. Доказать, что пучок ионов будет фокусироваться в точке B такой, что $\widehat{AOB} = \pi\sqrt{2}$. Определить максимальную ширину пучка.

Ф497. Диск радиуса r, вращающийся с угловой скоростью ω, бросают со скоростью $\vec{v}$ под углом α к горизонту. Плоскость диска во время его движения остается вертикальной. Найти радиус кривизны траектории самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема.

Решения задач

M436—M440; Ф448, Ф450—Ф452

M436. *Дано 20 чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}, b_1, b_2, \ldots, b_{10}$. Докажите, что множество из 100 чисел (необязательно различных) $a_1+b_1, a_1+b_2, \ldots, a_{10}+b_{10}$ можно разбить на 10 подмножеств, по 10 чисел в каждом так, чтобы сумма чисел в каждом подмножестве была одной и той же.*

Запишем наши 100 чисел в квадратную таблицу так, как изображено на рисунке 1; на пересечении i-й строки и j-го столбца поставим число a_i+b_j. Образуем теперь 10 подмножеств так, как показано на рисунке 2 (на рисунке клетки-числа, относящиеся к одному и тому же подмножеству, обозначены одной и той же цифрой). Легко видеть, что в каждом столбце (в каждой строке) есть представители всех подмножеств, так что индексы i и j чисел a_i+b_j, входящих в каждое из подмножеств, принимают все значения от 1 до 10 (ровно по одному разу). Поэтому сумма чисел в каждом из подмножеств одна и та же: $a_1+a_2+\ldots+a_{10}+b_1+b_2+\ldots+b_{10}$.

С. Берколайко

	b_1	b_2	b_3	• • •	b_{10}
a_1	a_1+b_1	a_1+b_2	a_1+b_3	• • •	a_1+b_{10}
a_2	a_2+b_1	a_2+b_2	a_2+b_3	• • •	a_2+b_{10}
a_3	a_3+b_1	a_3+b_2	a_3+b_3	• • •	a_3+b_{10}
• • •	• • •	• • •	• • •	• • • • • • • • •	• • •
a_1	$a_{10}+b_1$	$a_{10}+b_2$	$a_{10}+b_3$	• • •	$a_{10}+b_{10}$

Рис. 1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	1

Рис. 2.

M437. *Докажите, что нечетное число, являющееся произведением n различных простых множителей, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел ровно 2^{n-1} различными способами.*

Представлению нечетного числа a в виде разности двух квадратов $a=x^2-y^2$ соответствует его разложение в произведение двух множителей $a=(x-y)(x+y)$. Это соответствие взаимно однозначно: по каждому разложению $a=rq$ (где $r<q$) из системы уравнений $x-y=r$, $x+y=q$ однозначно определяются $x=(r+q)/2$ и $y=(q-r)/2$ (поскольку a нечетно, оба множителя r и q тоже нечетны). Выясним, сколькими способами можно разложить число $a=p_1p_2\ldots p_n$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые множители, в произведение двух натуральных чисел: $a=rq$. Из n множителей $p_1, \ldots, p_n$ можно 2^n способами выбрать некоторое (в частности, пустое) подмножество — произведение этих множителей даст r, а произведение остальных — q (пустое подмножество соответствует единице). Таким образом, всех представлений $a=rq$ существует 2^n, а таких, в которых $r<q$, — вдвое меньше: 2^{n-1}.

О. Гончарик, С. Сергей

◆

M438. *В данный сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Для каждой пары окружностей через точку касания про-*

Докажем, что все эти прямые проходят через точку M — середину дуги сегмента, дополняющего данный сегмент до круга. Обозначим границу этого круга через γ (рис. 3).

Через K обозначим точку пересечения диаметра MN окружности γ с хордой AB данного сегмента. Пусть γ_1 и *водится касающаяся их прямая. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку.*

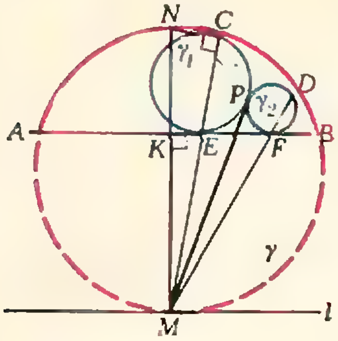


Рис. 3.

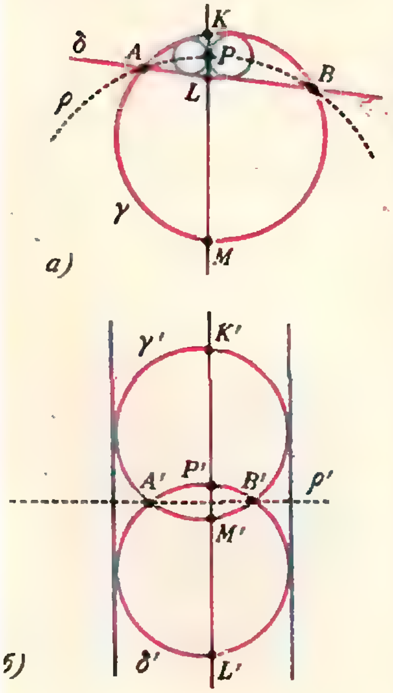


Рис. 4.

γ_2 — две произвольные окружности, вписанные в сегмент и касающиеся друг друга в точке P; C и D — точки касания γ_1 и γ_2 с окружностью γ. E и F — точки пересечения отрезков MC и MD с γ_1 и γ_2 соответственно. Рассмотрим гомотетию Γ_1 с центром C и коэффициентом, равным отношению радиуса окружности γ к радиусу окружности γ_1. Очевидно, что $\Gamma(\gamma_1) = \gamma$, и прямая AB, касательная к γ_1 и перпендикулярная MN, переходит в прямую l, касающуюся окружности γ в точке M: $\Gamma_1(AB) = l$. Кроме того, $\Gamma(E) = M \in l$, откуда получаем, что $E \in [AB]$. Аналогично доказывается, что и $F \in [AB]$.

Далее, из подобия прямоугольных треугольников MCN и MKE (см. рис. 3) следует, что $|MN| \cdot |MK| = |MC| \times \times |ME|$. Аналогично $|MN| \cdot |MK| = |MD| \cdot |MF|$. Отсюда $|MC| \cdot |ME| = |MD| \cdot |MF|$.

Докажем теперь, что прямая MP (напомним, что P — точка касания окружностей γ_1 и γ_2) является касательной к γ_1 и γ_2. Обозначим через P_1 и P_2 вторые точки пересечения прямой MP с окружностями γ_1 и γ_2 соответственно. По свойству секущих $|MP| \cdot |MP_1| = |ME| \cdot |MC| = |MF| \times \times |MD| = |MP| \cdot |MP_2|$, откуда $|MP_1| = |MP_2|$, то есть $P_1 = P_2$. Поскольку окружности γ_1 и γ_2 имеют одну общую точку P, то $P_1 = P_2 = P$. Следовательно, MP — общая касательная к γ_1 и γ_2.

Итак, мы доказали, что каковы бы ни были две касающиеся окружности, вписанные в сегмент, их общая касательная, проведенная через точку касания, всегда проходит через точку M. Из этого и следует утверждение задачи.

Большинство читателей решали эту задачу с помощью инверсии (см. «Квант» 1971, № 8, с. 23 и 1977, № 6, с. 38). Приведем одно из таких решений, не требующее вычислений: нужно лишь знать, что инверсия переводит окружности в окружности (причем прямые считаются «окружностями, проходящими через бесконечно удаленную точку» ∞) и сохраняет углы между ними в точках пересечения.

После инверсии с центром в точке P из рисунка 4, *а* получается рисунок 4, *б* (при этой инверсии $P \to \infty$, $\infty \to P$, $A \to A'$, $B \to B'$ и т. д.; радиус инверсии произволен).

Образы синих окружностей — параллельные прямые, поэтому полученная картина имеет ось симметрии ρ', проходящую через точки A' и B'.

Докажем, что окружность ρ, образом которой служит прямая ρ', — одна и та же для любой точки P (хотя инверсии для разных точек P будут, конечно, разными, так что рисунок 4, *б* зависит от выбора P). Заметим, что ρ' делит пополам углы между γ' и δ'. Значит ρ — окружность, проходящая через точки A, B, P — *делит пополам углы между* γ *и* δ (в точках A и B), а этим условием окружность однозначно определяется.

Докажем, что любая прямая MK проходит через центр окружности ρ. Поскольку прямая $M'K'$ перпендикулярна ρ', прямая MK пересекает ρ под прямым углом, то есть проходит через ее центр. (Нетрудно увидеть из свойства, определяющего ρ, что этот центр — точка M, делящая пополам дугу AB). Из этого решения также видно, что $|MP|$ не зависит от P.

Н. Васильев,
З. Скопец

◆

M439. *а) Докажите, что уравнение*

$$ax^k + bx^l + cx^m = 1$$

(где a, b, c — действительные, k, l и m — натуральные числа) имеет не более трех положительных корней.

б) Докажите, что уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \ldots + a_nx^{k_n} = 1$$

Начнем с задачи б) (задача а) следует из б)). Заметим что если уравнение

$$a_1x^{k_1} + a_2x^{k_2} + \ldots + a_nx^{k_n} = 1, \qquad (1)$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — любые действительные (а не обязательно натуральные) числа, имеет более n положительных корней, то уравнение

$$\bar{a}_1x^{k_1-1} + \bar{a}_2x^{k_2-1} + \ldots + \bar{a}_nx^{k_n-1} = 0, \qquad (1')$$

полученное из (1) дифференцированием обеих частей, имеет более $n - 1$ положительных корней (см. рис. 5). Поделив обе *(где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — натуральные числа) имеет не более n положительных корней.*

в) Докажите, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p+bx^l(x+1)^q+cx^m(x+1)^r=1$$

(где a, b, c — действительные, k, l, m, p, q, r — натуральные числа) имеет не более 14 положительных корней.

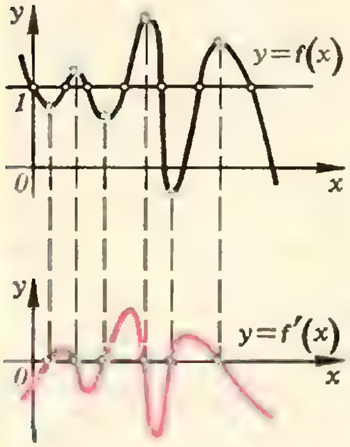


Рис. 5.

части уравнения (1′) на $(-\bar{a}_n x^{k_n-1})$, получим уравнение

$$b_1x^{k_1-k_n}+b_2x^{k_2-k_n}+\ldots+b_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n}=1 \qquad (2)$$

(имеющее более $n-1$ положительных корней). Продифференцировав обе части уравнения (2), получим уравнение

$$\bar{b}_1x^{k_1-k_n-1}+\bar{b}_2x^{k_2-k_n-1}+\ldots$$
$$+\bar{b}_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n-1}=0, \qquad (2')$$

имеющее более $n-2$ положительных корней. Поделив обе части (2′) на $(-\bar{b}_{n-1}x^{k_{n-1}-k_n-1})$, получим уравнение

$$c_1x^{k_1-k_{n-1}}+c_2x^{k_2-k_{n-1}}+\ldots+c_{n-2}x^{k_{n-2}-k_{n-1}}=0, \quad (3)$$

имеющее более $n-2$ положительных корней.

Проделав указанные действия $n-1$ раз, мы придем к уравнению

$$\alpha x^m=1, \ (m=k_1-k_2),$$

которое, в силу сделанного предположения относительно уравнения (1), должно иметь более одного положительного корня. Но это невозможно; значит, исходное уравнение (1) не может иметь более n положительных корней. Утверждение задачи б) доказано.

Перейдем к задаче в). Нам понадобится следующий факт. Пусть $P_m(x)$ — многочлен от x степени m. Тогда производная выражения $x^k(x+1)^pP_m(x)$ имеет вид $x^{k-1}(x+1)^{p-1}P_{m+1}(x)$, где $P_{m+1}(x)$ — многочлен от x степени $m+1$ (k и p — любые действительные числа). Действительно,

$$(x^k(x+1)^pP_m(x))'=kx^{k-1}(x+1)^pP_m(x)+$$
$$+px^k(x+1)^{p-1}P_m(x)+x^k(x+1)^pP'_m(x)=$$
$$=x^{k-1}(x+1)^{p-1}[k(x+1)P_m(x)+pxP_m(x)+$$
$$+x(x+1)P'_m(x)=x^{k-1}(x+1)^{p-1}P_{m+1}(x),$$

где $P_{m+1}(x)$ — многочлен степени $m+1$, записанный в квадратных скобках (напомним, что степень многочлена $P'_m(x)$ равна $m-1$).

Предположим теперь, что уравнение

$$ax^k(x+1)^p+bx^l(x+1)^q+cx^m(x+1)^r=1 \qquad (4)$$

имеет более 14 положительных корней. Тогда, так же как и в задаче б), уравнение, полученное из него дифференцированием обеих частей, имеет более 13 положительных корней. Это уравнение будет такого вида (см. доказанное выше правило дифференцирования):

$$x^{k-1}(x+1)^{p-1}A_1(x)+x^{l-1}(x+1)^{q-1}B_1(x)+$$
$$+x^{m-1}(x+1)^{r-1}C_1x=0 \qquad (4')$$

(числа k, p, l, q, m, r могут быть любыми действительными; $A_1(x)$, $B_1(x)$, $C_1(x)$ — многочлены первой степени).

Поделив обе части уравнения (4′) на $x^{m-1}(x+1)^{r-1}$ (это — «законная» операция: нас интересуют только положительные корни!), мы получим уравнение

$$x^{k-m}(x+1)^{p-r}A_1(x)+x^{l-m}(x+1)^{q-r}B_1(x)+C_1(x)=0, \quad (4'')$$

имеющее более 13 положительных корней. Продифференцировав обе части уравнения (4″) два раза, получим уравнение

$$x^{k-m-2}(x+1)^{p-r-2}A_3(x)+x^{l-m-2}(x+1)^{q-r-2}B_3(x)=0, \quad (5)$$

имеющее более 11 положительных корней (продумайте это!). Поделив обе части уравнения (5) на $x^{l-m-2}(x+1)^{q-r-2}$, получим уравнение

$$x^{k-l}(x+1)^{p-q}A_3(x)+B_3(x)=0, \qquad (5')$$

по-прежнему имеющее более 11 положительных корней. Продифференцировав обе части (5′) четыре раза, получим уравнение

$$x^{k-l-4}(x+1)^{p-q-4}A_7(x)=0, \qquad (6)$$

имеющее более 7 положительных корней, что невозможно, поскольку все положительные корни могут быть только среди корней уравнения $A_7(x)=0$, а это уравнение имеет не более семи корней ($A_7(x)$ — многочлен седьмой степени!). Полученное противоречие доказывает утверждение задачи в).

Л. Лиманов

◆

М440. *Куб $100\times100\times100$ составлен из миллиона единичных кубиков. Назовем шампуром прямую, проходящую через центры кубиков и параллельную ребрам куба.*

а) При каком наименьшем X можно провести X непересекающихся шампуров так, чтобы к ним нельзя было добавить еще один не пересекающий их шампур?

б) При каком наибольшем X можно провести $3X$ непересекающихся шампуров так, чтобы среди них было X шампуров каждого направления?

а) На рисунке 6 показано, как можно провести 297 шампуров с соблюдением условий задачи. Докажем, что меньшим количеством шампуров обойтись нельзя.

Пусть удалось провести X непересекающихся шампуров так, что к ним нельзя добавить уже ни одного шампура, причем пусть $X<297$. Тогда шампуров какого-то направления не больше, чем 98 (пусть их Y: $Y\leqslant98$). Рассмотрим произвольную плоскость, проходящую через центры кубиков перпендикулярно выбранному направлению. После проведения Y шампуров выбранного направления в этой плоскости можно провести по крайней мере еще $100-Y$ шампуров какого-то из двух оставшихся направлений. Подсчитаем теперь общее количество шампуров. Имеем Y шампуров выбранного направления плюс по крайней мере $100-Y$ шампуров в каждой из ста перпендикулярных выбранному направлению плоскостей (иначе можно будет добавить еще шампур). Итак, получаем

$$X\geqslant Y+100(100-Y)=100^2-99Y\geqslant$$
$$\geqslant100^2-99\cdot98=298,$$

что противоречит предположению $X<297$. Таким образом, мы доказали, что меньше 297 шампуров с соблюдением условий пункта а) задачи провести нельзя.

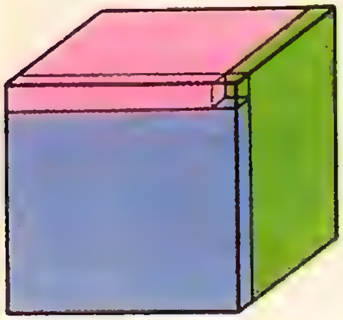


Рис. 6.

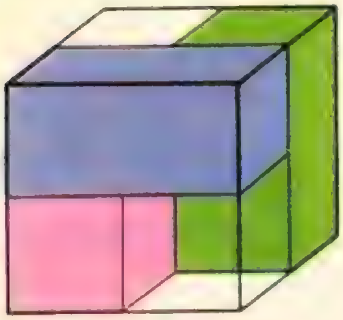


Рис. 7.

Перейдем к решению задачи б).

б) Раскрасим проведенные шампуры в три цвета: красный, синий и зеленый — шампуры каждого направления — в свой цвет. Пусть шампуров красного цвета — $К$ штук, синего — $С$, зеленого — $З$. Плоскости, проходящие через центры кубиков и перпендикулярные красным шампурам, будем называть красными, перпендикулярные синим — синими, и зеленым — зелеными.

Обозначим через $К_С$ количество синих плоскостей, в которых лежат красные шампуры, через $К_З$ — количество зеленых плоскостей, в которых лежат красные шампуры; аналогично введем обозначения $С_К$, $С_З$, $З_К$ и $З_С$.

Так как каждый красный шампур есть пересечение синей и зеленой плоскостей, то

$$К\leqslant К_З\cdot К_С.$$

Аналогично

$$С\leqslant С_К\cdot С_З, \qquad (1)$$
$$З\leqslant З_С\cdot З_К.$$

Кроме того, так как в одной и той же красной плоскости не могут лежать одновременно синий и зеленый шампуры, то

$$С_К+З_К\leqslant100$$

(мы рассматриваем только плоскости, проходящие через центры кубиков, так что плоскостей каждого направления — по 100 штук).

Аналогично

$$К_С+З_С\leqslant100, \qquad (2)$$
$$К_З+С_З\leqslant100.$$

Используя неравенства (1), (2) и теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом*), получаем

---

* Для произвольного n эта теорема записывается так: пусть $a_1>0$, $a_2>0$, ..., $a_n>0$; тогда $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$. Это неравенство называют *неравенством Коши.*

$$К\cdot С\cdot З \leqslant К_З\cdot К_С\cdot С_К\cdot С_З\cdot З_С\cdot З_К \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{1}{6}(К_З + К_С + \ldots + З_К)\right]^6 \leqslant 50^6,$$
откуда $X \leqslant 2500$.

Пример расположения 2500 шампуров в соответствии с условиями задачи б) приведен на рисунке 7.

Н. Нецветаев,
С. Фомин

Ф448. *Почему бревна, плывущие по реке, ориентированы всегда по течению, а не поперек его?*

◆

Действие сил трения приводит к тому, что в русле реки устанавливается определенное распределение скоростей различных частей потока. Тонкие слои жидкости, примыкающие к берегам (и дну реки), неподвижны, а по мере приближения к середине реки (и к поверхности воды) скорость воды непрерывно возрастает (рис. 8).

Если в реку поместить бревно, расположенное под углом к течению, то та часть бревна, которая находится ближе к берегу, будет двигаться с меньшей скоростью, чем часть бревна, находящаяся ближе к середине реки. Это приведет к тому, что бревно начнет поворачиваться. И будет поворачиваться до тех пор, пока ближайший к середине реки торец бревна не окажется впереди, а само бревно не будет ориентировано по течению.

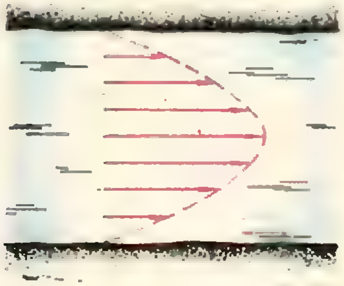


Рис. 8.

Ф450. *Ядро массы m, летящее со скоростью $\vec{v}_0$, распадается на лету на два одинаковых осколка. Определить максимально возможный угол между вектором скорости одного из осколков и вектором $\vec{v}_0$, если при распаде покоящегося ядра осколки имеют скорость $|\vec{v}| < |\vec{v}_0|$.*

◆

Скорость $\vec{u}$ одного из осколков ядра равна

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v},$$

где $\vec{v}_0$ — его скорость до распада ядра, а $\vec{v}$ — скорость осколка относительно покоящегося ядра (то есть в той системе координат, в которой ядро до распада покоилось).

Расположим вектор $\vec{v}_0$ так, как показано на рисунке 9. Конец вектора $\vec{v}$ может лежать на окружности радиуса $|\vec{v}|$. Из рисунка 9 видно, что вектор $\vec{u}$ составляет максимальный угол α с вектором $\vec{v}_0$, если угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равен $\pi/2$. В этом случае

$$\alpha = \arcsin\frac{|\vec{v}|}{|\vec{v}_0|}.$$

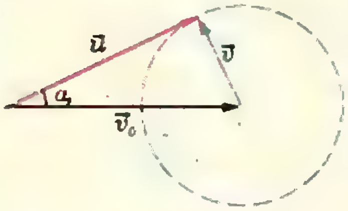


Рис. 9.

Ф451. *Нарисуйте примерный график зависимости тока через сопротивление R от положения движка потенциометра (рис. 10). При каком значении $y=x/l$ этом ток максимален?*

◆

Подвижный контакт (движок) делит сопротивление r потенциометра на две части. Обозначим их через r_1 и r_2 (рис. 11), причем

$$r_1 = ry \text{ и } r_2 = r(1-y). \qquad (1)$$

Общее сопротивление R_0 цепи равно

$$R_0 = R_1 + r_2 + \frac{r_1R}{r_1+R} \qquad (2)$$

(считаем, что внутреннее сопротивление источника входит в R_1). Ток в цепи

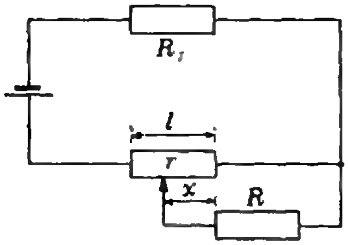


Рис. 10.

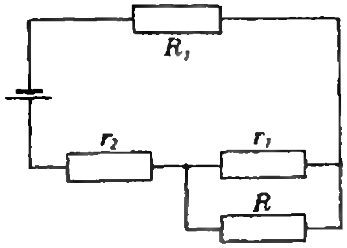


Рис. 11.

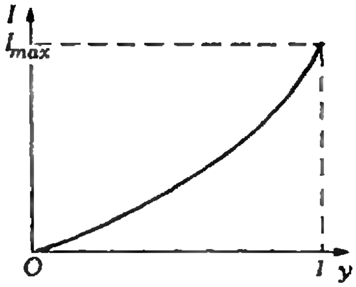


Рис. 12.

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_0}. \qquad (3)$$

Обозначим через I и I_1 токи, текущие через сопротивления R и r_1 соответственно. Тогда

$$I_0 = I + I_1 \qquad (4)$$

Из соотношения

$$IR = I_1 r_1$$

с учетом (2), (3) и (4) получаем

$$I = \frac{\mathscr{E}}{\left(R_1 + r_2 + \frac{r_1 R}{r_1 + R}\right)\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)}.$$

Подстановка в это выражение значений r_1 и r_2 из (1) позволяет привести его к виду

$$I = \frac{\mathscr{E}}{A - ry + \frac{B}{y}},$$

где

$$A = R_1 + r, \quad B = R\left(1 + \frac{R_1}{r}\right).$$

Исследуем зависимость I от y. Рассмотрим сначала два крайних случая. Если $y \to 0$ (движок потенциометра приближается к крайнему правому положению), то

$$\frac{B}{y} \to \infty, \text{ и } I \to 0.$$

Если $y \to 1$ (движок приближается к крайнему левому положению), то

$$I \to \frac{\mathscr{E}}{A - r + B} = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + R\,(1 + R_1/r)}.$$

Для того чтобы выяснить характер изменения тока, найдем производную I' от I по y:

$$I' = \frac{\mathscr{E}\,(r + B/y^2)}{(A - ry + B/y)^2}.$$

При всех возможных значениях y (от 0 до 1) $I' > 0$. Это означает, что с увеличением y ток монотонно увеличивается, причем кривая $I\,(y)$ вогнута (рис. 12).

◆

Ф452. *Для чего делают рессоры у автомобиля?*

Движение автомобиля, как правило, сопровождается случайными толчками, связанными с неровностями дороги. Эти толчки вызывают вынужденные колебания автомобиля в целом и отдельных его частей (кузова, передней и задней осей и т. п.). На практике чаще всего приходится встречаться с вертикальными колебаниями, так называемым «подпрыгиванием». В зависимости от рельефа дороги при определенных скоростях движения автомобиля амплитуда таких колебаний может стать очень большой, возникнет резонанс.

Известно, что амплитуда вынужденных колебаний зависит от того, насколько частота этих колебаний близка к частоте ω_0 свободных колебаний системы. Чем дальше частота вынужденных колебаний от ω_0, тем меньше амплитуда колебаний. В случае колебаний кузова на рессоре

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

где k — жесткость рессоры, m — масса кузова. Чем меньше жесткость рессоры, тем меньше частота свободных колебаний. Следовательно, подбирая жесткость рессоры соответствующим образом, можно добиться того, чтобы частота толчков от неровностей дороги была намного больше ω_0. Тогда толчки не будут оказывать заметных ударов на автомобиль. Таким образом, рессоры служат для создания комфортабельности при езде на автомобиле.

З. Абарбанель

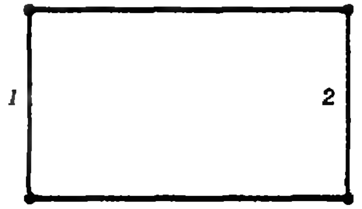
А. Земляков, Б. Ивлев

Вопросы по геометрии

На каждый из перечисленных ниже вопросов дано 5 вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых в точности один — правильный. Попробуйте найти правильные ответы на все вопросы. Сверьте свои ответы с приведенными в конце номера. Для выполнения этого задания не требуется специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы.

А. Геометрические преобразования и векторы

1 (VIII)*). Сколько существует перемещений плоскости, отображающих первый из указанных на рисунке отрезков (сторон прямоугольника) на второй (см. рисунок)?



а) Одно, б) два, в) три, г) четыре, д) бесконечно много.

2 (IX). Сколько существует перемещений пространства, отображающих данный отрезок на себя?

а) Одно, б) два, в) три, г) четыре, д) бесконечно много.

3 (VIII). Треугольники T_1 и T_2 на плоскости подобны с коэффициентом подобия 2. Сколько существует треугольников, гомотетичных T_1 с заданным центром гомотетии и конгруэнтных треугольнику T_2?

а) Один, б) два, в) три, г) бесконечно много, д) ни одного.

4 (IX). В пространстве даны два отличных от $\vec{0}$ вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Сколько существует векторов $\vec{x}$ длины 1 таких, что $\vec{x}\cdot\vec{a}=0$ и $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$?

а) Ни одного, б) один, в) два, г) бесконечно много, д) ответ зависит от $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Б. Взаимное расположение прямых и плоскостей

5 (VIII). В плоскости даны три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько в этой плоскости есть прямых, равноудаленных от данных точек?

а) Одна, б) две, в) три, г) бесконечно много, д) ни одной.

6 (IX, X). Сколько существует плоскостей, равноудаленных от четырех данных не принадлежащих одной плоскости точек?

а) Одна, б) три, в) четыре, г) семь, д) ни одной.

7 (VIII, X). Сколько существует прямых, разбивающих данный треугольник на две части равной площади?

а) Одна, б) две, в) три, г) шесть, д) бесконечно много.

8 (IX, X). Сколько существует прямых, пересекающих каждую из трех данных попарно скрещивающихся прямых?

а) Бесконечно много, б) ни одной, в) одна, г) две, д) три.

9 (IX, X). Ортогональная проекция прямого угла AOB на некоторую плоскость есть угол $A_1O_1B_1$. Какие значения может иметь величина угла $A_1O_1B_1$?

а) Только 90°, б) любое от 0° до 180°, в) любое от 0° до 90°, г) любое от 90° до 180°, д) любое от 45° до 135°.

10 (X). Плоскость пересекает куб, но не проходит ни через одну из его вершин. Сколько ребер куба может пересекать эта плоскость?

а) 3 или 4, б) от 3 до 5, в) от 3 до 6, г) от 3 до 7, д) от 3 до 10.

---

*) После номера вопроса указаны классы, на которые он рассчитан

«Квант» для младших школьников

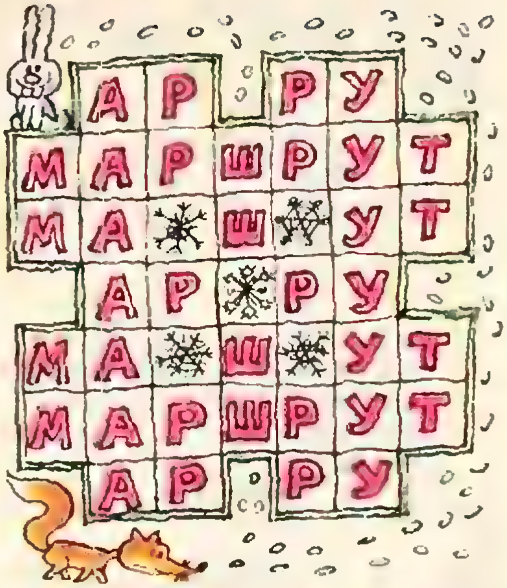
Задачи

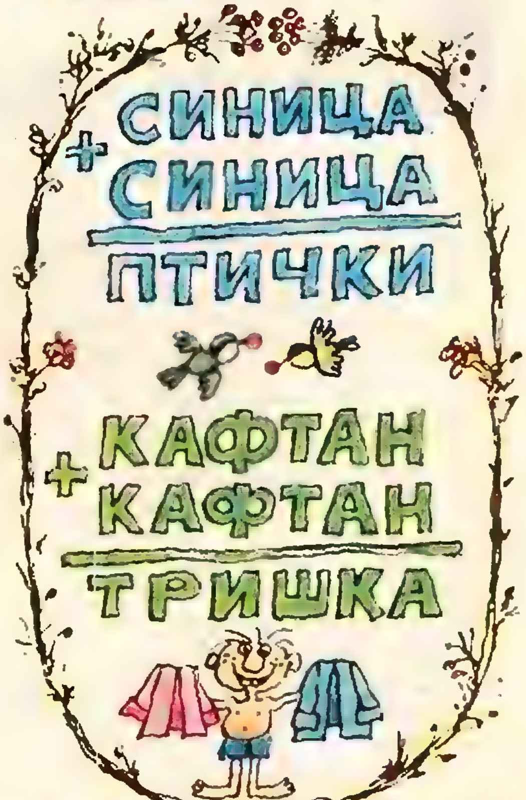
1. Из спичек сложили неверное равенство (см. рисунок). Переложите в этом равенстве одну спичку так, чтобы получить верное равенство.

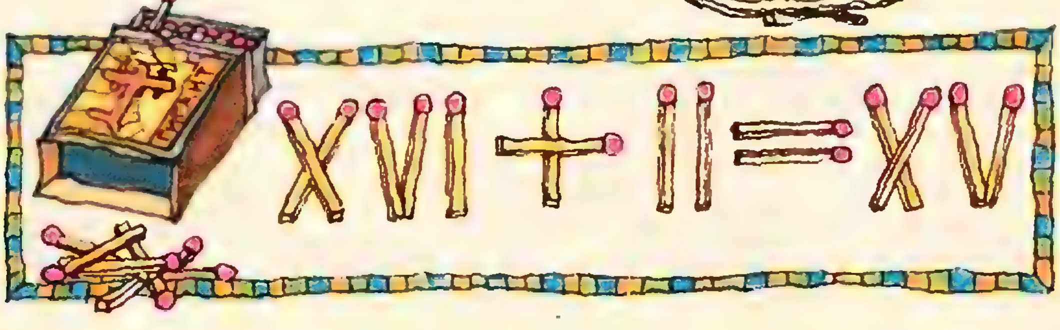
2. Сколькими способами можно прочитать слово МАРШРУТ на орнаменте, изображенном на рисунке, если начинать можно с любой буквы М, а каждую последующую букву выбирать из соседних клеток (соседними считаются клетки, имеющие либо общую сторону, либо общую вершину)?

3. В каждом из этих двух ребусов зашифрован процесс сложения столбиком. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте примеры.

4. Произведение двух двузначных чисел делится на 121 и является четырехзначным числом, в записи которого участвуют лишь две цифры, причем каждая из них по два раза. Найдите эти числа.


А Р Р У
М А Р Ш Р У Т
М А Ш У Т
А Р Р У
М А Ш У Т
М А Р Ш Р У Т
А Р Р У


+ СИНИЦА
СИНИЦА
ПТИЧКИ
+ КАФТАН
КАФТАН
ТРИШКА



Е. Семенов

ДОКАЗАТЬ МОЖНО? — ДОКАЗАТЬ НЕЛЬЗЯ!

> — Пап, а, пап! А белка кушает кедровые орешки?
>
> — Да, доченька.
>
> — А кедр — это такая травка?
>
> — Ну что ты, Танюша! Кедр — это дерево!
>
> — Если бы моя белка была не кукольной, а настоящей, и взяла бы ее в лес, и если эта белка на какое-нибудь дерево запрыгнула,— значит, это кедр.
>
> (Из разговора маленькой Танюши)

Трудно сказать, с какого возраста мы начинаем заниматься доказательствами. Может, с того времени, когда начинаем слушать и понимать сказки, когда свои куклы превращаем в героев услышанных сказок, перемешивая детскую фантазию «со взрослой былью». Примером может служить только что приведенный разговор. Вы, наверное, заметили, что в разговоре маленькой Тани содержится (может быть, первое в ее жизни) доказательство. Смотрите, она считает, что:

1) *белка кушает кедровые орехи*;
2) *кедр — это дерево*;
3) *белка влезла на данное дерево*.

На этом основании Таня делает вывод, что данное дерево — кедр. Правда, Танин вывод ошибочен. Чтобы этот вывод был верен, нужно еще одно условие:

4) *если дерево — не кедр, то белка на такое дерево не полезет* (иначе: *из всех деревьев белка влезает только на кедр*).

Посмотрим, однако, на Танино доказательство с другой стороны. В ее распоряжении были три перечисленных условия. Можно ли на их основе, не пользуясь никакими другими условиями, доказать полученный вывод? — Конечно, нет! А опровергнуть? — Тоже нет! Может оказаться, что дерево, на которое влезла белка,— кедр, и тогда вывод верен, но с таким же успехом белка может влезть на березу, и тогда вывод неверен. Математик сказал бы, что Танино заключение независимо от ее трех условий.

И все-таки... и в более старшем возрасте мы тоже иногда допускаем аналогичные ошибки. Сомневаетесь? Тогда послушайте историю, которая произошла с нашим славным шестиклассником Степой Мошкиным и его друзьями при изучении ими геометрии.

1. Степа и его друзья ищут доказательство

—Третье свойство расстояний подозрительно! Почему оно дается без доказательства? Кажется, его можно доказать с помощью первых двух свойств расстояний! — глубокомысленно произнес Степа.

На другой день этим занимались все друзья Степы, увлеченные его идеей. Их усилия не были напрасными: вскоре были найдены сразу несколько доказательств.

Прежде всего напомним читателям свойства расстояний. Их, как вы помните, три.

1. *Расстояние от точки* A *до точки* B *положительно, если они различны, и равно нулю, если они совпадают:*

$$|AB|>0, \text{ если } A\neq B, \text{ и } |AB|=0, \text{ если } A=B.$$

2. *Расстояние от точки* A *до точки* B *равно расстоянию от точки* B *до точки* A:

$$|AB|=|BA|.$$

3. *Для любых трех точек* A, B, C *расстояние от* A *до* C *не больше* (меньше или равно) *суммы расстояний от* A *до* B *и от* B *до* C:

$$|AC|\leqslant|AB|+|BC|.$$

А теперь познакомьтесь с одним из доказательств Степы и его друзей.

Надо доказать, что для любых трех точек A, B, C *выполняется такое неравенство:* $|AC|\leqslant|AB|+|BC|$. *Допустим, что это не так. Пусть*

$$|AC|>|AB|+|BC|. \qquad (*)$$

Так как A, B, C *— любые три точки, то пусть, например, точка* B *совпадает с* C, *точка* A *отлична от* B: $B=C$, $A\neq B$. *Поскольку в этом случае* $|BC|=0$ (*по свойству* 1), *то из* (*) *получаем, что* $|AC|>|AB|$. *С другой стороны, поскольку точки* B *и* C *совпадают,* $|AC|=|AB|$. *Пришли к противоречию:* $|AC|>|AB|$ *и* $|AC|=|AB|$. *Следовательно, допущение, что* $|AC|>|AB|+|BC|$, *неверно. Остается, естественно, что* $|AC|\leqslant|AB|+|BC|$, *то есть свойство 3 выполняется!*

Степа Мошкин и его друзья ликовали. Доказательство третьего свойства расстояний найдено! Причем это доказательство использует только первое свойство! Отсюда — новая идея: а нельзя ли доказать и второе свойство расстояний с помощью первого? «Математическое общество» Степы Мошкина с удвоенной энергией принялось за работу. Неизвестно, когда и чем бы это все кончилось, если бы не Петр Иванович.

2. Доказательства не существует!

На очередном уроке по геометрии Степа и его друзья познакомили с найденными доказательствами Петра Ивановича. Тот внимательно выслушал их и сказал.

— Знаете, в каждом из ваших доказательств содержится ошибка. Но самое главное не в этом. Я мог дать такой ответ, не знакомясь с вашими доказательствами. С помощью первых двух свойств расстояний третье свойство вы не докажете!

— Как! — воскликнул Степа. — Этого быть не может! А если бы до-

казательство было сделано другими?... Ну, например, десятиклассниками?... Или каким-нибудь ученым, академиком?!

— Никакой ученый, друзья, этим заниматься не станет, потому что он наперед знает о невозможности такого доказательства. И десятиклассник не будет делать таких попыток, если он достаточно хорошо знает математику.

Все укоризненно посмотрели на Степу. Надо же было ему вовлечь их в это безнадежное дело. Столько времени затрачено! И вот такой печальный конец. Не могли догадаться обратиться сразу к Петру Ивановичу!

— Да вы не расстраивайтесь! — сказал Петр Иванович. — Вы не одиноки в своей «неудаче». Аксиому параллельности Евклида доказывали в течение 2 тысяч лет многие известные и талантливые математики мира. Даже Николай Иванович Лобачевский сначала пытался это сделать. И лишь в прошлом веке было установлено, что доказать эту аксиому на основе других аксиом Евклида невозможно. А теперь сравните несколько дней ваших трудов с трудом продолжительностью в 2 тысячи лет! Вы видите, насколько скромны ваши усилия по сравнению с усилиями многих математиков, отдавших на доказательство аксиомы параллельности всю свою жизнь?

3. Доказать невозможно? — Почему?

— Но как, каким образом можно узнать, что доказательство невозможно? — заговорили сразу все ученики класса, даже те, кто не искал доказательства третьего свойства расстояний.

— Прежде всего, — начал Петр Иванович, — не считайте, что расстояние — это обязательно нечто, полученное с помощью масштабной линейки. Ведь в аксиомах расстояний об этом ничего не сказано! И почему бы не считать, что расстояние можно измерять, скажем, в градусах, с помощью транспортира? Разве аксиомы расстояния запрещают это делать? Да и вы нередко измеряете расстояние в минутах — от дома до школы 10 минут. Так вот, сейчас мы построим такую модель, в которой свойства 1 и 2 расстояний будут выполняться, а свойство 3 выполняться не будет.

Представьте себе такую фантастическую ситуацию. Город (плоскость) заселен крайне ленивыми существами. Они не ходят на работу, в кино, в гости, друг к другу, они лишь звонят друг другу по телефону. Причем из точки A в точку B и из B в A можно дозвониться за 3 минуты. В любую другую точку из A и B можно дозвониться за 1 минуту. Из любой точки, отличной от A и B, в любую другую точку можно дозвониться тоже за 1 минуту. А из любой точки в нее саму можно «дозвониться» за нулевое время.

Для таких лентяев расстоянием от одной точки до другой является время, за которое можно дозвониться из первой точки во вторую.

Проверьте выполнение свойств расстояний в этом фантастическом городе. Видите? Первое и второе выполняются, а третье — нет. Например, $|AB| > |AC| + |CB|$, так как $|AB| = 3$, $|AC| + |CB| = 1+1=2$.

— Ну вот, а теперь можно сделать и вывод, — сказал учитель.— Что значит «доказать третье свойство расстояний с помощью первых двух свойств»?

— Это значит доказать, что если свойства 1 и 2 выполняются, то и свойство 3 будет выполняться, —ответил Степа сразу за всех.

— А в рассмотренной модели свойства 1 и 2 выполняются, а свойство 3 не выполняется. Значит, доказать свойство 3 с помощью свойств 1 и 2 невозможно! Свойство 3 независимо от свойств 1 и 2.

4. Новая модель

Вам, наверное, не терпится узнать, доказали ли Степа и его друзья второе свойство расстояний с помощью первого? И существует ли такое доказательство?

После полученного «урока» «математическое общество» Степы Мошкина стало действовать осмотрительнее. Его члены поняли, что занятие математикой означает не только поиск доказательств, но и выяснение: а существуют ли они? Сначала ребята решили попытаться построить модель, в которой первое свойство расстояний выполнялось бы, а второе — нет. Удача означала бы, что доказательства второго свойства на основе первого не существует. И им повезло. Вот какую «телефонную» модель они построили: $|AB| = 2$, $|BA| = 1$, $|AC| = |CA| = |BC| = |CB| = 1$. Очевидно, что первое свойство расстояний для всех точек в такой модели выполняется. Однако для точек A и B второе свойство не выполняется: $|AB| \neq |BA|$. Следовательно, второе свойство расстояний независимо от первого свойства.

5. Эпилог

Вот так закончилась еще одна история, происшедшая с шестиклассником Степой Мошкиным. Вы думаете, после нее он угомонился? Ошибаетесь! Степа приготовил для вас задания!

Упражнения

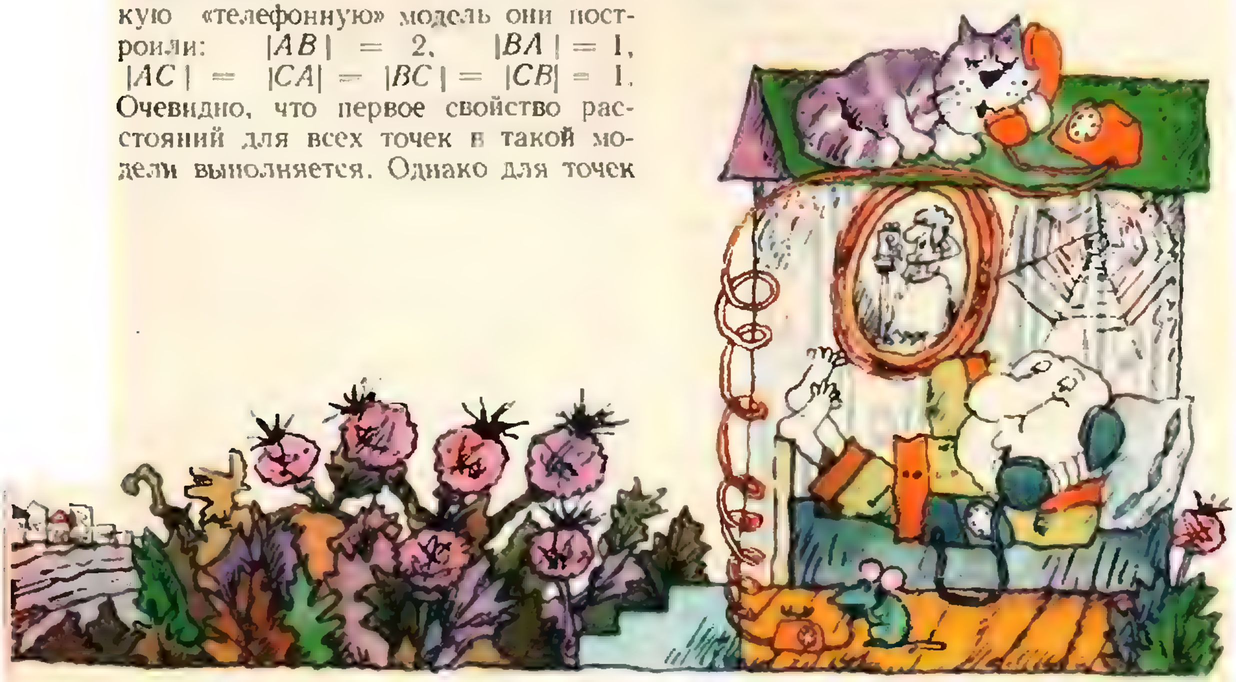
1. Найдите ошибку в «доказательстве» третьего свойства расстояний.

2. Выясните, выполняется ли третье свойство расстояний в модели, построенной Степой и его друзьями.

3. Возьмите две различные точки A и B. Будем считать, что $|AB|=1$, $|BA|=3$. Расстояние между любыми другими несовпадающими точками считайте равным 1, между совпадающими — 0. Докажите с помощью этой модели независимость второго и третьего свойства расстояний от первого.

4. Докажите путем построения соответствующей модели, что второе свойство расстояний независимо от третьего свойства.

5. Изобразите треугольник ABC такой, что $\hat{C}=100^\circ$, $\hat{A}=30^\circ$, $\hat{B}=50^\circ$. За расстояние между двумя вершинами треугольника примем величину угла при третьей вершине: $|AB|=100$, $|AC|=50$, $|BC|=30$. Расстояние между любыми другими различными точками будем считать равным 1, расстояние между совпадающими точками будем считать равным 0. Обоснуйте с помощью этой модели невозможность доказательства третьего свойства с помощью первых двух свойств расстояний.



М. Маринчук

Первый закон термодинамики

В термодинамике и молекулярной физике изучаются свойства макроскопических тел, то есть тел, состоящих из большого числа частиц (молекул, атомов и т. п.). Такие тела или их группы обычно называют термодинамическими системами.

Все макроскопические тела наряду с механической энергией обладают еще и внутренней энергией, обусловленной их внутренним строением и характером движения частиц, входящих в состав этих тел. При тепловых явлениях механическая энергия системы чаще всего остается неизменной, поэтому для описания подобных явлений необходимо знать лишь внутреннюю энергию U этой системы. В молекулярной физике под внутренней энергией понимают сумму кинетической энергии частиц, входящих в состав данного тела, и потенциальной энергии взаимодействия между этими частицами. Это означает, что внутренняя энергия может быть определена лишь с точностью до некоторой постоянной U_0*). Но поскольку физический смысл имеет только изменение энергии (с ним связана совершенная работа), то конкретное значение этой постоянной несущественно.

Из определения внутренней энергии системы следует, что она определяется скоростями частиц и расстояниями между ними в данный момент времени и не зависит от значений этих величин в предыдущие моменты времени. Другими словами, внутренняя энергия системы зависит только от состояния, в котором она находится в данный момент времени, и не зависит от состояний, из которых она перешла в данное. (По этой причине внутреннюю энергию системы, так же как и другие физические величины, обладающие этим же свойством, называют функцией состояния.) Это означает, что при переходе системы из какого-то состояния *1*, в котором внутренняя энергия принимала значение U_1, в другое состояние *2*, где внутренняя энергия равна U_2, изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ зависит только от самих состояний *1* и *2* и не зависит от способа перехода системы из одного состояния в другое.

Как можно изменить внутреннюю энергию системы? Очевидно, для этого надо изменить ее состояние. Это можно сделать двумя, существенно отличающимися друг от друга, способами. Один из них — совершение работы над системой, второй — теплообмен с окружающей средой.

Первый закон термодинамики, установленный на основании многочисленных опытов, утверждает, что изменение внутренней энергии ΔU системы равно сумме совершаемой над системой работы A' внешних сил и количества теплоты Q, переданного системе извне:

$$\Delta U = A' + Q.$$

Этот закон можно сформулировать несколько иначе, если вместо работы A' внешних сил говорить о работе A самой системы. Поскольку $A' = -A$, то

$$\Delta U = -A + Q, \text{ или } Q = \Delta U + A$$

— полученное системой количество теплоты равно сумме изменения ее внутренней энергии и работы, совершаемой системой над внешними телами. Первый закон термодинамики — это конкретная формулировка закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам.

---

*) Вообще говоря, внутренняя энергия тела включает в себя также и внутренние энергии частиц, входящих в состав данного тела. Это, например, кинетическая энергия электронов и потенциальная энергия взаимодействия электронов между собой и с ядрами атомов, энергия связи нуклонов в ядрах и др. Однако в явлениях, изучаемых в молекулярной физике, частицы, из которых состоят тела, остаются неизменными, следовательно, внутренняя энергия этих частиц постоянна. Это позволяет включить ее в вышеуказанную постоянную.

В качестве примера конкретной термодинамической системы рассмотрим идеальный газ. Его состояние можно описать пятью параметрами: m, μ, p, V, T. Здесь m — масса газа, μ — его молярная масса, p — давление газа, V — занимаемый объем и T — температура газа. Все эти параметры связаны уравнением состояния идеального газа — уравнением Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Внутренняя энергия идеального газа (кинетическая энергия теплового движения его молекул) тоже может быть выражена через те же параметры. Так, для одноатомного идеального газа

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu} RT = \frac{3}{2} pV.$$

Отсюда

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

Напомним, что работу, совершаемую идеальным газом при любых процессах, удобнее всего определять графически (рис. 1): она численно равна площади фигуры, ограниченной графиком соответствующего процесса на pV-диаграмме, осью V и отрезками, соответствующими начальному и конечному давлениям газа.

Такой метод определения работы позволяет наглядно продемонстрировать очень важное ее свойство. Пусть газ переходит из состояния *1* в состояние *2*. Этот переход можно осуществить разными способами, например, по пути *1 a 2* или *1 b 2* (рис. 2). Как видно из рисунка 2, площади под графиками *1 a 2* и *1 b 2* отличны друг от друга. Это означает, что работа, совершаемая газом при переходе из одного состояния в другое, зависит не только от этих состояний, но и от способа перехода из начального состояния в конечное. (Другими словами, работа в термодинамике не является функцией состояния.)

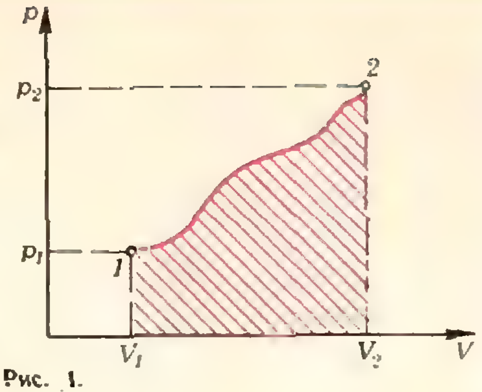


Рис. 1.

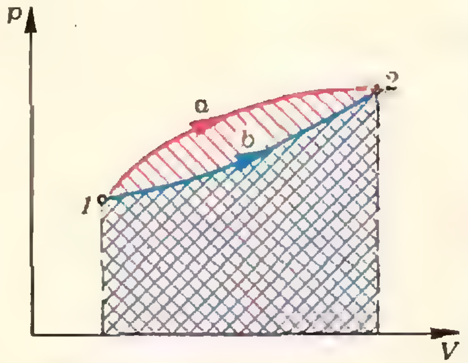


Рис. 2.

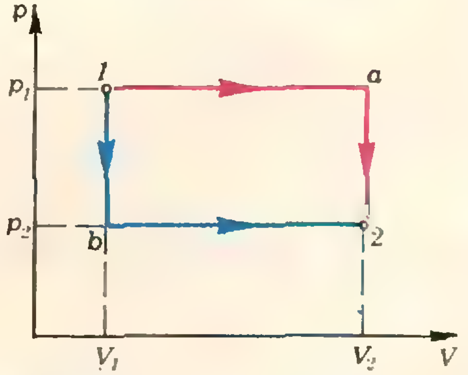


Рис. 3.

Рассмотрим следующие конкретные задачи:

Задача 1. *Газ переходит из состояния 1, характеризуемого параметрами* $p_1 = 2\cdot10^5$ *Па и* $V_1 = 0{,}1$ *м*^{3}, *в состояние 2, где его параметры равны соответственно* $p_2 = 10^5$ *Па и* $V_2 = 0{,}4$ *м*^{3}, *двумя разными способами (рис. 3). Найти работу газа в обоих случаях.*

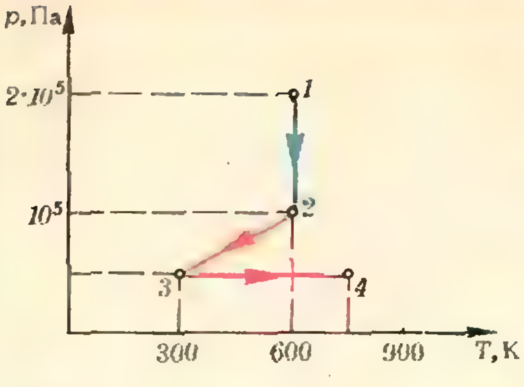


Рис. 4.

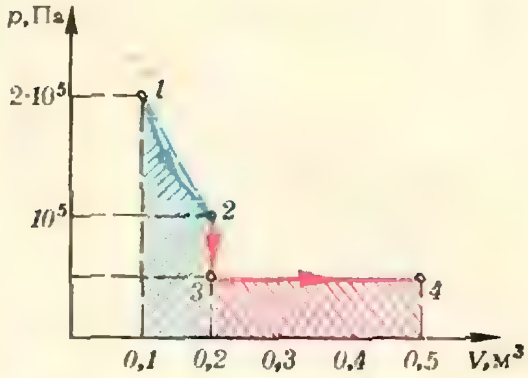


Рис. 5.

В первом случае, когда газ переходит из состояния 1 в состояние 2 по пути 1 a 2, его работа численно равна площади под графиком 1 a 2:

$$A_{1a2} = p_1(V_2 - V_1) = 6\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Аналогично во втором случае работа газа численно равна площади под графиком 1 b 2:

$$A_{1b2} = p_2(V_2 - V_1) = 3\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 2. *4 моля газа совершают процесс, изображенный на рисунке 4. На каком участке работа газа максимальна?*

Прежде всего нарисуем график данного процесса в координатах p, V (рис. 5). Для этого из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем объем газа в точках 1, 2, 3 и 4:

$$V_1 = 0{,}1 \text{ м}^3,\ V_2 = 2V_1 = 0{,}2 \text{ м}^3,$$
$$V_3 = V_2 \text{ и } V_4 = 0{,}5 \text{ м}^3.$$

Из рисунка 5 сразу следует, что на участке 2—3 работы не совершается (процесс изохорический):

$$A_{2-3} = 0.$$

На участке 3—4 (при изобарическом процессе) работа равна площади соответствующего прямоугольника:

$$A_{3-4} = p_3(V_4 - V_3) = 1{,}5\cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Оценим теперь работу при изотермическом процессе 1—2. Очевидно, что площадь под участком 1—2 изотермы меньше площади трапеции 1—2—V_2—V_1. Эта последняя равна 1,5×10^4 Дж, то есть равна площади прямоугольника, соответствующего участку 3—4. Таким образом,

$$A_{1-2} < A_{3-4} \quad \text{и} \quad A_{2-3} = 0.$$

Следовательно, работа газа максимальна на участке 3—4.

Задача 3. *Газ, занимающий объем $V_1 = 2$ м³ при давлении $p_1 = 4\cdot 10^5$ Па, совершает круговой процесс (цикл), состоящий из нескольких этапов. Сначала газ изохорически охлаждается до температуры, при которой его давление равно $p_2 = 10^5$ Па. Затем он изобарически охлаждается до состояния, из которого возвращается в начальное состояние таким образом, что его давление изменяется с изменением объема по закону: $p = \alpha V$ (α — постоянная величина). Нарисовать график данного кругового процесса на pV-диаграмме и найти совершенную газом работу.*

Как следует из условия задачи, состояния газа 1 и 3 изображаются точками, лежащими на прямой $p = \alpha V$, проходящей через начало координат (рис. 6). Это означает, что

$$p_1 = \alpha V_1 \quad \text{и} \quad p_3 = \alpha V_3.$$

С учетом того, что $p_3 = p_2$, получаем

$$V_3 = \frac{p_2 V_1}{p_1} = 0{,}5 \text{ м}^3.$$

Работа при круговом процессе численно равна площади фигуры, ограниченной графиком этого процесса, в данном случае — площади треугольника 1 2 3:

$$A = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)(V_1 - V_3) =$$
$$= \frac{(p_1 - p_2)^2 V_1}{2p_1} = 2{,}25\cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Теперь поговорим немного о теплоемкости идеального газа. По определению удельная теплоемкость

$$c = \frac{Q}{m\,\Delta T}.$$

где Q — сообщенное газу количество теплоты, m — масса газа и ΔT — изменение его температуры. Согласно первому закону термодинамики $Q = \Delta U + A$, тогда $c = \frac{\Delta U + A}{m\Delta T}$. Как уже говорилось, изменение внутренней энергии не зависит от способа изменения состояния газа (то есть от условий его нагревания), а работа — зависит. Следовательно, и удельная теплоемкость идеального газа зависит от условий, в которых происходит его нагревание. Например, если газ нагревается изохорически, работа газа $A = 0$ и удельная теплоемкость газа при постоянном объеме

$$c_V = \frac{\Delta U}{m\Delta T}.$$

Если же газ нагревается изобарически, $A = p\Delta V = \frac{m}{\mu}R\Delta T$, поэтому удельная теплоемкость газа при постоянном давлении

$$c_p = \frac{\Delta U}{m\Delta T} + \frac{A}{m\Delta T} = c_V + \frac{R}{\mu} > c_V.$$

Это объясняется тем, что при изобарическом нагревании газа только часть полученного количества теплоты идет на увеличение внутренней энергии газа (на увеличение его температуры), часть же превращается в механическую работу. При изохорическом нагревании все количество теплоты расходуется на увеличение температуры газа. Следовательно, для увеличения температуры на один градус одной и той же массы газа при постоянном давлении требуется большее количество теплоты, чем при постоянном объеме. Это и означает, что

$$c_p > c_V.$$

Для примера рассмотрим такую задачу:

З а д а ч а 4. *Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении для аргона* ($\mu = 40\cdot10^{-3}$ *кг/моль*).

По определению

$$c_V = \frac{\Delta U}{m\Delta T} \quad \text{и} \quad c_p = c_V + \frac{R}{\mu}.$$

Аргон — одноатомный газ, и для него

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T.$$

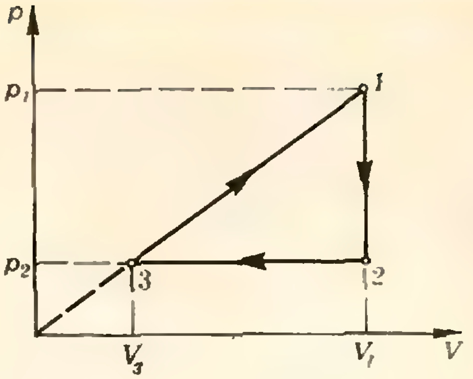


Рис. 6.

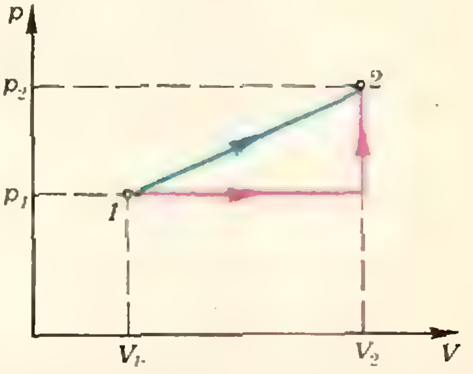


Рис. 7.

Тогда

$$c_V = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu} \approx 311 \text{ Дж/(кг·К)}$$

и

$$c_p = c_V + \frac{R}{\mu} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu} \approx$$
$$\approx 519 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Разберем еще несколько задач:

З а д а ч а 5. *Некоторое количество одноатомного газа занимает объем* $V_1 = 0{,}1$ *м*^{3} *при давлении* $p_1 = 2\cdot10^5$ *Па. Если газ переходит из этого состояния в конечное состояние 2 сначала при изобарическом, а затем при изохорическом нагревании, то он совершает работу* $A_1 = 4\cdot10^4$ *Дж. Если же переход осуществляется непосредственно по прямой 1—2, то работа газа* $A_2 = 5\cdot10^4$ *Дж. Найти давление и объем газа в конечном состоянии 2, а также количества теплоты, полученные газом в обоих случаях.*

Изобразим указанные процессы на pV-диаграмме (рис. 7). Работа газа в первом процессе равна

$$A_1 = p_1(V_2 - V_1),$$

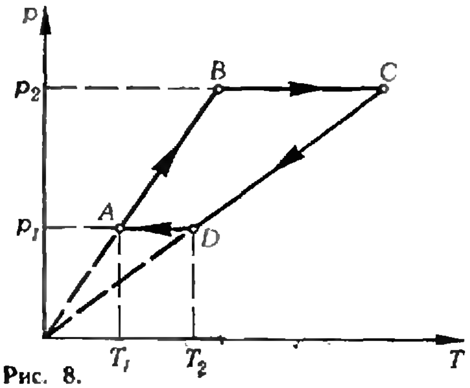


Рис. 8.

откуда

$$V_2 = V_1 + \frac{A_1}{p_1} = 0{,}3 \ \text{м}^3.$$

Во втором случае газ совершает работу

$$A_2 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_2 - V_1),$$

откуда

$$p_2 = \frac{2A_2}{V_2 - V_1} - p_1 = 3 \cdot 10^5 \ \text{Па}.$$

Изменение внутренней энергии одинаково для обоих случаев и равно для одноатомного газа

$$\Delta U = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) =$$

$$= 1{,}05 \cdot 10^4 \ \text{Дж}.$$

Тогда окончательно, согласно первому закону термодинамики,

$$Q_1 = A_1 + \Delta U = 5{,}05 \cdot 10^4 \ \text{Дж}$$

и

$$Q_2 = A_2 + \Delta U = 6{,}05 \cdot 10^4 \ \text{Дж}.$$

Задача 6. *Найти работу, которую совершает гелий массой $m = 0{,}2$ кг в процессе адиабатного расширения, если он при этом охладился от $T_1 = 300K$ до $T_2 = 268$ K. Молярная масса гелия $\mu = 4 \times 10^{-3}$ кг/моль.*

При адиабатном процессе ($Q=0$) работа газа равна изменению его внутренней энергии, взятому с обратным знаком:

$$A = -\Delta U.$$

Для гелия (гелий — одноатомный газ)

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R\Delta T =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1).$$

Отсюда

$$A = -\frac{3}{2}\frac{m}{\mu}R(T_2 - T_1) \approx 2 \cdot 10^4 \ \text{Дж}.$$

Упражнения

1. Газ был нагрет изобарически от $T_1 = 285$ K до $T_2 = 360$ K. Определить совершенную газом работу, если его начальное давление и объем равны соответственно $p_1 = 1{,}9 \cdot 10^5$ Па и $V_1 = 6$ м³.

2. Найти работу, совершаемую одним молем идеального газа в круговом процессе, изображенном на рисунке 8, если $p_2/p_1 = 2$, $T_1 = 280$ K, $T_2 = 360$ K.

3. В цилиндре находится азот массой $m = 0{,}7$ кг при температуре $T = 291$ K. До какой температуры необходимо изобарически нагреть азот, чтобы работа расширения равнялась $A = 4{,}15 \cdot 10^4$ Дж?

4. Какое количество теплоты поглощает $m = 0{,}3$ кг гелия при нагревании от 293 K до 373 K при постоянном давлении? Каков прирост его внутренней энергии и какую работу он совершает?

5. Неон нагревается при постоянном давлении $p = 1{,}6 \cdot 10^5$ Па так, что его объем увеличивается на $\Delta V = 0{,}6$ м³. Определить изменение внутренней энергии неона, совершаемую при расширении работу, а также полученное им количество теплоты.

6. До какой температуры нагрелся гелий массой $m = 0{,}12$ кг, находящийся при температуре $T_1 = 295$ K, в результате адиабатного сжатия, если при этом была затрачена извне работа $A' = 4150$ Дж?

7. Баллон емкостью $V = 1{,}5$ м³ содержит одноатомный газ при температуре $T_1 = 300$ K и давлении $p_1 = 1{,}8 \cdot 10^5$ Па. Каковы будут температура и давление газа, если ему сообщить количество теплоты $Q = 5{,}4 \cdot 10^4$ Дж?

8. Идеальный одноатомный газ, занимавший при давлении $p_1 = 10^5$ Па объем $V_1 = 2$ м³, расширяется таким образом, что график процесса расширения изображается на pV-диаграмме отрезком прямой. Найти объем и давление газа в конце расширения, если известно, что газ в этом процессе получил количество теплоты $Q = 3{,}5 \cdot 10^5$ Дж и совершил работу $A = 1{,}1 \cdot 10^5$ Дж.

И. Габович, П. Горнштейн

Скалярное умножение векторов

Скалярное умножение векторов является одним из основных понятий векторной алгебры. Его свойства широко используются при доказательстве теорем и решении задач.

В этой статье мы проиллюстрируем применение скалярного умножения векторов к решению геометрических задач, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах в разных вузах нашей страны.

Определение и свойства скалярного умножения векторов изложены в пособии «Геометрия 9» под редакцией З. А. Скопеца. Поэтому мы не будем останавливаться на теории этого вопроса. Перейдем к решению задач.

Задача 1. (МФТИ, 1977). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой, проходящей через точки C_1 и B, а вершины P и Q — на прямой A_1C. Найти:

1) объем призмы;

2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ.

Решение. Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$ (рис. 1). Обозначим $\overrightarrow{CA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{h}$ и $|\vec{h}| = h$. Из условия следует, что $|\vec{u}| = |\vec{v}| = a$.

Так как в правильном тетраэдре (как, впрочем, и во всякой правильной треугольной пирамиде) любые два скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны, то $\overrightarrow{CA_1} \perp \overrightarrow{BC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{CA_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$. Но в наших обозначениях

$$\overrightarrow{CA_1} = \vec{u} + \vec{h} \quad \text{и} \quad \overrightarrow{BC_1} = \vec{h} - \vec{v},$$

следовательно,

$$(\vec{u} + \vec{h}) \cdot (\vec{h} - \vec{v}) = 0,$$

$$\vec{u} \cdot \vec{h} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{h}^2 - \vec{h} \cdot \vec{v} = 0.$$

Учитывая, что $\vec{h} \perp \vec{u}$, $\vec{h} \perp \vec{v}$ и $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{\pi}{3}$, получаем

$$h^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \quad \text{или} \quad h = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

откуда находим объем призмы $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Пусть K и L — середины отрезков PQ и MN соответственно. Найдем $|KL|$. Заметим, что $|KL|$ является общим перпендикуляром ребер PQ и MN (докажите сами), то есть $|KL|$ — расстояние между скрещивающимися прямыми CA_1 и BC_1.

Существует несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми. Мы определим искомое расстояние с помощью скалярного умножения. При этом, как

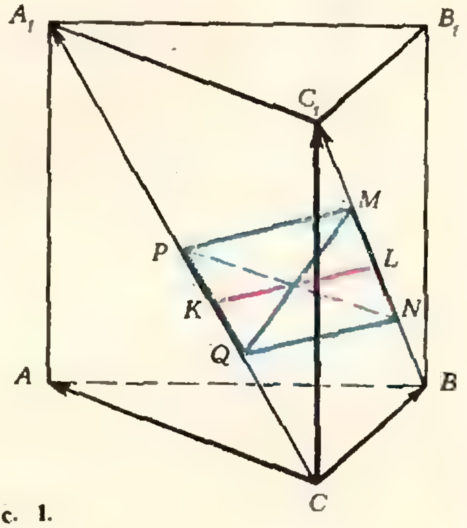


Рис. 1.

мы увидим, не будет необходимости строить общий перпендикуляр. Важен лишь факт его существования. Так как K и L лежат на прямых CA_1 и BC_1 соответственно, имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CK} &= x\overrightarrow{CA_1} = x\vec{u} + x\vec{h},\\ \overrightarrow{BL} &= y\overrightarrow{BC_1} = y\vec{h} - y\vec{v}.\end{aligned} \qquad (*)$$

Ясно (см. рис. 1), что

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL} = -\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BL} = -x\vec{u} - x\vec{h} + \vec{v} + y\vec{h} - y\vec{v} = -x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}.$$

Как указывалось выше, $|KL|$ является общим перпендикуляром скрещивающихся прямых CA_1 и BC_1. Поэтому

$$\begin{cases}\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{CA_1} = 0,\\ \overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{BC_1} = 0\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}\left(-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}\right) \times \left(\vec{u} + \vec{h}\right) = 0,\\ \left(-x\vec{u} + (1-y)\vec{v} + (y-x)\vec{h}\right) \times \left(\vec{h} - \vec{v}\right) = 0.\end{cases}$$

После выполнения элементарных преобразований получаем

$$x = \frac{1}{3} \text{ и } y = \frac{2}{3}.$$

Теперь уже можно определить $|KL|$ через скалярный квадрат вектора KL:

$$\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{h},$$

$$\overrightarrow{KL}^2 = |KL|^2 = \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{9}\cdot\frac{a^2}{2} - 2\cdot\frac{1}{9}a^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{a^2}{6},$$

$$|KL| = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Замечание. На рис. 1 правильный тетраэдр $MNPQ$ изображен так, что середины K и L скрещивающихся ребер MN и PQ лежат на отрезках A_1C и BC_1. В условии же задачи сказано, что эти точки лежат на прямых A_1C и BC_1. Это мы учли в формулах (*), где x и y могут быть больше 1 или меньше 0. Но вычисления показали, что $x = {}^1/_3$, $y = {}^2/_3$, то есть точки K и L действительно лежат на соответствующих отрезках, как показано на рис. 1.

Задача 2 (МГУ, 1977). Основанием треугольной пирамиды $RHPQ$ является равнобедренный прямоугольный треугольник HPQ, гипотенуза которого PQ равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро RH перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Найти угол и расстояние между прямыми RF и HN, где F — середина $[HP]$ и N — середина $[PQ]$.

Решение. Выполним параллельный перенос прямой HN, переводящий ее в прямую H_1N_1, проходящую через точку F (рис. 2). Обозначим $\widehat{RFH} = \varphi$, $\widehat{HFH_1} = \beta$ и $RFH_1 = \gamma$. Из условия задачи непосредственно следует, что

$$\varphi = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Определим искомый угол γ с помощью формулы

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cdot\cos\beta \qquad (1)$$

(см. «Геометрия 9», § 37). Получим

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}; \quad \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

Определим теперь расстояние между прямыми RF и HN. Пусть $[AB]$ — их общий перпендикуляр. Рассмотрим векторы: $\overrightarrow{HP}$, $\overrightarrow{HQ}$, $\overrightarrow{HR}$, $\overrightarrow{RF}$, $\overrightarrow{RA}$,

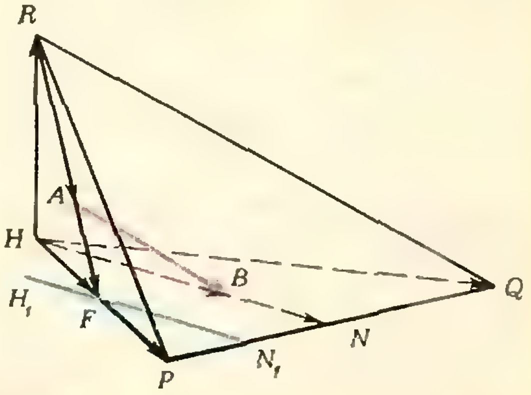


Рис. 2.

$\overrightarrow{HN}$ и $\overrightarrow{AB}$. Обозначим: $\overrightarrow{HP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{HQ} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{HR} = \vec{r}$. Остальные векторы выразим через $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Очевидно, что $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$ и $|\vec{r}| = 1$.

Пусть

$$|RA| = x\,|RF|,$$
$$|HB| = y\,|HN|.$$

Тогда

$\overrightarrow{RA} = x\overrightarrow{RF}$ и $\overrightarrow{HB} = y\overrightarrow{HN}$.

Очевидно, что $\overrightarrow{RF} = \frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r}$ и $\overrightarrow{HN} = \frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}$ ($[HN]$ — медиана в треугольнике HPQ). Поэтому

$$\overrightarrow{RA} = \frac{x}{2}\vec{p} - x\vec{r},$$
$$\overrightarrow{HB} = \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q}.$$

Выразим теперь $\overrightarrow{AB}$ через векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RH} + \overrightarrow{HB} =$$
$$= -\overrightarrow{RA} - \overrightarrow{HR} + \overrightarrow{HB} =$$
$$= -\frac{x}{2}\vec{p} + x\vec{r} - \vec{r} + \frac{y}{2}\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} =$$
$$= \frac{1}{2}(y - x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x - 1)\vec{r}.$$

Так как $[AB] \perp [RF]$ и $[AB] \perp [HN]$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{RF} = 0$ и $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HN} = 0$. Составляем систему

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(y - x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x - 1)\vec{r}\right) \times \\ \qquad \times \left(\frac{1}{2}\vec{p} - \vec{r}\right) = 0, \\ \left(\frac{1}{2}(y - x)\vec{p} + \frac{y}{2}\vec{q} + (x - 1)\vec{r}\right) \times \\ \qquad \times \left(\frac{1}{2}\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}\right) = 0. \end{cases}$$

Из этой системы, учитывая, что векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, и $\vec{r}$ взаимно перпендикулярны и $|\vec{p}| = |\vec{q}| = 2$, а $\vec{r} = 1$, находим, что $x = \frac{2}{3}$ и $y = \frac{1}{3}$.

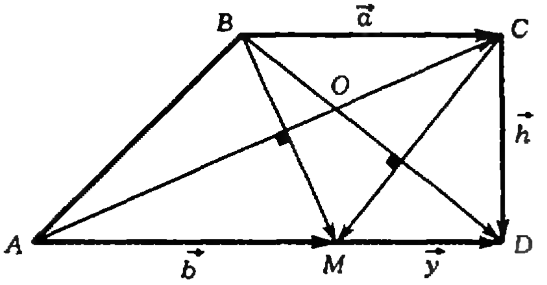


Рис. 3.

Найдем теперь $|AB|$:

$$\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{6}\vec{p} + \frac{1}{6}\vec{q} - \frac{1}{3}\vec{r},$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = \frac{1}{36}\cdot 4 + \frac{1}{36}\cdot 4 + \frac{1}{9} = \frac{1}{3},$$

$$|AB| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задача 3 (НГУ, мехмат, 1974). В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основанию AD, $|BC| = a$, $|AD| = b$, $(a < b)$. На основании AD существует такая точка M, что $[MB]$ перпендикулярен $[AC]$, а $[MC]$ перпендикулярен $[BD]$. Найти высоту трапеции.

Решение. Положим $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CD} = h$ и $\overrightarrow{MD} = \vec{y}$ (рис. 3). Тогда $\overrightarrow{BD} = \vec{a} + \vec{R}$, $\overrightarrow{CM} = \vec{h} - \vec{y}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{h}$ и $\overrightarrow{BM} = \vec{a} + \vec{h} - \vec{y}$. Так как векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярны, то $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$, откуда $(\vec{a} + \vec{h}) \cdot (\vec{h} - \vec{y}) = 0$ или

$$\vec{a}\,\vec{h} - \vec{a}\,\vec{y} + \vec{h}^2 - \vec{h}\cdot\vec{y} = 0 \qquad (2).$$

Так как вектор $\vec{h}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{y}$, то $\vec{a}\cdot\vec{h} = \vec{h}\cdot\vec{y} = 0$. Поэтому из (2) имеем

$$-\vec{a}\cdot\vec{y} + h^2 = 0. \qquad (3)$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{y}$ коллинеарны и сонаправлены, то $\vec{a}\cdot\vec{y} = ay$. Поэтому из (3) следует, что

$$h^2 = ay. \qquad (4)$$

Так как векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BM}$ перпендикулярны. то $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BM} = 0$ или

$$(\vec{b} - \vec{h})\cdot(\vec{a} + \vec{h} - \vec{y}) = 0,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{h} - \vec{b}\cdot\vec{y} - \vec{a}\cdot\vec{h} - \vec{h}^2 + \vec{h}\cdot\vec{y} = 0. \quad (5)$$

Как уже отмечалось, $\vec{a}\cdot\vec{h} = \vec{h}\cdot\vec{y} = 0$ На том же основании $\vec{b}\cdot\vec{h} = 0$. Поэтому из (5) имеем

$$\vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{y} - \vec{h}^2 = 0,$$
$$ab - by - h^2 = 0,$$
$$y = \frac{ab - h^2}{b}. \quad (6)$$

Значение y из (6) подставляем в (4)

$$h^2 = \frac{a^2b - ah^2}{b},$$

откуда

$$h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

Задача 4 (УрГУ, 1971). Треугольник AOB повернут в своей плоскости вокруг вершины O на 90°, причем вершина A перешла в A', а вершина B — в B'. Доказать, что в треугольнике OAB' медиана стороны AB' является высотой для треугольника $OA'B$ (аналогично медиана стороны $A'B$ в теугольнике $OA'B$ является высотой для $\Delta OAB'$).

Решение. Пусть C — середина $|AB'|$ (рис. 4). Докажем, что $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{A'B}$, т. е. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{A'B} = 0$; имеем

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'}\right),$$

$$\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA'},$$

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{A'B} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB'}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB'}\cdot\overrightarrow{OA'}\right).$$

Из условия следует, что $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OB'}$. Поэтому $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB'} = 0$. Кроме того, ясно, что $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OA'}|$, $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB'}|$ и $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}})$. Поэтому $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'}$.

Таким образом, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{A'B} = 0$.

Аналогично доказывается и вторая часть задачи.

Задача 5 (МФТИ, 1969).

В правильном тетраэдре $DABC$ отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD, а отрезок QP соединяет середину ребра CD с центром грани ABC. Найти угол между отрезками MN и PQ.

Решение. Положим $|AD| = a$ (рис. 5). Очевидно, что $|MD| = \frac{a}{2}$, $|DQ| = \frac{a}{2}$, $|DN| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Нетрудно показать (вычислите сами), что

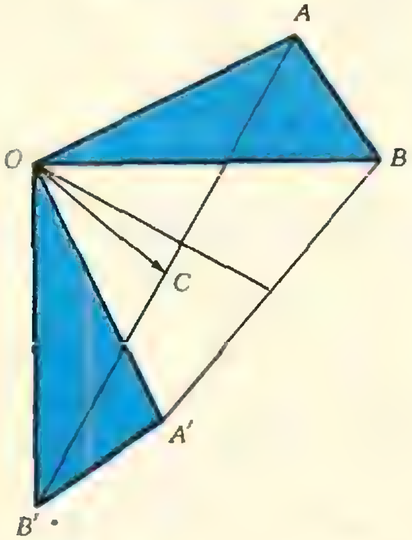


Рис. 4.

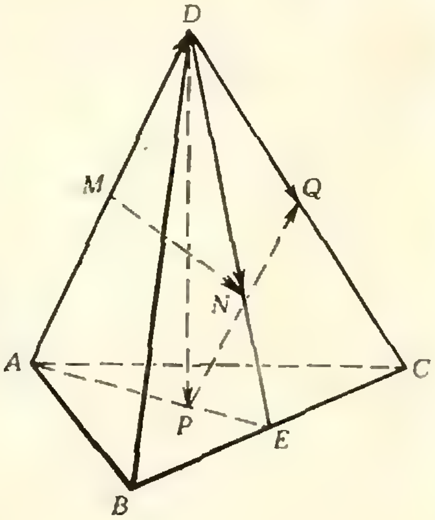


Рис. 5.

$|DP|=\frac{a\sqrt{6}}{3}$, $|PQ|=|MN|=\frac{a}{2}$.

Пусть φ — величина угла между векторами $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Найдем значение φ из определения скалярного умножения двух векторов

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}. \qquad (7)$$

Запишем очевидные векторные равенства

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN}, \qquad (8)$$
$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DP}.$$

Значения $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{PQ}$ из (8) подставляем в (7)

$$\cos\varphi=\frac{(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DN})\cdot(\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DP})}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\overrightarrow{PQ}|}=$$
$$=\frac{\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{DQ}+\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DQ}-\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{MD}}{|MN|\cdot|PQ|}+$$
$$+\frac{-\overrightarrow{DN}\cdot\overrightarrow{DP}}{|MN|\cdot|PQ|}. \qquad (9)$$

Заметим, что $(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{DQ})=\frac{2}{3}\pi$ и $\widehat{(\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{MD})}=\pi-\widehat{MDP}$. Очевидно, что $\cos\widehat{MDP}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, а $\cos\widehat{NDP}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Учитывая сказанное выше, получаем

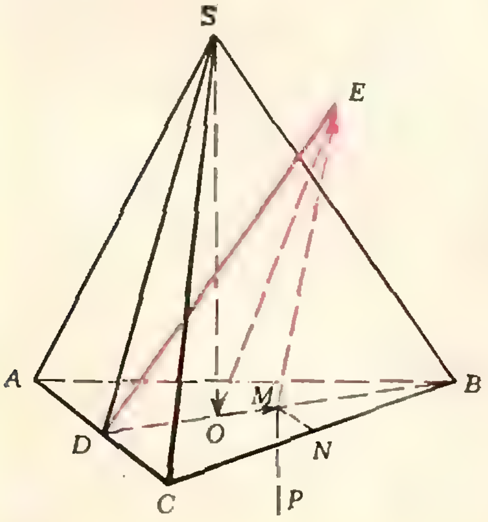


Рис. 6.

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{a^2}{8}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{3}-\frac{4a^2}{9}}{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}=$$
$$=\frac{1}{18}.$$

$\varphi=\arccos\frac{1}{18}$ и есть угол между отрезками MN и PQ.

Задача 6 (МГУ, мехмат, 1970). Длина каждого ребра треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, $[BD]$ — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

Решение. Проведем (рис. 6) в треугольнике BDE высоту EM и соединим точки O и E. Через точку M проведем $[MN]\parallel[AC]$ и $[MP)\parallel[SO]$. Так как отрезки MN и AC параллельны, что они составляют с плоскостью BDE равные углы. Так как $[MN]\perp[BD]$ и $[EM]\perp[BD]$, то $\angle EMN$, как легко понять, является тем углом, который $[MN]$ (а, значит, и $[AC]$) составляет с плоскостью BDE, то есть $\widehat{EMN}=\varphi$. Так как $[MP)\parallel[SO]$, то $[MP)\perp(ABC)$ и, следовательно, $[MP)\perp[BD]$ и $[MP)\perp[MN]$. Поэтому $\widehat{EMP}=90^\circ+\varphi$. Очевидно, что

$$\overrightarrow{SE}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ME}.$$

Найдем скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{SE}$:

$$\overrightarrow{SE}^2=\overrightarrow{SO}^2+\overrightarrow{OM}^2+\overrightarrow{ME}^2+$$
$$+2\cdot\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{OM}+2\cdot\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{ME}+$$
$$+2\cdot\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ME}.$$

Очевидно, что $\overrightarrow{SO}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ME}=0$. Как нетрудно сообразить, $(\overrightarrow{SO}, \widehat{\ }\overrightarrow{ME})=\widehat{EMP}=90^\circ+\varphi$,

$$|SE|^2=|SO|^2+|OM|^2+|ME|^2-2\cdot|SO|\cdot|ME|\cdot\sin\alpha. \ 10).$$

Но $|SO|=\frac{\sqrt{6}}{3}$ — как высота правильного тетраэдра с ребром, равным 1; $|ME|=\frac{3}{4}$ — как высота правильного треугольника со стороной, равной $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $|OM| = \frac{\sqrt{3}}{12}$ (вычислите самостоятельно).

Найденные значения $|SO|$, $|OM|$ и $|ME|$ подставляем в (10):

$$|SE|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{12}\right)^2 + \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{3}{4} \sin\varphi = \frac{5 - 2\sqrt{6}\sin\varphi}{4}.$$

$$|SE| = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{6}\sin\varphi}.$$

Задача 7 (МФТИ, 1974.) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна a; точки O и O_1 являются центрами оснований ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. Длина ортогональной проекции отрезка AO_1 на прямую B_1O равна $\frac{5}{6}a$. Определить высоту призмы.

Решение. Положим $|OO_1| = H$. Очевидно (рис. 7), что $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{OB}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $|\overrightarrow{OB_1}| = \sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$. Далее

$$\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = |AO_1| \cdot |OB_1| \cdot \cos\varphi. \quad (11)$$

Известно, что проекция одного вектора на другой равна длине первого вектора, умноженного на косинус угла между направлениями векторов, то есть $\text{пр}_{\overrightarrow{OB_1}} \overrightarrow{AO_1} = |\overrightarrow{AO_1}| \times \cos\varphi = |\overrightarrow{AO_1}| \cdot \cos\varphi$.

Согласно условию задачи

$$\text{пр}_{\overrightarrow{OB_1}} \overrightarrow{AO_1} = \frac{5a}{6}.$$

Поэтому равенство (11) запишется так:

$$\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = |OB_1| \cdot \frac{5a}{6}. \quad (12)$$

Запишем очевидные равенства:

$$\overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO_1},$$

$$\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OO_1}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BB_1}) = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}.$$

Так как $\overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{OO_1} \perp \overrightarrow{OB}$, то $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$. Кроме того, $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{BB_1}$, следовательно, $\overrightarrow{OO_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = |OO_1|^2$,

$$\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + |OO_1|^2 = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} + H^2 = \frac{a^2}{6} + H^2.$$

Найденные значения $\overrightarrow{AO_1} \cdot \overrightarrow{OB_1}$ и $|OB_1|$ подставляем в (12) $\frac{a^2}{6} + H^2 = \frac{5a}{6}\sqrt{\frac{a^2}{3} + H^2}$, откуда $108H^4 - 39a^2H^2 - 22a^4 = 0$. Так как $H > 0$, то $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

1 (МФТИ, 1977) Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $|AC| = |BC| = a$. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой CA_1, а вершины P и Q — на прямой AB_1. Найти: 1) объем призмы; 2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ

2 (МФТИ, 1977) Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точка E — середина ребра AD. Вершины M и N правильного тетраэдра $MNPQ$ лежат на прямой ED_1, а вершины P и Q — на прямой, проходящей через точку A_1 и пересекающей прямую BC в точке R.

Найти: 1) отношение $|BR| : |BC|$, 2) расстояние между серединами отрезков MN и PQ

3 (МФТИ, 1969) В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BCD, а точка E лежит на середине ребра AB. Найти угол между отрезками MN и DE.

4 (Физ фак. МГУ, 1963). Два отрезка — AB длины a и CD длины b лежат на скрещивающихся прямых, угол между которыми α. Основания O и O_1 общего перпендикуляра длины c к этим прямым делят отрезки AB и CD так, что $|OA| : |OB| = 2:3$, а $|OO_1| : |C_1D| = 3:2$. Найти длины отрезков BD и BC

5 (Из заданий ЗФТШ). В правильной 4-угольной пирамиде $SABCD$ длина общего перпендикуляра ребер SA и BC равна d и его основание делит отрезок BC в отношении 1:3. Определить объем пирамиды

6 (Киевский политехнический институт, 1977). В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M. Докажите, что $\vec{MA} \cdot \vec{MC} = \vec{MB} \cdot \vec{MD}$.

7 (Всесоюзная олимпиада 1974 г.). Дан квадрат $ABCD$. Точки P и Q лежат соответственно на сторонах AB и BC, причем $|BP| = |BQ|$. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок PC. Доказать, что угол DHQ — прямой.

Московский инженерно-физический институт

Ниже приводятся некоторые варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1977 года.

Математика

Вариант 1

1. Автомобиль едет из пункта K в пункт M. От пункта K до пункта L, расположенного между K и M, он едет со скоростью 48 км/час. В пункте L он уменьшает свою скорость на V км/ч ($0<V<48$) и с этой скоростью едет $^1/_3$ часть пути от L до M. Оставшуюся часть пути от L до M он едет со скоростью, которая на $2V$ км/ч превышает первоначальную скорость 48 км/ч. При каком значении V автомобиль быстрее всего проделает путь от L до M?

2. В шар вписана правильная треугольная пирамида так, что плоскость основания пирамиды делит перпендикулярный к ней радиус шара в отношении 3 : 7, считая от центра шара. Найти объем конуса, вписанного в пирамиду. Радиус шара равен R.

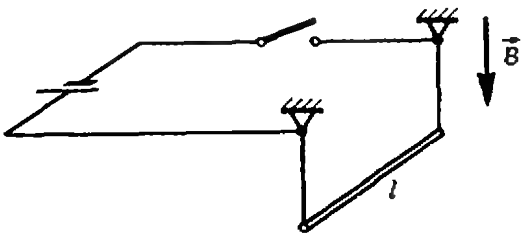
3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\frac{3}{x}$, прямыми $y=4$, $y=6$ и осью ординат.

4. Решить уравнение
$11\sin^2 7x-3\sin 7x\cos 7x+5\cos^2 7x=a-6$.

Вариант 2

1. Смешали p%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным раствором соляной кислоты и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

2. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ с длиной стороны, равной a. Плоскости боковых граней образуют с плоскостью основания пирамиды угол α. На сторонах AD и BC основания взяты точки E и F так, что $|AE|=\frac{2}{3}a$ и $|CF|=\frac{a}{3}$. Через эти точки проведена плоскость, составляющая с плоскостью основания пирамиды угол β. Найти площадь получившегося сечения.



3. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=1+\frac{1}{3(x-1)}, \quad y=\frac{1}{6x}.$$

4. Найти критические точки функции $f(x)=0{,}5e^{2x}+(1-a)e^x-ax+\sin 2$.

Физика

1. Два спутника движутся вокруг Земли по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости, с линейными скоростями $v_1=7{,}8$ км/с и $v_2=7{,}7$ км/с. Определить интервал времени τ, через который оба спутника, вращающиеся вокруг Земли в одном направлении, периодически сближаются на минимальное расстояние друг от друга. Радиус Земли $R=6400$ км.

2. Цилиндрическая пробирка длиной $l=30$ см, содержащая некоторое количество воздуха при температуре $T=300$ К, полностью погружена открытым концом вниз в глицерин, плотность которого $\rho=1{,}3$ г/см^3. При этом воздух внутри пробирки занимает половину ее объема. Пробирку вынимают из глицерина так, что своим открытым концом она едва касается поверхности жидкости. Как и на сколько следует изменить температуру воздуха в пробирке, чтобы он по-прежнему заполнял половину ее объема? Внешнее давление равно $p_0=760$ мм рт. ст.

3. Тонкой сферической оболочке радиуса $R_1=5{,}0$ см и массы $m=0{,}015$ г сообщают заряд до тех пор, пока ее потенциал не достигает значения $\varphi_1=10$ кВ. При этом оболочка, вследствие электрического отталкивания, разрывается на малые осколки, летящие в разные стороны. Найти скорость осколков к моменту, когда они окажутся на сферической поверхности радиуса $R_2=12$ см.

4. Перекладина длиной $l=20$ см и массой $m=15$ г подвешена горизонтально на двух тонких невесомых проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}|=0{,}04$ Т (см. рисунок). К точкам закрепления проводов подключают источник тока, при этом по цепи течет ток силой $I=2{,}5$ А. На какой угол отклонятся провода с перекладиной от начального положения?

5. Имеются собирающая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см и экран, расположенный в ее фокальной плоскости. По другую сторону линзы в ее фокусе находится точечный источник света, который в некоторый момент начинает удаляться от линзы с постоянным ускорением $|\vec{a}|=4$ м/с^2. Через какой промежуток времени τ после начала движения радиус светлого пятна на экране уменьшится в $n=6$ раз?

А. Александров, А. Забоев, Н. Нарожный, Н. Шолохов

Живой рассказ о живой науке

От частого употребления слова́ «живая наука» со временем утрачивают свой изначальный смысл и выразительность. Но всякий раз, когда встречаешься с умным и тонким рассказом о живой науке, это сочетание слов наполняется глубоким и волнующим содержанием. Недавно я встретился с таким рассказом на страницах прекрасной книги В. И. Рича и М. Б. Черненко «Неоконченная история искусственных алмазов» *).

Авторы рассказывают почти трехвековую историю попыток создать искусственный алмаз. Книга заселена участниками этой истории разных «рангов»: от великого Ньютона до начинающего аспиранта — нашего современника. В каждом из участников авторы видят не только ученого, который «внес вклад», но и живого человека, чье участие в трехвековой эстафете определяется и его талантом, и его будничными человеческими качествами.

Вот словесный портрет Лавуазье: «...Великий ученый и заурядный в своих стремлениях буржуа». Одно другое не исключает. Вот пример блистательной проницательности Лавуазье: «...При высокой температуре алмаз не исчезает, а сгорает». Нам, сегодняшним читателям книги, иной раз невдомек, что разъяснение разницы между «исчезает» и «сгорает» во времена Лавуазье было научным подвигом... Вот рассказ о Хэмфри Дэви — безродном английском юноше, которому на роду было написано открыть шесть элементов, со временем занявших шесть клеток в таблице Менделеева, и с помощью другого английского юноши — Майкла Фарадея — доказать, что алмаз состоит из углерода. Высокую температуру, которая была необходима в экспериментах, Дэви и Фарадей получили, фокусируя с помощью огромных линз солнечные лучи.

Блестяще в книге рассказано о том, как ученые поняли, что для синтеза искусственных алмазов необходимо сочетание высокой температуры и высокого давления, как эту основную технологическую идею они подсмотрели у природы, обнаружив микроскопические кристаллики алмазов в метеоритах. Первый шаг на пути открытия этой истины был сделан русскими химиками М. В. Ерофеевым и П. А. Лачиновым. Последний — советским физиком О. И. Лейпунским, который теоретически построил диаграмму фазовых состояний углерода. Но прежде чем этот шаг был признан действительно последним, уже после того, как он был сделан, было много поисков, споров, экспериментов. В конце пятидесятых годов ученые почему-то, почти вопреки очевидности, заспорили, необходимо ли высокое давление, а потом размечтались — нельзя ли обойтись и без высоких температур. Затем снова обратились к идеям и расчетам Лейпунского. Реализовали их и получили алмазную пудру. «Получили» — короткое и недвусмысленное слово. За ним, однако, интересно описанная авторами приоритетная борьба коммерческих фирм, многих ученых, стремящихся до поры до времени молчать о своих достижениях и боящихся при этом просрочить и пору, и время.

ИСТОРИЯ
АЛМАЗОВ

В книге много великолепных абзацев — авторских размышлений о науке вообще. Полны глубокого смысла рассуждения о «научном хобби», которое, как и любое прочее хобби, по необходимости несет отпечаток дилетантства. Наука была хобби совсем неплохих научных работников, какими были Ньютон (управляющий Королевским монетным двором), Лавуазье (коммерсант), Мендель (священник), Эйнштейн (чиновник патентного бюро). Здесь, пожалуй, уместно обратить внимание на то, что diletouto — по-итальянски означает наслаждение, удовольствие.

Хорошая и умная книга В. И. Рича и М. Б. Черненко, этот живой рассказ о живой науке, доставит большое наслаждение и принесет несомненную пользу читателю.

Я. Гегузин

---

*) В. И. Рич, М. Б. Черненко. Неоконченная история искусственных алмазов. М., «Наука», 1976.

Винтовая линия

В настоящее время трудно найти человека, который хоть сколько-нибудь связан с техникой и не имеет о винтовой линии никакого представления. И неудивительно. В технических приспособлениях, от самых распространенных до наиболее специальных, не обойтись без винтов, болтов, гаек, шурупов, и т. д. Край резьбы у них — винтовая линия. Используется она преимущественно из-за своего геометрического свойства — винтовая линия может скользить вдоль самой себя. Впрочем, в архитектуре с ее помощью «сворачивают расстояния»: винтовая лестница занимает в строении меньше места.

Винтовая линия с той или иной степенью точности часто встречается в природе. Стебли вьющихся растений «шаг за шагом», «виток за витком» взбираются по стволу дерева по винтовой линии. По ней же смерч скручивает стволы деревьев. Вспомните еще о молекулах ДНК, раковинах моллюсков, винторогих антилопах...

Дадим определение: *винтовая линия l* — это пространственная кривая, описываемая точкой M, которая вращается с постоянной по величине скоростью $\vec{v}_1$ вокруг оси Oz и одновременно скользит с постоянной скоростью $\vec{v}_2$ вдоль оси Oz (рис. 1). Когда точка M перемещается вдоль винтовой линии на один виток, по оси Oz она сдвигается на постоянную величину d (*шаг винта*); ее проекция M' описывает при этом окружность.

На рисунке 1 показан еще один способ получения винтовой линии: бумажный прямоугольный треугольник ABC приклеили катетом AC к поверхности цилиндра и намотали на него; в результате гипотенуза BC разместилась по винтовой линии l. Действительно, из определения винтовой линии следует, что касательная MN к ней в любой точке $M \in l$ образует с осью Oz постоянный угол. Следовательно, угол касательной MN с плоскостью xOy также сохраняет постоянную величину α для всех точек $M \in l$.

Чтобы определить линию кратчайшего расстояния между двумя точками M_1 и M_2 на поверхности цилиндра (так называемую *геодезическую*), надо развернуть поверхность цилиндра на плоскость, провести $[M_1M_2]$ и вернуть поверхность в прежнее положение. Геодезическая оказывается отрезком винтовой линии.

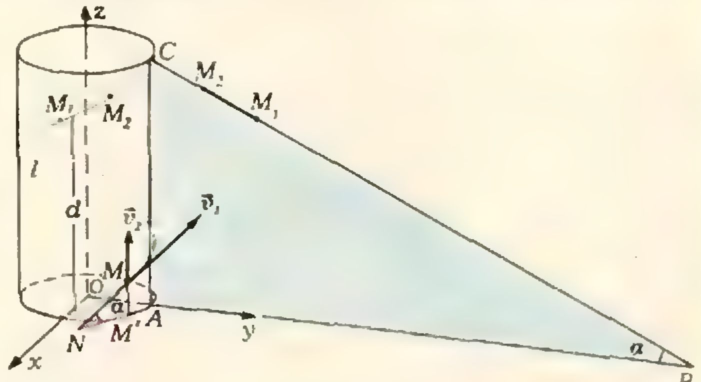


Рис. 1.

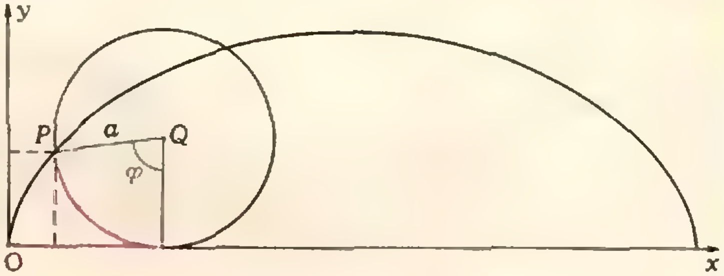


Рис. 2.

Проекция винтовой линии на плоскость xOz — синусоида (докажите).

Разверткой окружности называется кривая, которую описывает фиксированная точка прямой, катящейся без скольжения по неподвижной окружности. На рисунке 1 точка N описывает именно такую кривую — развертку окружности $(O, |OM'|)$.

Циклоидой называется линия, которую описывает точка P окружности (Q, a), катящейся без скольжения по неподвижной прямой Ox (рис. 2). Проекция на горизонтальную ось точки P этой окружности, прокатившейся из начального положения на угол φ, равна $a\varphi - \sin\varphi$. Проекция точки P на вертикальную ось равна $a - a\cos\varphi$. Докажите, что параллельное проектирование винтовой линии в направлении MN (рис. 1) преобразует ее в циклоиду.

Наряду с винтовой линией рассматриваются так называемые *винтовые поверхности*. Их описывают дуги плоских кривых, которые, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно равномерно перемещаются вдоль нее же. Лопасть винта корабля, грубо говоря, является куском винтовой поверхности.

Винтовая поверхность, образованная отрезком прямой, перпендикулярным оси вращения, называется *прямым геликоидом* («геликоид» в переводе с греческого означает «спиралеподобный»). На первой странице обложки изображена модель прямого геликоида. Другой его моделью является мыльная пленка, натянутая на проволочную винтовую линию.

В. Березин

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1978 года. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 марта 1978 года. После проверки работ (примерно в июле 1978 года) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будут учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с Вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать Вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе Ваша работа проверяться не будет):

Область	Московская
Фамилия, имя	Иванов Петр
Год рождения	1964 г.
Класс, школа	7 класс «А» школы № 2 г. Клина
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Никаноров Владимир Алексеевич
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 2, Мать — домашняя хозяйка
Полный почтовый адрес	123456, г. Клин, ул. Ленина, д. 1, кв. 1

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Вступительные работы следует присылать по следующим адресам:

Область, республика	Адрес
Белорусская (кроме Витебской и Гомельской обл.), Латвийская, Литовская, Эстонская ССР, Коми и Карельская АССР, Архангельская, Калининградская, Ленинградская, Мурманская, Новгородская и Псковская области	197228, Ленинград, П-228, ул. Савушкина, д. 61. Специнтернат при ЛГУ. ЗМШ, на конкурс

Область, республика	Адрес
Башкирская АССР	452320. Башкирская АССР, Бирск, Интернациональная ул., д. 10. Пединститут, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Витебская обл.	210036. Витебск, 36, Московский пр., д. 33. Пединститут, кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Приморский край	690600. Владивосток, ГСП, ул. Суханова, д. 8. Дальневосточный гос. университет. ФЗМШ, на конкурс
Владимирская обл.	600024. Владимир, пр. Строителей, д. 11. Пединститут, кафедра геометрии. ЗМШ, на конкурс
Воронежская, Белгородская, Липецкая, Курская, Тамбовская области	394693. Воронеж, Университетская пл., д. 1. Воронежский гос. университет. ФЗМШ, на конкурс.
Гомельская область	246000. Гомель, Советская ул., д. 108. Гомельский гос. университет, мехмат, кафедра мат. анализа. ЗМШ, на конкурс.
Таджикская ССР	734016. Душанбе, 16, пр. Ленина, д. 17. Таджикский гос. университет, мехмат, комн. 49. ЗМШ, на конкурс.
Ивановская область	153025. Иваново, 25, ул. Ермака, д. 39. Ивановский гос. университет, кабинет математики. ЗМШ, на конкурс.
Удмуртская АССР	426037. Ижевск, Красногеройская ул., д. 71. Удмуртский гос. университет, кафедра алгебры и геометрии. ЗМШ, на конкурс.
Калининская область	170002. Калинин, Садовый пер., д. 35. Калининский гос. университет, математический фак. ЗМШ, на конкурс.
Кировская область	610013. Киров, 13, ул. Ленина, д. 111. Пединститут. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Краснодарский край	350751. Краснодар, ГСП, ул. К. Либкнехта, д. 149. Кубанский гос. университет, комн. 117. ВЗМШ, на конкурс.
Куйбышевская область	443000. Куйбышев, ул. Потапова, д. 64/163. Куйбышевский гос. университет, математический фак., кафедра функционального анализа. ЗМШ, на конкурс.
Магаданская область	685014. Магадан, Портовая ул., д. 13. Пединститут, физмат, кафедра математики. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Дагестанская АССР	367025. Махачкала, ГСП, Советская ул., д. 8. Дагестанский гос. университет, мехмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Орловская область	302015. Орел, Комсомольская ул., д. 95. Пединститут, кабинет математики. ЗМШ, на конкурс.
Мордовская АССР	430000. Саранск. Большевистская ул., д. 68. Мордовский гос. университет, математический фак. ЗМШ, на конкурс.
Ростовская область	344009. Ростов-на-Дону, ул. Горького, д. 88. Ростовский гос. университет, мехмат., кафедра геометрии. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Свердловская область	620083. Свердловск, ул. Ленина, д. 51. Уральский гос. университет, мехмат. ЗМШ, на конкурс.
Донецкая область	343200. Донецкая обл., Славянск, ул. Ленина, д. 12. Пединститут, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Смоленская область	214000. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4. Пединститут, физмат. ЗМШ, на конкурс.
Тернопольская область	282009. Тернополь, ул. Карпенко, д. 10. Пединститут, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Томская область	634044. Томск, 44, Комсомольский пр., д. 75. Пединститут, комн. 254. ЗМШ, на конкурс.

Область, республика	Адрес
Ульяновская, Саратовская, Пензенская области	432700. Ульяновск, 2. Пединститут. ЗМШ, на конкурс.
Казахская ССР (кроме Целиноградской, Тургайской, Кокчетавской и Джезказганской обл.)	417007. Уральск, пр. Ленина, д. 162. Пединститут, физмат, кафедра мат. анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Целиноградская, Тургайская, Кокчетавская, Джезказганская области	473021. Целиноград, 21, ул. Циолковского, д. 6. Пединститут, физмат. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Чувашская АССР	428015. Чебоксары, Энергетическая ул., д. 4. Чувашский гос. университет, физмат. ЗМШ, на конкурс.
Вологодская область	162600. Вологодская обл., Череповец, ул. М. Горького, д. 14. Пединститут, кафедра мат. анализа. Филиал ВЗМШ, на конкурс.
Черновицкая область	274012. Черновцы, 12, ул. Коцюбинского, д. 2. Черновицкий гос. университет, канцелярия. ЗМШ, на конкурс.
Читинская область	672007. Чита, 7, ул. Бабушкина, д. 129. Пединститут, кафедра математики. ЗМШ, на конкурс.
Сахалинская область	693008. Южно-Сахалинск, пр. Ленина, д. 290. Пединститут, кафедра мат. анализа. ЗМШ, на конкурс.
Остальная территория СССР	117234. Москва, В-234, МГУ, мехмат. ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься по программе ВЗМШ в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗМШ» — это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики данной школы по программе ВЗМШ. Прием в группы «Коллективный ученик ВЗМШ» проводится до 20 сентября 1978 года в два потока: для тех, кто с сентября 1978 года будет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Для организации кружка достаточно заявления учителя математики, берущего на себя руководство кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено подписью директора школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления об организации групп «Коллективный ученик ВЗМШ» следует присылать по адресу: 117234. Москва, В-234. МГУ, мехмат. ВЗМШ, заведующему сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1978 году

1. На прямой расположены 4 точки A, B, C и D так, что $|AB|=1$, $|AD|=4$, $|CD|=2$. Чему может равняться $|BC|$?

2. К числу 60 приписать по две цифры справа и слева так, чтобы полученное при этом шестизначное число делилось на 1977. (Достаточно найти одно такое число.)

3. Какие значения может принимать a, если

$$|a+b|\leqslant 1 \text{ и } |a-3b|\leqslant 2 \text{ ?}$$

4. На плоскости дан квадрат с центром в точке O. В этой точке расположен прожектор, который освещает угол величиной 90°. В начальный момент времени прожектор освещал угол, стороны которого проходили через две вершины квадрата. Затем прожектор начал вращаться вокруг точки O. В какой момент времени площадь освещенной части квадрата будет больше: когда прожектор повернется на 45° или на 72°?

5. Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали 30 000 курьеров. Известно следующее: если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, то общее число курьеров было бы четвертой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьеров было прислано Хлестакову в каждый день? (Приведите все возможные ответы.)

6. Дан острый угол с вершиной в точке B и точка A на одной из его сторон. Найти точку K на другой стороне угла так, чтобы радиус окружности, описанной около треугольника BAK, был наименьшим.

7. Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2-xy-2y^2=18.$$

8. Дан прямоугольник $ABCD$. Внутри него берется произвольная точка и через нее проводятся две прямые, параллельные сторонам AB и BC. Эти прямые разбивают пря-

моугольник на 4 меньших прямоугольника. Доказать, что площадь хотя бы одного из прямоугольников, содержащих точки A или C, не больше четверти площади исходного прямоугольника.

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1+x_1^2=2x_2, \\ 1+x_2^2=2x_3, \\ 1+x_3^2=2x_4, \\ 1+x_4^2=2x_1. \end{cases}$$

10. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную — минус 5 баллов; если же он задачу не решал, ему ставят 0 баллов. В результате ученик получил 13 баллов. Сколько задач решал ученик?

Ж. Раббот

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1978/79 учебный год. (В отдельных случаях допускается прием из других союзных республик.)

Форма обучения в ЗФТШ отличается от привычной работы с учителем на уроке. Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Цель нашей школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна.

В ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это — и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ два раза в неделю в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится тоже по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ.

Вступительное задание каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Кемеровская обл.*
2. Фамилия, имя, отчество	*Глушков Валерий Иванович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*школа № 6, ул. Шишкина, 26*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*слесарь, мастер цеха*
мать	*швея*
6. Подробный домашний адрес	*653023, г. Прокопьевск, ул. Ленина, д. 2, кв. 15*

Срок отправления решений — *не позднее 10 марта 1978 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института и приказом директора ЗФТШ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1978 года.

Тетради с выполненными заданиями присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 1, 6—10— для учащихся восьмых классов и задачи 1, 5, 9—13 — для учащихся девятых классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1978 году

Физика

1. Известно, что для измерения тонких проволочек или пластин используются приборы для точных измерений: например, штангенциркуль или микрометр. К сожалению, у вас под рукой не оказалось таких приборов. Как бы вы поступили, чтобы измерить как можно точнее толщину: одно- и двухкопеечной монет? листа бумаги в книге или тетради? фольги для обертывания шоколадных конфет? Опишите использованный вами способ и приведите результаты измерений.

2. Для чего кроме закрепления рельсов железнодорожного полотна под них подкладывают шпалы?

3. Весь путь от места отдыха до города преодолен со средней скоростью 32 км/ч частично пешком, частично на автобусе и затем на электричке. С какой скоростью пройден каждый из отрезков пути, если их длины относятся как 1:4:45, а соответствующие промежутки времени — как 4:1:20?

4. Куб собран из большого числа хорошо пригнанных друг к другу деревянных кубиков одинакового объема, изготовленных из различных древесных пород: пробки с плотностью 0,2 г/см^3, дуба с плотностью 0,7 г/см^3, кедра с плотностью 0,55 г/см^3 и черного дерева с плотностью 1,2 г/см^3. Какова средняя плотность куба, если количества кубиков из этих материалов взяты соответственно в отношении 3:4:2:1?

5. В цилиндрический сосуд налиты четыреххлористый углерод, вода и керосин. Определить давление на дно сосуда, если массы всех жидкостей одинаковы, а верхний уровень наиболее легкой жидкости — керосина находится на высоте 23 см от дна сосуда. Плотности жидкостей равны соответственно 1,6 г/см^3, 1,0 г/см^3 и 0,8 г/см^3. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

6. В каком отношении следует взять объемы спирта и бензина, чтобы удельная теплота сгорания смеси этих горючих веществ оказалась равной $4{,}2\cdot10^7$ Дж/кг?

7. При ремонте электроплитки спираль пришлось укоротить на 25% ее первоначальной длины. Как изменится при этом мощность, выделяемая в плитке?

8. Гладкий диск радиуса R, плоскость которого горизонтальна, вращается вокруг своей оси с частотой вращения $n=40$ об/мин. От поверхности диска на расстоянии $R/2$ от оси отрывается небольшое тело, которое без трения скользит по диску. Через какое время оно соскользнет с диска?

9. Покупая в магазине капроновую леску, рыболов забыл спросить, какую максимальную нагрузку она выдерживает. Но после некоторого размышления он придумал способ определения этой величины с помощью гири массой 0,5 кг и рулетки. Подумайте и вы. Опишите придуманный вами способ и исследуйте, как зависит прочность лески от ее диаметра. Результаты измерений представьте в виде таблицы.

10. Можно ли опустить с крыши предмет массой 45 кг с помощью веревки, предельная прочность которой 400 Н, так, чтобы веревка при этом не разорвалась?

11. В первое время своего существования дирижабли обычно наполняли водородом. Это обеспечивало необходимую подъемную силу, но от использования дирижаблей в военных целях пришлось сразу же отказаться: малейшее попадание пули или осколка или удар взрывной волны приводили к воспламенению водорода. Но однажды во время первой мировой войны над Лондоном появился дирижабль противной стороны, который остался невредимым, несмотря на попадание пуль. Оказалось, что он был наполнен гелием. Когда об этом стало известно, один из экспертов заявил, что гелий не может обеспечить необходимой подъемной силы: гелий вдвое тяжелее водорода, следовательно, подъемная сила уменьшается вдвое. Так ли это? Объясните.

12. В два одинаковых сосуда налили разные количества горячей воды. Воздух из сосудов откачали, а сосуды (вверху) соединили между собой очень тонкой резиновой трубкой и уравновесили на весах. Нарушится ли со временем равновесие весов? Объясните.

13. Баллончик для приготовления газированной воды имеет объем 5 см^3 и содержит углекислый газ под давлением 15 атм. Можно ли на технических весах с точностью взвешивания 10 мг заметить разницу в массе полного и «пустого» баллончика? Температуру считать равной 0°С.

Математика

1. В классе 38 учеников: из них 24 ученика сдали нормы ГТО, 8 учеников имеют спортивные разряды и столько же учеников не сдали нормы ГТО и не имеют спортивных разрядов. Сколько учеников в классе сдали нормы ГТО и имеют спортивные разряды?

2. Для того, чтобы треугольник был прямоугольным, необходимо и достаточно, чтобы одна из его медиан равнялась половине стороны, на которую она опущена. Докажите.

3. Найдите подмножества A и B множества C, если для любого подмножества X множества C имеет место равенство:

$$X \cap A = X \cup B.$$

4. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для того, чтобы число n^2+20 было составным ($n>3$), достаточно, чтобы n было простым;

б) для того, чтобы число n^2+20 было составным ($n>3$), необходимо, чтобы n было простым.

5. Школьники трех классов совершили два лыжных похода. В первый поход пошли $^2/_3$ школьников 8-го класса, $^4/_5$ школьников 9-го класса и $^5/_6$ — 10-го класса: всего 61 школьник. Во второй поход пошли $^2/_5$ учеников 9-го класса и половина 10-го класса. Сколько участников было во втором походе, если всего в трех классах обучается 79 ребят?

6. Даны векторы $\vec{OA}=\vec{a}$ и $\vec{OB}=\vec{b}$. Найдите единичный вектор $\vec{c}$ ($|\vec{c}|=1$), сонаправленный с биссектрисой угла AOB.

7. Дан треугольник ABC; S — окружность, описанная вокруг него. Найдите внутри треугольника такую точку, что если ее отразить симметрично относительно любой стороны треугольника, то она попадет на окружность S.

8. Даны два утверждения:

а) уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет два отрицательных корня;

б) уравнение $4x^2+4(a-2)x+1=0$ не имеет корней.

При каких значениях a одно из этих утверждений — ложно, а другое — истинно.

9. Докажите, что если три угла четырехугольника тупые, то диагональ, проходящая через вершину острого угла, больше другой диагонали.

10. На стоянке находятся машины марок «Москвич» и «Жигули». Общее число их менее 30. Если увеличить вдвое число «Жигулей», а число «Москвичей» увеличить на 27, то «Жигулей» станет больше. Если увеличить вдвое число «Москвичей», не изменяя числа «Жигулей», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Москвичей» и сколько «Жигулей» находится на стоянке?

11. В розыгрыше первенства по баскетболу принимают участие 20 команд, из которых 5 команд экстракласса. Сколькими способами можно сформировать две подгруппы по 10 команд в каждой так, чтобы в одной подгруппе были две команды экстракласса, а в другой — три.

12. Последовательность (a_n) задана рекуррентной формулой

$$a_1=\frac{3}{8}, \quad a_n=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}a_{n-1}^2,$$

$$n=2,\ 3,\ \ldots$$

Докажите, что последовательность (a_n) имеет предел, и найдите его.

13. Докажите, что если функция $f(x)$ имеет производную при $x=a$, то справедливо равенство

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}=f(a)-af'(a).$$

В. Асланян, А. Кирьянов, Т. Чугунова

Ребусы

Замените в каждом из этих примеров буквы цифрами (разные — разными, одинаковые — одинаковыми, звездочки — любыми), чтобы получились верные равенства.

1.

$$\begin{array}{r} \text{сорок} \\ \text{сорок} \\ +\ \text{сорок} \\ \text{сорок} \\ \text{сорок} \\ \hline \text{двести}. \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{r} \times\ \text{лоси}. \\ \text{икс} \\ \hline \text{парнс} \\ \text{поток}\phantom{\text{с}} \\ \text{лоси}\phantom{\text{сс}} \\ \hline \text{сссссс}. \end{array}$$

3. а) $\sqrt[а]{\text{логарифмы}} = \text{ырфар}$;

б) $\sqrt[t]{\text{logarithms}} = \text{llrss}$.

4. $\sqrt{\text{тетнва}} = \text{ива}$.

5. $\sqrt{\text{leafages}} = \text{ages}$.

6. а) $\text{а}^{\text{а}} = \text{икс}$;

б) $\text{ку}^{\text{к}} = \text{икс}$;

в) $\text{зет}^{\text{т}} = \text{сорок}$.

7.

$$\begin{array}{r} \times\ \text{створ} \\ \text{створ} \\ \hline {*}{*}{*}{*}{*} \\ {*}{*}{*}{*}{*}\text{н} \\ {*}{*}{*}{*}{*}{*} \\ \text{с}{*}{*}{*}{*} \\ \hline \text{крайность} \end{array}$$

Э. Рекстин

ФЭМ-эффект

1. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта не зависит от типа проводимости.

2. При постоянном значении индукции $\vec{B}$ магнитного поля ток ФЭМ-эффекта есть $I=CN$, где C — константа. Э. д. с. ФЭМ-эффекта равна $\mathscr{E}_{ФЭМ}=IR$, где $R=\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\sigma_т+aN}$, то есть

$$\mathscr{E}_{ФЭМ}=\frac{CN}{\sigma_т+aN}.$$

При $\sigma_т \gg aN$ $\mathscr{E}_{ФЭМ}$ прямо пропорциональна N, при $\sigma_т \ll aN$ $\mathscr{E}_{ФЭМ}$ стремится к насыщению (рис. 1).

3. При указанных условиях диффузионный ток к поверхности образца по абсолютной величине больше, чем ток в глубь образца. Знак э. д. с. ФЭМ-эффекта при этом изменяется на противоположный (аномальный ФЭМ-эффект).

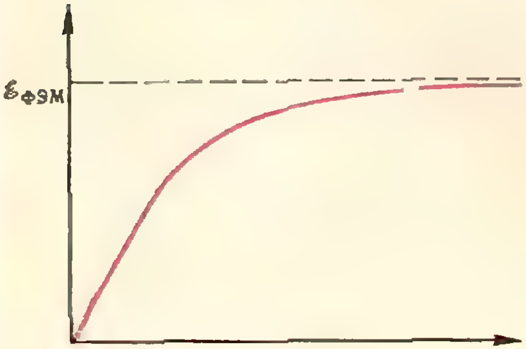


Рис. 1.

Метод бесконечного спуска

1. См. рисунок 2.

2. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $x^2+y^2+z^2=7t^2$. Из рассмотрения остатков при делении на 8 следует, что t — четное. Далее легко получить, что x, y, z — тоже четные.

3. а) Используйте делимость на 3.

б) Используйте делимость на 13.

4. а) См. задачу 2 в тексте.

б) Рассмотрите уравнение $(x^2)^2+(y^2)^2=u^2$.

Сделайте замену $x^2=2tv$; $y^2=t^2-v^2$; $u=t^2+v^2$.

5. Воспользуйтесь тождествами:

а) $(3x+2y+1)^2+(3x+2y+2)^2-(4x+3y+2)^2=x^2+(x+1)^2-y^2$.

б) $3(55x+84y)^2-7(36x+55y)^2=3x^2-7y^2$;

в) $[2(7y+12x+6)]^2-3[(4y+7x+3)+1]^2=(2y)^2-3(2x+1)^2$.

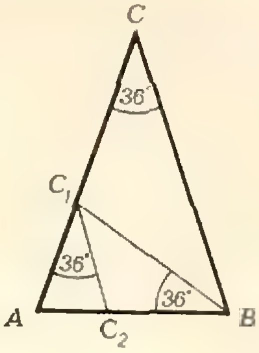


Рис. 2.

7. Докажите, что на каждом шаге уменьшается либо максимальное число, либо количество максимальных чисел.

8. Поставьте многогранник на одну из его граней и посмотрите, что из этого получится.

9. Докажите, что через несколько шагов все числа станут четными.

Вопросы по геометрии

Ответы: 1. г. 2. д. 3. б. 4. д. 5. в. 6. г. 7. д. 8. а. 9. б. 10. в.

1. По аксиоме подвижности плоскости («Геометрия 8», п. 134) существуют в точности два перемещения, переводящих точку A в D и точку B в C (рис. 3; в данном случае это будут осевая симметрия и параллельный перенос). Аналогично существуют еще два перемещения, переводящие A в C и B в D

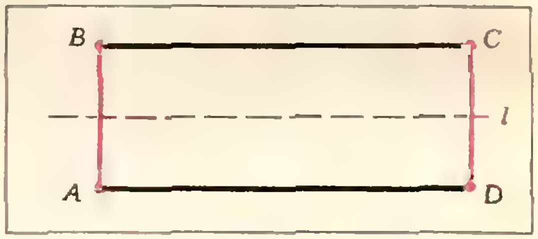


Рис. 3.

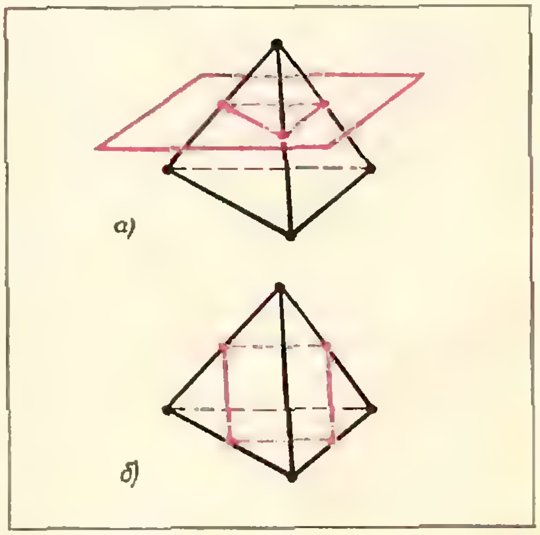


Рис. 4.

(одно из них — центральная симметрия, второе — так называемая *скользящая симметрия* — композиция $\vec{BC}\cdot S_l$ осевой симметрии и параллельного переноса в направлении оси симметрии — см. рис. 3).

2. Повороты пространства относительно прямой (оси), содержащей данный отрезок, будут отображать этот отрезок на себя.

3. Коэффициент гомотетрии, отображающей треугольник T_1 на треугольник, конгруэнтный T_2, равен либо 2, либо — 2

4. Если данные векторы не коллинеарны, то существуют только два удовлетворяющих условиям вектора; если же $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то нужных векторов $\vec{x}$ существует бесконечно много.

5. Искомые прямые содержат средние линии треугольника с вершинами в данных точках.

6. Искомые плоскости либо параллельны одной из четырех граней тетраэдра с вершинами в данных точках (см. рис. 4, *а*), либо параллельны одной из трех пар скрещивающихся ребер этого тетраэдра (рис. 4, *б*).

7. Прямую, делящую площадь треугольника пополам, можно провести в любом направлении.

8. Докажите такое утверждение: если прямые a и b скрещиваются, а α и β — содержащие их параллельные плоскости, то через любую точку $M\notin\alpha\cup\beta$ проходит прямая, пересекающая как a, так и b.

9. В двух «крайних» случаях лучи OA и OB проектируются либо в один луч, либо в продолжающие друг друга лучи (как описать эти случаи?); при «промежуточных» положениях угла AOB относительно данной плоскости величина проекции угла AOB может принимать любое значение от 0° до 180°.

10. У куба 6 граней, поэтому число сторон сечения куба плоскостью — от 3 до 6.

Доказать можно? — Доказать нельзя!

1. Степой доказано, что из первого свойства расстояний следует второе свойство, только для частного случая — когда две из трех точек совпадают.

2. Да.

4. Можно воспользоваться последней моделью, построенной Степой и его друзьями.

Первый закон термодинамики

1. $A=p_1V_1(T_2/T_1-1)=3\cdot10^5$ Дж.

2. $A=(p_2/p_1-1)R(T_2-T_1)\approx665$ Дж

3. $T_2=T_1+\dfrac{\mu A}{mR}=491$ К

4. $$Q=c_pm\Delta T=\frac{5}{2}\,\frac{m}{\mu}\,R(T_2-T_1)=$$
$$=12{,}5\cdot10^4\ \text{Дж};\ \Delta U=c_Vm\Delta T=$$
$$=\frac{3}{2}\,\frac{m}{\mu}\,R(T_2-T_1)=7{,}5\cdot10^4\ \text{Дж};$$
$A=Q-\Delta U=5\cdot10^4$ Дж.

5. $\Delta U=\dfrac{3}{2}\,p\Delta V=1{,}44\cdot10^5$ Дж; $A=p\Delta V=0{,}96\cdot10^5$ Дж; $Q=\Delta U+A=2{,}4\cdot10^5$ Дж

6. $T_2=306$ К.

7. $T_2=T_1(1+2Q/3p_1V)=340$ К; $p_2=p_1T_2/T_1\approx2\cdot10^5$ Па

8. $V_2=3$ м^3; $p_2=1{,}2\cdot10^5$ Па.

Скалярное умножение двух векторов

1. 1) $\dfrac{a^3}{2}$; 2) $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$.

2. 1) 2; 2) $\dfrac{2a}{\sqrt{30}}$.

3. $\arccos\dfrac{5\sqrt{3}}{18}$.

4. $$|BD|=\frac{1}{5}\sqrt{9a^2+4b^2+25c^2-12ab\cos\alpha},\quad |BC|=\frac{1}{5}\sqrt{9a^2+9b^2+25c^2+18ab\cos\alpha}$$

5. $\dfrac{4}{9}\,a^3$

8. 1:3; $(\sqrt{3}-1)\cdot2\sqrt{3}$.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант № 1

1. Обозначим расстояние от пункта L до пункта M через $|LM|$. По условиям задачи автомобиль двигался $^1/_3$ $|LM|$ со скоростью $(48-V)$ км/ч и $^2/_3$ $|LM|$ со скоростью $(48+2V)$ км/ч; поэтому время, за которое автомобиль преодолеет расстояние $|LM|$, является функцией от V:

$$f(V)=\frac{|LM|}{3(48-V)}+\frac{2|LM|}{3(48+2V)}.$$

Требуется определить минимум функции $f(V)$ на интервале $V\in\,]0;\,48[$. Так как функция $f(V)$ всюду внутри указанного интервала имеет производную, то для определения минимума достаточно определить нули производной функции $f(V)$ внутри интервала $]0;\,48[$ и исследовать знак производной. Имеем

$$f'(V)=\frac{|LM|}{3}\left[\frac{1}{(48-V)^2}-\frac{4}{(48+2V)^2}\right]=\frac{192\,|LM|\,(V-12)}{(48-V)^2(48+2V)^2}.$$

Производная $f'(V)$ обращается в нуль при $V=12$, меньше нуля $V\in\,]0;\,12[$ и больше нуля при $V\in\,]12;\,48[$, следовательно, функция $f(V)$ достигает минимума при $V=12$

Ответ: $V=12$ км/ч.

2. Пусть правильная треугольная пирамида $ABCD$ вписана в сферу радиуса R с центром в точке O. При этом вершины пирамиды принадлежат сфере, а высота пира-

миды $[DO_1]$, где O_1 центр равностороннего треугольника ABC, принадлежит диаметру $[DO_1]$ данного шара. Отметим, что рассматриваемая фигура обладает плоскостью симметрии DAD_1. Имеем $|OD|=|OA|=R$. По условию задачи $|OO_1|=0{,}3R$, $|D_1O_1|=0{,}7R$. Из подобия прямоугольных треугольников AD_1O_1 и ADO_1 находим

$$|AO_1|^2=|D_1O_1|\,|DO_1|=1{,}3R\cdot 0{,}7R=0{,}91R^2.$$

Длина отрезка $[AO_1]$ является радиусом описанного около треугольника ABC круга; тогда радиус r вписанного круга может быть найден по формуле $r=\frac{|AO_1|^2}{2}$.

Объем V_1 конуса, вписанного в пирамиду, равен

$$V_1=\frac{\pi r^2}{3}|DO_1|=\frac{1183\pi R^3}{12\,000}.$$

Отметим, что условиям задачи удовлетворяет и пирамида с вершиной в точке D_1. В этом случае объем V_2 конуса равен

$$V_2=\frac{637\pi R^3}{12\,000}.$$

3. Прямые $y=4$ и $y=6$ пересекаются с гиперболой $y=\frac{3}{x}$ в точках $(3/4,\ 4)$ и $(^1/_2,\ 6)$ соответственно. Поэтому площадь может быть вычислена по формуле

$$S=\int\limits_4^6\frac{3}{y}\,dy=3\ln\frac{3}{2}.$$

4. Используя формулы двойного угла для синуса и косинуса, преобразуем исходное уравнение к виду

$$6\cos 14x+3\sin 14x=28-2a.$$

Для решения последнего уравнения введем дополнительный угол $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, где $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{45}}$, $\cos\varphi=\frac{6}{\sqrt{45}}$. При этом уравнение принимает вид

$$\cos(14x-\varphi)=\frac{28-2a}{\sqrt{45}}.$$

Если $a\in\left[\frac{28-\sqrt{45}}{2};\ \frac{28+\sqrt{45}}{2}\right]$, то

$$x=\frac{1}{14}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\pm\arccos\frac{28-2a}{\sqrt{45}}\right)+\frac{\pi n}{7},$$

где $n\in Z$; если $a\notin\left[\frac{28-\sqrt{45}}{2};\ \frac{28+\sqrt{45}}{2}\right]$, то исходное уравнение не имеет действительных корней.

Вариант № 2

1. Если $p\in]15;\ 100]$, то следует взять $\frac{3000}{p-10}$ г p%-ного раствора и $\frac{600p-9000}{p-10}$ г 10%-ного раствора. Если $p\notin]15;\ 100]$, то задача не имеет решения.

2. Если ортогональная проекция сечения принадлежит меньшей из двух частей основания пирамиды, на которые секущая плоскость делит основание пирамиды, то площадь сечения дается формулой

$$S=\frac{a^2\sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left[2+\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right],$$

$$\beta\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$$

Если ортогональная проекция сечения принадлежит большей части основания пирамиды, то

$$S=\frac{2a^2\sin\alpha}{9\sin(\alpha+\beta)}\left[1+\frac{2\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right],$$

$$\beta\in[0;\ \operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\alpha)],$$

$$S=\frac{a^2\sin\alpha}{9\sin(\beta-\alpha)}\left[2-\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right],$$

$$\beta\in\left[\operatorname{arctg}(3\operatorname{tg}\alpha);\ \frac{\pi}{2}\right].$$

3. $\frac{1}{6}\ln\frac{3e}{8}$ кв. ед.

4. При $a\in]0;+\infty[$ критическая точка $x=\ln a$, если $a\notin]0;+\infty[$, то критических точек нет.

Физика

1. $\tau=\dfrac{2\pi|\vec g|R^2}{v_1^3-v_2^3}\approx 39$ ч.

2. $\Delta T=-T\dfrac{\rho|\vec g|l}{p_0+\rho|\vec g|l/2}\approx -11$ К.

3. $|\vec v|=\varphi_1\sqrt{\dfrac{4\pi\varepsilon_0R_1(R_2-R_1)}{mR_2}}\approx 4{,}6$ м/с.

4. $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{I|\vec B|l}{m|\vec g|}\approx 8^\circ$.

5. $\tau=\sqrt{2F(n+1)/|\vec a|}=0{,}5$ с.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, В. Машатин, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

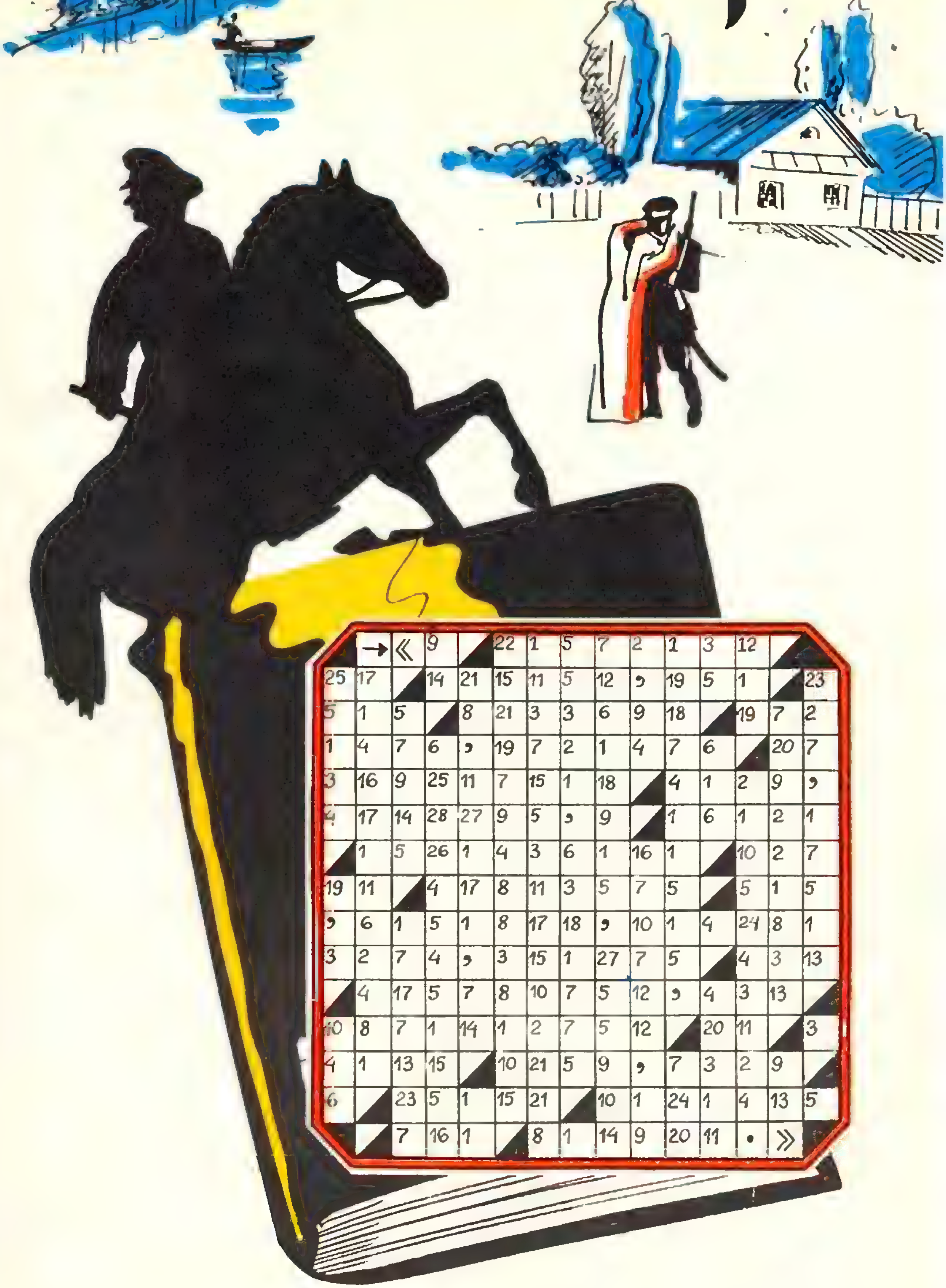
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 25/X—77 г.
Подписано в печать 6/XII—77 г.
Бумага $70\times108\ ^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,54 Т-20337
Цена 30 коп. Заказ. 2418.
Тираж 295 000 экз.

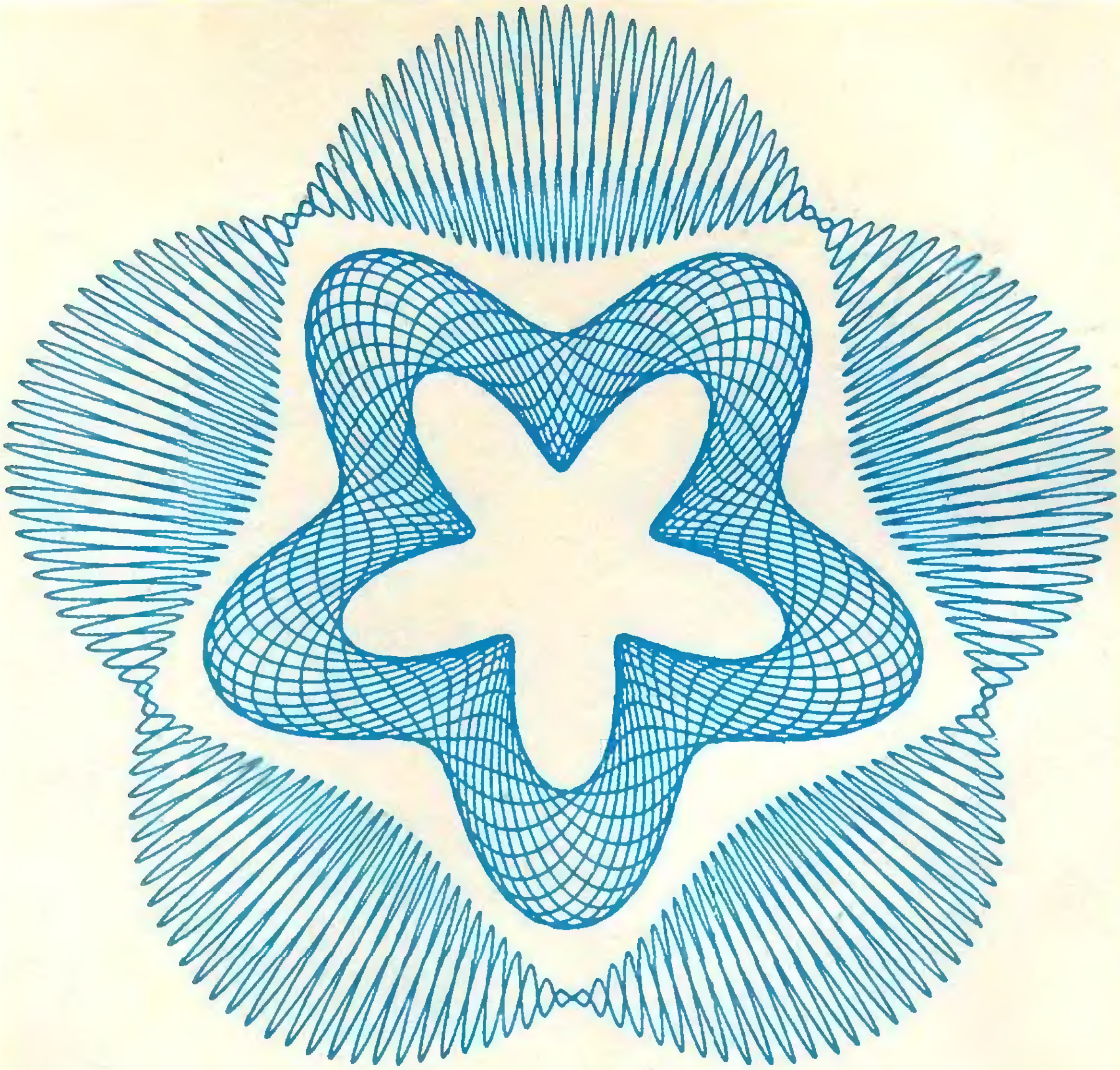
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



■	→	«	9	◢	22	1	5	7	2	1	3	12	◢	■
25	17	◢	14	21	15	11	5	12	,	19	5	1	◢	23
5	1	5	◢	8	21	3	3	6	9	18	◢	19	7	2
1	4	7	6	,	19	7	2	1	4	7	6	◢	20	7
3	16	9	25	11	7	15	1	18	◢	4	1	2	9	,
4	17	14	28	27	9	5	,	9	◢	1	6	1	2	1
◢	1	5	26	1	4	3	6	1	16	1	◢	10	2	7
19	11	◢	4	17	8	11	3	5	7	5	◢	5	1	5
,	6	1	5	1	8	17	18	,	10	1	4	24	8	1
3	2	7	4	,	3	15	1	27	7	5	◢	4	3	13
◢	4	17	5	7	8	10	7	5	12	,	4	3	13	◢
10	8	7	1	14	1	2	7	5	12	◢	20	11	◢	3
4	1	13	15	◢	10	21	5	9	,	7	3	2	9	◢
6	◢	23	5	1	15	21	◢	10	1	24	1	4	13	5
■	◢	7	16	1	◢	8	1	14	9	20	11	•	»	■

Эта криптограмма заимствована из газеты «Книжное обозрение». Читателям этой газеты она была предложена с ключевыми словами. Однако мы думаем, что читателям нашего журнала ключевые слова не нужны — они сумеют расшифровать ее и так.



На этом рисунке вы видите две кривые, полученные с помощью вычислительной машины. Уравнения этих кривых в полярной системе координат имеют вид:

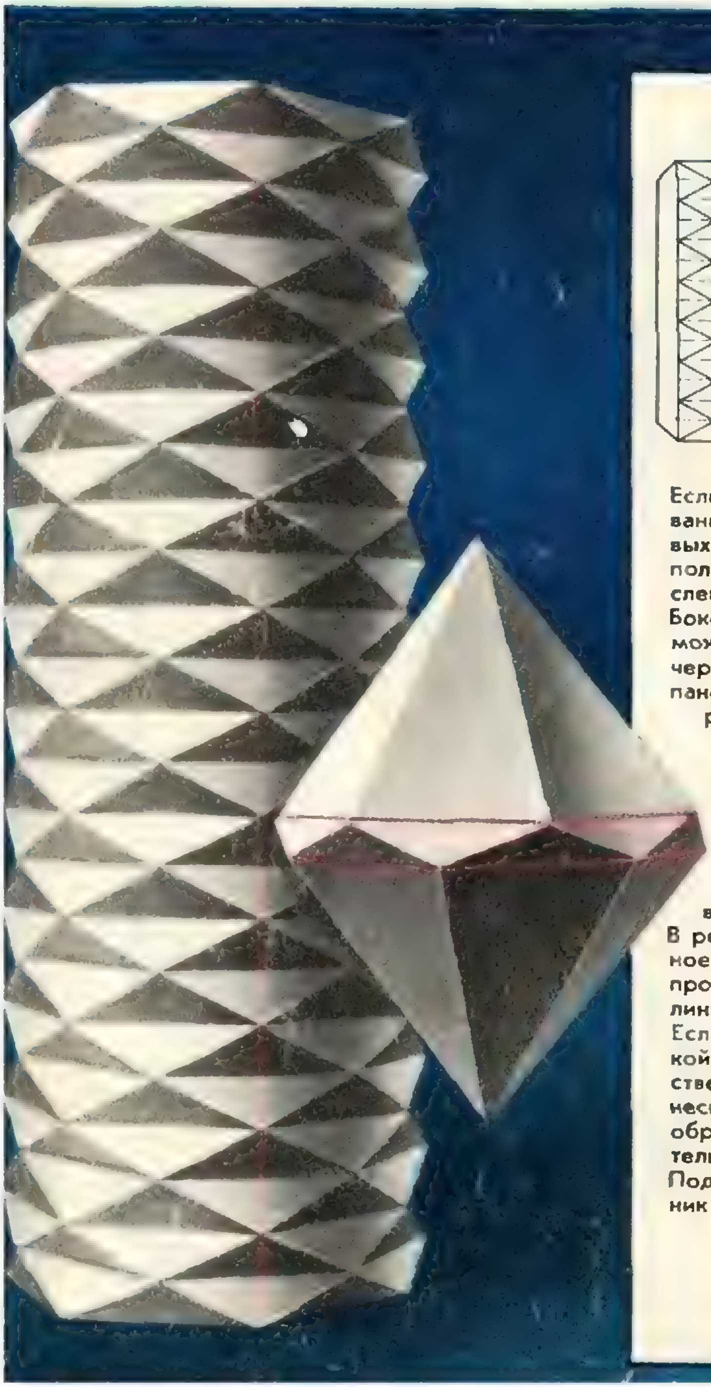
$$\rho = 35{,}5 + 10{,}5 \sin (80\varphi) \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right),$$

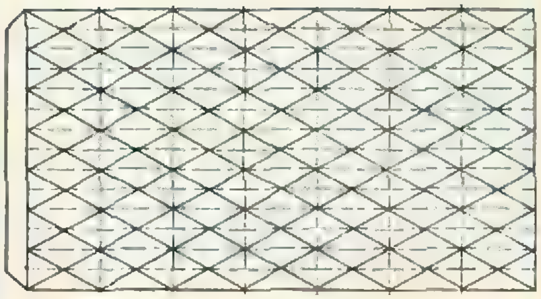
$$\rho = 18{,}5 + 11{,}5 \sin\left(\frac{79{,}5}{16}\varphi\right) \sin\left(\frac{1}{32}\varphi\right).$$

(О полярной системе координат мы писали в «Кванте» № 9, 1977, с. 51). Эти кривые напоминают графики модулированных по амплитуде сигналов. Попробуйте найти периоды этих кривых, то есть такие наименьшие положительные T, что $\rho(\varphi) = \rho(\varphi + T)$.

Ю. Котов.

Цена 30 коп.
Индекс 70465





Если сложить стопкой, прикладывая основание к основанию, множество одинаковых антипризм («Квант», 1976, № 1, с. 2), получится многогранник, изображенный слева.

Боковую поверхность этого многогранника можно получить следующим образом. Расчертите прямоугольник, снабженный клапаном, так, как показано на чертеже. Горизонтальные линни надрежьте с обратной стороны. Эти линии определят внутренние ребра многогранника. Диагональные линии надрежьте с лицевой стороны. Они определят внешние ребра многогранника. Развертка многогранника готова. Сворачивая ее в «цилиндр», следует надавливать пальцами на центры ромбов сетки.

В результате вы получите тело, изображенное слева. На его поверхности явственно просматриваются два семейства винтовых линий (см. статью на с. 55).

Если каждую сторону ромба заменить какой-нибудь кривой, получится «пространственный орнамент». Заменив лист бумаги несгораемой пленкой, вы можете таким образом изготовить себе абажур с изумительным геометрическим рельефом.

Подумайте, как связаны четырнадцатигранник и «цилиндр» слева.

В. Гамаюнов

НОМЕР
2

Основан в 1970 году

Квант

2
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Китайгородский.* Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах
10 *С. Семенов.* Рукопись, найденная в Сарагосе
14 *А. Дозоров.* Что это значит — «навести на резкость»?

Лаборатория «Кванта»

18 *А. Николаев.* Прибор для изучения преломления света

Математический кружок

20 *З. Скопец, Л. Кузнецова.* Седлообразная поверхность

◆

25 *В. Березин.* Сферический эллипс

Задачник «Кванта»

26 Задачи М486—М490; Ф498—Ф502
28 Решения задач М441—М443; Ф453—Ф457

По страницам школьных учебников

34 *А. Земляков, Б. Ивлев.* Вопросы по алгебре и анализу
36 *Б. Гейдман.* Композиция двух осевых симметрий

«Квант» для младших школьников

39 Задачи
40 *И. Белкин.* Спор о лягушке

Практикум абитуриента

46 *С. Алешин, М. Потапов, В. Слудский.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
49 *А. Зазело.* Множества значений числовых функций

Международные олимпиады школьников

51 *А. Савин.* XIX Международная олимпиада по математике
54 **Спрашивайте — отвечаем**

Информация

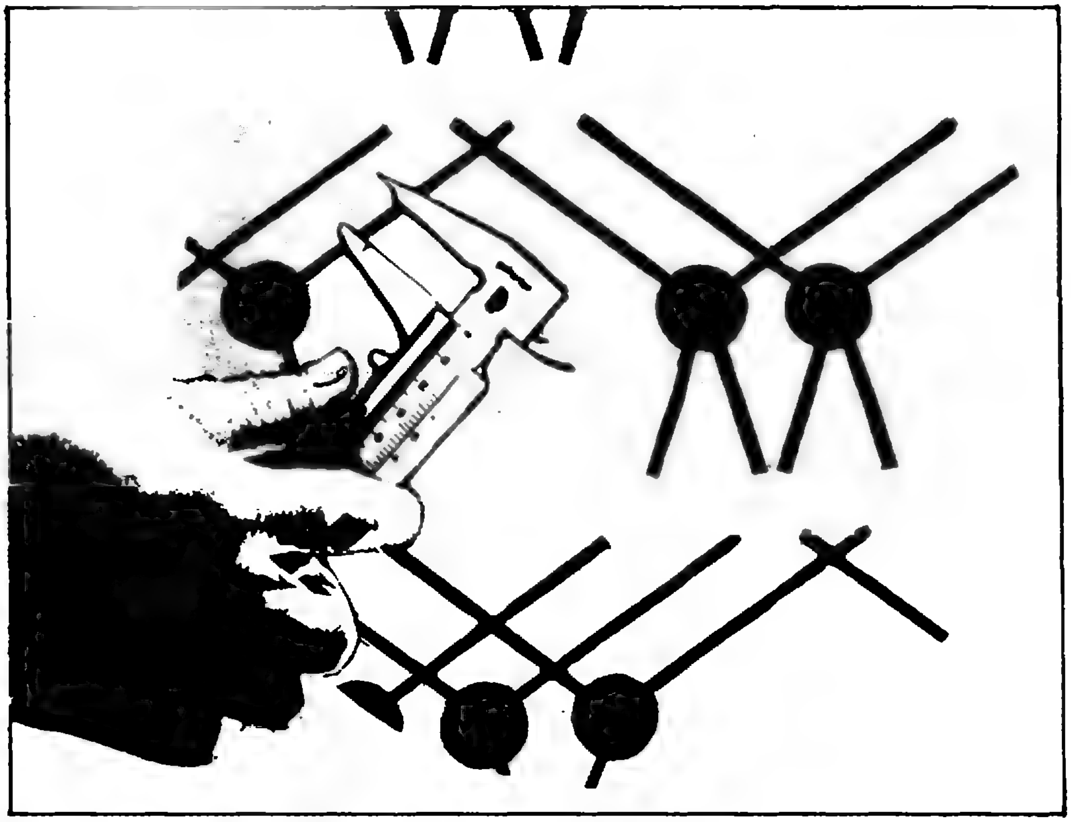
55 *Г. Гальперин.* Задачи XL Московской математической олимпиады школьников

Рецензии, библиография

56 *И. Клумова.* Памяти Отто Данкела
58 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(9, 17, 35, 38, 48, 53)*

На первой странице обложки изображено семейство сферических эллипсов. Эти же кривые окаймляют «полоски» и «шапочки», на которые «разрезан» другой экземпляр сферы. Подробнее о сферическом эллипсе читайте на с. 25.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978



А. Китайгородский

Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах

Слова «структура», «строение» — очень емкие по смыслу. Разные исследователи понимают под этими словами разные вещи. Биолог может вести речь о структуре мышечной ткани, имея в виду расположение волокон друг относительно друга; металлограф, говоря о строении сплава, обычно подразумевает форму и размеры зерен. Эти структуры наблюдаются с помощью обычного микроскопа при увеличении всего лишь в несколько сотен раз. Но те же самые слова используются и тогда, когда речь идет о частицах, входящих в состав атомного ядра, размеры которых измеряются триллионными долями сантиметра. Тут слово «структура» имеет уже условный смысл, и физики пользуются им с осторожностью, помня, что наглядные зрительные представления не годятся для столь малых кирпичиков мироздания.

В физике твердого тела слова «строение» и «структура» также могут употребляться в разных смыслах. Так, например, обсуждая электронное строение металла, имеют в виду вовсе не размещение электронов в пространстве, а характер распределения их по энергиям; говоря о структуре ферромагнитных материалов, описывают размеры, форму и расположение доменов. Есть и другие ситуации, где слово «структура» оказывается достаточно уместным.

В этой статье речь пойдет об атомной структуре кристаллов, под которой понимается узор, создаваемый центрами атомов. Атомная структура определяется рентгеноструктурным анализом, в основе которого лежит явление дифракции рентгеновских лучей. С помощью этого замечательного явления, открытого в 1912 году Максом Лауэ, удается измерить расстояния между центрами атомов твердого тела и определить их взаимное пространственное расположение. За 65 лет, которые прошли со времени открытия Лауэ, с помощью рентгеноструктурного анализа удалось установить геометрию расположения атомов примерно в десятке тысяч кристаллов.

Задача этой статьи заключается в том, чтобы познакомить читателя с основными идеями рентгеноструктурного анализа и дать представление о дороге, следуя которой, можно определить структуру кристалла: измерить расстояния между атомами, дать картину пространственного расположения атомов в молекуле и упаковку молекул в кристалле и т. п. Решая эту задачу, мы, естественно, предельно упростим ее. Наша цель — повторим еще раз — сделать ясными принципы, лежащие в основе метода.

На рисунке 1 изображена атомная структура кристалла йодистой ртути. Молекула этого вещества состоит из одного атома ртути и двух атомов йода. Атомы, образующие кристалл, расположены так, как детали рисунка обоев. Если раскрасить фигурки, соответствующие атомам разных сортов, в разные цвета, то получатся обои. Может быть, с эстетической точки зрения они оставят желать лучшего, но принцип обоев будет налицо: можно выделить элементарную ячейку, периодическим смещением которой в двух направлениях «строятся» обои. Про обои можно сказать, что они представляют двумерную решетку. Удалите мысленно все детали рисунка, кроме линий, и справедливость предыдущей фразы станет очевидной. Точки пересечения линий называются узлами.

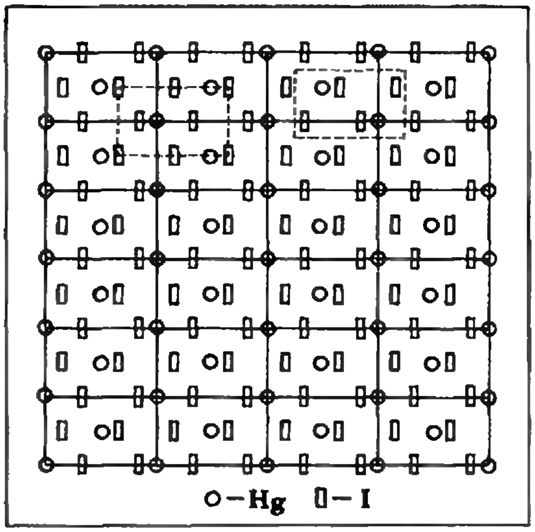


Рис. 1.

Выбор узлов и, соответственно, линий решетки, произволен. Тем не менее существуют некоторые правила выбора узлов. Дело в том, что от узла решетки отсчитываются координаты атомов, а поэтому естественно выбрать узел в симметричной точке. Из трех, указанных на рисунке 1 вариантов (из бесчисленного множества возможных), мы предпочли наиболее целесообразный.

Мы погрешили против истины, сказав, что на рисунке 1 изображена структура кристалла. На самом деле показана проекция структуры на плоскость. Кристалл — трехмерные обои. Решетка кристалла не двумерная, а трехмерная. Ячейка — не параллелограмм или прямоугольник, а параллелепипед. Он может быть прямоугольным, а в некоторых случаях — выродиться в куб. Ячейка может содержать один, два атома, а в сложных случаях — сотни и тысячи. Понятно, что исследователь, желающий познакомить читателя своей статьи со структурой изученного кристалла, ограничится тем, что изобразит вид в перспективе одной ячейки. На рисунке 2 показана структура очень простого кристалла (окиси цинка), а на рисунке 3 — сложного органического соединения.

Вы познакомились с минимальными сведениями, необходимыми для того, чтобы разобраться в сущности рентгеноструктурного анализа. Принцип этого мощнейшего способа изучения вещества состоит в регистрации вторичного рентгеновского излучения, которое исходит от всех атомов кристалла, когда на него

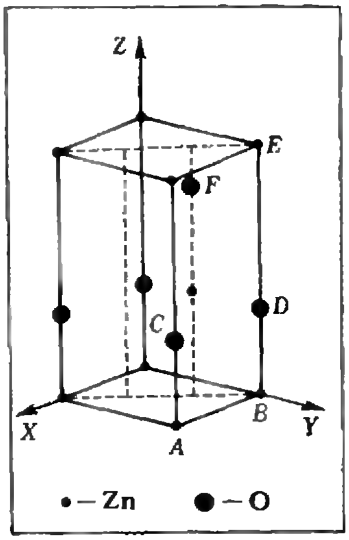


Рис. 2.

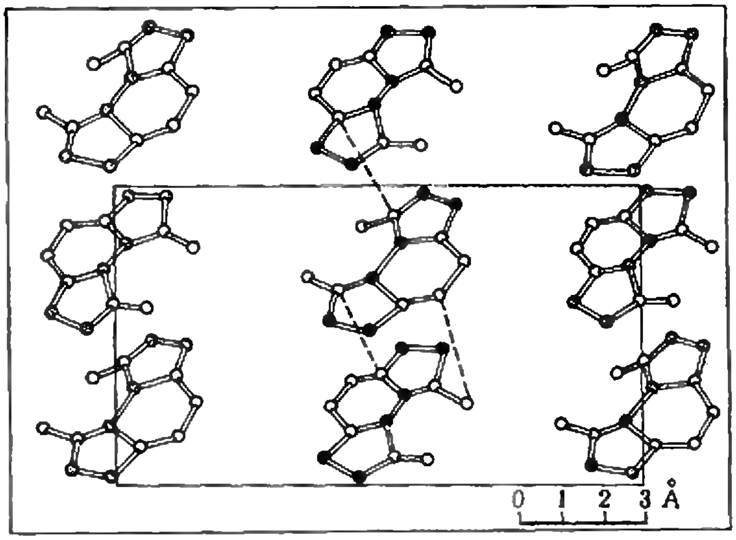


Рис. 3.

падает первичный узкий пучок рентгеновских лучей. Стараются подобрать условия опыта такими, чтобы кристалл был прозрачен для лучей. Тогда в создании рассеянного излучения (вторичного, дифрагированного — это все синонимы) будут участвовать все атомы кристалла.

Явление, о котором идет речь, далеко не простое. Но нам нет нужды входить в детали. Поэтому все проблемы будут рассмотрены на предельно простом примере. Первое упрощение — ограничимся изучением проекции структуры кристалла, второе — будем рассматривать прямоугольную решетку, третье — положим, что на ячейку приходится одна двухатомная молекула.

Сначала займемся описанием «пустой» решетки, из которой атомы «удалены». Остались одни узлы. Отец и сын Брэгги показали, что дифракцию рентгеновских лучей можно рассматривать как своеобразное избирательное (то есть происходящее лишь при некоторых дискретных значениях угла) отражение лучей от систем узловых плоскостей, на которые может быть разбита решетка.

Ясно, что пространственная решетка кристалла может быть разбита на семейства узловых плоскостей самыми разными путями. На картине проекции «освобожденной» от атомов решетки легко показать следы узловых плоскостей, перпендикулярных к плоскости чертежа (рис. 4). Мы изобразили всего лишь пять семейств плоскостей. Однако эффективными для избирательного отражения, сущность которого будет описана ниже, являются несколько десятков, а то и сотен плоскостей.

Каждая система плоскостей характеризуется индексами h и k. Их смысл иллюстрируется на примере семейства с индексами $h=10$ и $k=3$ (см. рис. 4). Чтобы не загромождать чертеж, мы построили шесть ближайших к узлу O плоскостей и провели еще одну, обозначенную L. Плоскость L является ближайшей к узлу O, отсекающей целое число периодов a и b по обеим осям решетки. Эти целые числа равны 3 по одной оси и 10 по другой. Проходя через ячейку O', плоскость L отсекает $^1/_{10}$ долю периода a и $^1/_3$ периода b. Смысл индексов h и k становится очевидным. Предоставляем вам самим составить фразу такого типа, как любят математики: «Индексами h и k называются...».

Системы плоскостей характеризуются также межплоскостным расстоянием d. Плоскость L — ближайшая к узлу O', поэтому $|O'B| = d$. Отрезки $|O'A|$ и $|O'C|$ можно записать, как b/k и a/h. Поскольку

$$\sin^2 \widehat{O'AB} + \cos^2 \widehat{BO'C} = 1,$$

получим

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}. \qquad (1)$$

(Предлагаем вам решить превосходную задачу, которая займет у вас не один час времени — выведите ана-

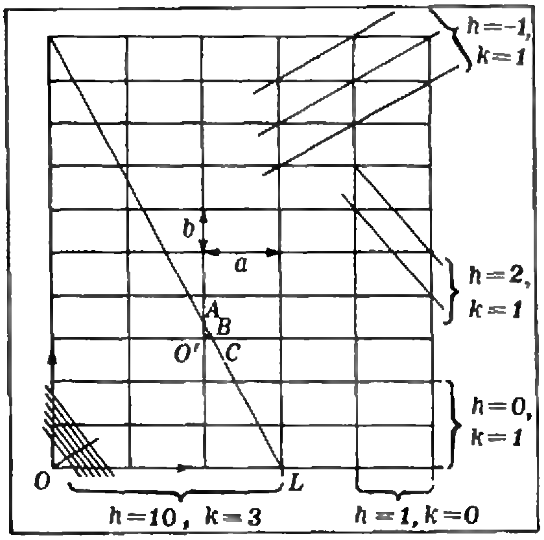


Рис. 4.

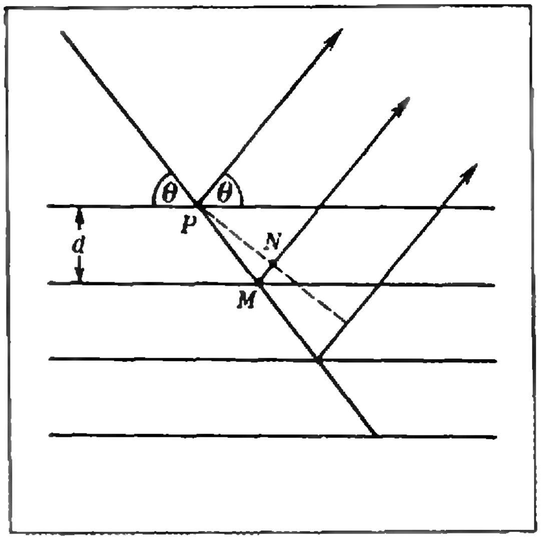


Рис. 5.

логичную формулу для трехмерной решетки, ячейка которой является косоугольным параллелепипедом.)

Переходим к выводу основного закона селективного (избирательного) отражения рентгеновских лучей кристаллом. Пусть падающий луч, представляющий собой электромагнитную волну определенной длины λ, падает на кристалл под каким-то углом. Мы вправе полагать, что отражение рентгеновской волны будет происходить по закону: угол падения равен углу отражения, то есть по такому же закону, как и для оптического луча. Но имеется существенное различие с оптическим лучом. Луч света не проникает в глубь кристалла, а рентгеновский луч способен пройти сквозь кристалл. Это означает, что отражение рентгеновского луча будет происходить не только от внешней поверхности кристалла, а от всех его атомных плоскостей.

Рассмотрим одну из систем, характеризующуюся межплоскостным расстоянием d (рис. 5). Каждая из плоскостей будет отражать падающий луч под одним и тем же углом θ (так называемый угол дифракции). Эти отраженные лучи когерентны, а потому должны интерферировать между собой. Причем вторичные (отраженные) лучи будут усиливать друг друга в том случае, если после отражения от всех плоскостей семейства они будут распространяться в одной фазе. Иными словами, если разность хода между лучами равняется целому числу n длин волн. Разность хода $|PM|+|MN|$ (см. рис. 5) между соседними отраженными лучами равна $2d \sin\theta$ (докажите!). Следовательно, условие дифракции — условие усиления отраженных лучей — будет иметь вид

$$2d \sin\theta = n\lambda. \qquad (2)$$

Оно носит название уравнения Брэгга.

Кристалл, как мы уже сказали, можно разбить на системы плоскостей бесконечным числом способов. Но эффективной для отражения (теперь вам понятен смысл этих слов, не правда ли?) окажется лишь система плоскостей с таким межплоскостным расстоянием и ориентированная так по отношению к падающему лучу, чтобы выполнялось уравнение Брэгга.

Если падающий луч монохроматический (то есть электромагнитная волна имеет одну определенную длину), то при произвольном положении кристалла по отношению к лучу отражение может и не произойти (вернее, суммарный эффект множества отражений может оказаться нулевым). Однако, поворачивая кристалл, мы можем по очереди привести в отражающее положение различные системы плоскостей. Именно такой способ работы и оказался на практике наиболее подходящим.

Из уравнения Брэгга (уравнение (2)) следует, что для заданной длины волны существует минимальное значение расстояния d между плоскостями, при котором возможно селективное отражение. Это расстояние равно $\lambda/2$ (поскольку синус не может быть больше единицы). С другой стороны, из приведенной выше формулы межплоскостных расстояний (формула (1)) ясно, что наибольшим значениям d соответствуют самые малые значения h и k.

Большей частью при рентгеноструктурном анализе используется одна из длин волн характеристического излучения меди, а именно 1,54 ангстрема *). Тогда наименьшие межплоскостные расстояния, способные принять участие в создании дифракционной картины, равны 0,77 ангстрема. Располагая этими сведениями, можно оценить, сколько систем плоскостей дадут отражения, если известны периоды решетки a и b. Попробуйте решить эту задачу геометрически для $a=10$ и $b=20$ ангстремам.

Для этой цели надо провести окружность радиуса $1/\lambda$ в пространстве (в нашем двумерном случае — в плоскости) «обратной» решетки. И далее подсчитать число... (чего, догадайтесь). Но что такое «обратная» решетка и зачем нам понадобилось это новое понятие?

В нашем случае обратной решеткой называется решетка, ячейка которой есть прямоугольник со сторонами $1/a$ и $1/b$. Как видите, прилагательное «обратная» вполне уместно. На рисунке 6 построена такая решетка. Выберем начало координат в каком-либо узле и проведем оси координат — одну перпендикулярно к оси кристалла, по которой период равен a, вторую перпендикулярно к оси с периодом b. Проведем теперь в этой решетке вектор (он так и называется: вектор обратной решетки), соединяющий начало отсчета с узлом обратной решетки, номер которого 10-й по одной оси, и 3-й по другой. Чему равна длина этого вектора? Возвратимся к уравнению (1) для межплоскостного расстояния и без труда и с интересом заметим, что длина вектора равна $1/d$ для системы плоскостей с $h=10$ и $k=3$.

Но этого мало. Легко доказать (докажите), что проведенный вектор обратной решетки перпендикулярен к системе плоскостей, для которых $h=10$, $k=3$. И, конечно, это справедливо для любого узла номера h, k. А как будет обстоять дело, если номер узла содержит кратный множитель n? Ответ очевиден — в этом случае длина вектора обратной решетки будет равняться n/d.

Вот теперь мы располагаем всеми необходимыми сведениями для того, чтобы вернуться к опыту. В чем же состоит эксперимент? Кристалл устанавливается на специальный держатель так, чтобы одна из его осей (одно из ребер его элементарной ячейки) была вертикальной, и поворачивается около этой оси. Таким способом мы по очереди подставляем в «отражающее» положение все системы узловых плоскостей кристалла. Для того чтобы «поймать» отраженный луч, можно прибегнуть ли-

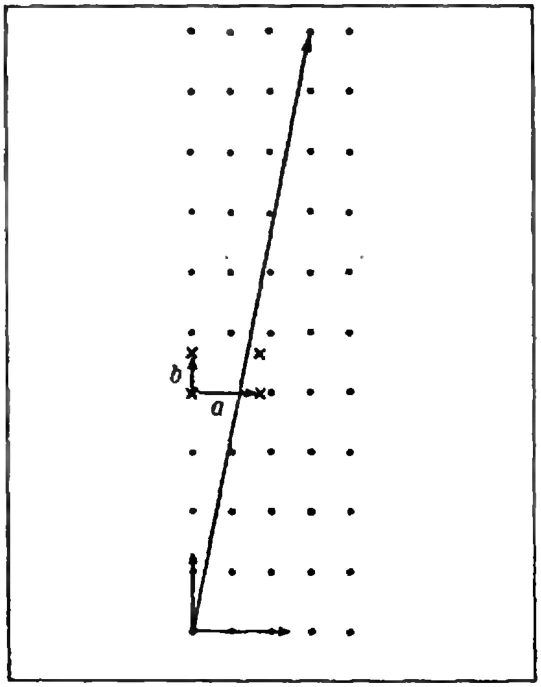


Рис. 6.

---

*) 1 ангстрем = 1 Å = 10^{-10} м.

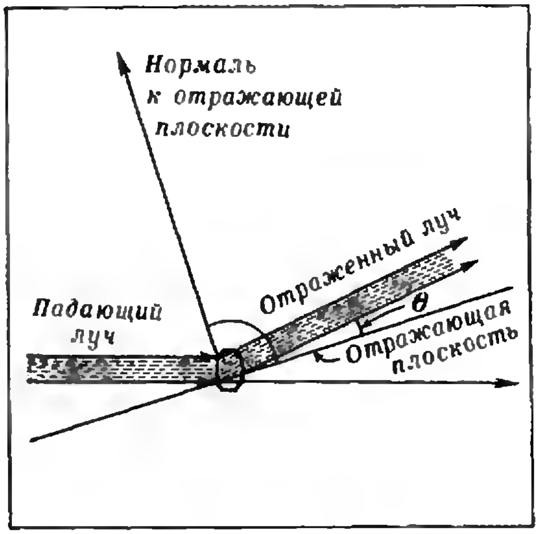


Рис. 7.

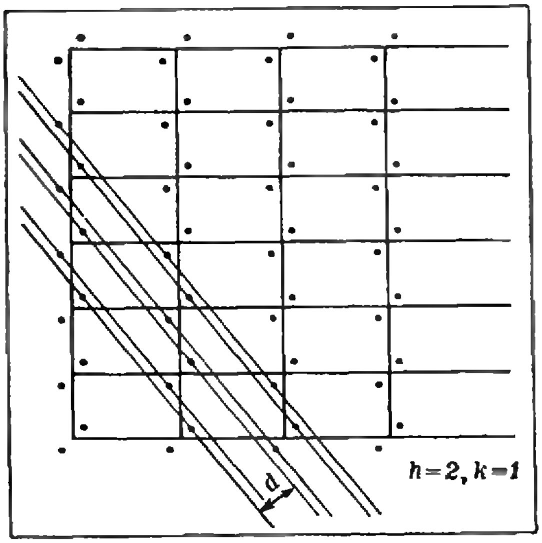


Рис. 8.

бо к фотографическому методу, либо использовать ионизационную камеру, счетчик Гейгера или иной прибор, регистрирующий ионизирующее излучение.

Сейчас, разумеется, все это делается автоматически, а в то время, когда пишущий эти строки начинал работать, процедура была такой. Устанавливался кристалл, затем приемник вторичного луча проворачивался во всем диапазоне углов. Глаз следил при этом за показывающим ток прибором. Потом кристалл поворачивался, скажем, на один градус, и далее эти действия повторялись до тех пор, пока мы не «натыкались» на отраженный луч. При этом, как ясно из рисунка 7, фиксировались два угла — значение брэгговского угла θ и положение нормали к отражающей плоскости (по отношению к какому-либо произвольному началу отсчета).

Перед исследователем лежал лист бумаги, и он начинал строить обратную решетку. Откладывал положение нормали к отражающей плоскости и наносил на линию этой нормали значение n/d, которое однозначно определялось из уравнения Брэгга. Когда эта работа заканчивалась (в старое доброе время она занимала месяцы, а сейчас автоматический дифрактометр выполняет ее в сотни раз быстрее), физик обретал картину обратной решетки. Из ее ячейки он немедленно выяснял размеры ячейки кристалла, а каждому отражению мог приписать номер узла обратной решетки, а значит, индексы h и k и порядок отражения n.

Кроме того, исследователю известны интенсивности всех отражений. Таким образом, в его распоряжении имеются практически все сведения о структуре кристалла, все, что касается характера строения молекулы из атомов и кристалла из молекул.

Теперь нам надо перейти от «пустой» решетки, состоящей из одних узлов, к решетке, начиненной атомами. На каких деталях дифракционной картины сказывается структура ячейки? Ответ окажется следующим: структура ячейки влияет на интенсивность отраженных лучей. Что же касается геометрии дифракционной картины, то она определяется только видом решетки. Атомы внутри ячейки не добавляют «лишних» отраженных лучей. В то же время вполне возможно, что структура ячейки заставит пропасть некоторые отражения — доведет их интенсивность до нуля.

Откуда следует такое заключение? Дело в том, что атомы внутри ячейки не создадут новых систем плоскостей. Узор атомов приведет лишь к возникновению «вставных» плоскостей. Взгляните, на рисунке 8 изображена та же решетка, что и на рисунке 4. Но теперь она не «пустая». Выберем опять предельно

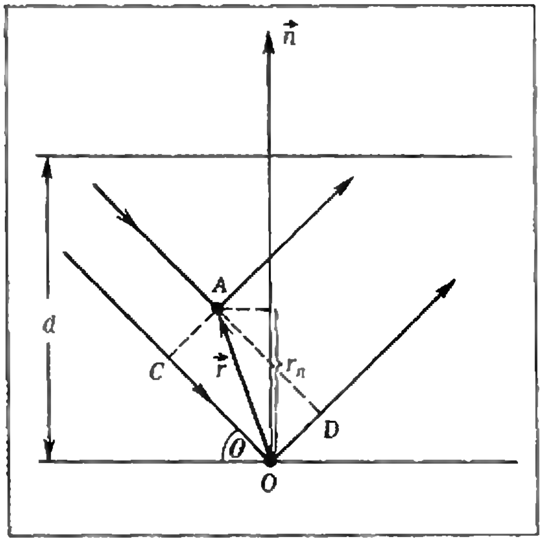


Рис. 9.

простой случай. Предположим, что реальная решетка построена из двухатомных молекул, а узел решетки был взят в центре такой молекулы. Реальная система плоскостей (для примера взят случай $h=2$ и $k=1$) будет выглядеть теперь, как показано на рисунке 8. Отраженный луч пойдет в ту же сторону, брэгговский угол не изменится.

Покажем, что интенсивность отраженного луча будет зависеть от структуры ячейки — в данном случае от межатомного расстояния в молекуле и от угла, который образует ось молекулы с осью ячейки.

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды волны. Действительно, пусть в точке наблюдения поле, создаваемое решеткой атомов, записывается как $A \cos \omega t$. Интенсивность равна $\overline{A^2 \cos^2 \omega t}$. Черточка сверху означает усреднение по времени (колебания происходят быстро, и опыт фиксирует средние значения). Но $\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ (это несложно доказать). Поэтому интенсивность оказывается пропорциональной A^2 — квадрату амплитуды волны.

В случае решетки двухатомных молекул результирующее поле электромагнитной волны можно рассматривать как сумму полей двух простых решеток. Эти два поля придут в точку наблюдения со сдвигом фаз, который мы обозначим 2α. Сохраняя выражение $A \cos \omega t$ для решетки узлов, мы запишем теперь сумму полей двух решеток в виде

$$A \cos (\omega t+\alpha)+A \cos (\omega t-\alpha).$$

Каждый узел «расщепился» на две частицы, создающие одно поле с опережением по фазе, а другое с отставанием. Складывая, возводя в квадрат и усредняя по времени, мы получим, что интенсивность отраженного луча будет пропорциональна $\cos^2 \alpha$.

По определению, $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta$, где λ — длина волны, а Δ — разность хода. Хотя вывод выражения для разности хода Δ ничуть не отличается от вывода формулы Брэгга, мы все же для этого случая провели аккуратное построение на рисунке 9, из которого читатель, слегка помучившись, найдет нужное выражение:

$$\Delta = |OC| + |OD| = 2r_n \sin \theta,$$

где r_n — проекция радиуса-вектора $\vec{r}$ (соединяющего атомы молекулы) на направление распространения отраженной волны (на направление нормали $\vec{n}$), θ — брэгговский угол рассеяния. Используем уравнение Брэгга и определение обратного вектора:

$$\Delta = 2r_n \sin \theta = \lambda r_n \frac{n}{d},$$

откуда разность фаз

$$\alpha = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} = 2\pi r_n \frac{n}{d}.$$

Итак, интенсивность отраженной волны, пропорциональная $\cos^2 \alpha$, действительно определяется структурой элементарной ячейки кристалла. Очевидно, что если атомов в ячейке не два, а много, то все рассуждения будут аналогичными.

Что же... задача решена? Интенсивности дифрагированных лучей связаны со структурой в общем-то простой формулой; расчет интенсивностей отраженных лучей по заданной структуре не сложен. Дело сводится к тому, чтобы определить разности хода между волнами, отраженными всеми «вставными» решетками. Вы можете справиться с этой задачей и для кристалла, состоящего из сотни атомов. Вопрос лишь во времени.

Но читатель, несомненно, заметил, что расчет, о котором идет речь, не тот, который нам нужен. Задача состоит в нахождении атомного строения из данных опыта, а не в том, чтобы рассчитать дифракционную картину, исходя из сведений о структуре. Прямая задача намного сложнее обратной. Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды результирующей волны, которая есть сумма тригонометрических функций. Не только технически сложно, но и просто невозможно определить аргументы косинусов, зная лишь квадрат их сумм. Вот если бы опыт давал значения амплитуд рассеяния, тогда дело обстояло бы совсем просто.

На первый взгляд ситуация кажется безнадежной. Долгое время исследователи действовали так называемым методом проб и ошибок. Это значит: придумывали структуру и смотрели, сочетается ли она с опытом. Но так далеко не уедешь.

Были придуманы способы обойти эту трудность. Решающую роль при этом сыграли электронно-вычислительные машины. Хотелось бы дать читателю идею о том, как эта трудность обходится, но разговор наш о рентгеноструктурном анализе затянулся. «Маленькие хитрости», к которым прибегают исследователи, это, во-первых, введение в структуру тяжелого атома (тогда в первом приближении можно считать, что кристалл состоит из одних этих атомов) и, во-вторых, очень изящная теория, которая показывает, что между разными структурными амплитудами имеются связи.

Да, хорошо было бы рассказать об этом читателю, но для «Кванта» беседа была бы слишком длинной. Посему ничего не остается, как посоветовать интересующемуся читателю обратиться к специальной литературе.

Об успехах метода судят по его результатам. То обстоятельство, что на сегодня определены структуры более 15 тысяч кристаллов, в том числе несколько десятков структур белков, молекулы которых состоят из многих тысяч атомов, говорит само за себя. Определение структуры сложных молекул закладывает фундамент биологической химии и биологической физики. Эти науки находятся сейчас в бурном периоде развития. От них ждут открытия секретов жизни, болезней и смерти. Рентгеноструктурный анализ, несмотря на свой солидный шестидесятипятилетний возраст, остается на передней линии фронта науки.

---

a = a + 1!

Докажем, что любое число равно числу, на единицу большему:

$$a=a+1.$$

Возьмем тождество

$$a^3-(2a+1)a=(a+1)^2-(a+1)(2a+1).$$

Прибавляя к обеим его частям квадрат числа $\frac{2a+1}{2}$, получим:

$$\left(a-\frac{2a+1}{2}\right)^2=\left(a+1-\frac{2a+1}{2}\right)^2.$$

Извлекая квадратные корни из обеих частей равенства, получим:

$$a-\frac{2a+1}{2}=a+1-\frac{2a+1}{2},$$

откуда

$$a=a+1,$$

что и требовалось доказать.

Где ошибка? (Этот софизм прислал в редакцию наш постоянный читатель С. Сефибеков).

С. Семенов

Рукопись, найденная в Сарагосе

Совсем недавно при раскопках в испанском городе Сарагоса археологи обнаружили старинную библиотеку, принадлежавшую некогда известной торговой фамилии Суаресов. Среди прочих книг там оказалась история семьи. Мы сейчас познакомим читателя с одним из фрагментов этой рукописи, поскольку он содержит постановку интересной и современной математической задачи. Итак...

«Вступив в тот возраст, когда рассудительный человек должен позаботиться о преемнике и продолжателе дела, Суарес решил призвать к себе сыновей, Алонсо и Лопеса, чтобы выяснить, насколько они способны заменить его. Сыновья не замедлили явиться, и Суарес обратился к ним с такими словами: «Дети! Я намерен внести от имени каждого из вас сроком на десять лет в некоторое надежное предприятие по 100 000 реалов. Это дело будет приносить ежегодно каждому 20% прибыли, причем распоряжаться вы сможете только этой суммой, но отнюдь не самим капиталом. Часть этих денег вы можете прибавлять в конце года к капиталу, а остальное тратить, как вам вздумается. Ваша цель будет состоять в том, чтобы за 10 лет как можно больше денег потратить на свои нужды, ибо наживать деньги стоит только для того, чтобы их потом тратить. Ответьте мне, как вы будете распоряжаться своими доходами?»

Первым отвечал старший сын Алонсо, известный далеко за пределами города своим легкомыслием и расточительностью: «Отец! Я бы тратил весь доход сразу, поскольку не вижу смысла заботиться об увеличении капитала, мне не принадлежащего!»

Лопес был, напротив, юношей скромным и добродетельным. Он так отвечал отцу: «Я бы в течение 9 лет обходился лишь тем, что и сейчас имею в твоем доме, отец, а свой доход прибавлял к капиталу. На десятый год я потрачу причитающиеся мне 20%. Надеюсь, что это будет значительная сумма, поскольку капитал, благодаря моим вложениям, значительно увеличится».

Услышав ответы сыновей, почтенный купец нахмурился, и было видно, что ответами он остался недоволен. Когда же сыновья стали просить у него совета, он сказал: «Крайняя расточительность, дети мои, также неразумна, как и крайняя бережливость, а правильное решение находится между этими крайностями. Учитывая это, я стал бы половину дохода прибавлять к капиталу, заботясь о его увеличении, а половину тратил на свои нужды. Вы же, как я выяснил, еще недостаточно разумны и, увы, не способны заменить меня в делах». На другой же день Суарес приказал сыновьям собираться в путь через Пиренеи, в далекий Париж, и обучаться у известных парижских ученых математике и прочим наукам...».

Здесь мы прервем цитату из «исторического документа», поскольку интересующая нас задача уже сформулирована и даже предложены три различных варианта ее решения. Для начала сравним эффективность этих решений. Легко подсчитать (желающие могут проделать это самостоятельно, а остальные — воспользоваться формулами (2) и (3) настоящей статьи) суммы денег, истраченные отцом (S), Алонсо (A) и Лопесом (L) за 10 лет. А именно,

$$S=\left(\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10}-1\right)10^5\approx 159374 \text{ реала},$$

$$A=2\cdot 10^5=200\,000 \text{ реалов}$$

$$L=\frac{1}{6}\left(\left(1+\frac{1}{5}\right)^{5}\right)^{2}10^5\approx 103169 \text{ реалов.}$$

Результаты сравнения парадоксальны. Бережливый Лопес, оказывается, предложил наихудшее решение, а легкомысленный Алонсо распорядился своими доходами лучше своего рассудительного и многоопытного родителя! Убедительность внешне правдоподобных доводов оказалась обманчивой. Быть может, наилучшее решение отлично от всех трех предложенных? Попробуем в этом разобраться.

Итак, обозначим величину капитала (после отчисления процентов и, возможно, дополнительного вклада) в конце k-го (считая с момента первоначального вклада) года через x_k, $k=0, \ldots, N$. В нашей задаче $N=10$, а величина начального вклада $x_0=10^5$. За $(k+1)$-й год прибыль составит величину ax_k (у нас $a=\frac{1}{5}$), и если доля λ_k этой величины была прибавлена к капиталу в конце $(k+1)$-го года, то его прирост за год составит

$$x_{k+1}-x_k=\lambda_k a x_k \quad (k=0, \ldots, N). \quad (1)$$

Остальная часть прибыли $(1-\lambda_k)ax_k$ будет потрачена.

Наши возможности влияния на процесс роста капитала или, другими словами, управления этим процессом, сводятся к выбору вектора — упорядоченного набора чисел $\bar{\lambda}=(\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})$, $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$. Такие векторы мы будем далее называть *управлениями*. Выбор некоторого управления $\bar{\lambda}$ полностью определяет значение *целевой функции* F — общей суммы денег, потраченных за N лет:

$$F(\bar{\lambda})=(1-\lambda_0)ax_0+$$
$$+(1-\lambda_1)ax_1+\ldots+(1-\lambda_{N-1})ax_{N-1}. \quad (2)$$

Задача состоит в нахождении наилучшего, *оптимального управления* $\lambda^{\text{опт}}$, т. е. такого управления $\lambda^{\text{опт}}$, что для любого другого управления $\bar{\lambda}$

$$F(\bar{\lambda})\leqslant F(\bar{\lambda}^{\text{опт}}).$$

Вспомним, что в качестве оптимального Алонсо предлагал управление $(0, \ldots, 0)$, Лопес — $(1, \ldots, 1, 0)$, а почтенный купец — $\left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$.

Может быть, у читателя создалось впечатление, что такие «задачи управления» нужны лишь тем, кто получает богатое наследство? Разумеется, нет! Вот еще пример. На ферме разводят черно-бурых лисиц. Количество лисиц обозначим через x_k, где $k=0, 1, \ldots, N$ — номер года (нас интересует судьба фермы на ближайшие

N лет). Приплод в начале $(k+1)$-го года составляет ax_k (где $a > 0$ — известное число), причем доля λ_k этого приплода остается на ферме, а остальная часть отправляется на заготовки пушнины. Таким образом, справедливо соотношение (1), а количество шкурок, полученных за N лет, выражается формулой (2). Как видите, и здесь мы имеем управляемый процесс, состояние которого в каждый «момент» $k = 0, 1, \ldots, N$ характеризуется величиной x_k, причем на течение этого процесса мы можем воздействовать, выбирая управляющее воздействие λ_k из «области управления», которой в данном случае является отрезок $[0, 1]$. Задача состоит в нахождении такого управления, при котором поставленная цель осуществлялась бы наилучшим образом — целевая функция F достигала бы максимума. Подобные задачи «оптимального управления» процессами, протекающими в «дискретном времени», возникают при исследовании производственных задач на заводах (в этом случае k — номер завершенного производственного цикла или плановый месяц и т. п.), при описании работы нескольких последовательно соединенных химических реакторов (k — номер реактора) и т. д.

Область математики, в которой разрабатываются методы решения подобных задач, называется *теорией оптимального управления*. Эта теория за последние два десятка лет превратилась в мощную современную математическую науку, впечатляющую как глубокими теоретическими результатами, так и эффективностью в решении прикладных задач управления процессами. Развитие этого направления математической мысли связано с именами таких известных математиков, как Л. С. Понтрягин, Р. Беллман, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Н. Н. Красовский. Мы не будем, однако, излагать общую теорию оптимального управления, созданную этими авторами, а исследуем нашу задачу средствами элементарной математики.

Преобразуем формулу (1) к виду

$$x_{k+1}=(1+a\lambda_k)x_k, \ (k=0, \ldots, N-1). \quad (3)$$

Перемножив равенства (3) почленно при $k = 0, \ldots, n-1$, мы получим в явном виде зависимость x_n от управления $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{N-1})$

$$x_n=(1+a\lambda_0)(1+a\lambda_1)\ldots(1+a\lambda_{n-1})x_0. \quad (4)$$

Предложение I. *Пусть* $\overline{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_{N-1})$ — *некоторое управление*, $0 \leqslant i \leqslant N-2$, $\lambda_i < \lambda_{i+1}$, *а управление* $\overline{\overline{\lambda}}$ *отличается от* $\overline{\lambda}$ *только перестановкой чисел* λ_i *и* λ_{i+1}. *Тогда* $F(\overline{\overline{\lambda}}) > F(\overline{\lambda})$.

Для доказательства достаточно проследить, как преобразуются слагаемые суммы (2) при перестановке чисел λ_i и λ_{i+1}. В силу формулы (4) слагаемые $(1-\lambda_k)ax_k$ при $k \leqslant i-1$ вообще не зависят от λ_i и λ_{i+1} и, очевидно, не меняются при такой перестановке. Слагаемые $(1-\lambda_k)ax_k$ при $k > i+1$ в силу формулы (4) имеют вид

$$(1-\lambda_k)ax_0(1+a\lambda_0)\ldots(1+a\lambda_i)\times$$
$$\times(1+a\lambda_{i+1})\ldots(1+a\lambda_{k-1}),$$

и, следовательно, также не меняются при перестановке чисел λ_i и λ_{i+1}. Таким образом, нам остается рассмотреть лишь сумму остальных двух слагаемых:

$$(1-\lambda_i)ax_i + (1-\lambda_{i+1})ax_{i+1} =$$
$$= (1-\lambda_i)ax_i + (1-\lambda_{i+1})(1+$$
$$+a\lambda_i)ax_i = ax_i[(2-\lambda_i-\lambda_{i+1}-$$
$$-a\lambda_i\lambda_{i+1}) + a\lambda_i].$$

Величина $x_i > 0$ и не зависит от λ_i и λ_{i+1}, выражение в круглых скобках при перестановке не меняется, а второе слагаемое в квадратных скобках возрастает. Следовательно, $F(\overline{\overline{\lambda}}) > F(\overline{\lambda})$.

Предложение II. *Пусть* $\overline{\mu}$ — *некоторое управление. Тогда для любого* $n = 0, \ldots, N$ *существует такое управление* $\overline{\mu}^{(n)} = (\mu_0^{(n)}, \ldots, \mu_{N-1}^{(n)})$, *что*
1° $\mu_i^{(n)}$ есть 0 или 1 при любом $i < n$,
2° $F(\overline{\mu}^{(n)}) \geqslant F(\overline{\mu})$.

Докажем это утверждение методом математической индукции. При $n = 0$ это утверждение очевидно, поскольку можно положить $\overline{\mu}^{(0)} = \overline{\mu}$ и утверждения 1° и 2° будут выполнены автоматически.

Предположим, что для $n = k$ искомое управление существует — $\overline{\mu}^{(k)} = (\mu_0^{(k)}, \ldots, \mu_{N-1}^{(k)})$. Рассмотрим функцию $y(t)$ одного переменного t, областью определения которой является отрезок $[0, 1]$, заданную формулой

$$y(t) =$$
$$= F(\mu_0^{(k)}, \ldots, \mu_{k-1}^{(k)}, t, \mu_{k+1}^{(k)}, \ldots, \mu_{N-1}^{(k)}).$$

Из формул (2) и (4) сразу видно, что $y(t)$ есть линейная функция t, т. е.

$$y(t) = At + B$$

при некоторых A и B. Заметим, что линейная функция на отрезке $[0, 1]$ достигает максимума в нуле, если $A < 0$, в единице, если $A > 0$, а при $A = 0$ — постоянная функция. Положим теперь

$$\mu_k^{(k+1)} = \begin{cases} 0, & A \leqslant 0, \\ 1, & A > 0, \end{cases}$$

и $\mu_i^{(k+1)} = \mu_i^{(k)}$ при $i \neq k$, $0 \leqslant i \leqslant (N-1)$. Управление $\overline{\mu^{(k+1)}}$ удовлетворяет условиям 1° и 2° при $n = k+1$. Действительно, числа $\mu_i^{(k+1)}$ при $i < k$ суть нули или единицы по предположению индукции, а $\mu_k^{(k+1)}$ есть нуль или единица по определению. Далее, поскольку по определению числа $\mu_k^{(k+1)}$ для любого t, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$y(t) \leqslant y(\mu_k^{(k+1)}),$$

то $F(\overline{\mu^{(k+1)}}) \geqslant F(\overline{\mu^{(k)}})$. По предположению индукции $F(\overline{\mu^{(k)}}) \geqslant F(\overline{\mu})$, и, следовательно, $F(\overline{\mu^{(k+1)}}) \geqslant F(\overline{\mu})$. Доказательство закончено.

Выделим теперь среди всех управлений управления некоторого специального, простейшего вида. А именно, рассмотрим такое управление $\overline{\theta}^{(m)}$, что

$$\theta_i^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{при } i < m, \\ 0 & \text{при } i \geqslant m, \end{cases}$$

для некоторого m, $0 \leqslant m \leqslant N$. Множество управлений такого вида — мы их в дальнейшем будем называть *ступенчатыми* — содержит $(N+1)$ элемент. Оказывается, что в нашей задаче оптимальное управление достаточно искать среди ступенчатых.

Теорема. *Для любого управления $\overline{\lambda}$ существует такое ступенчатое управление $\overline{\omega}$, что $F(\overline{\omega}) \geqslant F(\overline{\lambda})$.*

Действительно, в силу предложения II существует такое управление $\overline{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_{N-1})$, что μ_i есть нуль или единица при любом $i = 0, \ldots, N-1$ и $F(\overline{\mu}) \geqslant F(\overline{\lambda})$. Далее, заметим, что если среди чисел $\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}$ есть 0, то, переставляя его местами со следующим за ним числом, мы не уменьшим значения целевой функции F в силу предложения I. Такими перестановками все нули можно переместить в конец набора, определяющего управление, т. е. перейти к некоторому ступенчатому управлению $\overline{\omega}$, причем будут выполнены неравенства $F(\overline{\omega}) \geqslant F(\overline{\mu}) \geqslant F(\overline{\lambda})$. Теорема доказана.

Выберем теперь среди ступенчатых управлений оптимальное. В силу формул (2) и (4)

$$F(\overline{\theta}^{(m)}) = (N-m)a(1+a)^m x_0.$$

Величина

$$C_m = \frac{F(\overline{\theta}^{(m+1)})}{F(\overline{\theta}^{(m)})} = (1+a)\left(1 - \frac{1}{N-m}\right)$$

убывает при возрастании m. Обозначим через M первое целое число, большее либо равное нулю и $N - 1 - \frac{1}{a}$. Тогда в силу определения чисел C_m и выбора числа M, справедливы неравенства

$$C_0 > C_1 > \ldots > C_{M-1} > 1 \geqslant C_M > \\ > C_{M+1} > \ldots > C_{N-1}.$$

Следовательно,

$$F(\overline{\theta}^{(0)}) < \ldots < F(\overline{\theta}^{(M)}) \geqslant F(\overline{\theta}^{(M+1)}) > \\ > F(\overline{\theta}^{(M+2)}) > \ldots > F(\overline{\theta}^{(N)}).$$

Таким образом, в качестве оптимального можно выбрать управление $\overline{\theta}^{(M)}$.

Вернемся к нашей задаче из «древней рукописи». Для нее $N = 10$, $u = \frac{1}{5}$ и $M = 4$. Таким образом, управление $\overline{\theta}^{(4)} = (1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$ будет оптимальным, а значение целевой функции — общей суммы потраченных за десять лет денег — при выбранном таким образом управлении есть

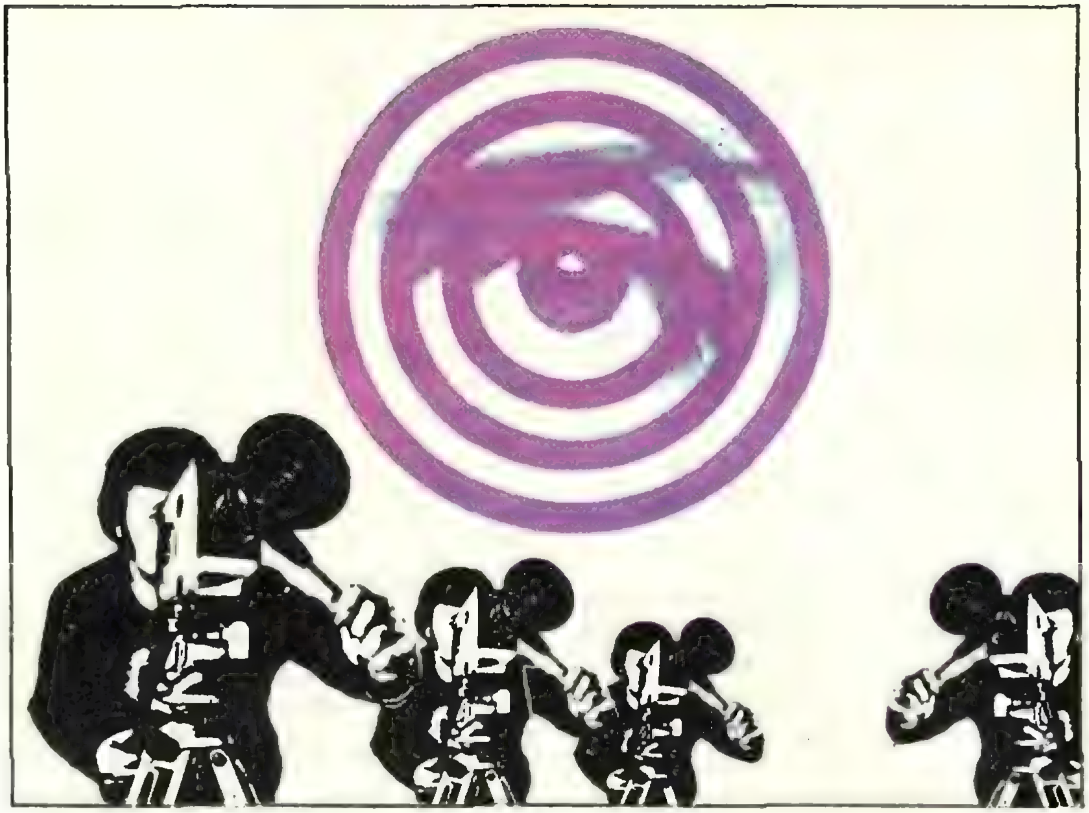
$$F(\overline{\theta}^{(4)}) = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^4 \times \\ \times 10^5 \frac{6}{5} \approx 248832 \text{ реала}.$$

Таким образом, решения задачи, предложенные нашими тремя героями, действительно не являлись оптимальными. Заметим, что управление $\overline{\theta}^{(5)}$ также оптимально, поскольку $C_4 = 1$ и $F(\overline{\theta}^{(4)}) = F(\overline{\theta}^{(5)})$. Следовательно, оптимальное управление может быть выбрано среди ступенчатых, вообще говоря, не единственным образом.

Задача 1. Какие условия на a и N обеспечивают единственность оптимального управления среди ступенчатых?

Задача 2. Верно ли, что для нашей задачи оптимальное управление обязательно должно быть ступенчатым?

Задача 3. Найти такое наименьшее число лет $N > 10$, что управление бережливого Лопеса (1, ..., 1,0) все же окажется выгодней, чем управление (0,0, ..., 0), предложенное расточительным Алонсо.



А. Дозоров

Что это значит — «навести на резкость»?

Наводить на резкость, то есть добиваться резкого изображения, — приходилось всем. Во многих случаях смысл этого действия прост и понятен. Например, при фотографировании навести на резкость означает, что изображение, создаваемое объективом фотоаппарата, нужно поместить точно на эмульсионный слой пленки. В кинозале требование публики добиться резкости изображения на экране сводится к требованию совместить изображение кадра фильма с плоскостью экрана.

Смысл наводки на резкость несколько затушевывается, если при наблюдении не требуется экран, например, если предмет рассматривается невооруженным глазом. Давайте проведем небольшой эксперимент. Посмотрите в окно. Удаленные предметы видны достаточно резко. Теперь посмотрите на предметы, находящиеся на расстоянии нескольких метров. Они тоже видны резко. Наконец, читая эту страницу, вы видите резкое изображение текста. Все это происходит потому, что глаз «автоматически» наводит на резкость. Управляет этой процедурой аккомодационный мускул глаза, который соответствующим образом деформирует хрусталик глаза. В результате изображение предмета попадает точно на сетчатку глаза (так сказать, на экран) — изображение получается резким (рис. 1).

Другими словами, при изменении расстояния d от предмета до наблюдателя (точнее, до глаза наблюдателя) расстояние f от хрусталика глаза (линзы) до сетчатки (экрана) остается неизменным. Это возможно лишь в том случае, если фокусное расстояние F хрусталика изменяется в соответствии с формулой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D,$$

где $D=\frac{1}{F}$ — оптическая сила линзы.

Если глаз рассматривает удаленный предмет $\left(\frac{1}{d}\to 0\right)$, мышцы, управляющие хрусталиком, наиболее расслаблены. В этом случае $F=f$ и $D=\frac{1}{f}$. Обычно расстояние f между хрусталиком глаза и сетчаткой порядка 3 см, поэтому $F = 3$ см и $D = 33$ дптр. При приближении предмета к глазу начинает работать аккомодационная мышца: ее задача — уменьшить фокусное расстояние хрусталика (в соответствии с формулой линзы). Хрусталик становится более выпуклым, радиус кривизны его поверхности уменьшается. Когда предмет находится от глаза на расстоянии наилучшего зрения — для нормального глаза это 25 см, — оптическая сила хрусталика становится равной 37 дптр.

Дальнейшее уменьшение расстояния между предметом и глазом вызывает состояние перенапряженности аккомодационной мышцы. Она перестает справляться со своей задачей: изображение уже не проецируется на сетчатку, оно нерезко. Если мышцы глаза достаточно сильны, то оптическую силу хрусталика удается довести до 43 дптр — предмет удается четко видеть с расстояния 10 см, детали его видны отчетливее всего. Однако в таком состоянии глаз быстро устает. Таким образом, расстояние наилучшего зрения соответствует оптимальному варианту: хорошо различимы мелкие детали предмета, а мышца еще не перенапряжена.

Теперь рассмотрим случай, когда глазу в наблюдении за предметом помогает система линз, например, микроскоп. Оптическая система микроскопа создает увеличенное мнимое изображение $A'B'$ предмета AB (рис. 2). Это изображение затем рассматривается непосредственно глазом. Наблюдая таким образом за предметом, мы почему-то не всегда видим его резко. Почему же глаз в этом случае автоматически «не добивается» резкого изображения? В чем смысл наводки на резкость при рассматривании предмета с помощью микроскопа? Что мы делаем, перемещая окуляр микроскопа?

Дело в том, что изображение предмета, полученное с помощью системы линз, может оказаться слишком близко к глазу. Тогда нужно переместить либо глаз, либо это изображение так, чтобы новое положение соответствовало возможностям аккомодационной мышцы. Лучше всего, если изображение предмета будет находиться от глаза на расстоянии наилучшего зре-

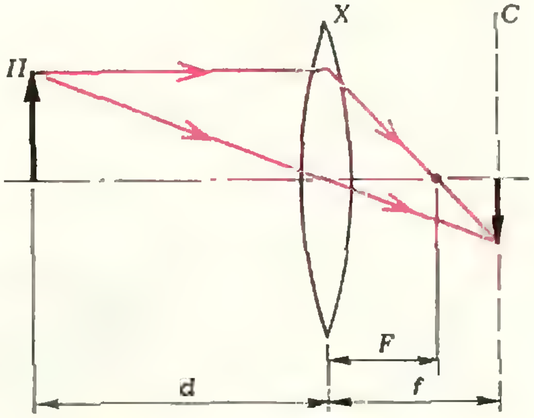


Рис. 1. Получение изображения на сетчатке глаза наблюдателя. Здесь П — предмет, X — хрусталик глаза, C — сетчатка.

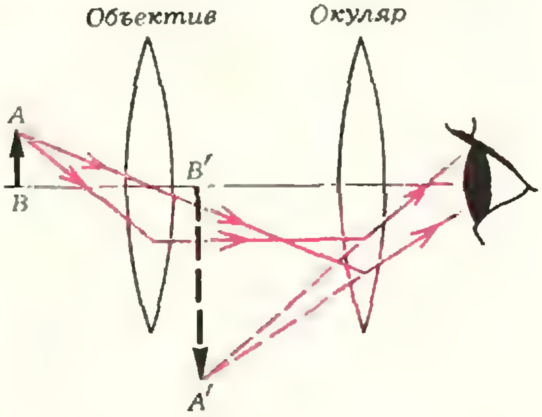


Рис. 2. Оптическая система микроскопа. Увеличенное мнимое и перевернутое изображение A′B′ предмета AB затем рассматривается глазом наблюдателя.

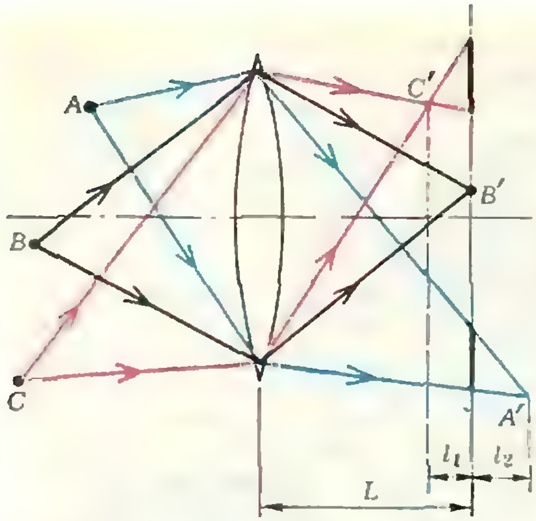


Рис. 3. Влияние ширины светового пучка на глубину резкости изображения. Чем уже пучки, тем меньше размытость изображений точек A и C на экране.

ния. При этом, если удалить глаз от окуляра, не все лучи, выходящие из окуляра, попадут в глаз наблюдателя и окончательное изображение предмета на сетчатке будет менее ярким. Поэтому лучше «отодвинуть» изображение. А это легко сделать, перемещая окуляр, то есть меняя расстояние между объективом и окуляром. Именно в этом и заключается смысл наводки на резкость при рассматривании предмета с помощью системы линз.

До сих пор мы молчаливо предполагали, что рассматриваемый объект — плоский. На самом деле объекты в большинстве случаев трехмерны, а изображение их в любой оптической системе получается на плоскости.

Например, построим изображения точек A, B и C, принадлежащих объекту, но находящихся на разных расстояниях от линзы (рис. 3). Все три изображения лежат в разных плоскостях. Если экран поместить в плоскость, где находится резкое изображение точки B, то точки A и C изобразятся на экране не точками, а светлыми кружками, так называемыми кружками рассеяния. Нетрудно видеть, что размеры кружков рассеяния тесно связаны с размерами линзы: чем меньше диаметр линзы, тем меньше размытость изображений точек A и C. Следовательно, чем уже световые пучки, тем более резко можно отобразить на плоскость различно удаленные точки предмета. Другими словами, ограничивая световые пучки, можно улучшить *глубину резкости изображения*. Что это значит?

Когда человек рассматривает изображение невооруженным глазом, то кружок рассеяния воспринимается практически точкой (видно резкое изображение), если угол зрения α, под которым виден кружок, порядка $1' \approx \approx 3\cdot10^{-4}$ рад. Обычно мы рассматриваем изображение с расстояния наилучшего зрения $l_н = 25$ см. Тогда допустимый диаметр кружка

$$2r = l_н \operatorname{tg}\alpha \approx l_н\alpha \approx 75\cdot10^{-4}\ \text{см} = 0{,}075\ \text{мм}.$$

Пусть точки A и C (см. рис. 3) в плоскости экрана изображаются кружками рассеяния одного и того же радиуса r. В этом случае геометрическая глубина резкого изображения (расстояние между плоскостями, в которых получаются резкие изображения точек A и C) равна

$$l_1 + l_2 \approx \frac{2rL}{D} \approx \frac{Ll_0\alpha}{D},$$

где L — расстояние от линзы до экрана, D — диаметр линзы. Отсюда непосредственно видно, что глубина резкости действительно связана с шириной световых пучков.

Поскольку различные точки предмета изображаются не точками, а кружками рассеяния, важно, чтобы эти кружки не накладывались друг на друга. Если два соседних кружка рассеяния не перекрываются, они воспринимаются глазом раздельно. В таком случае говорят, что оптическая система *разрешает* эти две точки. Если же кружки накладываются друг на друга, в изображении получается одно светлое пятно, то есть две точки предмета системой не разрешаются. С уменьшением размеров линзы уменьшаются размеры кружков рассеяния и, следовательно, увеличивается разрешающая способность. Если диаметр линзы велик, то разрешающая способность становится низкой и вместо четкого изображения получается размазанное пятно. Таким образом, ограничение пучка света, идущего от предмета, является принципиальным.

В любой оптической системе световые пучки действительно оказываются ограниченными. В роли ограничителей выступают либо оправы линз, либо специальные диафрагмы, диаметр которых может изменяться. Для глаза такой диафрагмой является радужная оболочка, имеющая отверстие переменной величины — зрачок.

Но суже́ние световых пучков уменьшает световой поток, поступающий в оптическую систему, и тем самым уменьшает освещенность изображения. Для примера рассмотрим фотоаппарат. Чаще всего фотографируются достаточно удаленные предметы, так что их изображения получаются практически в фокальной плоскости объектива фотоаппарата. Тогда освещенность, равная отношению светового потока к площади изображения, оказывается пропорциональной отношению квадрата диаметра объектива к квадрату его фокусного расстояния (покажите это самостоятельно). Это последнее отношение называют *светосилой объектива*.

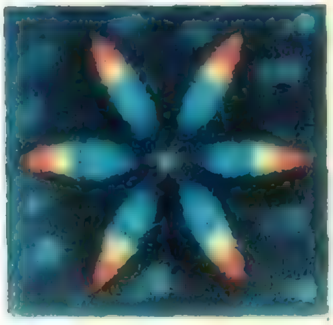
Таким образом, желание улучшить глубину резкости приводит к уменьшению освещенности изображения. Хорошие объективы должны обеспечивать хорошее качество изображения с возможно большей его освещенностью.

В заключение отметим, что в этой статье мы говорили о глубине резкости и разрешающей способности только на языке геометрической оптики. Однако на самом деле такие явления, как дифракция света, недостатки оптической системы, свойства используемого фотоматериала, тоже играют немаловажную роль.

Загадочная дифракционная картина

Однажды вечером я ехал в автобусе. На улице было около двадцати градусов мороза. Пока пассажиров было мало, окна автобуса были чистыми. Но вот люди заполнили салон, и через некоторое время оконные стекла покрылись тонким слоем льда. Лед был настолько тонким, что сквозь него был хорошо виден вечерний город.

Очень красиво выглядели уличные фонари. Каждый фонарь окаймляла цветная звездочка, такая, как показано на рисунке. Нежные цвета ее лучей, от фиолетового в центре до красного на концах, красиво переливались на матовой поверхности стекла. Несомненно, это была дифракционная картина! Как она возникла?



Только по виду, без дополнительного исследования объяснить происхождение этой картины очень трудно. По-видимому, одно из объяснений может быть таким.

Кристаллики льда, осевшие на стекле, образуют дифракционную решетку. Она-то и создает дифракционную картину. Белое изображение фонаря в центре — нулевой максимум, а вдоль лучей звездочки располагаются максимумы первого порядка для всех цветов (спектр первого порядка). Шестиугольная форма картины связана, скорее всего, с аналогичной формой кристалликов льда (снежинок, осевших на стекле).

По результатам наблюдений можно даже оценить величину периода решетки. Запишем условие главных максимумов для решетки:

$$d \sin \varphi = k\lambda.$$

Здесь d — период решетки, φ — угол, определяющий направление на максимум k-го порядка, λ — длина волны. При рассмотрении с расстояния около двух метров радиус звездочки для красного цвета составляет приблизительно два сантиметра. Это означает, что первый максимум ($k=1$) для красного света ($\lambda_{\text{кр}} = 7 \times 10^{-7}$ м) виден под углом φ таким, что

$$\sin \varphi_{\text{кр}} \approx \frac{2\ \text{см}}{200\ \text{см}} = 0{,}01.$$

Тогда

$$d = \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\sin \varphi_{\text{кр}}} \approx 0{,}07\ \text{мм}.$$

А как вы объясните возникновение этой красивой картины?

В. Булат

А. Николаев

Прибор для изучения преломления света

Явление преломления света на границе двух сред подробно изучается только в 10-м классе. Однако это явление столь распространено в природе, что все наши читатели, безусловно, неоднократно встречались с ним.

В данной статье рассказывается, как можно самостоятельно изготовить прибор для проведения опытов по преломлению света.

Если луч света падает на границу раздела двух сред, то луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр к поверхности раздела, проведенный через точку падения луча, лежат в одной плоскости; при этом отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β постоянно для данных двух сред:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n.$$

Это — закон преломления света; постоянную величину n называют относительным показателем преломления или показателем преломления второй среды относительно первой:

$$n=\frac{n_2}{n_1}.$$

С помощью прибора, показанного на рисунке 1, можно проделать несколько опытов, подтверждающих закон преломления света.

Но прежде о самом приборе. Основная его часть — это прозрачная кювета. Ее можно, например, склеить из плексигласа или обыкновенного стекла или воспользоваться готовой коробочкой из какого-нибудь прозрачного материала. В наших опытах использовалась кювета длиной 12 см, шириной 5 см и высотой 6 см (в принципе, эти размеры могут быть и больше).

Вторым, не менее важным, элементом прибора является прицельная рамка. С помощью свободных горизонтальных осей она крепится изнутри к передней и задней стенкам кюветы на расстоянии 4 см от ее правого торца. Длина рамки 11 см, на ее свободном конце имеется смотровое окошко.

Посередине окошка параллельно оси вращения рамки натянут волосок из тонкой медной проволоки. Второй такой же волосок натянут вблизи оси вращения, на расстоянии около 1 см от нее. Эти два волоска и ось вращения рамки лежат в одной плоскости.

К передней стенке кюветы снаружи неподвижно прикрепляется транспортир так, что его осевая линия 0—180° расположена вертикально, а ось вращения рамки проходит через середину осевой линии. На дно кюветы наклеивается миллиметровая шкала, начало которой совпадает по вертикали с осью вращения рамки. В нашем приборе ось вращения находилась на высоте $h=52$ мм.

Изготовив таким образом прибор, можно приступать к опытам. Расскажем о некоторых из них.

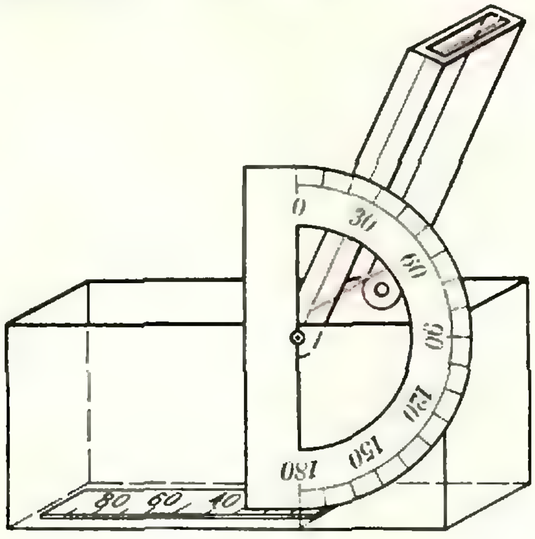


Рис. 1.

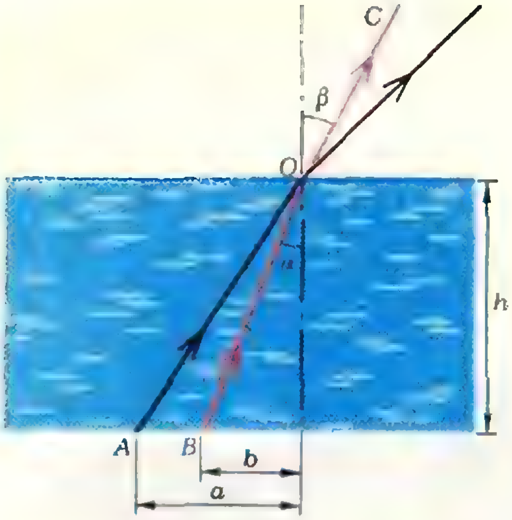


Рис. 2.

Опыт 1. Если рамку установить под углом 45° к вертикали, то в прицел (по двум волоскам) видна точка A (рис. 2), совпадающая с 52-м делением миллиметровой шкалы, то есть $a = 52$ мм. Высота h оси вращения рамки тоже равна 52 мм. Следовательно, опыт подтверждает, что в однородной среде свет распространяется прямолинейно.

Опыт 2. Нальем в кювету воды до уровня оси вращения рамки. Теперь при том же положении рамки, что и в первом опыте, в прицел будет видна не точка A, а точка B, находящаяся на расстоянии $b < a$ (см. рис. 2). Это означает, что луч света, имеющий в воде направление BO, пересекая границу вода — воздух, преломляется и в воздухе идет по направлению OC. Другими словами, угол α, который составляет падающий луч с нормалью к границе раздела, не совпадает с углом β преломленного луча.

Опыт 3. Установим прицельную рамку строго вертикально. При этом в прицел под водой видно начало шкалы — ее нулевое деление. Значит, если угол падения $\alpha = 0$, то и угол преломления $\beta = 0$. Или, иначе, если луч падает перпендикулярно к границе двух сред, то он не преломляется. Это — важный частный случай закона преломления, о котором не следует забывать.

Опыт 4. Определим показатель преломления воды относительно воздуха. Для этого установим рамку под некоторым углом, например, под углом 30°. Это будет и углом преломления β для луча света, переходящего из воды в воздух. В прицел будет видно 21-е деление шкалы, то есть $b = 21$ мм (см. рис. 2).

Найдем синус угла падения α:

$$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}} = 0{,}37.$$

Синус угла преломления

$$\sin\beta = \sin 30^\circ = 0{,}5.$$

Согласно закону преломления света

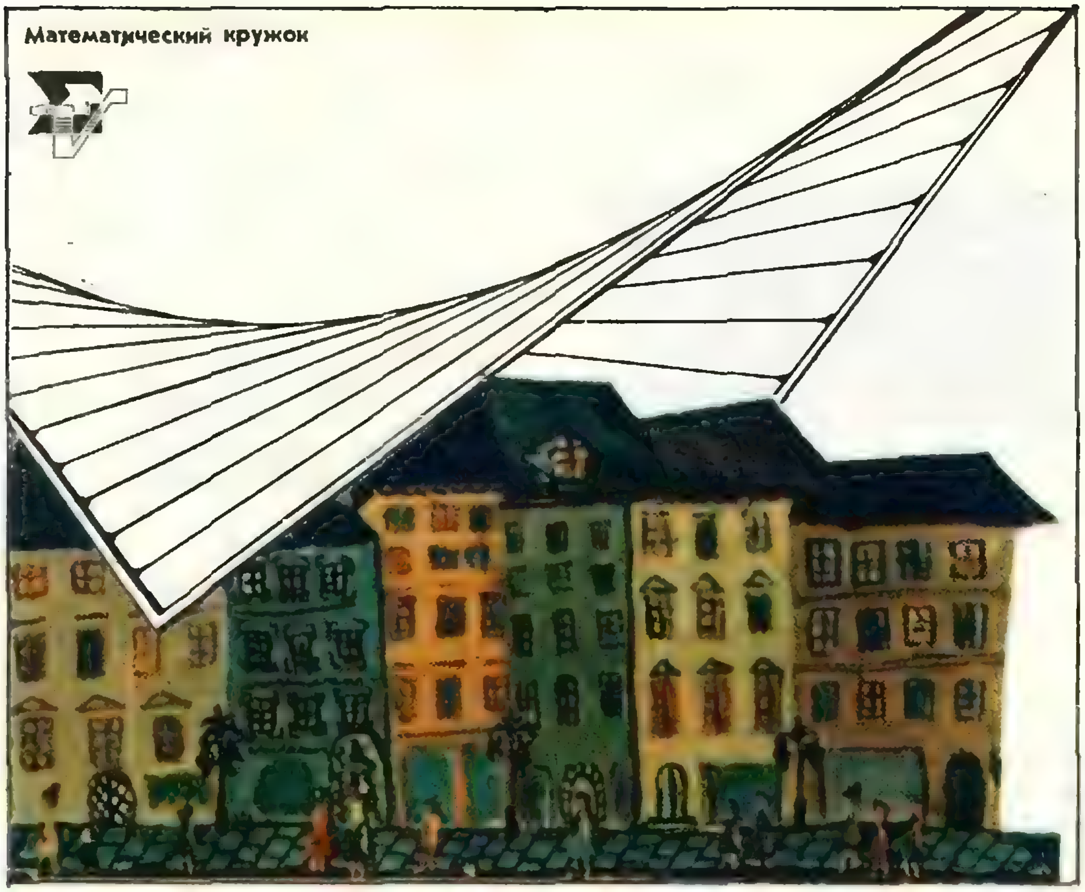
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_2/n_1 — показатель преломления воздуха (второй среды) относительно воды (первой среды). Отсюда показатель преломления воды относительно воздуха

$$n = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 1{,}33.$$

С помощью предлагаемого прибора можно определить и предельный угол полного внутреннего отражения для воды. На этот раз прицельную рамку придется установить под углом, близким к 90°. Для отчетливой видимости шкалы на дне сосуда размеры прибора лучше увеличить в 2—3 раза.

Можно также проводить опыты не с чистой водой, а с растворами сахара или соли и исследовать зависимость показателя преломления от концентрации раствора.



Л. Кузнецова, З. Скопец

Седлообразная поверхность

Каждый из вас, несомненно, знает, что множеством точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек, является серединный перпендикуляр соединяющего их отрезка. Так же просто устроены множества точек, равноудаленных от двух параллельных или пересекающихся прямых. На рисунке 1 изображены два из этих множеств, правда, уже не для плоскости, а для пространства.

А как выглядит множество точек, равноудаленных от двух скрещивающихся прямых? Об этом вы и узнаете, прочитав статью.

Прежде чем перейти к основному изложению, дадим определение *поворота пространства вокруг оси.*

Поворотом пространства называется такое перемещение пространства, при котором множество неподвижных точек образует прямую (она называется *осью поворота*). При повороте пространства вокруг оси каждая плоскость, перпендикулярная к оси поворота, переходит в себя. Получающиеся перемещения этих плоскостей являются поворотами вокруг точек их пересечения с осью на один и тот же угол в одном и том же направлении [*] (рис. 2).

Обозначать поворот с осью l мы будем через R_l, поворот, обратный повороту R_l, — через R_l^{-1}.

---

[*] Тождественное перемещение тоже можно считать поворотом пространства вокруг оси (на нулевой угол), но в этой статье такие повороты встречаться не будут.

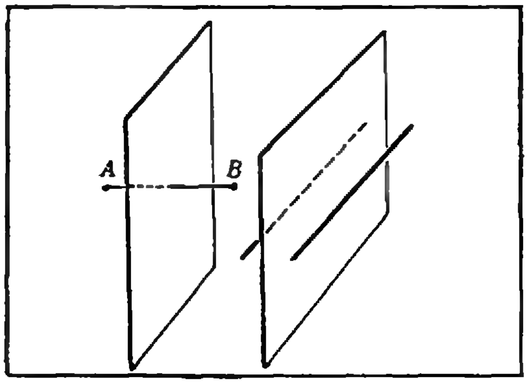


Рис. 1.

Для описания нашего множества точек, (обозначим его через F) нам понадобится несколько утверждений о поворотах. Мы будем их формулировать по мере надобности в виде лемм, а доказательства всех лемм соберем в конце статьи. Для читателя будет очень полезно доказать эти леммы самостоятельно.

1. Первым делом покажем, что через каждую точку нашего множества проходят две принадлежащие ему прямые.

Пусть m и n — данные скрещивающиеся прямые и точка A равноудалена от них. Обозначим через A_1 и A_2 ортогональные проекции этой точки на прямые m и n соответственно (рис. 3). Пусть l — перпендикуляр к плоскости A_1AA_2, проходящий через точку A. Повернем пространство вокруг оси l так, чтобы точка A_1 перешла в точку A_2. Прямая m перейдет при этом в прямую m_1, проходящую через точку A_2 и перпендикулярную к прямой AA_2. Далее можно сделать два различных поворота с осью AA_2 — таких, что прямая m_1 перейдет в прямую n: R_{AA_2} и R'_{AA_2} В результате композиции поворотов R_l и R_{AA_2} (R_l и R'_{AA_2}) прямая m перейдет в прямую n. Оказывается, справедлива такая лемма: *композиция двух поворотов вокруг пересекающихся осей является поворотом вокруг оси, проходящей через точку их пересечения.* Поэтому существует такая прямая u, проходящая через точку A, что $R_{AA_2} \circ R_l = R_u$. Аналогично, существует такая прямая v, проходящая через A, что $R'_{AA_2} \circ R_l = R_v$.

Упражнение 1. Проверьте, что оси u и v не совпадают.

Итак, если точка $A \in F$, то через нее проходят оси двух поворотов, отображающих прямую m на прямую n. С другой стороны, любая точка A, лежащая на оси поворота, отображающего прямую m на прямую n, принадлежит нашему множеству: так как поворот — перемещение, расстояние от точки A до прямой m равно расстоянию от образа точки A до образа прямой m, то есть расстоянию от точки A до прямой n.

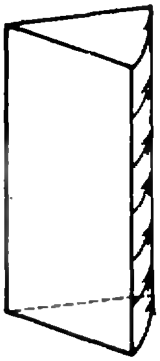


Рис. 2.

2. А существует ли хотя бы одна точка, принадлежащая нашему множеству?

Проведем через прямую m плоскость, параллельную прямой n, а через прямую n плоскость, параллельную прямой m. Эти плоскости параллельны. Обозначим через α плоскость, равноудаленную от них. Ортогональные проекции m' и n' прямых m и n на плоскость α пересекутся в некоторой точке O (рис. 4). Очевидно,

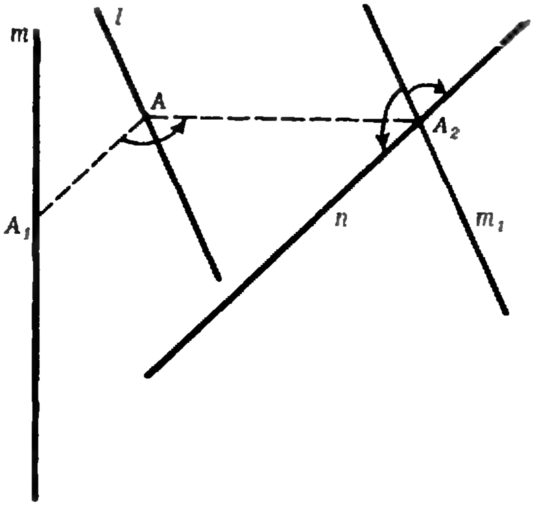


Рис. 3.

точка O принадлежит множеству F. А тогда, как мы уже выяснили, через нее проходят по крайней мере две прямые, состоящие из точек нашего множества.

Упражнение 2. Докажите, что через точку O проходят ровно две такие прямые (обозначим их через x и y). Покажите, что этими прямыми являются оси симметрии прямых m' и n'.

Итак, наше множество содержит перпендикулярные прямые x и y, причем через каждую точку этих прямых проходит еще одна прямая, принадлежащая нашему множеству.

3. Убедимся теперь, что объединение точек этих прямых образует все наше множество. Докажем для этого, что если точка $A \in F$ не лежит ни на прямой x, ни на прямой y, то одна из проходящих через нее прямых, принадлежащих множеству, пересекает x, а другая y, и что через каждую его точку проходит только две такие прямые.

а) На каждой из прямых m и n отметим стрелкой некоторое направление, например, как на рисунке 4. Тогда любая ось поворота, переводящего направленную прямую m в направленную прямую n (с направлениями, указанными на рисунке 4!), параллельна плоскости, проходящей через прямую x и перпендикулярную к плоскости α.

В самом деле, ось u образует с прямыми m и n равные углы. Перенесем параллельно прямые m, n и ось u так, чтобы они проходили через точку O (см. рис. 4). Получим прямые m', n' и u'. Поскольку при параллельных переносах углы между прямыми не меняются, прямая u' образует с прямыми m' и n' равные углы. Значит, она лежит в плоскости xOz, где $z \perp \alpha$ (см. упражнение 2 и рис. 4). Следовательно, прямая u параллельна этой плоскости.

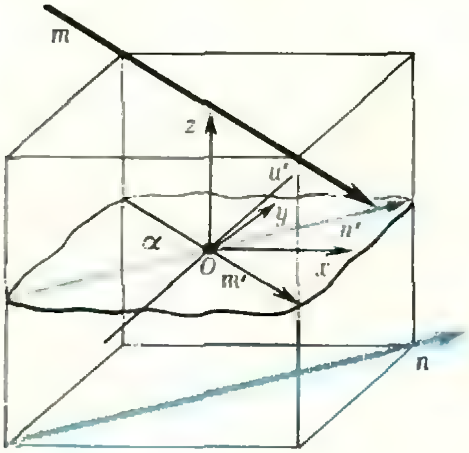


Рис. 4.

Возьмем теперь две оси u и v поворотов, переводящих прямую m в прямую n с сохранением направления. Покажем, что прямые u и v скрещиваются.

Предположим сначала, что они пересекаются в точке B. Выполним поворот вокруг оси u, переводящий m в n с сохранением направления, затем — поворот вокруг оси v, переводящей n в m — также с сохранением направления. Поскольку u и v, по предложению, пересекаются, композиция указанных поворотов — поворот (лемма из п. 1). Этот поворот отображает прямую m на себя с сохранением направления. Но это невозможно, как показывает такая лемма: *при повороте пространства вокруг оси только одна прямая отображается на себя с сохранением направления — ось поворота.*

Предположим теперь, что $u \parallel v$. Как и выше, при перемещении $R_v^{-1} \circ R_u$ прямая m переходит в себя с сохранением направления. С другой стороны, *композиция двух поворотов с параллельными осями является либо поворотом относительно третьей параллельной им оси, либо переносом в направлении, перпендикулярном к этим осям.* В первом случае $m \parallel u$, а тогда и $n \parallel m$. Во втором — $m \perp u$, и получающаяся из m поворотом вокруг u прямая n лежит в одной плоскости с m.

Таким образом, прямые u и v не параллельны и не пересекаются. Значит, они скрещиваются. Объединим эти оси в один класс.

б) Сменим направление на одной из данных прямых, например, на n. Тогда оси поворотов, отображающих прямую m на n (с заданными на них новыми направлениями), также попарно скрещиваются и параллельны плоскости yOz (см. рис. 4). Полученные оси отнесем к другому классу.

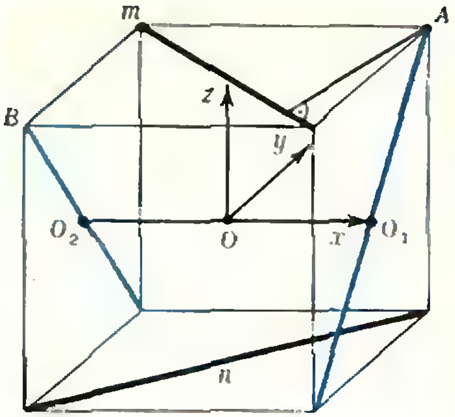


Рис. 5.

в) Пусть ось u принадлежит первому классу, а ось v — второму. Покажем, что прямые u и v пересекаются. Действительно, при перемещении $R_v^{-1} \circ R_u$ прямая m перейдет в себя с изменением направления. Поэтому получающееся преобразование прямой m — симметрия относительно некоторой точки $C \in m$ (докажите!). Следовательно, $R_v^{-1} \circ R_u (C) = C$ и $R_v (C) = R_u (C) = D$. Из $R_u (C) = D$, $R_v (C) = D$ следует, что все точки прямых u и v равноудалены от точек C и D. Но тогда u и v лежат в одной плоскости (см. рис. 1). Поэтому если u и v не пересекаются, то они параллельны. Поскольку $u \parallel xOz$ и $v \parallel yOz$, из $u \parallel v$ следует, что $u \parallel z$. Но это невозможно, так как $z \perp m$. Следовательно, u и v пересекаются.

г) Оси x и y, очевидно, разных классов. Поэтому каждая ось пересекает либо прямую x, либо прямую y. Поскольку через точку множества F не могут проходить три оси (так как тогда две из них принадлежали бы к одному классу), «посторонних» точек в фигуре нет.

4. Остается построить наше множество. Построим для этого параллелепипед с осями, параллельными прямым x, y, z и центром в точке O (см. рис. 5), такой, что диагонали верхнего и нижнего оснований лежат на прямых m и n соответственно и расстояние от вершины A до прямой m равно его боковому ребру. Через точки O_1 и O_2 должны проходить оси, параллельные плоскости yOz. Ясно, что это прямые O_1A и O_2B. Каждая ось, параллельная плоскости xOz, должна пересекать прямые O_1A и O_2B, а это однозначно определяет ее положение. Заметим, что если некоторая плоскость параллельна плоскости xOz и A_1, B_1 — точки ее пересечения с (O_1A) и (O_2B), то $|O_1A_1| = |O_2B_1|$. Соответствующее построение приведено на 20 странице журнала. (Можно было, конечно, воспользоваться прямыми y и OA, но тогда построение будет не таким симметричным.) Как вы видите, получается поверхность, похожая на седло.

5. Примем за оси координат прямые x, y и z и выведем уравнение этой поверхности. Условимся задавать прямую уравнениями двух пересекающихся по ней плоскостей. Тогда уравнения прямых m и n запишутся в виде

$$\begin{cases} y = kx \\ z = c, \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -kx \\ z = -c. \end{cases}$$

Направляющие векторы этих прямых имеют координаты:

$$\vec{m} = \{1;\, k;0\}, \quad \vec{n} = \{1;\, -k;0\}.$$

Пусть точка $P\,(x,\, y,\, z)$ равноудалена от прямых m и n. Если M и N — ортогональные проекции точки P на прямые m и n соответственно, то $|MP| = |MN|$. Выразим координаты точек M и N через координаты точки P.

Так как $M \in m$, то координаты точки M равны α, $k\alpha$, c. Выразим α через k, y и z. Учитывая, что $\vec{MP} \cdot \vec{m} = 0$, $\vec{MP} = (x - \alpha,\ y - k\alpha,\ z - c)$, $\vec{m} = \{1, k, 0\}$, получим $x - \alpha + yk - k^2\alpha = 0$, откуда следует, что $\alpha = \frac{x + ky}{1 + k^2}$, то есть точка M имеет координаты

$$\frac{x + ky}{1 + k^2}, \quad k\frac{x + ky}{1 + k^2}, \quad c.$$

Рассуждая аналогично, найдем координаты точки N:

$$\frac{x - ky}{1 + k^2}, \quad -k\frac{x - ky}{1 + k^2}, \quad -c.$$

Записывая равенство $|MP| = |NP|$ после упрощений, получим выражение

$$xy = 2pz, \tag{1}$$

где $p = -c\frac{1 + k^2}{2k}$.

Следовательно, множество точек, равноудаленных от прямых m и n, — это поверхность, уравнение которой имеет вид (1). (Впервые уравнение (1) было получено Л. Эйлером в 1748 году.)

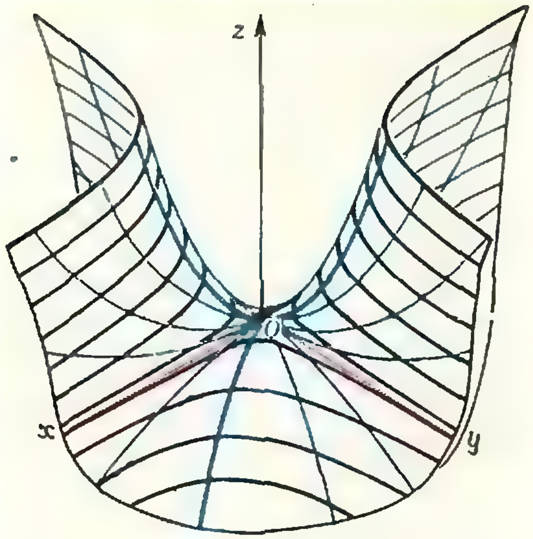


Рис. 6.

Сечение поверхности (1) плоскостью $z = b$ — гипербола, а плоскостью $x = ly$ — парабола ($b \neq 0, l \neq 0$ рис. 6).

«Математическое» название нашей поверхности — *гиперболический параболоид.*

Пользуясь уравнением (1), нетрудно показать, что один и тот же гиперболический параболоид соответствует не одной паре скрещивающихся прямых!

Для любых прямых $\begin{cases} y = kx \\ z = c \end{cases}$ и $\begin{cases} y = -kx \\ z = -c \end{cases}$, у которых k и c находятся в зависимости

$$p = -\frac{c(1+k^2)}{2k}, \qquad (2)$$

где p — заданная константа, имеем один и тот же гиперболический параболоид $xy = 2pz$. Поэтому в параллельных плоскостях $z = c$, $z = -c$ лежат две пары таких прямых. Если учесть, что $k = y/x$ и $c = z$, то подставляя их в (2), получим, что все прямые m и n образуют поверхность с уравнением $z(x^2 + y^2) = -2pxy$.

Плоскости xOz и yOz называются *направляющими плоскостями* поверхности F: «половина» прямолинейных образующих параллельна плоскости xOz, а другая «половина» — плоскости yOz. В нашем случае эти плоскости взаимно перпендикулярны и гиперболический параболоид называется равнобочным. В общем же случае эти плоскости образуют произвольный угол. Правда, в общем случае гиперболический параболоид не получить объединением осей поворотов, однако конструкция, приведенная в п. 4, к ней применима. Только на прямых O_1A и O_2B нужно соединять такие точки A_1 и B_1, что $|O_1A_1| = \lambda |O_2B_1|$, где $\lambda \neq 1$.

Упражнение 3. Оси x и y перпендикулярны. Есть ли еще пары взаимно перпендикулярных осей?

Упражнение 4. Докажите, что прямая, не принадлежащая нашему множеству, имеет с ним не более двух общих точек.

Приложение. Доказательство лемм

Заметим, что поворот с осью l можно получить композицией двух симметрий относительно плоскостей, проходящих через прямую l. Действительно, пусть $R_l(A) = A_1$. Возьмем произвольную плоскость $\sigma \ni l$. Тогда $S_\sigma(A) = A'$. Проведем теперь плоскость π через прямую l и середину отрезка $[A'A_1]$. Легко сообразить, что $(A'A_1) \perp \pi$. Поэтому $S_\pi \circ S_\sigma(A) = A_1$. С другой стороны, $S_\pi \circ S_\sigma$ — поворот, так как это преобразование оставляет на месте только точки прямой l. Но поворот однозначно задается осью и образом произвольной, не лежащей на оси точки. Следовательно, $R_l = S_\pi \circ S_\sigma$.

1. Пусть оси u и v пересекаются в точке O. Рассмотрим плоскость π, содержащую эти прямые. Тогда R_u и R_v можно представить так: $R_u = S_\pi \circ S_{\sigma_1}$, $R_v = S_{\sigma_2} \circ S_\pi$. Отсюда $R_v \circ R_u = (S_{\sigma_2} \circ S_\pi \circ S_\pi \circ S_{\sigma_1}) = S_{\sigma_2} \circ S_{\sigma_1}$, поскольку $S_\pi \circ S_\pi$ — тождественное преобразование. Но $\sigma_2 \ni O$ и $\sigma_1 \ni O$, поэтому прямая $\sigma_1 \cap \sigma_2$ проходит через точку O.

2. Пусть m — прямая и $R_l(m) = m$. Если точка $A \in m$ и $A \notin l$, то m проходит через A и $R_l(A)$. Значит, m принадлежит некоторой плоскости, перпендикулярной к l, и мы пришли к повороту плоскости, для которого утверждение очевидно.

3. Доказывается так же, как лемма 1, поскольку через u и v можно провести плоскость. Параллельные переносы получатся, если $\sigma_1 \parallel \sigma_2$.

Рассудите их

Выполняя лабораторную работу, ученики получили на экране цветной спектр белого света, прошедшего через призму.

— Красота-то какая! — воскликнула Ира. — А если на месте экрана окажется сетчатка глаза, то что тогда мы увидим? — спросила она.

— Как что? — ответила Маша. — То же, что и на экране. Отраженные цветные лучи от спектра на экране, так же как и световые лучи от различных объектов, пройдя через хрусталик глаза, дают на сетчатке перевернутое изображение. А мозг человека «научился» переворачивать изображения, возникшие на сетчатке. Поэтому мы видим все в реальном виде. Так что глаз будет видеть обычное расположение цветных лучей в спектре белого света. — А я думаю, что мы увидим спектр, «обратный» видимому на экране, — сказала Ира.

Как по-вашему, читатель, — кто из них прав?

В. Партон

Сферический эллипс

Эллипс («Геометрия 10», § 59; см. также «Алгебра 8», п. 2) можно определить как множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек плоскости (называемых *фокусами*) есть величина постоянная. Если в этом определении «сумму» заменить на «модуль разности», получим *гиперболу*. *Парабола* — это множество точек на плоскости, расстояния от которых до данной точки плоскости (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*) одинаковы.

Сферический эллипс — это множество точек на сфере, сумма расстояний от которых по дугам больших окружностей до двух данных точек сферы (их тоже называют *фокусами*) есть величина постоянная. Аналогично определяется *сферическая гипербола*. Чтобы получить определение *сферической параболы*, надо еще в определении «плоской параболы» прямую заменить на «сферическую прямую» — большую окружность сферы. (Сообразите, как выглядит сферическая парабола, директрисой которой является большая окружность сферы, если расстояние от фокуса до директрисы равно четверти длины большой окружности.)

Плоский эллипс превращается в окружность только в том случае, когда его фокусы сливаются. Как показал Н. И. Фусс, сферический эллипс превращается в окружность (а именно — большую окружность сферы), если постоянная сумма расстояний, о которой говорится в определении, равна половине длины большой окружности. Конгруэнтные сферические треугольники, выделенные на рисунке 1 около фокусов F_1, F_2, помогут вам доказать утверждение Фусса.

Рассмотрим сферу Δ и плоскость α, касающуюся ее в фокусе некоторого сферического эллипса l на ней. Проведем всевозможные прямые через центр сферы O и точки сферического эллипса l. Оказывается, полученная таким образом коническая поверхность Γ пересечет плоскость α по некоторому эллипсу λ. Исходную сферу поверхность Γ пересечет еще по одному сферическому эллипсу l', симметричному с l относительно O (рис. 2).

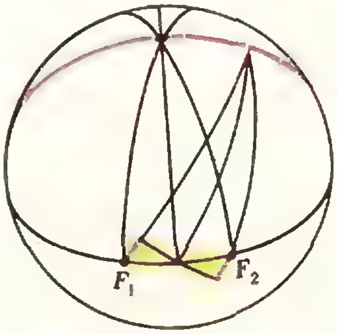


Рис. 1.

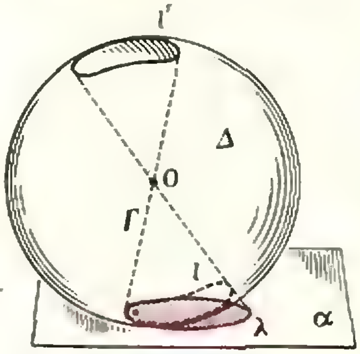


Рис. 2.

Интересно, что по отношению к фокусам эллипса l эллипс l' будет сферической гиперболой.

Эллипс (плоский) можно определить также, как множество точек (на плоскости), отношение расстояний от которых до данной точки (*фокуса*) и данной прямой (*директрисы*) постоянно и меньше 1. Аналогичным образом можно определить и сферический эллипс. Можно доказать, что центральная проекция директрисы эллипса λ относительно O на сферу Δ является директрисой сферического эллипса l: отношение расстояний от любой точки эллипса l до фокуса и до полученной при описанном проектировании большой окружности постоянно и меньше 1.

Углы между отрезками, соединяющими произвольную точку плоского эллипса с фокусами, и касательной к эллипсу в этой точке равны. В этом состоит так называемое *оптическое свойство* эллипса. Аналогичным свойством обладает сферический эллипс: если в любой его точке M провести касательную большую окружность и соединить точку M по большим окружностям с фокусами эллипса, то углы между этими последними окружностями и касательной окружностью окажутся равными.

Многие свойства сферического эллипса были обнаружены впервые русским математиком, швейцарцем по происхождению, Н. И. Фуссом (1755—1825). Н. И. Фусс был учеником и помощником великого Л. Эйлера и большую часть своих первых исследований в области математики и механики провел под его руководством. Впоследствии Н. И. Фусс стал действительным членом Петербургской академии наук и ее непременным секретарем. Интересные результаты, касающиеся сферического эллипса, были получены также прусским математиком Л. И. Магнусом (1790—1861).

В. Березин

задачник кванта

Задачи

М486 — М490; Ф498 — Ф502

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 апреля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете; например: «М486, М487» или «Ф498». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений.) Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваши имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М486. Какое из чисел больше:

а) $2^{3^{2^{3}}}$ или $3^{2^{3^{2}}}$? б)* $\left.2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}_{n}$ или $\left.3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}_{n}$?

Л. Курляндчик

М487. На данных окружностях γ_1 и γ_2 построить по хорде так, чтобы эти хорды были гомотетичны с заданным центром A, принадлежащим γ_1, и чтобы длина хорды окружности γ_2 равнялась заданной величине a.

А. Ишмаев

М488. Рассмотрим последовательность многочленов $P_0, P_1, P_2, \ldots$, определяемую условиями $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$,

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x),\ n\geqslant 1. \qquad (1)$$

Докажите равенства*)

а) $$\underbrace{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\ldots-\cfrac{1}{x}}}}_{n\ \text{раз}}=\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)};$$

б) $\dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}=P_n(2\cos\varphi)$, если φ/π — не целое;

в) $(t^{n+1}-1/t^{n+1})=(t-1/t)P_n(t+1/t)$, если $t\neq 0$;

г) $P_n(x)=\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x-2\cos\dfrac{\pi k}{n+1}\right)$;

д) $P_n(x)=\sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n/2}(-1)^jC_{n-j}^{j}x^{n-2j}$;

е) $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\dfrac{k\pi}{2m+1}=\dfrac{1}{2^m}$.

Придумайте и докажите аналогичные равенства для последовательности многочленов, определяемых тем же соотношением (1), но начинающейся с $P_0(x)=2$, $P_1(x)=x$.

---

*) Знаком $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}a_k$ обозначается произведение $a_1a_2\ldots a_n$. $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant m}b_j$ — сумма $b_1+b_2+\ldots+b_m$.

А. Зелевинский

М489. Даны три числа a, b, c. Построим три последовательности (a_n), (b_n), (c_n), у которых $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$ и

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$$

для любого $n=1, 2, 3, \ldots$ Докажите, что все эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

И. Бурмистрович

М490. p — простое нечетное число. Дано $p-1$ целых чисел, не делящихся на p. Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p.

С. Фомин

Ф498. Диаметр тонкостенного цилиндрического стакана равен d, высота — h. Стенки и дно стакана одинаковой толщины. В стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?

Ф499. Два стеклянных шара радиусов r и R соединены тонкой длинной стеклянной трубкой и наполнены воздухом. Посередине трубки находится капля ртути. Можно ли с помощью этого прибора измерять температуру окружающего воздуха?

Ф500. На столбе на высоте h над землей висит звонок. На каком расстоянии от столба звук слышен громче всего, если скорость звука равна c, а скорость ветра, дующего горизонтально, равна v?

Ф501. На краю стола высоты H стоит шар радиуса R, причем, $R \ll H$. Шар начинает соскальзывать со стола без трения. На каком расстоянии от стола упадет шар?

Ф502. В крышке закрытого ящика высоты $h=1$ м имеется круглое отверстие. Как изменится освещенность дна под отверстием, если в отверстие вставить линзу с оптической силой $D=1$ дптр? Ящик стоит под открытым небом, затянутым равномерно пеленой облаков.

Поправка

В формулировку задачи **М480**, опубликованной в № 12 за 1977 г., вкралась ошибка. Задачу **М480** в) следует читать так: последовательность C_n определяется условиями $C_1=2$, $C_{n+1}=[3C_n/2]$ для $n \geqslant 1$; докажите, что существует число γ такое, что $C_n=[(^3/_2)^n\gamma]+1$ (здесь $[x]$ — целая часть x). (В № 12 в формуле для C_n была опущена единица.) Срок присылки решений этой задачи продлевается до 1 июня 1978 г.

Решения задач

М441 — М443; Ф453 — Ф457

М441. *Внутри выпуклого $2n$-угольника взята точка P. Через каждую вершину и точку P проведена прямая. Докажите, что найдется сторона многоугольника, с которой ни одна из проведенных прямых не имеет общих точек (кроме, быть может, концов стороны).*

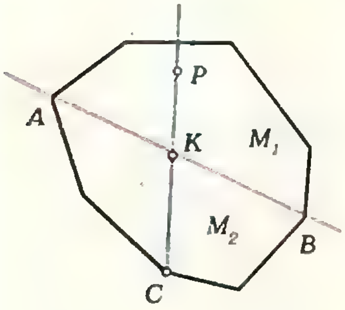


Рис. 1.

Будем говорить, что прямая пересекает сторону многоугольника M, если их точка пересечения не совпадает с вершиной многоугольника.

Возможны два случая: 1) точка P принадлежит какой-нибудь диагонали AB многоугольника M; 2) точка P не принадлежит ни одной из диагоналей многоугольника M.

В первом случае прямые PA и PB совпадают с (AB) и не пересекают никаких сторон M, а прямые, проходящие через точку P и оставшиеся $2n-2$ вершины M пересекают не более $2n-2$ сторон. Поэтому по крайней мере две стороны многоугольника M не пересекает ни одна из проведенных прямых.

Пусть теперь P не лежит ни на одной из диагоналей M. Возьмем такую диагональ AB многоугольника M, которая делит его границу на две n-звенные ломаные Γ_1 и Γ_2, а $2n$-угольник M — на два выпуклых $(n+1)$-угольника M_1 и M_2 (рис. 1). Допустим, что P находится внутри M_1; и пусть C — произвольная вершина многоугольника M_2 (отличная от A и B). Поскольку M_1 и M_2 находятся по разные стороны от (AB), $P \in M_1$, $C \in M_2$ и многоугольник M — выпуклый, прямые PC и AB пересекаются в некоторой точке $K \in [AB]$ (см. рис. 1). Прямая PC, проходящая через внутреннюю точку многоугольника M_1 и пересекающая его границу в точке K на стороне AB, пересекает границу M_1 еще в одной точке, не лежащей на AB, т. е., пересекает Γ_1. Итак, любая прямая, проходящая через вершины Γ_2 (отличные от A и B), пересекает границу выпуклого многоугольника M в двух точках: вершине Γ_2 и точке, лежащей на Γ_1 (возможно, совпадающей с вершиной Γ_1). Следовательно, любая такая прямая не пересекает звеньев ломаной Γ_2.

Аналогично доказывается, что прямые AP и BP также не пересекают звеньев ломаной Γ_2.

Итак, $n+1$ прямых пересекают не более чем n сторон многоугольника M (звеньев ломаной Γ_1). Оставшиеся $n-1$ прямых не могут пересечь более чем $n-1$ сторон многоугольника M (звеньев ломаной Γ_2). Следовательно, хотя бы одна сторона (звено ломаной Γ_2) не пересекается ни одной из проведенных через точку P и вершины многоугольника M прямых.

Г. Гуревич

◆

М442. *Дано простое число $p > 2$. Для каждого k от 1 до $p-1$ обозначим через a_k остаток от деления числа k^p на p^2. Докажите, что*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{p-1} = (p^3 - p^2)/2.$$

Перепишем сумму $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{p-1}$ так:

$$(a_1 + a_{p-1}) + (a_2 + a_{p-2}) + \ . \ . \ . \ + (a_{\frac{p-1}{2}} + a_{\frac{p+1}{2}})$$

($p-1$ — четное число; в последней сумме $\frac{p-1}{2}$ выражений в скобках). Рассмотрим одно из выражений $a_i + a_{p-i}$, заключенных в скобки. Легко заметить, что

$$i^p + (p-i)^p = p^p - C_p^1 \cdot i \cdot p^{p-1} + \ldots + C_p^{p-1} \cdot i^{p-1} \cdot p = p^2 l$$

— делится на p^2 (поскольку $C_p^{p-1} = p$; $p > 2$, $1 \leqslant i \leqslant p-1$). Поэтому $a_i + a_{p-i}$ делится на p^2; и так как $a_i < p^2$, $a_{p-i} < p^2$, то $a_i + a_{p-i} = p^2$ для всех $i = 1, \ldots, p-1$. Итак,

$$a_1 + a_2 + \ . \ . \ . \ + a_{p-1} = (a_1 + a_{p-1}) + \ . \ . \ . \ + (a_{\frac{p-1}{2}} + a_{\frac{p+1}{2}}) = p^2 \cdot \frac{p-1}{2} = (p^3 - p^2)/2,$$

что и утверждалось.

С. Охитин

М443. *Имеется таблица $n\times n$ клеток, в каждой клетке которой вначале стоит 0. Разрешается произвольно выбрать n чисел, стоящих в разных строках и разных столбцах, и увеличить каждое из них на 1.*

а) Можно ли за несколько шагов получить таблицы, изображенные на рисунках 2 и 3?

б) Можно ли получить таблицу с попарно различными числами?

в) Какие вообще таблицы можно получить через T шагов?

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	1
3	4	5	• • •	2
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
n	1	2	• • •	$n-1$

Рис. 2.

1	2	3	• • •	n
2	3	4	• • •	$n+1$
3	4	5	• • •	$n+2$
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮
n	$n+1$	$n+2$	• • •	$2n-1$

Рис. 3.

Таблицу на рисунке 2 получить легко, складывая таблицы, у которых единицы стоят параллельно диагонали (рис. 4).

Перейдем теперь сразу к задаче в). Прежде всего заметим, что в таблице $n\times n$, получающейся из нулевой через T шагов, суммы чисел в каждой строке и каждом столбце одинаковы и равны T: вначале все эти суммы были равны нулю, а прибавляя по единице к n числам, стоящим в разных строках и разных столбцах таблицы, мы изменяем все суммы одинаково — ровно на единицу каждую. Так что условие равенства сумм чисел по каждой строке и каждому столбцу таблицы является необходимым. Из этого сразу следует, что таблицу, изображенную на рисунке 3, указанными преобразованиями получить нельзя.

Докажем, что условие равенства сумм по строкам и столбцам также достаточно. При этом мы будем опираться на такую важную лемму. Пусть дана таблица $n\times n$, заполненная целыми неотрицательными числами, у которой сумма чисел по строкам и столбцам одна и та же (такие таблицы мы будем называть *магическими*). Тогда, если эта таблица не нулевая, то *в ней можно указать набор из n чисел, находящихся в разных строках и разных столбцах таблицы, каждое из которых было бы отлично от нуля.*

Из леммы сразу следует, что любую магическую таблицу можно получить из нулевой. В самом деле, пусть суммы по строкам и столбцам некоторой таблицы M равны T. Если бы в этой таблице нашелся набор из ненулевых чисел, то, вычтя из всех чисел этого набора по единице, мы перешли бы к магической таблице, у которой сумма по строкам и столбцам равна $T-1$; в этой таблице мы опять бы выделили набор из n ненулевых чисел (из разных строк и разных столбцов), снова вычли бы по единице из каждого из этих чисел, и перешли бы к магической таблице с суммой $T-2$ по каждой строке и каждому столбцу, и т. д.; — через T шагов мы получили бы таблицу с нулевыми суммами, т. е. нулевую таблицу. Двигаясь в обратном направлении, можно получить из нулевой таблицы исходную таблицу M.

Итак, осталось доказать лемму. Сформулируем ее так: *если среди n произвольных чисел магической таблицы $n\times n$, находящихся в разных строках и разных столбцах, есть хотя бы один нуль, то эта таблица — вся нулевая.*

Будем доказывать лемму индукцией по количеству ненулевых чисел в таблице; допустим, что она уже доказана для всех таблиц с указанным свойством, у которых более N нулей. Возьмем таблицу, у которой ровно N нулей ($N<n^2$). Пусть a_1 — наименьшее положительное число в таблице. Если все остальные числа, стоящие в одной строке с a_1, — нули, то тогда в каждой строке и каждом столбце таблицы стоит одно число, равное a_1, а все остальные числа равны нулю. Взяв эти n равных a_1 чисел, мы получим ненулевой набор, вопреки условию. Если же в одной строке с a_1 найдется отличное от нуля число b_1, то отметим эту строку и от числа b_1 перейдем по столбцу к числу $a_2\neq0$ (такое число найдется из-за условия равенства сумм по строкам и столбцам). Отметив этот столбец, от числа a_2 перейдем по строке к числу $b_2\neq0$, и т. д., — до тех пор, пока впервые не попадем либо

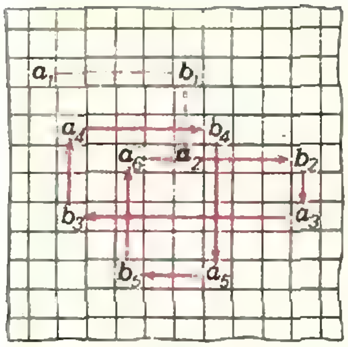
1	0	0	• • •	0	0	0
0	0	0	• • •	0	0	1
0	0	0	• • •	0	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	0	• • •	0	0	0
0	0	1	• • •	0	0	0
0	1	•	• • •	0	0	0

0	0	0	• • •	•	1	0
0	0	0	• • •	1	0	•
0	0	0	• • •	0	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
0	1	0	• • •	0	0	0
1	0	0	• • •	0	0	0
0	0	0	• • •	0	0	1

0	0	0	• • •	0	0	1
0	0	0	• • •	0	1	0
0	0	0	• • •	1	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
0	0	1	• • •	0	0	0
0	1	0	• • •	0	0	0
1	0	0	• • •	0	0	0

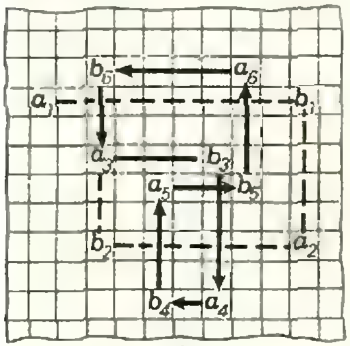
Рис. 4.

числом a_k в уже отмеченную строку, либо числом b_l — в уже отмеченный столбец. Если мы остановимся на числе a_k (в i-й отмеченной строке), то рассмотрим замкнутую ломаную со взаимно перпендикулярными звеньями, в вершинах которой стоят числа $a_k, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \ldots, b_{k-1}$ (если же остановимся на числе b_l в j-м отмеченном столбце — то ломаную с вершинами в числах $b_l, a_j, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_{l-1}$ — см. рисунки 5, *а*) и *б*)); назовем такую ломаную *циклом*.



а)

Рис. 5, а.



б)

Рис. 5, б.

Пусть получился цикл $a_k, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}, \ldots, b_{k-1}$. Выберем среди этих чисел наименьшее — пусть им оказалось, например, число b_{i+1}. Заменим теперь наш цикл таким: a_k+b_{i+1}, b_i-b_{i+1}, $a_{i+1}+b_{i+1}$, 0, $a_{i+2}+b_{i+1}$, …, $b_{k-1}-b_{i+1}$. Ясно, что при этой замене мы получим таблицу, у которой сумма чисел по каждой строке и каждому столбцу — та же самая, и которая «столь же плоха» (в том смысле, что у нее нет ни одного набора из ненулевых элементов из разных строк и разных столбцов), но у которой по крайней мере на один нуль больше. По предположению индукции, эта таблица нулевая. Но тогда и исходная таблица — тоже нулевая. Утверждение доказано.

Итак, ответ в задаче в): *через T шагов можно получить любую таблицу, у которой сумма чисел постоянна по каждой строке и каждому столбцу и равна T.*

Ответ на вопрос задачи б) при $n=2$ отрицательный, а при $n\geqslant 3$ утвердительный. На рисунке 6 изображена таблица 3×3 с попарно различными числами, которая указанными преобразованиями за 15 шагов получается из нулевой.

1	6	8
5	7	3
9	2	4

Рис. 6.

Указать магическую таблицу $n\times n$ с различными числами для любого n довольно трудно. Вместо этого мы сформулируем такое более общее, чем задача б), утверждение. Пусть задано множество A из m элементов и некоторая система $B_1, \ldots, B_r$ его подмножеств, «разделяющая» все элементы этого множества (то есть такая, что для любых двух элементов a, a' из A найдется подмножество B_k, $1\leqslant k\leqslant r$ такое, что один из элементов a, a' принадлежит B_k, а другой—нет).

Припишем каждому подмножеству B_k некоторое натуральное число — «кратность» p_k, и назовем *весом* элемента $a\in A$ сумму кратностей подмножеств, содержащих a. Мы утверждаем, что можно выбрать набор $(p_1, p_2, \ldots, p_r)$ так, что веса всех элементов будут различны. В самом деле, достаточно положить $p_k=2^{k-1}$, — ведь множество чисел $\{1, 2, 2^2, \ldots 2^{m-1}\}$ обладает таким свойством: суммы чисел любых двух его подмножеств различны.

В нашей задаче A — это множество элементов таблицы ($m=n^2$), $B_1, \ldots, B_r$ — подмножества из n элементов, стоящих в разных строках и разных столбцах (всевозможных таких подмножеств $r=n!$, и при $n>2$ эта система подмножеств «разделяет» элементы A), а кратность p_k показывает, сколько раз нужно прибавить по 1 к элементам подмножества B_k.

Ф. Шлейфер

◆

Ф453. *Система грузов, показанная на рисунке 7, стоит на гладком горизонтальном столе. Массы кубиков m_1, m_2 и M. Кубик массы m_2 удерживается на высоте l над столом. Если систему предоставить самой себе, то она придет в движение, причем верхний кубик будет скользить по нижнему. Коэффициент трения между кубиками равен μ. На какое расстояние переместится нижний кубик к тому моменту, когда кубик массы m_2 коснется стола?*

Так как стол гладкий (трение между столом и кубиком массой M отсутствует), то при движении на систему извне не действуют никакие горизонтальные силы (силы трения между кубиками массами m_1 и M — внутренние силы). Следовательно, центр масс системы не может сместиться в горизонтальном направлении.

Обозначим через l_0 расстояние, на которое переместятся в горизонтальном направлении кубики массами m_2 и M. Кубик массой m_1 переместится, очевидно, на расстояние $l-l_0$, причем в противоположном направлении.

Приравняем координаты центра масс системы до начала движения кубиков и после того, как оно прекратится:

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2+Mx_3}{m_1+m_2+M}=\frac{m_1(x_1+l-l_0)+m_2(x_2-l_0)+M(x_3-l_0)}{m_1+m_2+M},$$

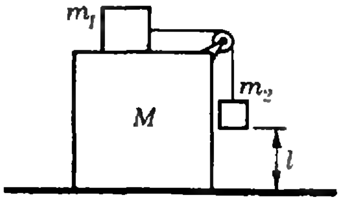


Рис. 7.

где x_1, x_2 и x_3 — начальные координаты кубиков массами m_1, m_2 и M относительно произвольного начала отсчета. Отсюда

$$l_0 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + M}\, l.$$

И. Слободецкий

◆

Ф454. *Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение $U_0 = 220$ В, то напряжение на вторичной обмотке будет $U_1 = 127$ В. Какое напряжение U будет при $U_0 = 220$ В на нагрузке $R = 10$ Ом, подключенной ко вторичной обмотке этого трансформатора? Активное сопротивление первичной обмотки трансформатора $r_1 = 2$ Ом, а вторичной $r_2 = 1$ Ом. Внутреннее сопротивление генератора тока принять равный нулю.*

Обозначим действующее значение э. д. с. индукции, возникающей в первичной обмотке ненагруженного трансформатора, через $\mathscr{E}_1$, а во вторичной обмотке — через $\mathscr{E}_2$. Очевидно, что

$$\frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{n_1}{n_2} = k,$$

где n_1 — число витков в первичной обмотке, n_2 — во вторичной обмотке и $k = n_1/n_2$ — коэффициент трансформации. Поскольку в ненагруженном трансформаторе

$$\mathscr{E}_1 = U_0 \text{ и } \mathscr{E}_2 = U_1,$$

то

$$k = \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2} = \frac{U_0}{U_1} = \sqrt{3}.$$

Когда трансформатор нагружен, то есть ко вторичной обмотке подключено сопротивление R, по первичной обмотке идет ток

$$I_1 = \frac{U_0 - \mathscr{E}_1'}{r_1}, \qquad (1)$$

а по вторичной обмотке —

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_2'}{R + r_2}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathscr{E}_1'$ и $\mathscr{E}_2'$ — действующие значения э. д. с. индукции в первичной и вторичной обмотках нагруженного трансформатора.

Коэффициент полезного действия трансформатора практически равен единице. Это означает, что мощность в первичной обмотке трансформатора равна мощности, передаваемой во вторичную цепь:

$$I_1\mathscr{E}_1' = I_2\mathscr{E}_2'.$$

Тогда

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\mathscr{E}_1'}{\mathscr{E}_2'} = k. \qquad (3)$$

Объединим уравнения (1), (2) и (3) в систему:

$$\begin{cases} I_1 = \dfrac{U_0 - \mathscr{E}_1'}{r_1} \\ I_2 = \dfrac{\mathscr{E}_2'}{R + r_2} \\ \dfrac{I_2}{I_1} = k, \end{cases}$$

откуда

$$I_2 = \frac{kU_0}{r_1 + k^2 (R + r_2)},$$

и

$$U_2 = I_2 R = \frac{kU_0 R}{r_1 + k^2 (R + r_2)} \approx 110 \text{ В}.$$

В. Скороваров

Ф455. *Потери мощности в линии электропередачи составляют 5% от мощности, получаемой потребителем. Как нужно изменить напряжение на входе линии и сопротивление потребителя для того, чтобы при той же мощности, получаемой потребителем, потери в линии снизить до 1%?*

Мощность, получаемая потребителем, равна

$$P = I_0^2 R = \frac{U_0^2}{(R+r)^2} R,$$

где I_0 — ток в линии электропередачи, r — сопротивление линии, R — сопротивление потребителя и U_0 — напряжение на входе линии. Эта мощность по условию должна остаться неизменной. Следовательно,

$$\frac{U_0^2}{(R+r)^2} R = \frac{U_1^2}{(R_1+r)^2} R_1,$$

где U_1 — новое напряжение на входе линии и R_1 — новое сопротивление потребителя. Обозначим через α отношение мощности, теряемой в проводах, к мощности, получаемой потребителем. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{I_0^2 r}{I_0^2 R} = \frac{r}{R} = 0{,}05, \qquad \alpha_2 = \frac{r}{R_1} = 0{,}01.$$

Отсюда $R = \dfrac{r}{\alpha_1}$ и $R_1 = \dfrac{r}{\alpha_2}$.

Следовательно,

$$\frac{R_1}{R} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 5,$$

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{R_1+r}{R+r}\sqrt{\frac{R}{R_1}} = \frac{r\left(1+\dfrac{1}{\alpha_1}\right)}{r\left(1+\dfrac{1}{\alpha_2}\right)}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \frac{1+\alpha_2}{1+\alpha_1}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} \approx \sqrt{5}\,.$$

И. Слободецкий

◆

Ф456. *Какую минимальную скорость нужно сообщить на Земле космическому кораблю для того, чтобы он попал на Солнце? Каким будет время полета корабля к Солнцу?*

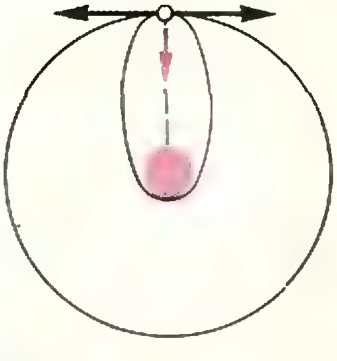


Рис. 8.

Представим себе, что с Земли запущен космический корабль, скорость которого немного меньше скорости орбитального движения Земли. Траекторией движения корабля будет эллипс, в одном из фокусов которого — Солнце. Чем меньше начальная скорость корабля относительно Солнца, тем более вытянута его орбита. При некотором значении этой скорости корабль в своем движении коснется поверхности Солнца. Иными словами, высота перигелия орбиты корабля будет равна радиусу Солнца. Радиус Солнца примерно в 200 раз меньше радиуса орбиты Земли, так что малая полуось эллиптической орбиты корабля, касающейся Солнца, много меньше большой полуоси. Для оценки можно считать, что малая полуось просто равна нулю. При таком предположении траектория движения корабля превращается в прямую, соединяющую точку запуска корабля с Солнцем, то есть корабль попадает на Солнце, свободно падая на него. Следовательно, в начальный момент скорость корабля относительно Солнца должна быть равна нулю. Для того чтобы выполнялось это условие, кораблю необходимо на Земле сообщить скорость, равную по абсолютной величине орбитальной скорости Земли, но направленную в противоположную сторону.

Радиус орбиты Земли равен примерно $1{,}5\cdot10^{11}$ м, период обращения Земли вокруг Солнца $\sim 3{,}15\cdot10^7$с. Следовательно, орбитальная скорость Земли равна

$$v = \frac{2\pi\cdot1{,}5\cdot10^{11}}{3{,}15\cdot10^7} \approx 3\cdot10^4 \text{ м/с}.$$

Такую скорость нужно сообщить кораблю на Земле (рис. 8).

Для того чтобы найти время полета корабля к Солнцу, воспользуемся третьим законом Кеплера. Согласно этому закону квадраты периодов обращения корабля и Земли вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей орбит корабля и Земли:

$$\frac{T_к^2}{T_З^2}=\frac{(R/2)^3}{R^3}$$

(R — радиус орбиты Земли). Время полета корабля к Солнцу составляет половину периода его обращения по эллиптической орбите, то есть

$$t=\frac{T_н}{2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}T_З\approx 5{,}6\cdot 10^6 \text{ с.}$$

А. Дозоров

◆

Ф457. *Два плоских воздушных конденсатора с одинаковыми обкладками имеют одинаковые заряды. Расстояние между обкладками у первого конденсатора вдвое больше, чем у второго. Как изменится энергия электрического поля системы, если второй конденсатор вставить между обкладками первого так, как показано на рисунке 9, а и б?*

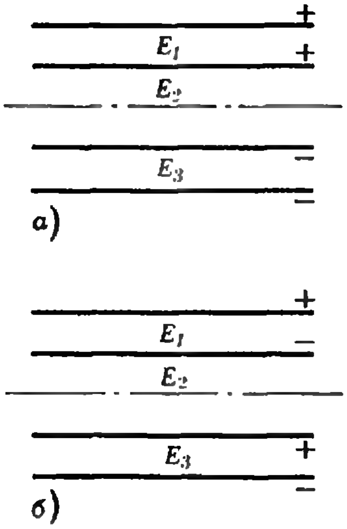


Рис. 9.

Энергия электрического поля заряженного конденсатора равна

$$W=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}V,$$

где ε_0 — электрическая постоянная, ε — диэлектрическая проницаемость среды, $\vec{E}$ — напряженность поля и V — объем, занимаемый электрическим полем.

Найдем начальную энергию W_0 электрического поля системы двух воздушных конденсаторов ($\varepsilon=1$). Поскольку заряды на конденсаторах одинаковы, напряженность поля в первом конденсаторе такая же, как и во втором. Обозначим ее абсолютное значение через E_0. Пусть объем первого конденсатора равен V_0, а второго, соответственно, $V_0/2$. Тогда

$$W_0=\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}V_0+\frac{\varepsilon_0E_0^2}{2}\,\frac{V_0}{2}=\frac{3}{4}\varepsilon_0E_0^2V_0.$$

После того как конденсаторы будут вставлены один в другой, абсолютные значения напряженностей электрических полей между пластинами станут другими. Для случая а) (рис. 9, *а*)

$$E_1=E_3=E_0,\quad E_2=2E_0.$$

Соответственно изменится и энергия системы:

$$W=\frac{\varepsilon_0E_1^2}{2}(V_1+V_3)+\frac{\varepsilon_0E_2^2}{2}V_2=\frac{5}{4}\varepsilon_0E_0^2V_0.$$

Отсюда

$$\frac{W}{W_0}=\frac{5}{3}.$$

В случае б) (рис. 9, *б*)

$$E_1=E_3=E_0,\quad E_2=0.$$

Тогда

$$W=\frac{\varepsilon_0E_1^2}{2}(V_1+V_3)=\frac{1}{4}\varepsilon_0E_0^2V_0,$$

и

$$\frac{W}{W_0}=\frac{1}{3}.$$

С. Козел

А. Земляков, Б. Ивлев

Вопросы по алгебре и анализу

Мы продолжаем публикацию вопросов по математике (см. «Квант», 1978, № 1, с. 36). На каждый из перечисленных ниже вопросов дано пять вариантов ответа (а, б, в, г, д), из которых ровно один — верный. Требуется указать верные ответы. Постарайтесь уложиться в полчаса. Сверьте свои ответы с приведенными в конце номера. (После номера каждого вопроса в скобках указан класс, на который этот вопрос рассчитан.)

А. *Функции, графики, уравнения*

1 (VIII). Какие из функций, заданных на рисунке 1 с помощью стрелок, являются обратимыми?

а) Только f_1; б) f_1 и f_2; в) f_1 и f_3; г) f_3 и f_4; д) все обратимые.

2 (VIII). График какой функции выглядит так, как показано на рисунке 2?

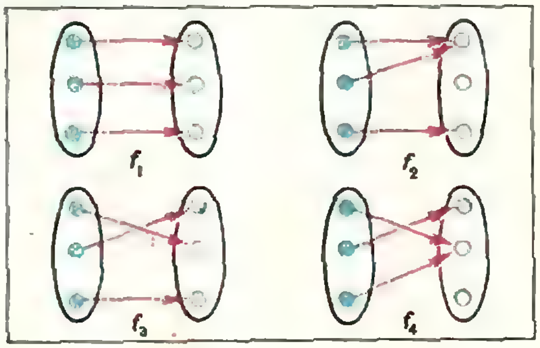


Рис. 1.

а) $y = x^2 + 2x - 3$; б) $y = x^2 - 2x + 3$; в) $y = -x^2 - 2x + 1$; г) $y = -x^2 + 2x + 1$; д) $y = -x^2 + 2x - 1$.

3 (VIII). Сколько существует геометрических прогрессий с четвертым членом $a_4 = -2$ и десятым членом $a_{10} = -1$?

а) Ни одной; б) одна; в) две; г) три; д) бесконечно много.

4 (VIII). Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{25(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-3)(x-1)}?$$

а) Ни одного; б) бесконечно много; в) пять; г) три; д) одно.

5 (VIII). На сколько процентов увеличится покупательная способность населения (т. е. количество товаров, которое можно приобрести на данную сумму денег), если цены на все товары снизить на 20%?

а) На 20%; б) на 25%, в) на 40%; г) на 10%; д) на 12%.

Б. *Анализ и комбинаторика*

6 (X). Расположите числа $\sin 1$, $\cos 2$, $\operatorname{ctg} 3$ в порядке возрастания (аргументы даны в радианах).

а) $\operatorname{ctg} 3 < \cos 2 < \sin 1$; б) $\sin 1 < \cos 2 < \operatorname{ctg} 3$; в) $\cos 2 < \sin 1 < \operatorname{ctg} 3$; г) $\operatorname{ctg} 3 < \sin 1 < \cos 2$; д) $\cos 2 < \operatorname{ctg} 3 < \sin 1$.

7 (IX). Известно, что последовательности (a_n) и $(a_n b_n)$ — сходящиеся, а последовательность (b_n) — расходящаяся. Чему может быть равен предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

а) Такого не бывает; б) a может быть любым; в) a может быть любым, кроме 0; г) $a = 0$; д) $a = 1$.

8 (IX). Чему равен предел

$$A = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{4 - x}?$$

а) $A = 0$; б) $A = -\frac{1}{2}$;

в) $A = -\frac{1}{4}$; г) $A = \frac{1}{4}$;

д) этот предел не существует.

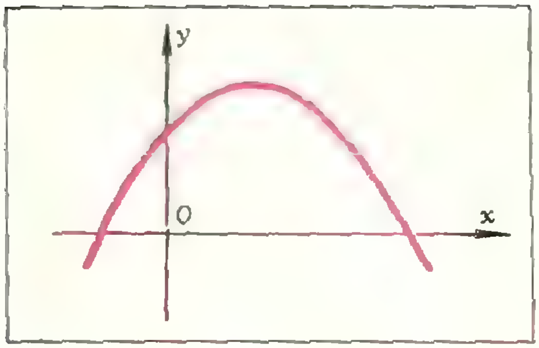


Рис. 2.

9 (IX). По какой формуле вычисляется производная функции $h(x) = f(x^2)$?

а) $h'(x) = f(2x)$; б) $h'(x) = 2f(x)$; в) $h'(x) = f'(2x)$; г) $h'(x) = 2x \times f(x^2)$, д) $h'(x) = 2x \cdot f'(x^2)$.

10 (IX). Сколькими способами группу из 12 человек можно разбить на три подгруппы — из 3, 4 и 5 человек?

а) $C_{12}^3 + C_9^4$; б) $C_{12}^3 \cdot C_9^4$; в) $C_{12}^3 + C_{12}^4$; г) $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4$; д) $C_{12}^3 \cdot C_{12}^4 \cdot C_{12}^5$.

Кто меньше?

На третьей странице обложки рассказано о некоторой игре. Разумеется, изложенные там правила дают возможность сесть и начать играть. Однако, как показывает опыт, освоить игру «с ходу» довольно сложно. Чтобы облегчить нашим читателям этот подготовительный период, мы разбираем приведенную на обложке партию. Если вы внимательно проследите за разбором, то, конечно, полностью освоите правила игры.

Итак, первый ход. Что означают три белых булавки? Во-первых, у загадчика есть фишка одного из невыставленных в вопросе цветов—белая или красная. Действительно, если бы весь набор загаданных цветов был представлен в нашем вопросе, то загадчик должен был бы выставить четыре булавки. (Заметьте, что в этом рассуждении нам не существен цвет выставленных булавок.) Более того, красно-белая фишка должна быть только одна — иначе булавок было бы выставлено еще меньше. Итак, у загадчика одна красно-белая фишка и три желто-черно-сине-зеленые фишки. Во-вторых, все желто-черно-сине-зеленые фишки стоят на «чужих» местах: против желтой — не желтая, против черной — не черная и т. д. (здесь мы, наконец, учли, что все булавки в ответе — белые).

Второй ход. Мы убрали желтую фишку и добавили белую — количество булавок в ответе не изменилось. Следовательно, в загаданном наборе желтых и белых фишек одинаковое число. Но как мы выяснили при анализе первого хода, белых фишек не больше одной. Поэтому в отгадываемом наборе либо вовсе нет ни желтой, ни белой фишек, либо их — по одной штуке. Далее, у противника есть ровно одна желто-красная фишка (см. разбор первого хода), а из первого ответа нам известно, что у него ровно одна бело-красная фишка. Таким образом, имеются следующие две возможности:

а) у противника есть одна красная фишка и нет ни желтых, ни белых, а три оставшихся фишки — черно-сине-зеленые.

б) у противника нет красной фишки и есть одна белая и одна желтая, а две оставшиеся фишки — черно-сине-зеленые.

Ну и наконец, в первом столбце стоит не черная и не зеленая фишка, во втором — не синяя и не зеленая и т. д.

Третий ход. Решено проверить первую возможность: красная фишка есть. Попытка оказалась удачной — все цвета противника угаданы.

Теперь, учитывая, что мы знаем про набор противника довольно много, можно попытаться описать все возможные наборы, на которые первые три ответа совпадают с выставленными.

Во втором столбце должна стоять черно-красная фишка.

Предположим, что она черная. Тогда красная фишка должна стоять в первом столбце — так как там не могут стоять ни зеленая, ни синяя фишки (если бы в первом стояла синяя фишка, в ответе было бы как минимум, две черные булавки). Аналогично, сине-зеленые фишки могут стоять только в третьем столбце, а в четвертом столбце может оказаться только еще одна черная фишка.

Итак, если во втором столбце стоит черная фишка, то в первом столбце стоит красная фишка, в третьем — сине-зеленая, в четвертом — черная. Если же во втором столбце стоит красная фишка, то в первом столбце стоит синяя фишка, в четвертом — черная, в третьем — сине-зеленая. Таким образом, есть всего четыре возможных варианта. Какой бы из этих вариантов ни был выставлен, наш четвертый вопрос все их «различит»: ответы в этих четырех случаях будут различными, и на пятом шаге мы наверняка выставим набор загадчика. Однако, нам повезло и мы сэкономили один ход.

Л. Лиманов

Б. Гейдман`

Композиция двух осевых симметрий

Поводом для заметки послужила задача 56 из числа задач на повторение по курсу VI—VIII классов учебного пособия «Геометрия 8». Докажите, что *композиция двух симметрий, оси которых пересекаются под углом α, есть поворот, причем центром поворота является точка пересечения осей, а угол поворота равен 2α.*

Что понимать здесь под углом α? Если α — величина угла между осями симметрии, то α принимает значения от 0° до 90°. В то же время угол поворота характеризуется направленной величиной и 2α может принимать значения от —180° до 180° *). Может быть, нам «повезло» и углу α между осями симметрии соответствует угол поворота 2α в пределах от 0° до 180°? На самом деле — нет. Мы уточним это позже, а пока займемся решением задачи.

Композиция двух симметрий относительно осей l и m, пересекающихся в точке O, очевидно, оставляет неподвижной единственную точку O плоскости. Известно, что перемещение с единственной неподвижной точкой O является поворотом плоскости с центром в точке O *).

Найдем угол поворота. Возьмем точку M на оси l. При симметрии S_l относительно оси l она остается неподвижной, а при симметрии S_m относительно оси m она перейдет в точку M_1, причем величина угла MOM_1 равна 2α, т. е. композиции симметрий $S_m \circ S_l$ соответствует поворот плоскости вокруг точки O на угол 2α (рис. 1).

Теперь рассмотрим композицию симметрий $S_l \circ S_m$ — сначала относительно оси m, а затем относительно оси l.

Пусть $N \in m$ (рис. 2); тогда $S_m(N) = N$, а $S_l(N) = N_1$, величина угла NON_1 по-прежнему равна 2α, а угол поворота равен (-2α), так как направление поворота совпадает с вращением по часовой стрелке. Композиция симметрий $S_l \circ S_m$ есть поворот плоскости вокруг точки O на угол (-2α) (см. рис. 2).

Итак, одному и тому же углу между осями соответствуют два различных поворота плоскости. Дело в том, что композиция осевых симметрий не коммутативна и для того, чтобы поворот определялся однозначно, необходимо фиксировать порядок этих симметрий.

В свою очередь величина угла между осями симметрий должна отражать этот порядок, т. е. быть направ-

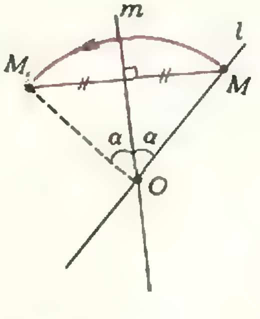


Рис. 1.

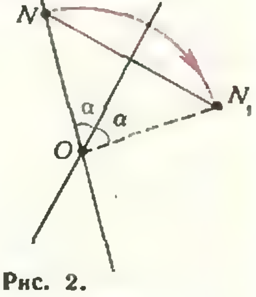


Рис. 2.

---

*) Напомним различные случаи употребления угловых величин в курсе геометрии VI—VIII классов:

1) величина α угла (геометрической фигуры) лежит в пределах: $0° < \alpha < 360°$;

2) угол между двумя лучами лежит в пределах: $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

3) угол между двумя прямыми лежит в пределах: $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$;

4) любой поворот характеризуется углом, лежащим в пределах: $-180° < \alpha \leqslant 180°$.

*) Рекомендуем прочитать статью В. М. Фишмана «Решение задач с помощью геометрических преобразований» («Квант», 1975, № 7), где это доказано, или доказать это самостоятельно.

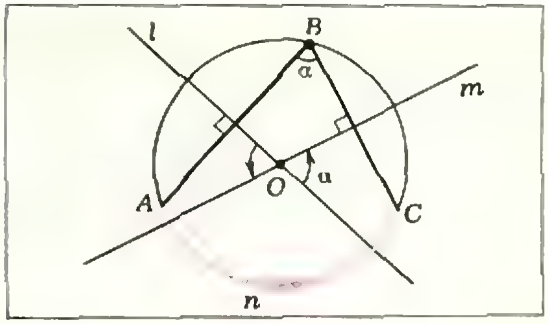


Рис. 3.

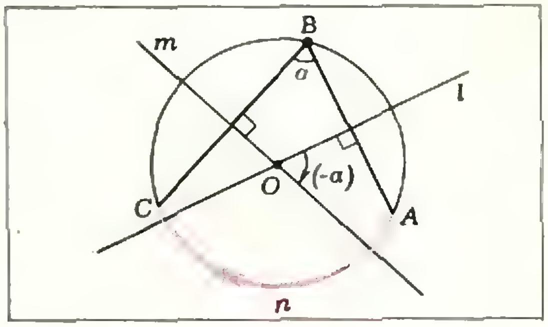


Рис. 4.

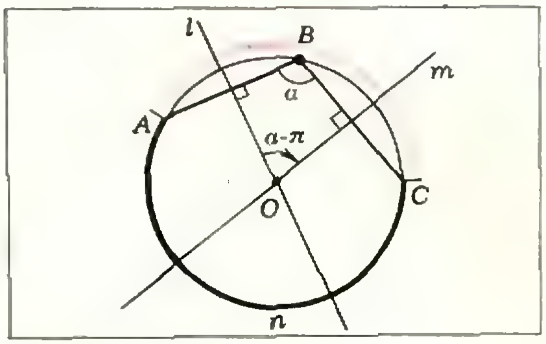


Рис. 5.

ленной. Будем считать, что *направленный угол от прямой l до прямой m* по модулю равен обычному углу между ними, а его знак положительный; если при достаточно малом повороте вокруг их точки пересечения O против часовой стрелки прямая l попадает внутрь острого (или прямого) угла, образованного этими прямыми. Если же прямая l попадает внутрь острого (или прямого) угла при малом повороте по часовой стрелке вокруг точки O, то угол от прямой l до прямой m — отрицательный, а модуль его равен обычному углу между прямыми. Угол от данной прямой до нее самой считается равным 0°. Таким образом, величина направленного угла α от прямой l до прямой m принимает значения: $-90° < \alpha \leqslant 90°$; каждая пара пересекающихся прямых l и m задает два направленных угла — угол от прямой l до m, равный α, и угол от прямой m до l, равный $(-\alpha)$.

При таком подходе к величине угла между прямыми удается привести в соответствие композицию двух симметрий и поворот вокруг точки пересечения их осей. Нашу задачу можно теперь сформулировать более точно следующим образом:

Пусть угол от прямой l до m равен α; тогда композиция симметрий $S_m \circ S_l$ есть поворот вокруг точки пересечения этих осей O на угол 2α.

Проиллюстрируем этот же подход на доказательстве хорошо известной теоремы о вписанном угле.

Теорема. *Величина вписанного угла равна половине угловой величины дуги*[*], *на которую он опирается.*

Доказательство. Угол ABC вписан в окружность с центром O. Проведем через O прямые l и m, перпендикулярные к его сторонам. Эти прямые пройдут через середины хорд AB и BC соответственно.

Пусть $\widehat{ABC} = \alpha$, где $0° < \alpha \leqslant 90°$. В этом случае угол от прямой l до m может быть равным α (рис. 3) или $(-\alpha)$ (рис. 4). Композиция симметрий $S_m \circ S_l$ переведет точку A в точку C, так как при S_l A переходит в B, а при S_m — B в C. С другой стороны эта композиция может быть заменена поворотом $R_0^{2\alpha}$ или $R_0^{-2\alpha}$ вокруг центра O на угол 2α или (-2α), притом $C = R_0^{2\alpha}(A)$ или $C = R_0^{-2\alpha}(A)$ И в том, и в другом случае угловая величина дуги AnC, на которую опирается вписанный угол ABC, равна 2α (так как точка A переходит в C, пройдя дугу AnC).

Пусть $\widehat{ABC} = \alpha$, где $\alpha > 90°$. Тогда угол между прямыми l и m может быть равным $(\alpha - \pi)$ (рис. 5) или $(\pi - \alpha)$ (рис. 6).

Композиция симметрий $S_m \circ S_l$, переводящая точку A в точку C,

---

[*] Угловая величина дуги равна, по определению, величине соответствующего ей центрального угла α, т. е. принимает значения в пределах: $0° < \alpha < 360°$.

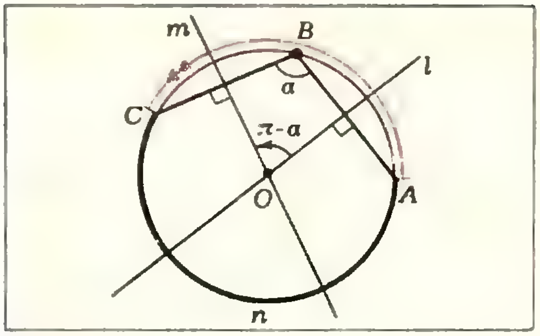


Рис. 6.

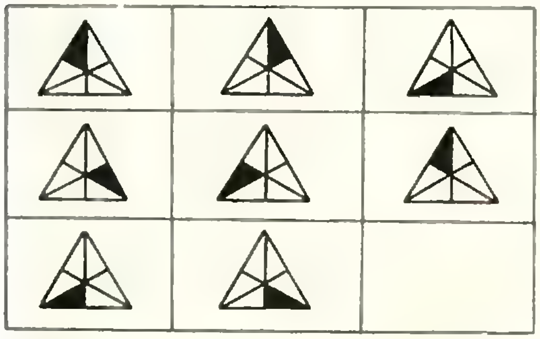


Рис. 7.

в этом случае есть поворот $R_0^{2(\alpha-\pi)}$ или $R_0^{2(\pi-\alpha)}$. Точка $C = R_0^{2(\alpha-\pi)}(A)$ или $C = R_0^{2(\pi-\alpha)}(A)$. Угловая величина дуги ABC равна $2(\pi-\alpha)$ (точка A переходит в точку C, двигаясь по дуге ABC), а дуга AnC, на которую опирается вписанный угол ABC, имеет угловую величину $2\pi-2(\pi-\alpha)=2\alpha$. Теорема доказана.

В заключение два несложных упражнения.

1°. На рисунке 7 изображен «магический квадрат», в котором осталась незаполненной одна клетка. Какой из восьми треугольников, заполнивших восемь клеток «магического квадрата», должен стоять в пустой клетке? Ответ постарайтесь обосновать.

2°. Треугольники ABC и $A'B'C'$ симметричны относительно двух различных прямых l и m. Докажите, что эти треугольники — правильные.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что если

$$0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n;$$
$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n > 0,$$

то выполняется неравенство

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} \geqslant \frac{n(a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n)}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}.$$

2. Найдите наименьшее значение суммы

$$\mathrm{tg}^2\alpha_1 + \mathrm{tg}^2\alpha_2 + \mathrm{tg}^2\alpha_3 + \ldots + \mathrm{tg}^2\alpha_n,$$

если

$$\sin^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_2 + \sin^2\alpha_3 + \ldots + \sin^2\alpha_n = \frac{1}{2}n$$

$(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

С. Берколайко

3. Докажите, что

а) если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$a^2 + b^2 > \frac{1}{2}c^2;$$

в) a, b, c и d — длины сторон параллелепипеда и одной из его диагоналей, то

$$a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3}d^2.$$

В. Малинин

4. Докажите, что в произвольном треугольнике

$$S^3 \leqslant \frac{P^7}{2^{15}\cdot R},$$

где S — его площадь, P — периметр, а R — радиус описанной около него окружности.

А. Агаев
(ученик 9 класса)

«Квант» для младших школьников

Задачи

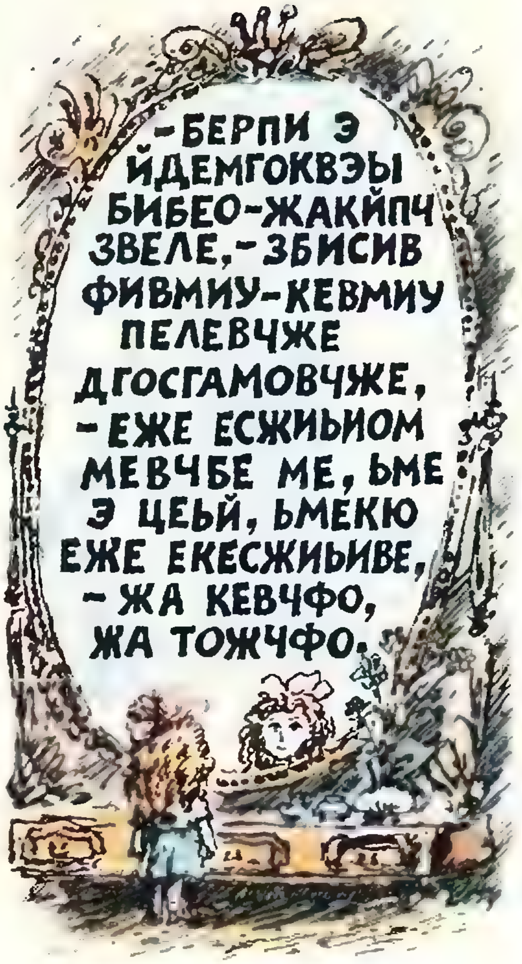
1. Найдите два таких двузначных числа БА и ЭТ, что $БА^2 = БЭТА$, а $ЭТ^3 = БЭАТ$.

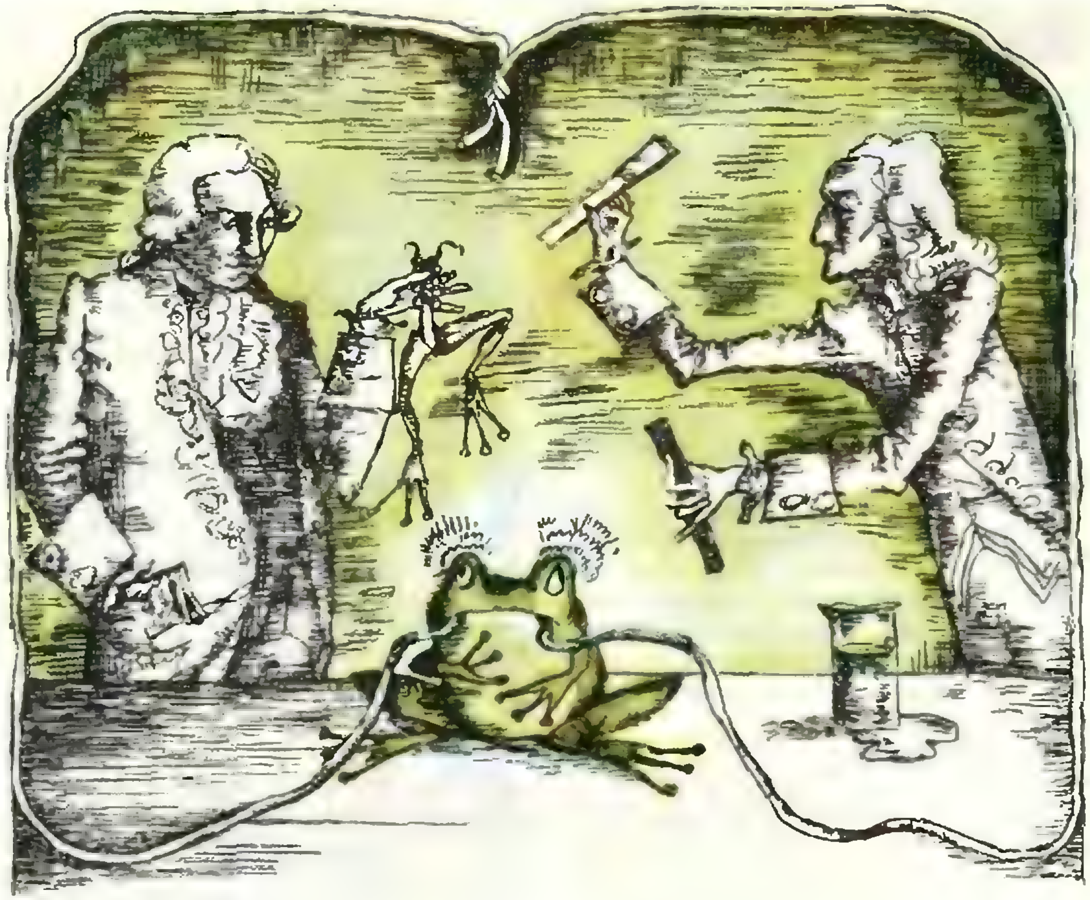
2. Попробуйте расшифровать отрывок из книги «Алиса в Зазеркалье» английского математика и писателя Льюиса Кэррола. Эта книга — продолжение всем известной «Алисы в стране чудес». Отрывок имеет прямое отношение к математике (см. рис.).

Текст зашифрован следующим образом: десять букв — а, е, и, й, о, у, ы, э, ю, я — как-то разбиты на пары, остальные двадцать две буквы (буква «ё» у нас не встречается) тоже както разбиты на пары, и каждая буква в тексте заменена на другую из той же пары. Отрывок записан по всем правилам русского языка.

3. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько его сын, а Петр — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 35 рыб. Сына Николая зовут Григорий. Как зовут сына Петра?

4. Какое наибольшее количество месяцев одного года может иметь по 5 пятниц?


-БЕРПИ Э ЙДЕМГОКВЭЫ БИБЕО-ЖАКЙПЧ ЗВЕЛЕ,-ЗБИСИВ ФИВМИУ-КЕВМИУ ПЕЛЕВЧЖЕ ДГОСГАМОВЧЖЕ, -ЕЖЕ ЕСЖИЬИОМ МЕВЧБЕ МЕ, ЬМЕ Э ЦЕЬЙ, ЬМЕКЮ ЕЖЕ ЕКЕСЖИЬИВЕ, -ЖА КЕВЧФО, ЖА ТОЖЧФО.



И. Белкин

Спор о лягушке

Действующие лица в этом рассказе — итальянские ученые Луиджи Гальвани и Алессандро Вольта. Время действия — последнее десятилетие XVIII века. Тема рассказа — одно из важнейших открытий в физике за всю историю ее развития. Оно прямо привело к тому, что следующее, XIX столетие стало не только веком пара, но и веком электричества.

Началась эта история с того, что в 1791 году профессор анатомии и медицины университета в Болонье Луиджи Гальвани (1737—1798) опубликовал свой «Трактат о силах электричества при мышечном движении». Вместе со многими другими читателями с трактатом познакомился другой профессор — профессор физики университета в Павии Алессандро Вольта (1745—1827). Между двумя профессорами возник научный спор, который длился несколько лет, результатом которого и стало упомянутое важное открытие. Даже не одно, а по крайней мере три. Важную роль и в этом споре, и в сделанных открытиях сыграли ... лягушки.

Наука об электричестве в конце XVIII века

О природе электричества к рассматриваемому времени у исследователей были довольно туманные представления, и ни одно из них не было общепринятым и убедительно обоснованным. Более других последователей имели воззрения американского ученого и государственного деятеля Бенджамина Франклина. Он полагал, что «электричество» — это особая жидкость (флюид), содержащаяся в каждом теле в определенном, «нормальном» для этого тела количестве. Процесс электризации тел состоит в том, что часть этого флюида из одного тела передается другому. То тело, которому электрическая жидкость передана и у которого, таким образом, оказался избыток этой жидкости, Франклин предложил считать положительно заряженным, а другое тело, потерявшее часть электрической жидкости, — отрицательно заряженным. Франклин приписывал электрическому флюиду ряд свойств, которые, по его мнению, объясняли электрические явления. В частности, он отмечал, что отдельные части электрического флюида отталкиваются друг от друга, а в целом электрическая материя очень сильно притягивается к обычной материи.

К рассматриваемому времени были изобретены и широко использовались исследователями устройства, позволяющие накапливать электричество, — электростатические машины и конденсаторы в виде так называемых лейденских банок. Было установлено, что одни тела совершенно не пропускают через себя электрический флюид, а другие пропускают его с разной степенью «податливости» (то есть сопротивления).

Наконец, были известны характерные явления, сопровождающие электрический разряд, то есть переход электрической жидкости от одного тела к другому или к Земле. Это, во-первых, свечение в виде электрической искры, которую можно извлечь из заряженного тела, причем было убедительно доказано, что молния — это тоже электрическая искра грандиозных размеров. Во-вторых, при прохождении разряда через тела животных или человека происходит резкое сокращение мышц, вызывающее ощущение удара, иногда очень сильного и опасного для жизни. Оба эти явления считались надежными признаками электрического характера процессов, при которых они наблюдаются.

Добавим, что к этому времени были изучены и описаны особые органы некоторых рыб (скаты, угри, сомы), способных создавать электрические разряды, вызывающие у жертв нападения совершенно такие же удары, как и разряды лейденских банок и электрических машин.

На сцене появляется лягушка

В таком положении находилась наука об электричестве, когда в 1791 году вышел в свет упомянутый выше трактат Луиджи Гальвани, в котором были описаны опыты, проведенные им в 1780—1790 годы.

Наблюдения, сделанные Гальвани, были необычайно трудны для понимания. Первое из них заключалось в следующем.

Работая с препарированной конечностью лягушки, Гальвани и его помощники (одним из них, как утверждают некоторые историки, была его жена, и именно она сделала решающее наблюдение) заметили, что если прикоснуться скальпелем к бедренному нерву лягушки (тем самым заземлив его) в тот момент, когда из стоящей в комнате электростатической машины извлекается искра, то мышцы лягушки начинают резко сокращаться. Явление очень странное, если учесть, что разряд проходил не через тело лягушки и что лягушка была мертвой.

Специальный опыт был поставлен Гальвани во дворе во время грозы и дал те же результаты: на каждый грозовой разряд мышцы лягушки исправно реагировали сокращениями, если нерв был заземлен.

Этому явлению Гальвани никакого объяснения не дает, да он и не мог его дать*).

---

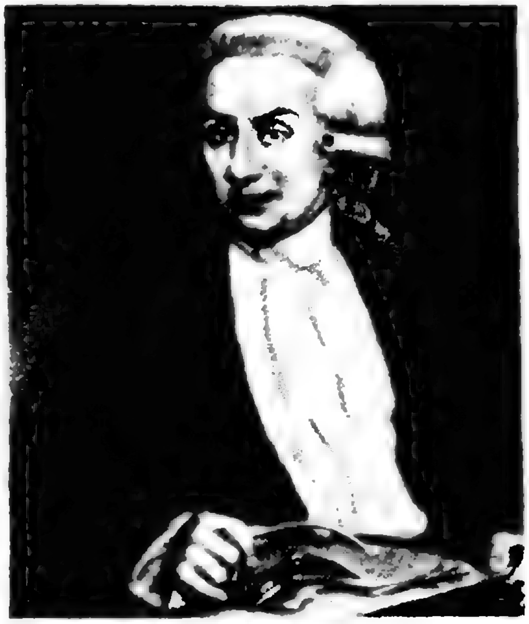
*) Дело в том, что в электрической искре и в молнии происходят электрические колебания, которые в виде радиоволн распространяются по всем направлениям. Мышцы лягушки служили, по-видимому, «приемником» таких волн и реагировали на них сокращениями. Однако о существовании этих колебаний стало известно лишь через много десятилетий — в 1859 году. О том, что они распространяются в виде радиоволн, узнали почти через 30 лет после этого — в 1888 году. А еще через 7 лет А. С. Попов использовал радиоволны для целей связи. Кстати, и А. С. Попов своим приемником «ловил» радиоволны от грозовых разрядов (он даже и назывался грозоотметчиком). Препарированные лягушки Гальвани, по-видимому, тоже реагировали на радиоволны от электрических искр и грозовых разрядов.

Но разве можно было догадаться об этом в 1791 году?!

Продолжая свои исследования, Гальвани сделал еще одно, не менее странное, наблюдение. Пытаясь обнаружить влияние на препарированную лягушку атмосферного электричества в тихую погоду, Гальвани подвесил на железную ограду балкона с помощью латунных крючков конечности лягушек. Но теперь сокращения мышц наблюдались только тогда, когда мышцы лягушки специально прижимались к железной ограде, так что создавалась замкнутая цепь: железо — мышца — нерв — латунный крючок — железо. Удивленный этим странным обстоятельством, Гальвани перенес опыты в комнату, где о влиянии атмосферного электричества не могло быть и речи. Здесь, положив препарированную лягушку на серебряную пластинку и прикасаясь к нерву лягушки стальным скальпелем, Гальвани снова обнаружил резкие сокращения мышцы всякий раз, когда нерв (или спинной мозг, откуда он выходит) и мышца соединялись металлическим проводником. Гальвани был достаточно наблюдательным экспериментатором, чтобы заметить и отметить одно обстоятельство: сокращения мышц лягушки особенно сильны тогда, когда нерв и мышца замыкаются парой *разнородных* металлов.

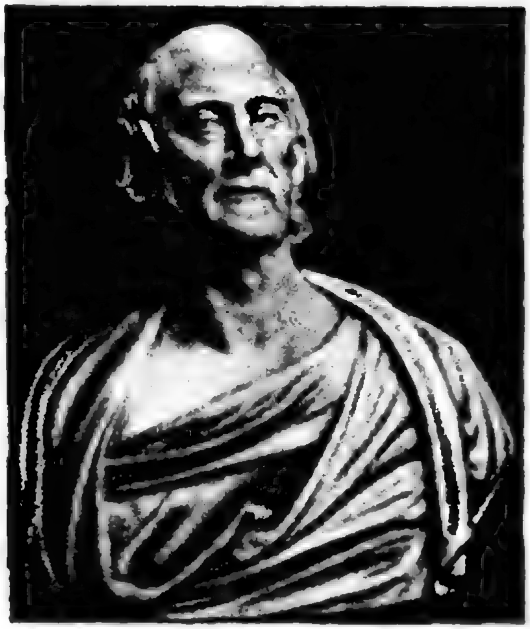
Один из опытов Гальвани был особенно эффектен. Он держал в руках препарированную лягушку за одну лапку так, что другая касалась серебряной пластинки. Той же пластинки касался латунный крючок, проходивший через спинной мозг лягушки, так что мышца и нерв замыкались через латунь и серебро. При этом мышца лапки, касавшейся пластинки, сокращалась, лапка приподнималась, разрывая цепь, снова падала на пластинку, и все начиналось сначала. Вид «пляшущей» мертвой лягушки вызвал немалое удивление исследователя. От объяснения этого явления Гальвани не отказался, и состояло оно вот в чем.

Сокращения лягушачьей мышцы указывали на то, что процесс имеет электрическую природу. Но откуда взялось электричество? Ведь лягушка не похожа на электрических сомов или угрей, и электрического органа у нее нет. К тому же лягушка мертва. Тем не менее Гальвани высказывает утверждение о существовании особого *животного электричества*. По мнению Гальвани внешняя поверхность и внутренняя часть мышцы лягушки (как, впрочем, и всякого другого животного) образуют нечто вроде конденсатора (лейденской банки), который возбуждается (заряжается) действием спинного мозга, передаваемым через нерв. При замыкании через металл «конденсатор» разряжается, по цепи протекает электрическая жидкость (возникает электрический ток, как сказали бы мы теперь), на что мышца и реагирует сокращением. Понятно, что при таком взгляде на вещи совершенно безразлично, замыкается ли цепь одним и тем же металлом или двумя различными металлами. Несколько позже Гальвани дал такое «объяснение» роли разнородности металлов. По мнению Гальвани животное электричество отличается от обычного. И главное его отличие именно тем, что оно... «более эффективно действует через разнородные проводники».



Луиджи Гальвани (1737—1798).

Ниже мы увидим, что действительно открыл Гальвани, что он не открыл (хотя и мог открыть), в чем он ошибался и в чем он был прав.



Алессандро Вольта (1745—1827).

За дело берется Алессандро Вольта. Спор о лягушке

Трактат Гальвани вызвал большой интерес. Привлек он внимание и профессора физики университета в Павии Алессандро Вольта, уже известного своими работами по исследованию электрических явлений и своими изобретениями в области электричества. Узнав об опытах Гальвани и нисколько не веря в существование животного электричества, Вольта тем не менее повторил эти опыты. Физик-экспериментатор, он сумел не хуже анатома Гальвани препарировать лягушек, повторить опыты и получить те же результаты, заставившие его сначала даже поверить в животное электричество.

В лекции, прочитанной 5 мая 1792 года, он всячески превозносит Гальвани, восхваляет сделанное им открытие, говорит о его необычайной важности и т. д. Однако чуть позже, 14 мая, в другой лекции Вольта уже спорит с Гальвани, доказывая, что обнаруженное Гальвани явление — чисто физическое, а не физиологическое, что животного электричества не существует и что дело совсем не в лягушке, а именно в двух разнородных металлах, соприкасающихся с ней и замыкающих цепь. В доказательство Вольта описывает свой знаменитый опыт, состоявший в следующем. Два конца двух разных металлических пластин он прикладывал к собственному языку, и когда другие концы пластин соединялись, то ощущался кисловатый вкус, причем, действие было не мгновенное, а длительное. (Этим способом и теперь пользуются для проверки годности сухих батареек.) Язык с успехом заменил лягушку!

С этого и начался длительный спор между Гальвани и Вольта о роли лягушки в сделанных ими обоими наблюдениях. Вольта старался доказать, что лягушка, так же как и язык экспериментатора, — это только своеобразный индикатор течения электричества, а главную роль играет пара разнородных металлов. С этой целью он старался исключить из «гальванических» опытов лягушек и вообще любой биологический объект, включая и собственный язык. Гальвани же, пытаясь доказать, что в основе явления лежит животное электричество, а металлы лишь наиболее эффективно проводят его, стремился устранить металлы из своих опытов и получить прежние результаты с помощью одних только биологических средств. Коротко говоря, Вольта хотел получить электрический ток без лягушек, а Гальвани хотел добиться сокращения мышц без металлов.

Как это ни странно, успехом увенчались усилия обоих участников спора. В 1894 году Гальвани описал опыт, состоящий в том, что нерв и мышца лягушки соединялись не металлом, а лягушачьей же мышцей. Каждый раз замыкание такой цепи вызывало вздрагивание лягушки. Гальвани счел свою задачу выполненной и исследований не продолжал. Вскоре Северная Италия была завоевана Наполеоном Бонапартом. Гальвани выступил противником французского владычества на его родине, лишился в 1797 году должности профессора, а в 1798 году скончался.

Вольта еще ранее с помощью изобретенного им электрометра (усовершенствованного электроскопа) показал, что два различных металла

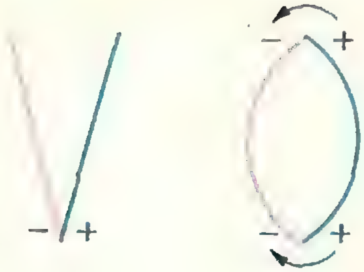


Рис. 1.

при контакте электризуются. (Теперь это явление называют контактной разностью потенциалов.) Но если такую пару соприкасающихся металлов замкнуть, то течения электричества в цепи не будет, так как токи через спан имеют противоположные направления (рисунок 1). В «гальванических» же опытах электричество течет по замкнутой цепи. И Вольта решил, что причина этого в том, что и в опытах Гальвани, и в его собственных фигурировал третий проводник — жидкий (жидкость в мышцах лягушки или жидкость на языке). Он заменяет «влажные» участки «гальванической» цепи просто смоченным картоном и показывает, что такая система образует источник непрекращающегося движения электричества. Об этих опытах Вольта сообщил в 1796 году. Тем самым, как казалось Вольта, было покончено с животным электричеством Гальвани. Но Вольта по-прежнему говорит о «гальванизме», воздавая должное тому, кто дал толчок его собственным исследованиям. И до сих пор явления, связанные с прохождением постоянного электрического тока, называют гальваническими.

Так появился на свет «гальванический» элемент, изобретенный Вольта. После 1796 года автор этого изобретения молчал долгих четыре года. Все эти годы он искал способ получения более мощных источников, чем его первый элемент, состоявший из пары разнородных металлических электродов (так мы их теперь называем), соприкасающихся с жидким проводником. В конце концов Вольта нашел такой способ. Он расположил друг за другом ряд своих элементов в виде чаш с жидкостью, в которую погружены серебряные и цинковые электроды: серебро — жидкость — цинк—серебро —жидкость— цинк и т. д. (рисунок 2). Соединив попарно цинковые и серебряные электроды из соседних чаш, он получил источник, напряжение (как мы теперь говорим) на концах которого пропорционально числу элементов (у Вольта их было до 60). В 1800 году Вольта сообщил о еще более простом и компактном устройстве, которое он сам назвал сначала «искусственным электрическим органом» (он вызывал удар, напоминающий удар от электрического органа рыб), а затем «электродвижущим аппаратом». Устройство это состояло из поставленных друг на друга пар цинковых и медных кружков, разделенных смоченными в растворе серной кислоты картонными кружками (рисунок 3). Современники назвали это устройство «вольтовым столбом». Ввиду простоты их изготовления вольтовы столбы вскоре появились во всех физических лабораториях, и ими пользовались вплоть до начала XX века.

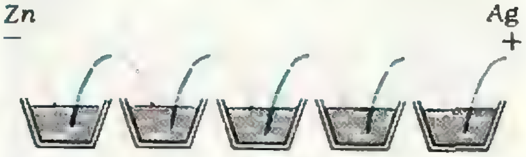


Рис. 2.

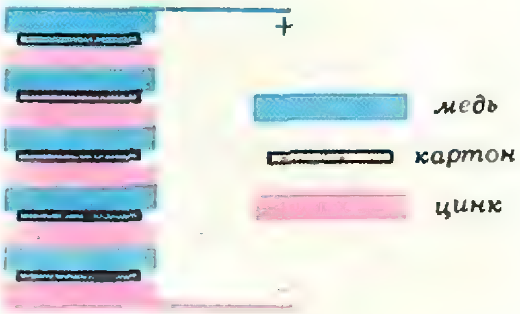


Рис. 3.

Значение этого открытия было очень велико. Можно сказать, что с изобретением Вольта источника постоянного тока началась новая эра в исследовании электричества. Многочисленные опыты, целью которых было изучение «взаимодействия» электрического тока с веществом, дали науке много важных открытий. В 1800 году с помощью вольтова столба было открыто разложение воды электрическим током. Исследования химического действия электрического тока, самыми результативными и важными из которых были работы английского ученого Дэви, привели к появлению новой ветви науки — электрохимии. В первом десятилетии XIX века академик Петров в России и Дэви в Англии открыли электрическую дугу (есть справедливость в том, что ее часто называют вольтовой дугой!). Еще через десятилетие было открыто магнитное действие электрического тока, и это открытие привело в конце века к технической революции, связанной с появлением электротехники.

Вот к чему привел долгий спор о лягушке!

Во всех этих исследованиях, имевших столь важное значение для физики и техники, сам Вольта никакого участия не принимал. Как и Гальвани, Вольта, добившись успеха, практически прекратил научную деятельность. Его открытие получило всеобщее признание и произвело огромное впечатление. Дважды, в 1800 и в 1801 годах, он докладывал о своем открытии в Парижской Академии наук. На последнем докладе присутствовал Наполеон Бонапарт, вполне оценивший важность открытия Вольта. Вольта был осыпан наградами. Он получил медаль Академии, большую денежную награду, титул графа и звание сенатора, высшие французские ордена. Но в науке его роль была закончена. В 1819 году он покинул профессорскую кафедру, а в 1827 году скончался.

Итоги спора о лягушке

Спор между Гальвани и Вольта привел не только к появлению первого в истории источника постоянного электрического тока. Это не был спор, закончившийся победой одного из его участников и поражением другого. История не обидела и Гальвани. И дело не только в том, что его имя присвоено источнику тока, который он не открыл, хотя и мог открыть (ведь в опыте с двумя металлами и мышцей лягушки Гальвани имел дело именно с гальваническим элементом). Но в своем знаменитом опыте, в котором мышца лягушки вздрагивала, замкнутая мышцей же, он в самом деле открыл «животное электричество». Много позже (в 1837 году) это было доказано итальянским физиком Маттеуччи и (в 1848 году) немецким физиологом Дюбуа-Реймоном. Правда, теперь это называется не животным электричеством, а биоэлектрическими потенциалами или биотоками.

Открытие Вольта имело не только важное практическое значение. Оно также поставило перед учеными задачу объяснить такие явления, открытые Вольта, как контактная разность потенциалов и гальванический ток.

Сам Вольта полагал, что в основе действия гальванического элемента лежит именно контактная разность потенциалов. Однако, он считал, что для возникновения постоянного электрического тока просто требуется не два контакта на концах двух различных металлов, а три, как это показано на рисунке 4: два контакта двух металлов с проводящей жидкостью в точках *a* и *b* и контакт двух металлов в точке *c*. Это объяснение ошибочное. Но только через много десятилетий было показано, что причиной возникновения электродвижущей силы в химическом элементе является химическое взаимодействие металлов с электролитом (так теперь называют проводящую жидкость в элементе). И лишь в 1888 году Нернстом была дана полная теория гальванических элементов.

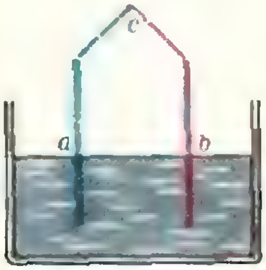


Рис. 4.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются образцы вариантов письменного экзамена по математике, предлагавшихся тем поступающим на механико-математический, химический, географический, биологический факультеты и факультет почвоведения, которые окончили среднюю школу в 1977 году, и примеры задач устного экзамена по физике.

Математика

Механико-математический факультет

1. Найти все числа $a > 0$, для которых

$$\int_0^a (2-4x+3x^2)\,dx \leqslant a.$$

2. Длины боковых сторон трапеции равны 3 и 5. Известно, что в трапецию можно вписать окружность, касающуюся всех ее сторон. Средняя линия трапеции делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно $\frac{5}{11}$. Найти длины оснований трапеции.

3. Доказать, что для функции $f(x) = (\cos x)(\sin 2x)$

$$\min_{x \in [-\pi,\, \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}.$$

4. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0, \\ z^3 - 9y^2 + 27y - 27 = 0, \\ x^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0. \end{cases}$$

5. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно к плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину AB.

Химический факультет

1. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $^2/_3$ расстояния от пункта A до пункта B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считать равным нулю). При этом почта была доставлена из пункта A в пункт B за промежуток времени, необходимый, чтобы проехать от пункта A до пункта B со скоростью 40 км/час.

Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от пункта A до пункта B со скоростью 100 км/час.

Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$y = x^2 - 2x + 2$, $y = x^2 + 4x + 5$, $y = 1$.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} (6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2.$$

4. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей равны одному и двум метрам. Найти площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины его противоположных сторон, равны.

5. Найти все решения уравнения

$$2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

Географический факультет

1. Решить неравенство

$$2|x+1| > x+4.$$

2. В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину $\sqrt{3}$ м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найти длину стороны AC.

3. Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

4. Грузовик и гоночный автомобиль выехали одновременно из пункта A и должны прибыть в пункт C. Грузовик, двигаясь с постоянной скоростью, доехал до пункта C, проделав путь, равный 360 км. Гоночный автомобиль поехал по окружной дороге и сначала доехал до пункта B, расположенного в 120 км от пункта A, двигаясь со скоростью, вдвое большей скорости грузовика. После пункта B он увеличил свою скорость на 40 км/час и проехал путь от пункта B до пункта C, равный 1000 км. Он прибыл в пункт C на 1 час 15 мин позднее грузовика. Если бы гоночный автомобиль весь свой

путь от пункта A до пункта C ехал с той же скоростью, что и от пункта B до пункта C, то в пункт C он прибыл бы на 1 час позднее грузовика. Найти скорость грузовика.

5. Решить уравнение

$$2\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cdot\cos^2 2x}.$$

Биологический факультет

1. Решить уравнение

$$\sqrt{4+2x-x^2}=x-2.$$

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B — прямые, величина угла при вершине D равна 45°, длина стороны BC равна 1 м, длина диагонали BD равна 5 м. Найти площадь этого четырехугольника.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y=0{,}5x^2-3x+4{,}5$ и касательными к ней в точке $(1;\,2)$: $y=4-2x$ и в точке $\left(4;\,\frac{1}{2}\right)$: $y=x-3{,}5$.

4. Решить уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=3\sin\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{8}\right).$$

5. Найти все те значения параметра s, при каждом из которых все корни уравнений $x^2+3x+2s=0$ и $x^2+6x+5s=0$ различны и пересекаются, т. е. оба уравнения имеют два корня и между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения.

Факультет почвоведения

1. Решить уравнение $2\sqrt{x+5}=x+2$.

2. Указать промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции $f(x)=xe^{-3x}$.

3. Решить уравнение

$$|\sin x|=\sin x+2\cos x.$$

4. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна a, а длина боковой стороны BC равна b. Найти площадь трапеции.

5. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

С. Алешин,
М. Потапов

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. С вышки высотою $h=10$ м в горизонтальном направлении слева направо бросают камень со скоростью $|\vec{v}_{01}|=23$ м/с. Одновременно с поверхности земли под углом $\alpha=30°$ к горизонту справа налево бросают второй камень со скоростью $|\vec{v}_{02}|=20$ м/с. На каком расстоянии l от основания вышки бросили второй камень, если камни столкнулись в воздухе?

2. Конструкция из пяти одинаковых стержней закреплена в точке A (рис. 1). К точке D подвешен груз массы $m=1{,}7$ кг. Определить, с какой силой растянуты (или сжаты) все стержни. Массой стержней пренебречь. Ускорение свободного падения $|\vec{g}|$ считать равным 10 м/с².

3. Два одинаковых маленьких сосуда, объем каждого из которых равен $V=0{,}03$ м³, соединены горизонтальной цилиндрической трубой, объем которой равен $2V$, а сечение $S=0{,}1$ м². В середине трубы находится тонкий поршень, способный перемещаться без трения. Давление газа в сосудах равно p. К одному из сосудов, посредством трубки пренебрежимо малого объема, присоединяют третий такой же сосуд, давление газа в котором равно $2p$. Определить перемещение поршня x после установления равновесия. Температуру газа считать постоянной.

4. Четыре одинаковых гальванических элемента с э. д. с. $\mathcal{E}=2$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом соединены попарно параллельно, а эти две группы соединены между собой последовательно. Какую мощность P такая батарея отдает во внешнюю цепь с сопротивлением $R=2$ Ом?

5. Электрическая лампа с вольфрамовой нитью в момент включения потребляет мощность $P_1=500$ Вт. Какую мощность P она будет потреблять после того, как ее нить нагреется до температуры $t=2500$°С? Комнатная температура $t_1=20$°С. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=4{,}5\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

6. Два неподвижных параллельных горизонтальных проводящих стержня, находящихся на расстоянии $L=1$ м друг от друга, помещены в однородное магнитное поле, ин-

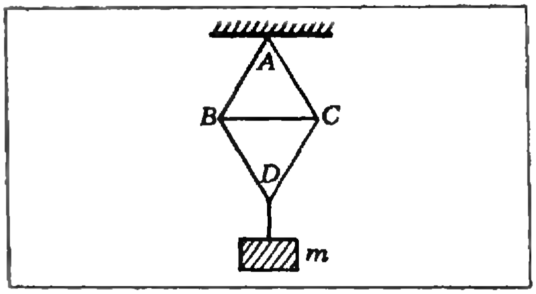


Рис. 1.

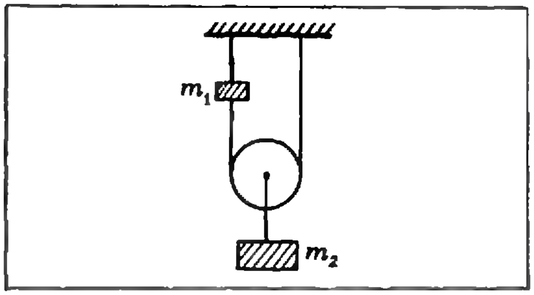


Рис. 2.

дукция которого равна $|\vec{B}|=0{,}1$ Т и направлена вертикально. На стержнях, перпендикулярно к ним, лежит металлический стержень массы $m=0{,}5$ кг. Определить ускорение $|\vec{a}|$ этого стержня, если по нему пропустить ток $I=50$ А. Коэффициент трения между стержнями равен $k=0.2$. Ускорение свободного падения $|\vec{g}|$ считать равным 10 м/с^2.

7. Собирающая линза с фокусным расстоянием $F_2=10$ см и рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_1=20$ см, имеющие общую главную оптическую ось, находятся на расстоянии $a=30$ см друг от друга. На расстоянии $d_1=10$ см от рассеивающей линзы со стороны, противоположной собирающей линзе, находится предмет. Определить расстояние f_2 между изображением предмета, созданным обеими линзами, и собирающей линзой.

Географический, геологический, химический факультеты и факультет почвоведения

1. Двигаясь равноускоренно, тело проходит за промежуток времени $t_1=4$ с путь $s_1=2$ м, а за следующий промежуток $t_2=5$ с — путь $s_2=4$ м. Определить ускорение $|\vec{a}|$ тела.

2. Два тела одновременно начинают двигаться из одной точки в поле силы тяжести с одинаковыми по абсолютным значениям скоростями, равными $v_0=2$ м/с. Одна из скоростей направлена под углом $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$, а другая — под углом $\alpha_2=-\frac{\pi}{4}$ к горизонту. Определить относительную скорость этих тел через время $t=2$ с после начала движения.

3. Два тела с массами $m_1=2$ кг и $m_2=1$ кг подвешены с помощью невесомых и нерастяжимых нитей и невесомого блока, как показано на рисунке 2. Нить перерезают в месте, отмеченном косым крестом. Через сколько времени после этого скорость тела m_1 станет равной $|\vec{v}|=4{,}9$ м/с? Трением пренебречь. Считать, что блок движению тел не помешает. Ускорение свободного падения $|\vec{g}|=9{,}8$ м/с^2.

4. В калориметр, содержащий воду при температуре $t=5$°C, опустили $m=40$ г льда при температуре $t_1=-10$°C. После уравнивания температур в калориметре осталось $m_1=19$ г льда. Сколько воды было в калориметре до начала опыта? Удельная теплоемкость воды $c_в=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_л=2{,}1$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг.

5. Два конденсатора с емкостями $C_1=2\cdot10^{-10}$ Ф и $C_2=10^{-10}$ Ф заряжены до напряжений $U_1=200$ В и $U_2=100$ В соответственно. Затем положительная обкладка первого конденсатора соединена с отрицательной обкладкой второго, а отрицательная первого — с положительной второго. Определить заряды на пластинах конденсаторов после соединения.

6. Генератор постоянного тока имеет э. д. с. $\mathcal{E}=200$ В и внутреннее сопротивление $r=4$ Ом. Чему должно быть равно сопротивление внешней цепи R, для того чтобы в ней расходовалась мощность $P=2{,}5$ кВт?

7. Точечный источник света находится на расстоянии $d=50$ см от тонкой собирающей линзы и на расстоянии $l=5$ см от ее оптической оси. Действительное изображение источника находится на расстоянии $L=10$ см от оптической оси. Определить фокусное расстояние F линзы.

В. Слудский

Вниманию старшеклассников

Издательство «Наука» Академии Наук СССР предлагает Вам следующие книги:

Математика

1. **Виленкин Н. Я.** *Популярная комбинаторика.* ц. 35.
2. **Володарский А. И.** *Очерки истории средневековой индийской математики.* ц. 67 к.
3. **Гик Е. Я.** *Математика на шахматной доске.* ц. 31 к.
4. *Упрощенный алгол.* ц. 9 к.

Физика

5. **Барабой В. А.** *Солнечный луч.* ц. 47. к.
6. **Куликов К. А., Гуревич В. Б.** *Новый облик старой Луны.* ц. 25 к.
7. **Черкасов И. И., Шварев В. В.** *Грунт Луны.* ц. 57 к.
8. **Франкфурт У. И., Френк А. М.** *У истоков квантовой теории.* ц. 64 к.
9. *Оптика и атомная физика.* ц. 2 р. 10 к.
10. *Физическая электроника.* ц. 1 р. 30 к.
11. *Воспоминания о Я. И. Френкеле.* ц. 1 р. 42 к.
12. *Воспоминания об академике Д. С. Рождественском.* ц. 80 к.

Заказы на книги просим направлять по адресу: 117192, Москва В-192, Мичуринский пр., 12, магазин № 3 «Книга-почтой».

А. Зазело

Множества значений числовых функций

Напомним, что множеством значений $E(f)$ числовой функции f называется множество всех $a \in \mathbf{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D(f)$ такое, что $f(x) = a$. Можно сказать по-другому: $E(f)$ состоит из тех a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение. В простых случаях это уравнение можно исследовать и тем самым отыскать $E(f)$.

Пример 1. Найдем множество значений функции

$$f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Уравнение $f(x) = a$ переписывается в виде $ax^2 - 2x + a = 0$; при $a = 0$ ему удовлетворяет $x = 0$, а в случае $a \neq 0$ мы имеем квадратное уравнение, которое имеет решения лишь при таких a, при которых его дискриминант неотрицателен: $D = 4 - 4a^2 \geqslant 0$, т. е. $a^2 \leqslant 1$, или $a \in [-1; 1]$ (и $a \neq 0$). Итак, уравнение $f(x) = a$ имеет решения тогда и только тогда, когда $a \in [-1; 1]$, поэтому $E(f) = [-1; 1]$. Заметим, что одновременно мы нашли наименьшее и наибольшее значения функции f — $\min f = -1$, $\max f = 1$.

Задачи 1—3. Найти множества значений указанных функций, а также их наибольшие и наименьшие значения (в тех случаях, когда они существуют).

1. а) $\frac{2x}{1+x}$; б) $\frac{1}{1+x^2}$; в) $\frac{1}{1-x^2}$.
2. а) $\pi^x - 3$; б) $\log_2 x + \log_x 2$;
   в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
3. а) $\cos^2 x + \cos 2x$; б) $\sin x \cdot \cos x$;
   в) $\sin^4 x + \cos^4 x$.

В ряде случаев отыскание множества значений данной функции сводится к исследованию квадратичной функции на том или ином промежутке. Чтобы не ошибиться, полезно нарисовать график этой квадратичной функции.

Пример 2. Найдем множество значений функции

$$f(x) = 2\cos x + \cos 2x.$$

Перепишем $f(x)$ в виде $f(x) = 2\cos x + 2\cos^2 x - 1 = 2z^2 + 2z - 1$, где через z обозначена функция $\cos x$. Поскольку $z = \cos x$ принимает значения $z \in [-1; 1]$, остается выяснить, каково множество значений квадратичной функции $g(z) = 2z^2 + 2z - 1$ на отрезке $[-1; 1]$. Графиком функции $g(z)$ является парабола с вершиной в точке с абсциссой $z_0 = -{}^1/_2$ (поясните), направленная ветвями вверх. Мы имеем: $g(z_0) = -{}^3/_2$, $g(-1) = -1$, $g(1) = 3$. Если построить график квадратного трехчлена, то ясно, что множество значений g на отрезке $[-1; 1]$ (или множество тех a, при которых уравнение $g(z) = a$ имеет хотя бы один корень $z \in [-1; 1]$), есть отрезок $[-{}^3/_2; 3]$. Следовательно, множество значений исходной функции $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$ есть отрезок $[-{}^3/_2; 3]$. Заодно мы нашли $\min f = -{}^3/_2$ и $\max f = 3$.

Задачи 4—5. Исследуя подходящие квадратичные функции на соответствующих промежутках, найдите множества значений следующих функций, а также их наименьшие и наибольшие значения.

4. а) $6\cos x + \cos 2x$; б) $\sin x + \cos 2x$.
5. а) $4^x - 2^{x+2} + 3$; б) $4^{\sin x} - 2^{\sin x + 2}$.

При отыскании множества значений функции вида

$$f(x) = A\cos x + B\sin x$$

можно выразить $\cos x$ и $\sin x$ через $t = \operatorname{tg}(x/2)$ (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 91) и затем исследовать получающееся уравнение (относительно t оно будет квадратным). Однако быстрее и проще это делается так:

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2} \times \left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right);$$

поскольку

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1,$$

существует такое значение α, что

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

(объясните), и поэтому

$$A\cos x + B\sin x =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\,(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\alpha).$$

Поэтому множество значений функции $f(x) = A\cos x + B\sin x$ есть отрезок $[-\sqrt{A^2+B^2};\ \sqrt{A^2+B^2}]$, то же относится и к функциям вида $A\cos\omega x + B\sin\omega x$, где $\omega \neq 0$.

Задача 6. Укажите множества значений следующих функций:

а) $\cos x - \sin x + 1$; б) $3\cos\frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2}$;

в) $\cos^2 x - \sin x\cos x$.

По сути, во всех разобранных примерах и приведенных задачах решения уравнения $f(x) = a$ можно выписать в явном виде, т. е. уравнение $f(x) = a$ с параметром a «решается» (сводится к линейным, квадратным или простейшим показательным, логарифмическим и тригонометрическим уравнениям). Благодаря этому наименьшие и наибольшие значения рассматриваемых функций отыскиваются без использования производной (более того, исследование с помощью производной здесь зачастую было бы более громоздким, чем алгебраическое исследование). В случае же, когда уравнение $f(x) = a$ не поддается непосредственному решению («не решается»), разумно пойти обратным путем, который мы сейчас и опишем.

Пример 3. (Эта задача взята из «Примерных вариантов вступительных экзаменов по математике в вузы в 1977 г.», «Квант», 1977, № 6, с. 89). Найдем множество значений функции

$$f(x) = \sin x \cdot \cos 2x.$$

Обозначив $\sin x = z$, мы можем записать: $f(x) = g(z) = z(1 - 2z^2) = z - 2z^3$. Как и в примере 2, задача сводится к отысканию множества значений функции g на отрезке $[-1;\ 1]$. Заметим, что уравнение $g(z) = a$ — кубическое, и решить его мы не можем. Найдем наименьшее и наибольшее значения функции g на отрезке $[-1;\ 1]$. Действуя по общей схеме исследования функций на отрезке (см. «Алгебра и начала анализа 9», п. 59), находим критические точки функции: $g'(z) = 1 - 6z^2 = 0$ при $z^2 = {}^1/_6$, т. е. $z = \pm\sqrt{{}^1/_6}$; обе критические точки принадлежат отрезку $[-1;\ 1]$, а значения функции в них следующие:

$$g(\sqrt{1/6}) = \sqrt{6}/9,\ g(-\sqrt{1/6}) = -\sqrt{6}/9.$$

Сравнивая эти значения со значениями в концах отрезка, — с $g(-1) = 1$ и $g(1) = 1$, — получаем: $\min\limits_{[-1;1]}(z - 2z^3) = -1$, $\max\limits_{[-1;1]}(z - 2z^3) = 1$.

Поскольку функция g всюду непрерывна, естественно заключить, что g принимает любые значения между наименьшим и наибольшим, т. е. $E(g) = E(f) = [-1;\ 1]$. Чтобы это доказать, мы воспользуемся важной *теоремой о множестве значений непрерывной монотонной функции*:

если функция F непрерывна и возрастает (или убывает) на отрезке $[a;\ b]$, то множество значений, принимаемых функцией F на этом отрезке, также является отрезком: $[F(a);\ F(b)]$ (или $[F(b);\ F(a)]$, если F убывает).

Эта теорема в более общей и полной формулировке приведена в п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10» (без доказательства). Возвращаясь к нашей функции, получаем, что g возрастает на отрезке $[-\sqrt{1/6};\ \sqrt{1/6}]$ и убывает на отрезках $[-1; -\sqrt{1/6}]$, $[\sqrt{1/6},\ 1]$.

Согласно последней теореме множествами значений g на этих отрезках будут, соответственно, отрезки

$$[-\sqrt{6}/9;\ \sqrt{6}/9],\ [-\sqrt{6}/9;\ 1]$$

$$\text{и } [-1;\ \sqrt{6}/9];$$

их объединение даст множество значений функции g на всем отрезке $[-1;\ 1]$ — $E(g) = [-1;\ 1]$.

Задачи 7—8. Найдите множества значений указанных функций.

7. $x^3 - 6x^2 + 9x$, если: а) $x \in [2;\ 4]$; б) $x \in [-2;\ 2]$.

8. а) $\cos x \cdot \sin 2x$; б) $\sin x + \sin 3x$.

Задача 9. В каких пределах может изменяться объем конуса с образующей длины 1 дм?

Задача 10. В каких пределах может быть заключена площадь полной поверхности цилиндра объемом 1 дм³?

XIX IMO
BEOGRAD 1977

А. Савин

XIX Международная олимпиада по математике

XIX Международная математическая олимпиада, проходившая в июле 1977 года в столице Югославии Белграде, была рекордной по числу участников — для участия в соревнованиях прибыли команды из 21 страны: Австрии, Алжира, Англии, Бельгии, Болгарии, Венгрии, ГДР, Италии, Кубы, Монголии, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии.

В команду Советского Союза вошли: *Амиран Амброладзе* из Тбилиси, *Андрей Аузиньш* из Риги, *Ярослав Виннишин* из школы-интерната при КГУ, москвич *Виктор Гальперин*, *Александр Кодрян* из города Рыбница Молдавской ССР, *Григорий Рыбников* из Москвы, *Дмитрий Флаас* из школы-интерната при НГУ и *Андрей Чурбанов* из школы-интерната при МГУ. Команду сопровождали В. Орлов (Академия педагогических наук СССР) и автор этих строк (руководитель команды).

Все школьники — участники соревнований — были размещены в Пионерском городке на окраине Белграда, расположенном в тенистом парке, что было особенно приятно: стояла жаркая погода.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 6 июля 1977 года в Пионерском городке. Там же 6 и 7 июля были проведены оба тура олимпиады; в каждом туре предлагалось по три задачи.

10 июля прошел симпозиум участников олимпиады. От советской команды с докладами выступили:
Амброладзе Амиран — «О представлении натуральных чисел в виде разности двух простых»,
Аузиньш Андрей — «Оптимизация работы двух носильщиков»,
Гальперин Виктор — «Коммутирующие многочлены»,
Флаас Дмитрий — «Об одной комбинаторной задаче теории групп».

В этот же день ученики, отмеченные специальными призами за оригинальное решение задачи, рассказывали участникам олимпиады свои решения. От советской команды выступил *Виктор Гальперин*, получивший специальный приз за решение третьей задачи. Координаторами жюри были отмечены также оригинальные решения 6-й задачи *Григория Рыбникова* и *Андрея Чурбанова* и 2-й задачи *Виктора Гальперина*. Решения указанных задач, данное нашими участниками, будут опубликованы в специальном сборнике, изданном на сербско-хорватском и английском языках.

11 июля все участники олимпиады совершили экскурсию по Дунаю до одной из крупнейших в Европе ГЭС, построенной совместно Югославией и Румынией. Интересно отметить, что корабли на подводных крыльях, на которых совершалась экскурсия, и все 12 гидравлических турбин, установленных на ГЭС, имеют марку «Сделано в СССР».

2 июля состоялся симпозиум научных руководителей команд под названием «Молодежь и математические олимпиады», на котором выступил руководитель советской команды А. Савин.

Ниже публикуем текст задач, предлагавшихся на олимпиаде.

Первый день

1. Внутри данного квадрата $ABCD$ построены равносторонние треугольники ABK, BCL, CDM, DAN. Доказать, что середины четырех отрезков KL, LM, MN, NK вместе с серединами восьми отрезков AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN

Д. Флаас.

Г. Рыбников.

В. Гальперин.

являются вершинами правильного двенадцатиугольника (6 очков).

2. В конечной последовательности действительных чисел сумма любых семи последовательных членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати последовательных членов положительна. Найти наибольшее число членов такой последовательности (6 очков).

3. Пусть n — заданное натуральное число, большее 2, и пусть V_n — множество чисел вида $1 + kn$, где $k = 1, 2, \ldots$ Число $m \in V_n$ будем называть неприводимым в V_n, если не существует чисел p, $q \in V_n$ таких, что $pq = m$. Доказать, что существует число $r \in V_n$, которое можно разложить на неприводимые в V_n множители более, чем одним способом (7 очков).

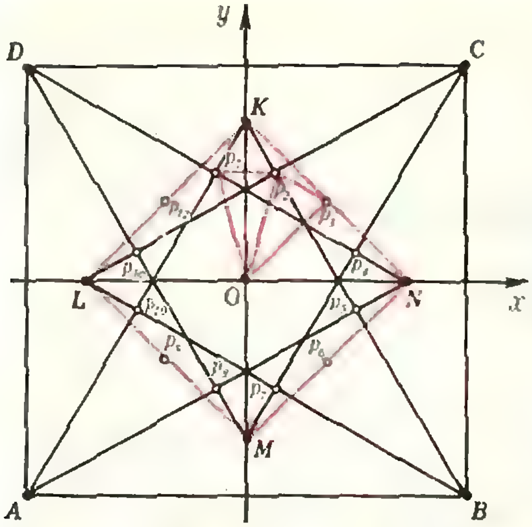
Второй день

4. Пусть a, b, A, B — данные действительные числа. Рассмотрим $f(x) = 1 - a \cos x - b \sin x - A \cos 2x - B \sin 2x$. Доказать, что если $f(x) \geqslant 0$ для любого действительного x, то $a^2 + b^2 \leqslant 2$, а $A^2 + B^2 \leqslant 1$ (6 очков).

5. Пусть a и b — натуральные числа. При делении $a^2 + b^2$ на $a + b$ получается частное q и остаток r. Найти все пары (a, b), для которых $q^2 + r = 1977$ (7 очков)

6. Пусть $f(n)$ — функция, определенная на множестве натуральных чисел и принимающая значения в том же множестве. Доказать, что если для каждого n выполняется неравенство $f(n+1) > f(f(n))$, то для каждого n имеет место равенство $f(n) = n$ (8 очков).

12 июля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были оглашены имена победителей. Первыми премиями награждено 13 школьников, набравших от 40 до 34 очков: Г. Рыбников (СССР, 40 очков), К. Гриль (Австрия, 40), Р. Догерти (США, 40), М. Ларсен (США, 40) Д. Риккард (Англия, 40), Г. Мольдер (Нидерланды, 39), И.-Ж. Балаш (Венгрия, 36), Ю. Рахман (ФРГ, 36), Р. Дуади (Франция, 35), З. Магяр



(Венгрия, 34), И. Хастад (Швеция, 34), Л. Гартнер (ГДР, 34), М. Марчинек (ГДР, 34). Вторую премию получили 26 участников, набравших от 33 до 34 очков. Среди них Амиран Амброладзе (24) и Виктор Гальперин (31).

Третьей премией было награждено 36 человек, в том числе советские школьники Андрей Аузиньш (23), Ярослав Винницин (21), Дмитрий Флаас (21) и Андрей Чурбанов [22].

В неофициальном командном зачете на первое место вышла команда США (202 очка), команда СССР заняла второе место (192 очка), далее идут команды Венгрии, Великобритании и Нидерландов.

Олимпиада была прекрасно организована, между ее участниками царил дух дружбы и взаимопонимания. Участники команды Советского Союза долго будут помнить тепло встреч с югославами — хозяевами олимпиады и с участниками команд других стран.

Югославская центральная газета «Политика» посвятила статью рассказу о члене советской команды, четырнадцатилетнем Диме Флаасе — самом молодом участнике этой олимпиады.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что

а) $$\frac{2\cdot 1+1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2\cdot 2+1}{2^2\cdot 3^2}+\frac{2\cdot 3+1}{3^2\cdot 4^2}+\dots$$
$$\dots+\frac{2\cdot 1977+1}{1977^2\cdot 1978^2}=\frac{1977\cdot 1979}{1978^2};$$

б) $$\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\alpha^2+1\cdot 2}+\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\alpha^2+2\cdot 3}+\dots$$
$$\dots+\operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\alpha^2+1977\cdot 1978}=$$
$$=\operatorname{arctg}\frac{1977\alpha}{\alpha^2+1978}.$$

Н. Адигёзалов

2. Докажите, что если k, l, p и q — натуральные числа, то

а) из $k+l\geqslant p+q$ следует, что
$$\left(\frac{p}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{q}{l}\right)^l\leqslant 1;$$

б) из $k+l+n\geqslant p+q$ следует, что
$$\left(\frac{p}{k}\right)^k\cdot\left(\frac{q}{l}\right)^l\leqslant e^n.$$

Я. Суконник

3. Найдите сумму

а) $$C_0^0+\frac{1}{4}C_2^1+\frac{1}{16}C_4^2+\dots+\frac{1}{4^k}C_{2k}^k;$$

б) $$C_{2n+1}^0+\frac{1}{3}C_{2n+1}^2+\frac{1}{5}C_{2n+1}^4+\dots$$
$$\dots+\frac{1}{2n+1}C_{2n+1}^{2n}.$$

А. Резников

4. Докажите, что
$$C_0^0C_{2n}^n+C_2^1C_{2(n-1)}^{n-1}+C_4^2C_{2(n-2)}^{n-2}+\dots$$
$$\dots+C_{2n}^nC_0^0=4^n.$$

С. Конягин

Спрашивайте — отвечаем

Уважаемая редакция
«Кванта»

В «Кванте» № 5 за 1977 г. в статье И. Башмаковой «Исаак Ньютон» имеется эпиграф — двустишие:

«Был этот мир глубокой тьмой окутан.
Да будет свет! И вот явился Ньютон».

Помнится мне, что в какой-то старой книге я читал, что на могиле Ньютона, на надгробной плите, имеется подобная надпись, но в той книге она была дана в оригинале — по-английски. Является ли перевод Маршака переводом этой надписи? Идентичны ли эпиграмма А. Попа и надпись на могиле Ньютона?

Если сможете, то сообщите мне, прошу вас, эпитафию на могиле Ньютона.

И. И. Корнис,
учитель, г. Джамбул

Уважаемый тов. И. И. Корнис!

Вас интересует вопрос о надписи на могиле И. Ньютона и о ее связи с двустишием А. Попа.

Ньютон похоронен в Вестминстерском аббатстве в Лондоне и эпитафия на могильном памятнике гласит:

«Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов.

Он исследовал различие световых лучей и появляющиеся при этом различные свойства цветов, чего ранее никто не подозревал. Прилежный, мудрый и верный истолкователь природы, древности и св. писания, он утверждал своей философией величие всемогущего Бога, а нравом выражал евангельскую простоту. Пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого. Родился 25 декабря 1642 г., скончался 20 марта 1727 г.» (См. С. И. Вавилов, Исаак Ньютон, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945 г., с. 216).

На статуе Ньютона, воздвигнутой в Тринити колледже в 1755 г., помещена надпись из Лукреция Кара: «Qui genus humanum ingenio superavit» (т. е. «Он превосходил разумом род человеческий»).

Как Вы видите, ни та, ни другая надпись не имеют связи с двустишием Попа, которое в подлиннике звучит так:

Nature and nature's laws lay hid in night.
God said: «Let Newton be!» And all was light.

Эти строки быстро получили широкую известность. В своей книге «Исаак Ньютон» С. И. Вавилов приводит их перефразировку, сделанную М. В. Ломоносовым:

Россия тьмой была покрыта много лет.
Бог рек: «Да будет Петр!» И бысть в России свет.

С уважением, профессор И. Башмакова

Задачи XL Московской математической олимпиады школьников

С 27 февраля по 27 марта 1977 года проходила традиционная Московская математическая олимпиада. Первый тур проводился только для десятиклассников, остальные классы (7—9-е) сразу участвовали во втором, заключительном туре, вместе с десятиклассниками, успешно прошедшими первый тур. Ниже мы публикуем предложенные на олимпиаде задачи.

Первый тур (десятый класс)

1. Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ строится по следующему правилу: $x_1=2$, $x_{n+1}=[1{,}5\, x_n]$ ($[\cdot]$ — целая часть числа).

а) Доказать, что в последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много нечетных чисел.

б) Доказать, что в последовательности $\{x_n\}$ бесконечно много четных чисел. *(С. Конягин)*

2. На столе расположено n картонных квадратов и n пластмассовых квадратов. Никакие два картонных квадрата не имеют общих точек, в том числе и точек границы. То же самое имеет место и для пластмассовых квадратов. Оказалось, что множество вершин картонных квадратов совпадает с множеством вершин пластмассовых квадратов. Обязательно ли каждый картонный квадрат совпадает с некоторым пластмассовым? *(В. Прасолов)*

3. а) Двенадцать тонких твердых стержней длины 1 скрепили так, чтобы получился каркас куба. Можно ли сделать в плоскости отверстие площади меньше 1/100, не разбивающее плоскость на куски, чтобы через него можно было бы протащить этот каркас?

б) Тот же вопрос для каркаса тетраэдра с ребром длины 1. *(В. Прасолов)*

4. Каждая точка числовой оси, координата которой — целое число, покрашена либо в красный, либо в синий цвет. Доказать, что найдется цвет со следующим свойством: для каждого натурального числа k имеется бесконечно много точек этого цвета, координаты которых делятся на k. *(С. Конягин)*

Заключительный тур

5. (7—8 кл.) В каждой вершине выпуклого k-угольника находится охотник, вооруженный лазерным ружьем. Все охотники одновременно выстрелили в зайца, сидящего в точке O внутри этого k-угольника. В момент выстрела заяц пригибается, и все охотники погибают. Доказать, что нет другой точки, кроме O, обладающей указанным свойством. *(С. Елисеев)*

6. (7—8 кл). Куб $3\times3\times3$ составлен из 14 белых и 13 черных кубиков со стороной 1. *Столбик* — это три кубика, стоящих рядом вдоль одного направления: ширины, длины или высоты. Может ли быть так, что в каждом столбике а) нечетное количество белых кубиков? б) нечетное количество черных кубиков? *(В. Авилов)*

7. (7—8 кл.). Докажите, что можно найти более тысячи троек натуральных чисел a, b, c, для которых выполняется равенство $a^{15}+b^{16}=c^{16}$. *(Д. Бернштейн)*

8. (7 кл.) В доске торчит 1977 гвоздей. Играют двое, ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий соединяет проводом два гвоздя. Если в результате хода оказалась замкнутая цепь, то сделавший этот ход считается выигравшим. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (Не разрешается соединять проводом два ранее уже соединенных гвоздя.) *(Н. Агаханов)*

9. (7—8 кл.) Найти наименьшее n такое, что любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения n треугольников. Докажите, что для меньших n это можно сделать не с любым выпуклым 100-угольником. *(С. Ландо)*

10. (9 кл.) В пространстве расположено n отрезков, никакие три из которых не параллельны одной плоскости. Для любых двух отрезков прямая, соединяющая их середины, перпендикулярна обоим отрезкам. При каком наибольшем n это возможно? *(Г. Гальперин)*

11. (9—10 кл.) См. задачу М479.*)

12. (8—10 кл.) См. задачу М478.

13. (9 кл.) В пространстве расположен выпуклый многогранник, все вершины которого находятся в целых точках. Других целых точек внутри, на гранях и на ребрах нет. (Целой называется точка, все три координаты которой — целые числа.) Доказать, что число вершин многогранника не превосходит восьми. *(С. Миронов)*

14. (9—10 кл.) См. задачу М477.

15. (10 кл.) Можно ли на плоскости расположить бесконечное множество одинаковых кругов так, чтобы любая прямая пересекала не более двух кругов? *(Н. Константинов)*

16. (10 кл.) Последовательность натуральных чисел $\{x_n\}$ строится по следующему правилу: $x_1=2, \ldots, x_n=[1{,}5\, x_{n-1}]$ ($[\cdot]$ — целая часть числа). Доказать, что последовательность $y_n=(-1)^{x_n}$ непериодическая. *(С. Конягин)*

Г. Гальперин

---

*) «Задачник «Кванта», «Квант», 1977, № 12.

Памяти Отто Данкела

В 1957 году редакция журнала «Американский математический ежемесячник» («The American Mathematical Monthly) выпустила в свет специальный (дополнительный) номер: «The Otto Dunkel Memorial Problem Book». Этот номер был посвящен памяти профессора Отто Данкела (1869—1951), свыше тридцати лет руководившего «Отделом задач» этого журнала.

Номер, посвященный Данкелу, содержал «400 «лучших» задач», отобранных из 2704, которые читатели журнала прислали за период с 1918 по 1950 год. Среди корреспондентов были студенты, преподаватели средней и высшей школы, а также известные в Америке и за ее пределами ученые (Г. Дьюдени, Г. С. М. Кокстер, О. Оре, Г. Пойа, Ч. Тригг; много задач самого О. Данкела).

Отбор «лучших» задач был поручен двадцати четырем математикам, на протяжении многих лет активно сотрудничавшим в «Отделе задач» «Ежемесячника». Каждый из них представил свой список «лучших» задач. По этим спискам и был сделан окончательный отбор, в котором основную роль играло «количество голосов», полученных той или иной задачей.

В этом году в издательстве «Мир» в серии «Задачи и олимпиады» *) вышла книга «Избранные задачи», созданная на основе упомянутого мемориального сборника. Эта книга довольно существенно отличается от американского оригинала — в лучшую сторону (условия задач, а особенно их решения достаточно свободно переложены переводчиком книги Ю. А. Даниловым и редактором книги профессором МГУ В. М. Алексеевым).

Книга «Избранные задачи» состоит из трех частей, как и две ее предшественницы (см. сноску). Первая часть — это условия задач; вторая — их решения, собранные Ю. А. Даниловым из различных выпусков журнала «American Mathematical Monthly». Третья же часть книги полностью написана В. М. Алексеевым. В этой части приводятся необходимые сведения из теории и комментируются отдельные решения.

По сравнению с уже вышедшими в той же серии книгами сборник «Избранные задачи» более труден. Бо́льшая часть задач рассчитана не на школьников, а на студентов первых двух курсов вузов. Эти задачи могут быть использованы для студенческих олимпиад, которые в последние годы, наконец, начали завоевывать популярность, но пока еще очень плохо обеспечены литературой.

Почти про все задачи сборника можно сказать, что они *увлекательны*. Но увлекательность отнюдь не единственное качество отобранных задач. Подавляющее большинство задач затрагивает вопросы современной и классической математики, решение которых требует вместе с остроумием и изобретательностью также и умения свободно пользоваться разнообразными средствами математического арсенала. Сборник, конечно же, не может служить пособием для овладения каким-либо разделом математики, хотя в нем очень много задач по элементарной геометрии, по теории чисел (делимость, диофантовы уравнения), большой выбор задач по алгебре и анализу (определители, вычисление интегралов, дифференциальные уравнения, ряды), богато представлена ныне почти вышедшая из моды проективная геометрия. Все эти задачи могут быть использованы как для повышения интереса школьников и студентов к изучаемому материалу, так и для тренировки будущих «олимпийцев» и для деятельности оргкомитетов.

Более элементарные задачи в сборнике — это последние сто задач (задачи 301—400). Среди них много интересного найдут для себя любители «развлекательной» математики (задача 277 про кругосветный полет, задача 303 о «черной» пятнице, задача 312 о служащих банка). Вообще же этот во многих отношениях уникальный сборник, несомненно, будет способствовать развитию творческих способностей — ведь решение нестандартной задачи обязательно приводит к открытию новых связей в рассматриваемом вопросе и в конце концов — не только к доказательству «чужой» теоремы, но и к обнаружению своей собственной.

Мы надеемся, что новый сборник заинтересует широкий круг читателей, получающих удовольствие от размышления над трудной задачей.

Чтобы читатель мог составить собственное мнение о новом сборнике задач, мы публикуем условия некоторых из них.

1. Кругосветный полет (№ 277). Каждый самолет, входящий в некоторую группу, может служить заправщиком для любого другого самолета той же группы. Емкость топливных баков каждого самолета позволяет ему пролететь без дозаправки горючим одну пятую окружности Земли. Предполагается, что все самолеты летят с одинаковой постоянной скоростью относительно Земли и одинаково расходуют горючее; имеется лишь одна посадочная площадка; весь запас горючего хранится на базе и время заправки пренебрежимо мало.

Определить наименьшее число самолетов, необходимых для обеспечения круго-

---

*) В серии «Задачи и олимпиады» уже вышли две книги: Ч. Тригг, *Задачи с изюминкой*, М., «Мир», 1975, и Й. Куршак и др., *Венгерские математические олимпиады*, М., «Мир», 1976 (об этой книге см., «Квант», 1977, № 1).

светного полета одного самолета и его благополучного возвращения на базу.

2. Вероятность «черной» пятницы (№ 303). Доказать, что тринадцатое число месяца с большей вероятностью приходится на пятницу, чем на другие дни недели.

3. Еще одно свойство гармонического ряда (№ 304). Доказать, что частная сумма

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{N}$$

гармонического ряда не бывает целым числом ни при каком N.

4. Простые числа в арифметической прогрессии (№ 305). Доказать, что, за единственным исключением, в любой арифметической прогрессии, члены которой — положительные целые числа, а разность меньше 2000, простыми числами могут быть не более 10 последовательных членов.

5. Нули и точки экстремума кубического многочлена (№ 318). Дан кубический многочлен $y=x^3+px^2+qx$. Определить все целочисленные пары коэффициентов p и q, при которых уравнение $y=0$ имеет различные целочисленные корни и целочисленные координаты двух точек экстремума.

6. Задача на разрезание (№ 326). Как разрезать правильный шестиугольник на наименьшее число частей, из которых можно составить равносторонний треугольник той же площади? Каждый разрез производится вдоль прямой.

7. Гамильтонов цикл на многограннике (№ 358). Предположим, что мы хотим побывать в вершинах многогранника, а достичь их можно, лишь двигаясь вдоль его ребер. Гамильтон рассмотрел задачу об обходе всех вершин многогранника по маршруту, который не проходит через одну и ту же вершину дважды. (В теории графов такой маршрут принято называть гамильтоновым циклом.) Нетрудно доказать, что задача Гамильтона для додекаэдра имеет решение. Доказать, что для ромбододекаэдра задача Гамильтона решения не имеет.

8. Определение фальшивой монеты при помощи взвешивания (№ 359). У одного человека было 12 монет, неотличимых по внешнему виду. Одна монета была фальшивая и отличалась по весу от настоящей. У человека под рукой были также очень чувствительные равноплечие весы, но без гирь. Может ли он при помощи не более трех взвешиваний обнаружить фальшивую монету и определить, тяжелее она или легче, чем настоящая?

9. «Равнобедренные n-точечники» (№ 360). Назовем множество, состоящее из n точек на плоскости, равнобедренным n-точечником, если любые три из них расположены в вершинах равнобедренного треугольника. Шесть точек на плоскости можно расположить так, чтобы они образовывали равнобедренный 6-точечник.

Доказать, что на плоскости нельзя выбрать семь точек, образующих равнобедренный 7-точечник. Чему равно наименьшее число k такое, что из любых k точек в пространстве можно выбрать три, не расположенные в вершинах равнобедренного треугольника?

10. Дети в саду (№ 370). Из сада доносятся детские голоса.

— Должно быть, там играют Ваши дети? — спросил гость.

— Не только мои,— ответил хозяин, там резвятся сорванцы из четырех семейств: мои дети, дети брата и сестры, а также двоюродного брата. Правда, моя семья самая многочисленная, у брата детей меньше, у сестры еще меньше, а самая маленькая семья у двоюродного брата. Ребята играют в салочки,— продолжал хозяин.— Им бы хотелось сыграть в бейсбол, но их слишком мало, чтобы составить две команды *). Интересно заметить,— добавил он,— что произведение числа детей во всех четырех семействах совпадает с номером моего дома, который вы, конечно, заметили на воротах.

— Я немного разбираюсь в математике,— сказал гость.— Попробую установить, сколько детей в каждом из четырех семейств.

Проделав какие-то выкладки, гость спросил:

— В семье Вашего двоюродного брата один ребенок? — После того, как хозяин ответил на этот вопрос, гость заявил:

— Теперь я знаю, сколько детей в каждом из четырех семейств.

Сколько детей было в семьях хозяина дома, его брата, сестры и двоюродного брата?

11. Придворный математик и шут (№ 374). Однажды придворный математик получил сразу все свое жалованье за год серебряными талерами и, сложив из монет 9 неравных столбиков, расположил их в виде магического квадрата. Королю затея придворного математика пришлась по вкусу, но он посетовал на то, что ни в одном столбике число талеров не было простым.

— Если бы Ваше величество добавило еще 9 талеров к моему жалованию,— заметил придворный математик,— я смог бы увеличить число монет в каждом столбике на 1, и тогда все 9 чисел стали бы простыми.

Проверили. Все оказалось именно так, как сказал придворный математик. Король уже собрался было увеличить жалование математику на 9 талеров в год, как в дело вмешался шут. Он взял по одной монете из каждого столбика, и число оставшихся талеров в каждом из 9 столбиков также оказалось простым. Более того, 9 новых чисел по-прежнему составляли магический квадрат. Девять «лишних» талеров шут оставил себе.

Сколько талеров получал в год придворный математик?

И. Клумова

---

*) Бейсбольная команда состоит из 9 человек.

Вопросы по алгебре и анализу

Ответы. 1. в. 2. г. 3. в. 4. г. 5. б. 6. а. 7. г. 8. в. 9. д. 10. б.
Приведем пояснения к некоторым вопросам.

2. Ветви нарисованной параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, поэтому $a<0$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ положительна, поэтому $b > 0$. Наконец, при $x = 0$ значение $y = c$ положительно, т. е. $c > 0$. По знакам a, b и c можно выбрать верный ответ.

3. Если (a_n) — наша геометрическая прогрессия, то $a_{10} = a_4 \cdot q^6$; поэтому в данном случае $q^6 = \frac{1}{2}$, откуда $q = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$ — две возможности.

8. Число 1 находится в I четверти, числа 2 и 3 — во II четверти, поэтому $\sin 1 > 0$, $\cos 2 < 0$, $\operatorname{ctg} 3 < 0$. Кроме того, $\cos 2 > -1$, а $\operatorname{ctg} 3 < -1$, ибо $3 > \frac{3\pi}{4}$.

7. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$. Тогда по теореме о пределе частного последовательность (b_n) имеет предел при $n\to\infty$ $\left(b_n = \frac{a_n b_n}{a_n}\right)$, что противоречит условию. Следовательно, $a = 0$.

10. Из 12 человек группу в 3 человека можно выделить C_{12}^3 способами. Каждому из этих способов отвечает C_9^4 способов выбрать группу в 4 человека из 9 пока не выбранных. Оставшиеся после второго выбора 5 человек образуют третью группу.

Композиция двух осевых симметрий

1°. Зафиксируем две оси симметрии l и m правильного треугольника (см. рисунок).

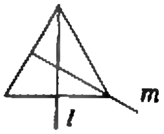
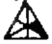


Рис. 1.

Тогда в первом столбце квадрата нижний треугольник получается из верхнего композицией симметрий $S_m \circ S_l$. Треугольники второго столбца получаются из соответствующих треугольников первого столбца симметрией S_l, а треугольники третьего столбца — образы соответствующих треугольников второго в симметрии S_m.

Ответ. В пустой клетке должен стоять треугольник 

2°. Композиция $S_m \circ S_l$ переводит треугольник ABC в себя. С другой стороны, композиция двух осевых симметрий есть поворот на ненулевой угол, если оси пересекаются, или перенос, если они параллельны (докажите!). При параллельном переносе треугольник не может перейти в себя. Остается поворот. Пусть α один из углов треугольника; при повороте он переходит в другой угол β, откуда $\alpha = \beta$, а третий угол γ переходит в один из углов α, β, откуда $\gamma = \beta = \alpha$.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математика

Механико-математический факультет

1. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,dx = (2x - 2x^2 + x^3)\Big|_0^a = 2a - 2a^2 + a^3.$$

Задача свелась к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 2a - 2a^2 + a^3 \leqslant a \\ a > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} a(a-1)^2 \leqslant 0 \\ a > 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства этой системы $]-\infty; 0] \cup \{1\}$. Ответ: $a = 1$.

2. Пусть в трапеции $ABCD$ $|AB| < |CD|$, $BC \| AD$ и $|BC| < |AD|$. Обозначим центр вписанной окружности через O. Проведем через точку O высоту трапеции EF ($E \in [BC]$, $F \in [AD]$). $|EO| = |OF|$, поскольку перпендикуляры из центра окружности к касательным являются радиусами. Проведем через O прямую MK, параллельную основаниям трапеции ($M \in [AB]$, $K \in [CD]$). По теореме Фалеса $|CK| = |KD|$ и $|BM| = |MA|$, т. е. $[MK]$ является средней линией трапеции. Положим $|BC| = a$, $|AD| = b$, $|EF| = h$.

По условию

$$\frac{\dfrac{a + \frac{a+b}{2}}{2} \cdot \dfrac{h}{2}}{\dfrac{\frac{a+b}{2} + b}{2} \cdot \dfrac{h}{2}} = \frac{5}{11},$$

откуда $\frac{3a+b}{a+3b} = \frac{5}{11}$. С другой стороны, поскольку четырехугольник $ABCD$ описан около окружности, $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$, т. е. $a + b = 8$. Ответ: длины оснований трапеции равны 1 и 7.

3. Функция f дифференцируема на промежутке $[-\pi; \pi]$. Поэтому она принимает наименьшее значение в одной из точек $-\pi$, π или в одной из своих критических точек, лежащих на интервале $]-\pi; \pi[$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 59). С одной стороны, $f(-\pi) = f(\pi) = 0 > -\frac{7}{9}$. С другой

стороны, в критических точках либо $\cos x_0 = 0$, либо $\cos^2 x_0 = \frac{2}{3}$.

Если $\cos x_0 = 0$, то $f(x_0) = 0 > -\frac{7}{9}$. Если же $\cos^2 x_0 = \frac{2}{3}$, то $|\sin x_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поскольку $f(x) = 2\sin x \cdot \cos^2 x$, имеем $|f(x_0)| = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. Легко проверить неравенство $-\frac{4}{3\sqrt{3}} > -\frac{7}{9}$. Значит, $f(x_0) > -\frac{7}{9}$.

Задачу можно решить также при помощи равенства

$$\min_{[-\pi;\ \pi]} f(x) = \min_{[-1;\ 1]} (2t - 2t^3),$$

вытекающего из того, что $f(x) = 2\sin x - 2\sin^3 x$ и для любого $t \in [-1; 1]$ найдется такое $x \in [-\pi; \pi]$, для которого $\sin x = t$.

Вычислив производиую от функции $y = 2t - 2t^3$, легко убедиться, что наименьшее значение на отрезке $[-1; 1]$ эта функция принимает в точке $t_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поэтому

$$\min_{[-1;\ 1]} (2t - 2t^3) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} > -\frac{7}{9}.$$

Значит, и $\min\limits_{[-\pi;\ \pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$.

4. Сложив уравнения системы, получим

$$(x - 3)^3 + (y - 3)^3 + (z - 3)^3 = 0. \qquad (1)$$

Тройка (3; 3; 3) является решением уравнения (1). Проверка показывает, что она также является решением системы. (Заметьте: без проверки этого утверждать нельзя!) Покажем, что других решений система не имеет.

Из первого уравнения системы $y^3 = 9x^2 - 27x + 27$. Дискриминант квадратного трехчлена $9x^2 - 27x + 27$ отрицателен. Поэтому, если $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — решение системы, то $y_0^3 > 0$. Следовательно, $y_0 > 0$. Аналогично, из второго и третьего уравнений получаем $z_0 > 0$ и $x_0 > 0$.

Из первого уравнения системы

$$(y_0 - 3)(y_0^2 + 3y_0 + 9) = 9x_0(x_0 - 3). \qquad (2)$$

Так как $x_0 > 0$ и $y_0^2 + 3y_0 + 9 > 0$, из (2) вытекает, что числа $y_0 - 3$ и $x_0 - 3$ не могут иметь разных знаков. Аналогично, из второго уравнения следует, что числа $z_0 - 3$ и $y_0 - 3$ тоже не могут иметь разных знаков.

Таким образом, если $x_0 > 3$, то $y_0 > 3$ и $z_0 > 3$; если же $x_0 < 3$, то $y_0 < 3$ и $z_0 < 3$. Решение $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ системы является также решением уравнения (1), а для (1) ни $x_0 > 3$, $y_0 > 3$, $z_0 > 3$, ни $x_0 < 3$, $y_0 < 3$, $z_0 < 3$ не годятся.

Значит, $x_0 = 3$, $y_0 = 3$, $z_0 = 3$. Ответ: (3; 3; 3).

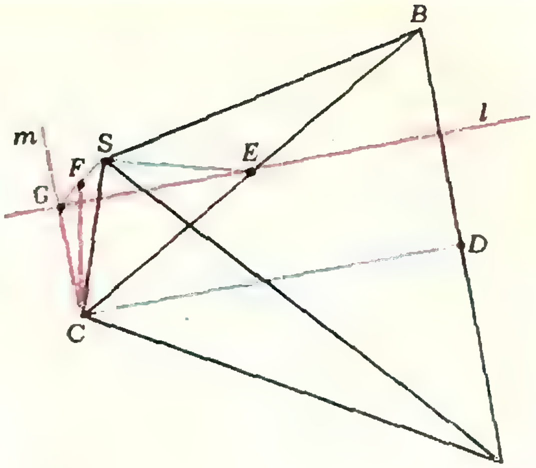


Рис. 2.

5. Обозначим середину ребра BC через E, середину стороны AB — через D. Через точку E проведем прямую l, параллельную CD (рис. 2). Прямая l лежит в плоскости основания ABC. Прямая CD параллельна плоскости α, определяемой точкой S и прямой l (поскольку $CD \| l$), а прямая SE лежит в этой плоскости. Значит, искомое расстояние между прямыми CD и SE равно длине перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой CD на плоскость α. Ввиду $CD \| l$ искомая величина угла есть величина угла между прямыми SE и l.

Поскольку $|CB| = |CA|$, $CD \perp AB$. Из $l \| CD$ следует $l \perp AB$. Через точку C проведем прямую m, параллельную AB. Прямая m также лежит в плоскости ABC. Из $l \perp AB$ получаем $m \perp l$. Обозначим пересечение прямых l и m через G. $G \in \alpha$. Опустим, наконец, из точки C перпендикуляр на прямую SG. Обозначим его пересечение с SG через F.

По условию $SC \perp CD$. Из $m \perp l$ и $l \| CD$ вытекает $m \perp CD$. Из $CD \perp SC$ и $CD \perp m$ следует, что прямая CD перпендикулярна плоскости SCG. Значит, $CD \perp CF$. Но $l \| CD$. Следовательно, $CF \perp l$. Кроме того, по построению $CF \perp SG$. Значит, $CF \perp \alpha$. Итак, искомое расстояние равно $|CF|$.

$$|CG| = \frac{|AB|}{4} = \sqrt{2}.$$

$$|GS| = \sqrt{|CG|^2 + |CS|^2} = \sqrt{6}.$$

$$|CF| \cdot |GS| = |CS| \cdot |CG|.$$

Следовательно,

$$|CE| = \frac{|CS| \cdot |CG|}{|SG|} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Величину угла SEG мы найдем из треугольника SEG. Поскольку

$$|CE| = \frac{|CB|}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$|GE| = \sqrt{|CE|^2 - |CG|^2} = \sqrt{6}$$

и $|SE| = \sqrt{|CS|^2 + |CE|^2} = 2\sqrt{3}$,

по теореме косинусов получаем

$$\cos \widehat{SEG} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \widehat{SEG} = 45°.$$

Задачу можно решить и по-другому — при помощи векторов. В плоскости ABC через точку C проведем прямую m, перпендикулярную CD. Введем прямоугольную систему координат: за начало координат примем точку C, за ось абсцисс примем прямую CD, за ось ординат — прямую m, за ось аппликат — прямую CS (см. рис. 3; на нем указаны положительные направления осей). Пусть P и Q — такие точки, соответственно, на прямых SE и CD, что $PQ \perp SE$ и $PQ \perp CD$. Тогда искомое расстояние равно $|PQ|$. Обозначим через α и β числа, определяющие положение точек P и Q: $\overrightarrow{SP} = \alpha\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{CQ} = \beta\overrightarrow{CD}$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CQ}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{SC}$ и $\overrightarrow{CQ}$ в выбранной системе координат. $\overrightarrow{PS} = -\overrightarrow{SP} = (-\alpha)\,\overrightarrow{SE}$. Поскольку $|CE| = |EB|$ и $|BD| = |DA|$, $\overrightarrow{SE} = \left(\frac{|CD|}{2};\ \frac{|AB|}{4};\ -|SC|\right)$. $|CD| = \sqrt{|AC|^2 - |AD|^2} = 2\sqrt{6}$. Значит, $\overrightarrow{SE} = (\sqrt{6};\ \sqrt{2};\ -2)$.

Следовательно, $\overrightarrow{PS} = (-\sqrt{6}\alpha;\ -\sqrt{2}\alpha;\ 2\alpha)$. Очевидно, $\overrightarrow{SC} = (0;\ 0;\ -2)$. Поскольку $\overrightarrow{CD} = (2\sqrt{6};\ 0;\ 0)$, $\overrightarrow{CQ} = (2\sqrt{6}\beta;\ 0;\ 0)$. Итак,

$\overrightarrow{PQ} = (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta;\ -\sqrt{2}\alpha;\ 2\alpha - 2)$. Неизвестные α и β мы найдем из условий $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{SE} = 0$ и $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

$$\begin{cases} (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta)\sqrt{6} + (-\sqrt{2}\alpha)\sqrt{2} + \\ \qquad + (2\alpha - 2)(-2) = 0 \\ (-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta)\,2\sqrt{6} + (-\sqrt{2}\alpha)\cdot 0 + \\ \qquad + (2\alpha - 2)\cdot 0 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы $-\sqrt{6}\alpha + 2\sqrt{6}\beta = 0$ (это можно было предвидеть: поскольку $PQ \perp CD$, первая координата вектора $\overrightarrow{PQ}$ равна 0). Тогда из первого уравнения $\alpha = \frac{2}{3}$. Значит, $\beta = \frac{1}{3}$. Итак,

$$\overrightarrow{PQ} = \left(0;\ -\frac{2\sqrt{2}}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$$

Значит, $|PQ| =$

$$= \sqrt{0^2 + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Из $\overrightarrow{SE} = (\sqrt{6};\ \sqrt{2};\ -2)$ получаем $|\overrightarrow{SE}| = 2\sqrt{3}$. Обозначим угол между векторами $\overrightarrow{SE}$ и $\overrightarrow{CD}$ через φ.

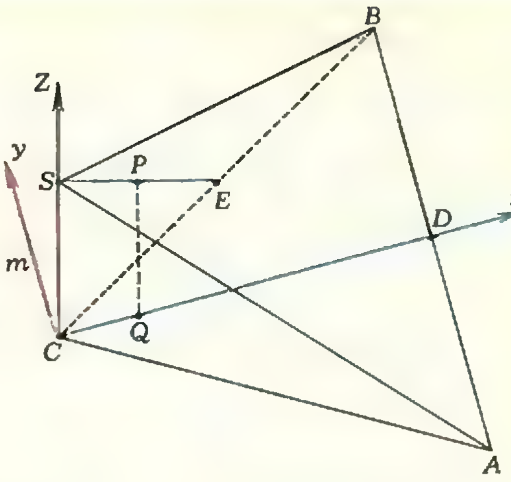


Рис. 3.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{SE}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{SE}|\cdot|\overrightarrow{CD}|} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6} + \sqrt{2}\cdot 0 + (-2)\cdot 0}{2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, угол между прямыми SE и CD равен 45°. Ответ: величина угла равна 45°, расстояние — $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Химический факультет

1. 80 км/час. 2. $2\frac{1}{4}$. 3. $]-\infty;\ 0] \cup [\log_6 5;\ 1[$. 4. 1 м². 5. $x = \frac{5\pi}{48} + \pi k$, $x = \frac{7\pi}{24} + \pi l$; $x = \frac{17\pi}{48} + \pi m$ $(k,\ l,\ m \in \mathbf{Z})$.

Географический факультет

1. $]-\infty;\ -2[\cup]2;\ +\infty[$. 2. $\sqrt{7}$ м. 3. Точка минимума e; промежутки убывания $]0;\ 1[$ и $]1;\ e]$; промежуток возрастания $[e;\ +\infty[$. 4. 60 км/час. 5. $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $x = -\frac{7\pi}{12} + 2\pi l$ $(k,\ l \in \mathbf{Z})$.

Биологический факультет

1. 3. 2. $\frac{15}{2}$ м². 3. $\frac{9}{8}$. 4. $x = -\frac{7\pi}{6} + 4\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{8\pi}{3}l$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{3}m$ $(k,\ l,\ m \in \mathbf{Z})$. 5. $]0;\ 1[$. Указание. Корни x_1, x_2 квадратного трехчлена f тогда и только тогда перемежаются с корня-

ми квадратного трехчлена g, когда $g(x_1) \times$ $\times g(x_2) < 0$.

Факультет почвоведения

1. 4. 2. Точка максимума — $\frac{1}{3}$, промежуток возрастания $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$, промежуток убывания $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$. 3. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. 4. $\frac{3}{4}ab$. 5. 144.

Физика

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $$l = \frac{h\left(\left|\vec{v}_{01}\right| + \left|\vec{v}_{02}\right| \cos\alpha\right)}{\left|\vec{v}_{02}\right| \sin\alpha} \approx 40 \text{ м}.$$

2. Стержни AB, AC, BD и CD растянуты, а стержень BC сжат; модули сил упругости во всех стержнях одни и те же и равны 10 Н.

3. $x = V/(3S) = 0{,}1$ м.

4. $P = 4\mathscr{E}^2 R/(R + r)^2 = 5{,}12$ Вт.

5. $P = P_1 \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t} \approx 45$ Вт.

6. $|\vec{a}| = IL|\vec{B}|/m - k|\vec{g}| = 8$ м/с^2.

7. $$f_2 = F_2 \times$$
$$\times \frac{a(d_1 + F_1) + d_1F_1}{a(d_1 + F_1) + F_1d_1 - F_2(d_1 + F_1)} =$$
$$= 13{,}75 \text{ см}.$$

Географический, геологический, химический факультеты и факультет почвоведения

1. $$\left|\vec{a}\right| = \frac{2(s_2/t_2 - s_1/t_1)}{t_1 + t_2} \approx 0{,}07 \text{ м/с}^2.$$

2. Скорость второго тела относительно первого не зависит от времени, направлена вертикально вниз и равна по модулю $2v_0 \sin\alpha_1 \approx 2{,}8$ м/с.

3. $$t = \frac{\left|\vec{v}\right|(4m_1 + m_2)}{2\left|\vec{g}\right|(2m_1 + m_2)} = 0{,}45 \text{ с}.$$

4. $$m_{\text{в}} = \frac{(m - m_1)\lambda - c_{\text{л}} m t_1}{c_{\text{в}} t} = 380 \text{ г}.$$

5. $$q_1' = C_1 \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ Кл};$$
$$q_2' = C_2 \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} = 10^{-8} \text{ Кл}.$$

6. $$R = \frac{\mathscr{E}^2}{2P} - r \pm \frac{\mathscr{E}}{2P}\sqrt{\mathscr{E}^2 - 4Pr} =$$
$$= 4 \text{ Ом}.$$

7. $$F = \frac{dL}{l + L} \approx 33{,}3 \text{ см}.$$

Множества значений числовых функций

1. а) $]-\infty;$ [illegible] $[\cup]2; +\infty[$;
   б) $]0; 1]$, $\max f = 1$;
   в) $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$.

(Если $\min f$ или $\max f$ не указан, то это означает, что функция f не принимает наименьшего, соответственно, наибольшего значения.)

2. а) $]-3; +\infty[$;
   б) $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$;
   в) $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$.

3. а) $f(x) = 3\cos^2 x - 1$, $E(f) = [-1; 2]$, $\min f = -1$, $\max f = 2$;

б) $$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad E(f) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \quad \min f = -\frac{1}{2}, \ \max f = \frac{1}{2};$$

в) Из тождества $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ вытекает, что

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 -$$
$$- 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x;$$
$$E(f) = \left[\frac{1}{2}; 2\right],$$
$$\min f = \frac{1}{2}, \quad \max f = 2.$$

4. а) $[-5; 7]$, $\min f = -5$, $\max f = 7$ (замена $\cos x = z \in [-1; 1]$);

б) $[-2; 1]$, $\min f = -2$, $\max f = 1$ (замена $\sin x = z \in [-1; 1]$).

5. а) $[-1; +\infty[$, $\min f = -1$ (замена $2^x = z \in]0; +\infty[$);

б) Обозначим $2^{\sin x} = z$; тогда $f(x) = g(z) = z^2 - 4z$.
Так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, то $z \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$, и, исследовав функцию g на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$, получим: $E(g) = E(f) = \left[-4; -\frac{7}{4}\right]$.
$\min f = -4$, $\max f = -\frac{7}{4}$.

6. а) $[1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$; б) $[-5; 5]$;
в) $f(x) = \cos^2 x - \sin x \cos x =$
$$= \frac{1 + \cos 2x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x -$$

$-\sin 2x) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$, поэтому $E(f) = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$.

7. а) $[0;\ 4]$;
б) $[-50;\ 4]$.

8. а) $\left[-\frac{4\sqrt{3}}{9};\ \frac{4\sqrt{3}}{9}\right]$ (замена $\sin x = z \in [-1;\ 1]$);
б) $\left[-\frac{8\sqrt{3}}{9};\ \frac{8\sqrt{3}}{9}\right]$ ($\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, замена $\sin x = z$).

9. Пусть x — высота конуса; тогда радиус его основания равен $r = \sqrt{1-x^2}$, а объем конуса — $V = \frac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{1}{3}\pi(1 - x^2)x = V(x)$. Задача сводится к отысканию множества значений функции $V(x)$ на интервале $]0;\ 1[$. Ответ: объем конуса может принимать любое значение, большее 0 и не превосходящее $V_{\max} = V\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$ дм$^3 \approx 0{,}4$ дм^3.

10. Пусть x — радиус основания цилиндра, h — его высота. Поскольку $V = \pi x^2 h = 1$, $h = \frac{1}{\pi x^2}$, поэтому площадь цилиндра равна $S = 2\pi x^2 + 2\pi x h = 2\pi x^2 + 2\pi x \frac{1}{\pi x^2} = 2\pi x^2 + \frac{2}{x} = S(x)$. Требуется найти множество значений функции $S(x)$ на промежутке $]0;\ +\infty[$. Имеем: $S'(x) = 4\pi x - \frac{2}{x^2} = 0$, если $x^3 = \frac{1}{2\pi}$, т. е. $x = x_0 = (2\pi)^{-\frac{1}{3}}$, причем на промежутке $]0;\ x_0]$ функция $S(x)$ убывает, а на промежутке $[x_0;\ +\infty[$ — возрастает. Следовательно, на любом отрезке $[e;\ x_0]$, где $0 < e < x_0$, множество значений $S(x)$ есть отрезок $[S(x_0);\ S(e)]$. Из формулы для $S(x)$ видно, что при достаточно малом $e > 0$ значение $S(e)$ становится сколь угодно большим, поэтому множество значений $S(x)$ на полуинтервале $]0;\ x_0]$ есть промежуток $[S(x_0);\ +\infty[$. Поскольку при $x \geqslant x_0$ функция $S(x)$ возрастает, этот промежуток будет множеством значений $S(x)$ и на всей области определения $]0;\ +\infty[$. Итак, ответ: площадь поверхности цилиндра объема 1 дм^3 может принимать любое значение, большее или равное

$$S_{\min} = S(x_0) = 2\pi\cdot(2\pi)^{-\frac{2}{3}} + 2\cdot(2\pi)^{\frac{1}{3}} = 3\cdot(2\pi)^{\frac{1}{3}}\ \text{дм}^2 \approx 5{,}5\ \text{дм}^2.$$

XIX Международная олимпиада по математике

1. Пусть O — центр квадрата (см. рис. на с. 53). Из симметрии очевидно, что достаточно показать два факта: 1) $|OP_1| = |OP_2| = |OP_3|$, 2) $|P_1P_2| = |P_2P_3|$.

Введем систему координат так, как это изображено на рисунке, взяв за единицу половину стороны квадрата. Тогда, как не трудно посчитать, координаты точки P_1 будут $\left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, координаты точки P_2 будут $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а координаты точки $P_3 - \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$. Теперь уже нетрудно убедиться, что

$$|OP_1| = |OP_2| = |OP_3| = \sqrt{2-\sqrt{3}},$$

а $|P_1P_2|^2 = |P_2P_3|^2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

2. Покажем, что число членов такой последовательности не больше 16. Действительно, пусть их больше; тогда для последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{17}, \ldots$ выполнено следующее условие: $0 < (a_1 + a_2 + \ldots + a_{11}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{12}) + \ldots + (a_7 + a_8 + \ldots + a_{17}) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_7) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{17}) < 0$, что невозможно. Последовательность из 16 членов существует, например, 5, 5, — 13, 5, 5, 5, — 13, 5, 5, — 13, 5, 5, 5, — 13, 5, 5.

3. Наиболее простое доказательство связано с использованием теоремы Дирихле: «Во всякой арифметической прогрессии, у которой разность, и первый член взаимно просты, содержится бесконечное число простых чисел». Выберем из арифметической прогрессии $n-1, 2n-1, \ldots, kn-1, \ldots$ четыре простых числа. Пусть это будут k_1n-1, k_2n-1, k_3n-1, k_4n-1. Очевидно, что произведение любых двух из них принадлежит V_n и является числом, неприводимым в V_n в силу простоты сомножителей каждый из которых не принадлежит V_n. Отсюда имеем три способа разложения числа $r = (k_1n-1)(k_2n-1)(k_3n-1)\times(k_4n-1)$ на неприводимые множители из V_n. А именно, $r = [(k_1n-1)\times(k_2n-1)][(k_3n-1)(k_4n-1)] = [(k_1n-1)(k_3n-1)][(k_2n-1)\times(k_4n-1)] = [(k_1n-1)(k_4n-1)]\times[(k_4n-1)(k_3n-1)]$.

4. Выбрав числа x_1 и x_2 так, чтобы

$$\cos x_1 = a/\sqrt{a^2+b^2},\quad \sin x_1 = b/\sqrt{a^2+b^2},$$

$$\cos 2x_2 = A/\sqrt{A^2+B^2},\ \sin 2x_2 = B/\sqrt{A^2+B^2},$$

мы можем переписать $f(x)$ в виде

$$f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-x_1) - \sqrt{A^2+B^2}\cos 2(x-x_2).$$

В точках $x = x_2$ и $x = x_2 + \pi$ $\cos 2(x-x_2)$ обращается в 1, а $\cos(x-x_2)$ либо равняется нулю, либо имеет разные знаки. Отсюда следует, что $\sqrt{A^2+B^2} \leqslant 1$.

В точках $x_1 - \frac{\pi}{4}$ и $x_1 + \frac{\pi}{4}$ $\cos(x - x_2)$ равняется $\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\cos 2(x - x_2)$ либо равняется нулю, либо имеет разные знаки. Отсюда следует, что $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant \sqrt{2}$.

5. Так как $r^2 + q = 1977$, то $r \leqslant 44$. Если $r = 44$, то $q = 41$ и условие $a^2 + b^2 = r(a + b) + q$ перепишется так: $(a-22)^2 + (в-22)^2 = 1009$. Обозначив $a - 22 = x$ и $b - 22 = y$, получаем $x^2 + y^2 = 1009$. Но квадраты целых чисел оканчиваются лишь на 0, 1, 4, 5, 6, 9. Отсюда легко видеть, что либо x, либо y оканчивается или на 0 или на 5. Перебирая все такие числа, квадрат которых меньше 1009; 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, находим единственное решение $15^2+28^2 = 1009$. Отсюда получаем четыре решения для (a, b): (7,50), (37,50), (50,7) и (50,37).

Если $q \leqslant 43$, то $r \geqslant 128$, но из известного неравенства $2(a^2 + b^2) \geqslant (a + b)^2$ при делении его на $a + b$ следует, что $2q + \frac{2r}{a+b} \geqslant a + b$ и так как $q < 44$, то $a + b < 88$; но $r < a + b$, следовательно и $r < 88$. Получено противоречие.

6. Покажем, что для любого натурального k выполнено следующее утверждение: если $n \geqslant k$, то $f(n) \geqslant k$. Для $k = 1$ утверждение тривиально. Пусть оно верно для k и пусть $n \geqslant k + 1$. Тогда $n - 1 \geqslant k$ и на основании индуктивного предположения $f(n-1) \geqslant k$ и $f(f(n-1)) \geqslant k$. А так как $f(n) > f(f(n-1))$, то $f(n) > k$ или $f(n) \geqslant k + 1$. Отсюда вытекает, что $f(k) \geqslant k$ для всех натуральных k. Допустим, что для некоторого k имеет место $f(k) > k$. Обозначим через A множество всех $f(n)$ для $n > k$. Пусть $l = f(n)$ — наименьший элемент множества A. Так как $n - 1 \geqslant k$, то $f(n-1) > k$. Действительно, если $n - 1 > k$, то это следует из неравенства $f(n-1) \geqslant n - 1$, а если $n - 1 = k$, то из неравенства $f(k) > k$. Пусть $m = f(f(n-1))$. Из сказанного вытекает, что m принадлежит A. Но верно неравенство $f(n) > f(f(n-1))$, значит, $l > m$, что противоречит тому, что l есть наименьший элемент множества A.

Значит, предположение $f(k) > k$ неверно, и для всех n имеет место $f(n) = n$.

«Задачи XL Московской математической олимпиады школьников

Мы приводим указания только к тем задачам, которые не вошли в «Задачник «Кванта» (см. «Квант», 1977, № 12).

2. Обязательно. Рассмотрим выпуклую оболочку вершин всех квадратов. Это — выпуклый многоугольник. Выделим у него одну вершину. Она является общей вершиной каких-то картонного и пластмассового квадратов, K и $П$. Если эти квадраты K и $П$ пересекаются, то вершина одного из них лежит внутри другого (рис. 4); и тогда некоторые два квадрата из одинакового материала (на рисунке 4 это пластмассовые квадраты) обязательно имеют общую точку: противоречие с условием. Стало быть, K и $П$ совпадают. Выкинув их, к оставшейся системе квадратов применим то же рассуждение (индукция).

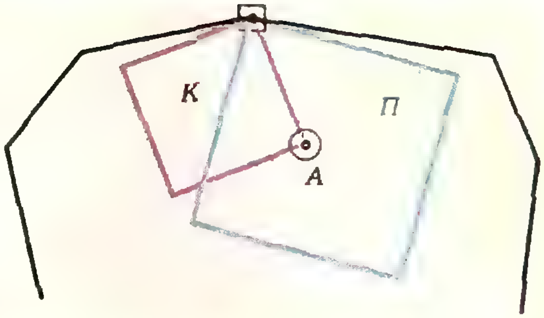


Рис. 4.

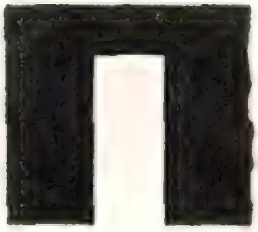


Рис. 5.

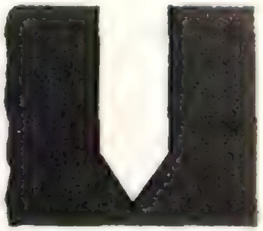


Рис. 6.

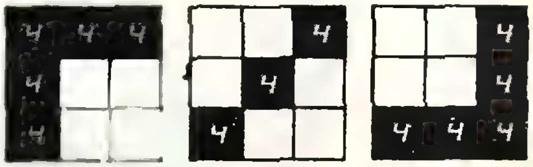


Рис. 7.

3. Можно в обоих случаях. Для протаскивания проволочного куба годится щель в форме буквы П с единичной длиной перекладины и достаточно длинными вертикальными частями (см. рис. 5). Для протаскивания тетраэдра годится щель в виде буквы Т с длинными прямолинейными частями, или же щель, изображенная на рисунке 6.

4. Пусть A и B — множества соответственно синих и красных точек. Если бы A содержало лишь конечное число точек с координатами, кратными a, а B содержало бы лишь конечное число точек с координатами, кратными b, то оказалось бы, что в ряду натуральных чисел лишь конечное число чисел, кратных ab.

6. а) *Не может быть*. Иначе в вертикальных столбиках было бы нечетное число белых кубиков, а их должно быть 14 — четное число.

б) *Да, может*. Кубики надо расположить так, как показано на рисунке 7 (на этом рисунке изображены три сечения большого куба). Тогда в каждом столбике будет или один, или три черных кубика (один кубик — в «центральном» столбике).

7. Перепишем равенство $a^{15}+b^{15}=c^{16}$ так: $\left(\frac{a}{c}\right)^{15} + \left(\frac{b}{c}\right)^{15} = c$. Выбрав произволь-

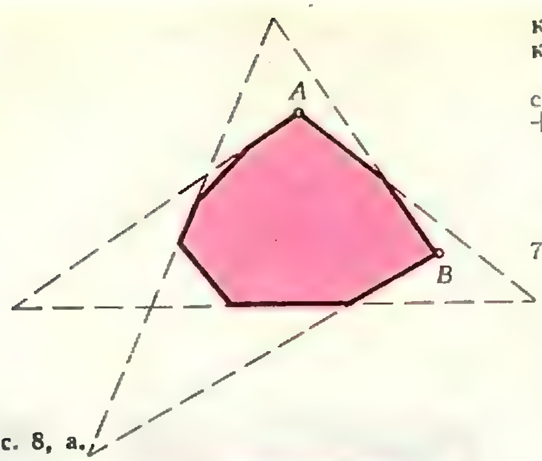


Рис. 8, а.

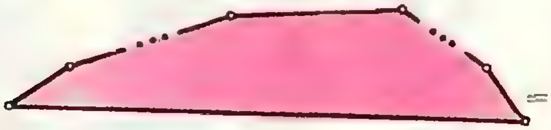


Рис. 8, б.

ные натуральные числа m и n, положим $\frac{a}{c}=m$ и $\frac{b}{c}=n$. Теперь в качестве c возьмем число $c=m^{15}+n^{15}$; числа a и b определяются после этого однозначно.

8. Ответ: второй.

9. Наименьшее n равно 50. Любой выпуклый 100-угольник можно получить в виде пересечения 50 треугольников, беря вершины 100-угольника через одну, как это показано на рисунке 8,*а*.

100-угольник, изображенный на рисунке 8,*б* (с очень длинной одной стороной) не представляется в виде пересечения меньшего числа треугольников.

10. Ответ: $n=2$. Предположим, что $n\geqslant 3$. Возьмем три отрезка a, b и c, и проведем три прямые, соединяющие попарно их середины. Каждый из отрезков a, b, c перпендикулярен двум прямым, выходящим из его середины, поэтому он перпендикулярен и плоскости, проходящей через все три проведенные прямые. Тем самым три отрезка a, b, c параллельны между собой, что противоречит условию.

15. *Можно.* Круги достаточно расположить далеко друг от друга так, чтобы их центры лежали на параболе $y=x^2$.

«Квант» для младших школьников

(См. «Квант» № 1, с. 37)

1. XVI — II = XIV.

2. Обратимся к рисунку. Клетки его заполнены следующим образом: сперва в каждую из клеток *М* записали единицы. Это соответствует тому, что каждую из букв *М* мы можем выбрать единственным образом.

Клетки последующих столбцов заполнялись последовательно, столбец за столбцом, слева направо. В каждую клетку мы записывали сумму чисел, проставленных в соседних левых клетках. Это соответствует количеству путей, которые ведут к данной клетке от начала чтения.

Остается просуммировать числа, вписанные в клетки правого столбца: $90+95+95+90=370$.

3.
$$\begin{array}{r} 342457 \\ +342457 \\ \hline 684914 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 364768 \\ +364768 \\ \hline 729536 \end{array}$$

4. $44\cdot 77=3388$, $55\cdot 99=5445$, $77\cdot 88=6776$, $88\cdot 88=7744$.

Ребусы

(см. «Квант» № 1, с. 61)

1. с о р о к$=87172$.

2. $5291\times 189=999\,999$.

3. а) $\sqrt{385297641}=19629$;
б) $\sqrt{9814072356}=99066$.

4. $\sqrt{141376}=376$.

5. $\sqrt{87909376}=9376$.

6. а) $4^4=256$; б) $23^2=529$; в) $192^2=36\,864$.

7. $18\,072\times 18\,072=326\,579\,184$.

Номер готовили
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

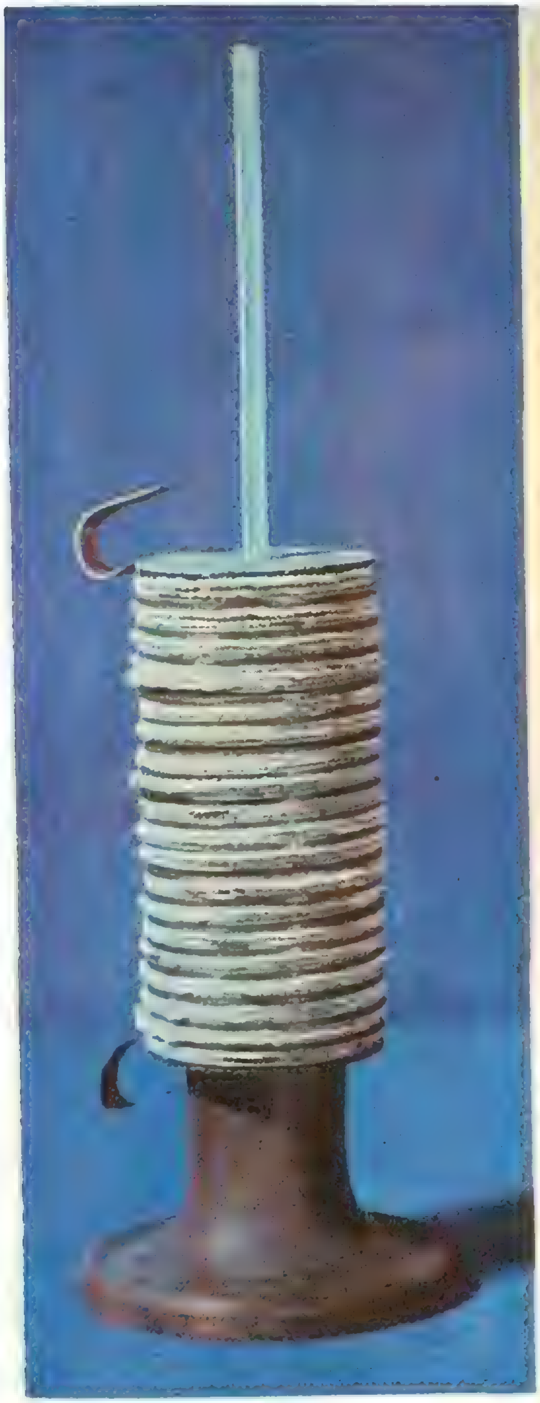
Художественный редактор Т. Макарова

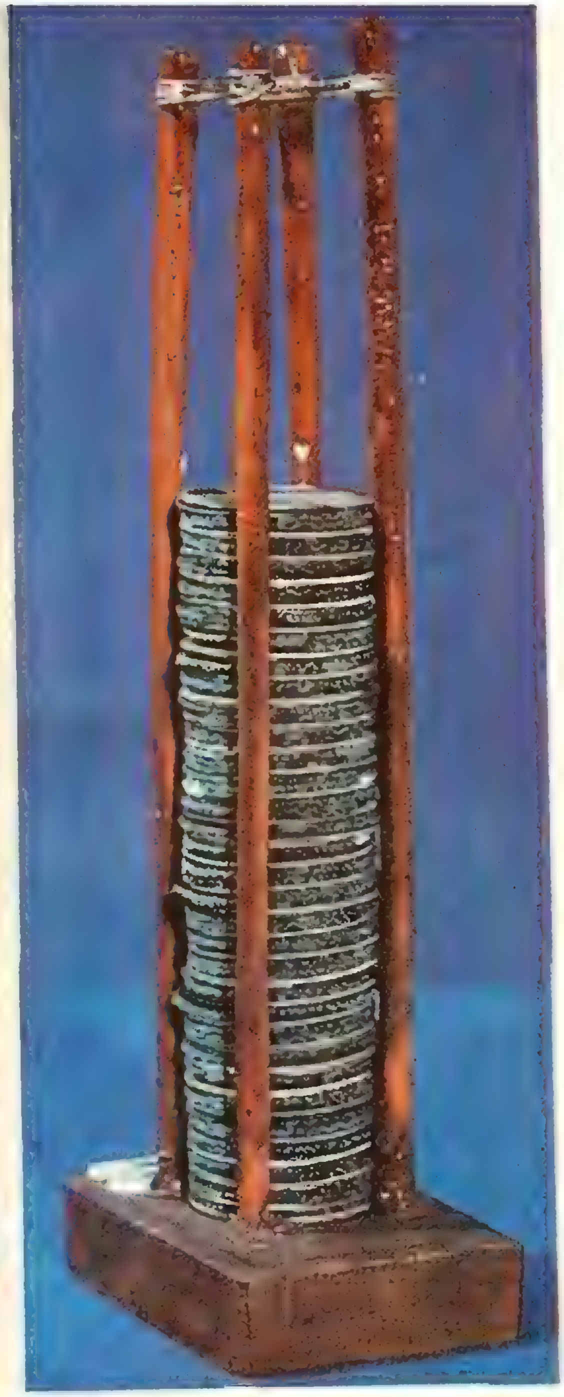
Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 26/XI 1977 г.
Подписано в печать 11/I 1978 г.
Бумага $70\times 108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 6,70. Т-00513
Цена 30 коп. Заказ 2710 Тираж 308910

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

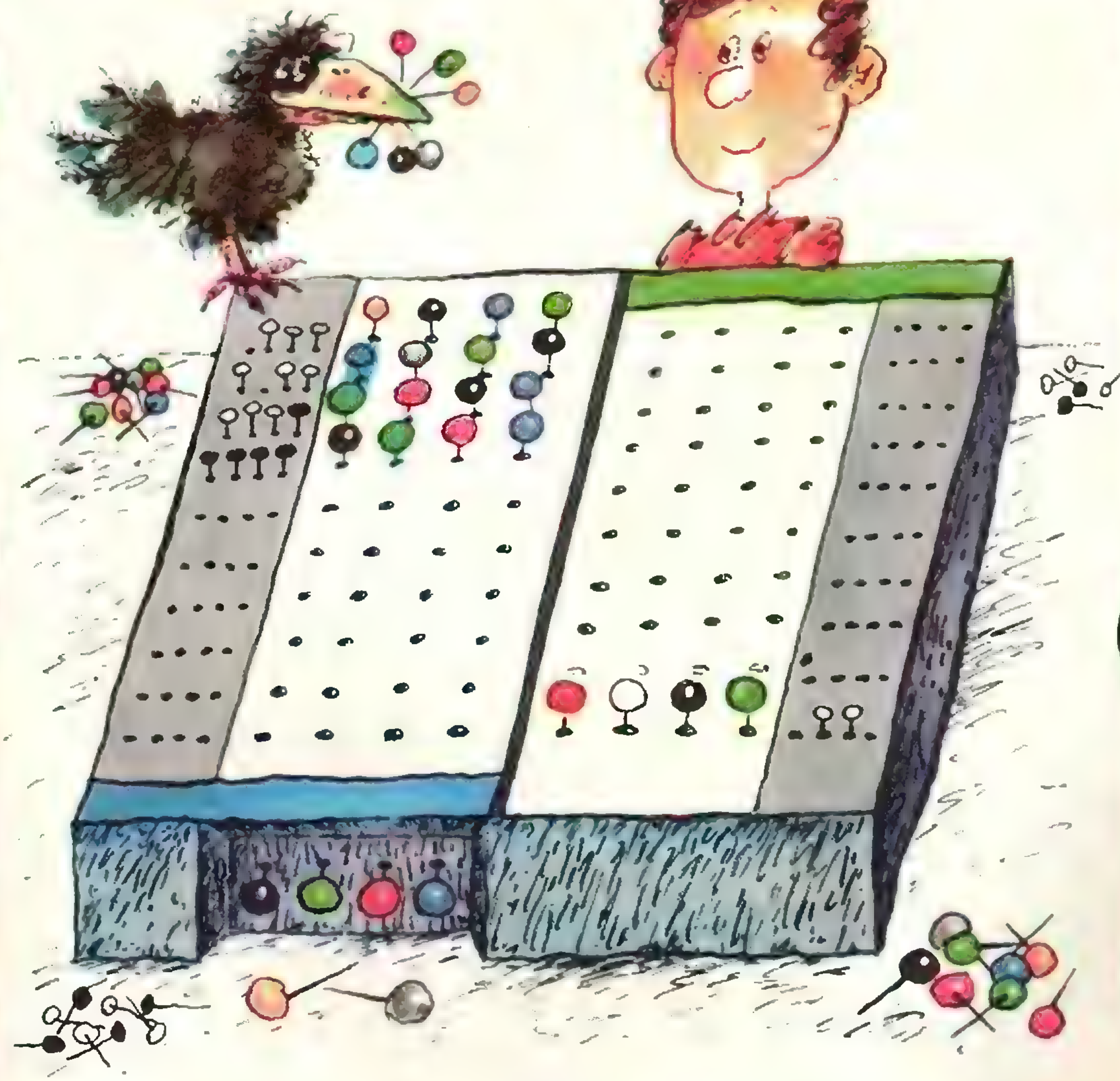




«...имею удовольствие сообщить Вам о некоторых поразительных результатах, полученных мною... Главный из этих результатов... это создание прибора, который по своим действиям... сходен с лейденской банкой, ... но который, однако, действует непрерывно, то есть его заряд после каждого разряда восстанавливается сам собой; одним словом, этот прибор создает неуничтожаемый заряд...» Так писал Алессандро Вольта президенту Королевского общества (Академия наук Великобритании) об изобретенном им приборе, который он сам назвал «электродвижущим аппаратом». Позже французы стали называть его «гальваническим столбом» или «вольтовым столбом».

В Милане (Италия) в Музее истории науки и техники хранятся вольтовы столбы, сделанные самим Алессандро Вольта. (Вы видите их на фото.)

В истории изобретения этого прибора большую роль сыграл Луиджи Гальвани и его знаменитые «гальванические опыты». Об этой истории вы можете прочитать в статье «Спор о лягушке» в этом номере журнала.



Кто меньше?

В этой игре двое играющих: «загадчик» и «отгадчик» — обмениваются вопросами и ответами. Правда, делают они это безмолвно. Игра начинается так. Загадчик (на картинке его нет — он отошел) выбирает из фишек шести цветов четыре фишки и выставляет их в нишу так, чтобы отгадчик их не видел. Затем отгадчик начинает задавать вопросы, выставляя наборы из четырех фишек напротив спрятанных фишек загадчика. Ответы загадчик дает следующим образом: если точно напротив его фишки оказалась фишка того же цвета, он ставит на боковом поле черную «булавку»; если же напротив его фишки оказалась фишка другого цвета, но среди остальных трех фишек, поставленных отгадчиком, есть фишка того же цвета — *белую «булавку»*. (*Рекомендуем загадчику* сначала сообразить в уме, сколько белых и черных «булавок» он должен поставить, а затем сразу выставить их рядом с «вопросом» отгадчика в любом порядке.) Цель отгадчика — угадать загаданный набор с помощью возможно меньшего числа вопросов.

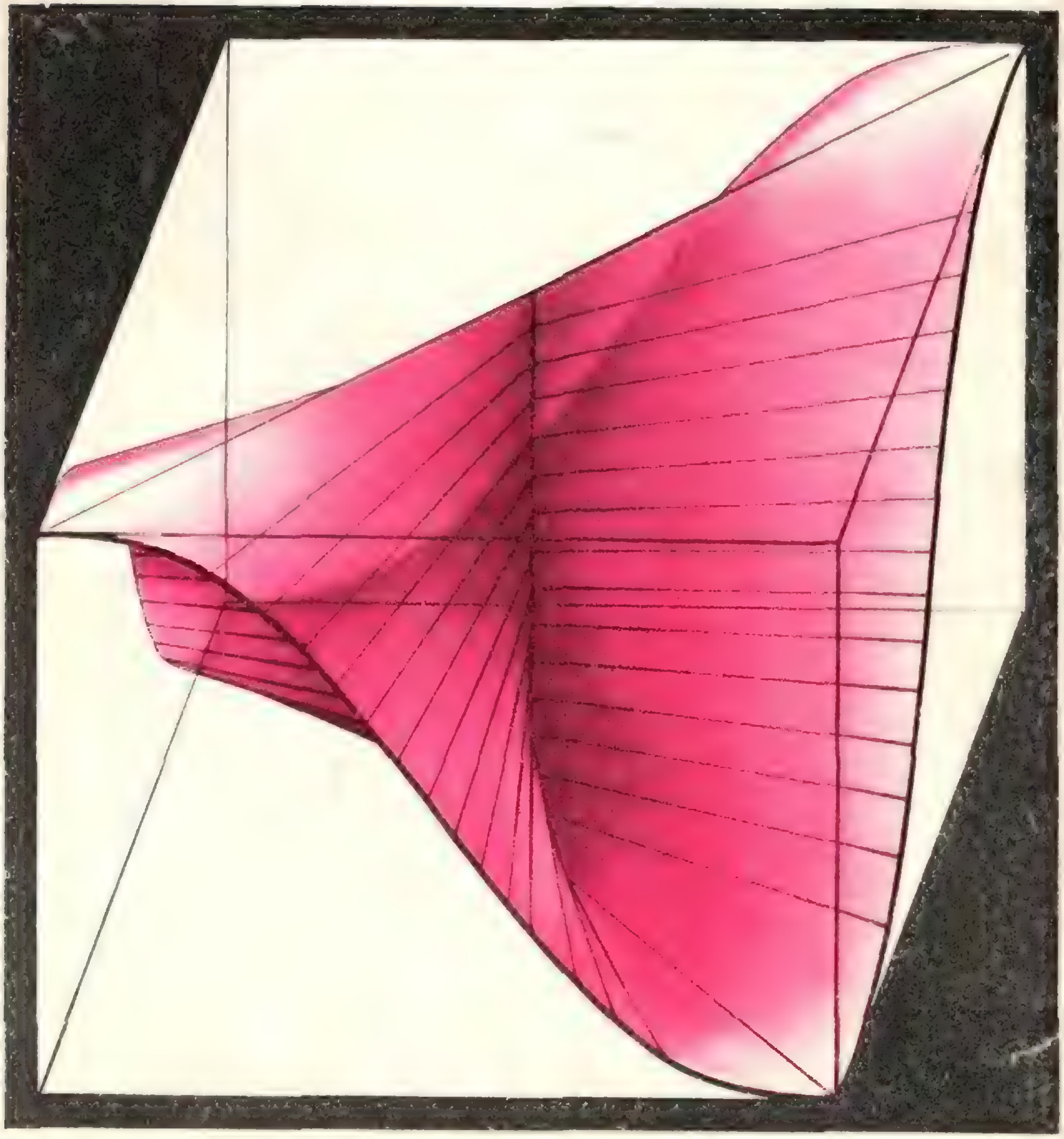
Поскольку отгадывать интереснее, чем отвечать, игроки на второй половине доски меняются ролями: на ней отгадчик загадывает, загадчик — отгадывает. При «двухсторонней» игре выигравшим считается тот, кто отгадал фишки партнера за меньшее число вопросов.

Доску легко изготовить из картона или пенопласта, а цветные фишки — из спичек (раскрасив их в шесть различных цветов). Играть можно и без доски — с наборами из четырех цифр, выбираемых из множества {1, 2, 3, 4, 5, 6} (см. с. 35).

Постарайтесь выяснить, какого наименьшего числа ходов в этой игре заведомо достаточно, чтобы угадать *любой набор*. Мы этого не знаем.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

У этого замысловатого лепестка довольно простое математическое описание: он задается уравнением $z(x^2+y^2)=2xy$ (на рисунке, разумеется, приведена только часть соответствующей поверхности). Почему этот лепесток попал на обложку журнала, вы узнаете, прочитав статью Л. Кузнецовой и З. Скопеца «Седлообразная поверхность». (см. с. 20).



НОМЕР
3

Основан в 1970 году

Квант

3
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Лопшиц.* Площади ориентированных фигур

11 *М. Бронштейн.* Необратимость тепловых явлений и статистика

Лаборатория «Кванта»

19 *Я. Гегузин.* Пузырьковая модель кристалла

Математический кружок

25 *Л. Софман.* Суммы длин и минимум энергии

29 **Победители конкурса «Кванта»**

Задачник «Кванта»

30 Задачи М491—М495; Ф503—Ф507

32 Решения задач М444, М445; Ф458—Ф461

По страницам школьных учебников

38 *А. Земляков.* Как выглядит парабола?

◆

40 *В. Березин.* Вивианна

«Квант» для младших школьников

41 Задачи

42 *Б. Кордемский.* Спрятанная арифметика

Практикум абитуриента

44 *В. Алимпиев, Л. Беркович, С. Мешков, А. Хвостов.* Куйбышевский государственный университет

45 *И. Горев, Ф. Кросс.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

48 *С. Овчинников.* Принадлежность точек прямой и плоскости

54 *В. Орлов.* Парадокс «большого» тела

Рецензии, библиография

59 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

61 *М. Шаскольская.* Почему и как исчезает пустота

62 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(10, 18, 43, 47)*

На первой странице обложки вы видите «ожерелье Антуана» Подробнее о нем рассказано на странице 47

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

А. Лопшиц

Площади ориентированных фигур

Читатель нашего журнала часто встречал в нем разнообразные задачи, в которых шла речь о площадях. Их решения также получались разнообразным способами. В «Кванте» № 3 за 1977 г. мы рассказали об идее Мёбиуса — измерять площади ориентированных многоугольников не только положительными, как это делается в школе, но и отрицательными числами. Мы обещали вернуться к рассмотрению этих вопросов и познакомить читателей с решением задач, поставленных Мёбиусом, и задач, которые их естественно продолжают. В настоящей статье мы предлагаем сначала ознакомиться с основами общей теории измерения площадей ориентированных многоугольников—этому посвящена первая часть статьи; усвоение изложенного в ней материала сделает читателя подготовленным к самостоятельному решению не только тех задач о площадях, которые были поставлены в нашем журнале, но и многих других.

1. Основные свойства площадей ориентированных фигур

1. Необходимость измерять площади плоских фигур была, как полагают историки, одной из основных причин возникновения и развития геометрии: древние египтяне должны были восстанавливать — после очередного наводнения Нила — границы своих земельных участков, затопленных весенними водами, и вновь измерять их площади.

Уже в седьмом классе школьник узнает простейшие правила для нахождения площадей параллелограммов, треугольников, трапеций. Математический вывод этих правил использует несколько основных положений. Вот одно из них, быть может, самое важное: *если многоугольник составляется из неперекрывающихся многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.*

Мы будем в дальнейшем пользоваться более «скромным» свойством площадей:

Первое свойство. Площадь любого многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ ($n>3$) равна сумме площадей треугольника $A_1A_2A_3$ и многоугольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$:

пл. $A_1A_2\ldots A_n =$
$=$ пл. $A_1A_2A_3 +$ пл. $A_1A_3A_4\ldots A_n$.

Одного взгляда на рисунок 1, *а* как будто достаточно, чтобы принять это свойство, т. е. согласиться с тем, что высказываемое им математическое предложение действительно имеет место. Однако для многоугольника, показанного на рисунке 1, *б*, это свойство не выполняется; в этом случае

пл. $B_1B_2\ldots B_n =$
$=$ пл. $B_1B_3B_4\ldots B_n -$ пл. $B_1B_2B_3$.

Придется поэтому, изменить формулировку: площадь многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна либо сумме, либо разности площадей многоугольника $A_1A_3A_4\ldots A_n$ и треугольника $A_1A_2A_3$.

Это утверждение осуществляется и для выпуклых и для невыпуклых многоугольников, но имеет — увы! — существенный недостаток: пользуясь им, нужно каждый раз смотреть на чертеж и выбирать знак «плюс» или «минус».

2. Выход из этого положения указал (еще в 1827 году) знаменитый немецкий геометр Мёбиус. Он предложил приписывать площади треугольника $B_1B_2B_3$ положительное значение только в том случае, когда

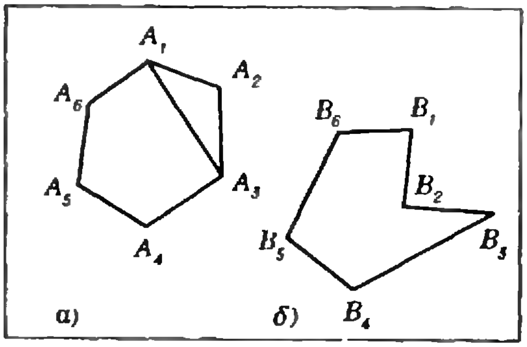


Рис. 1.

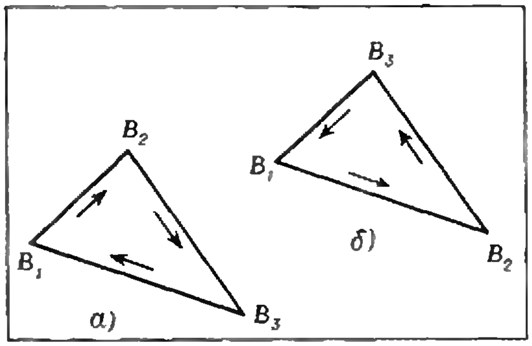


Рис. 2.

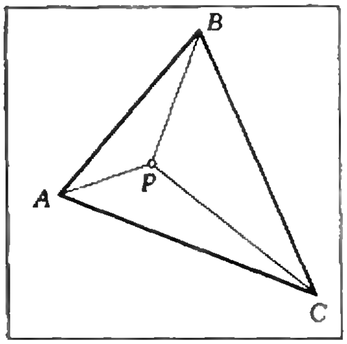


Рис. 3.

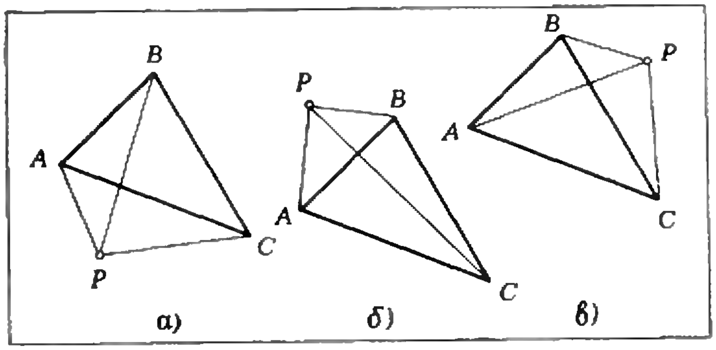


Рис. 4.

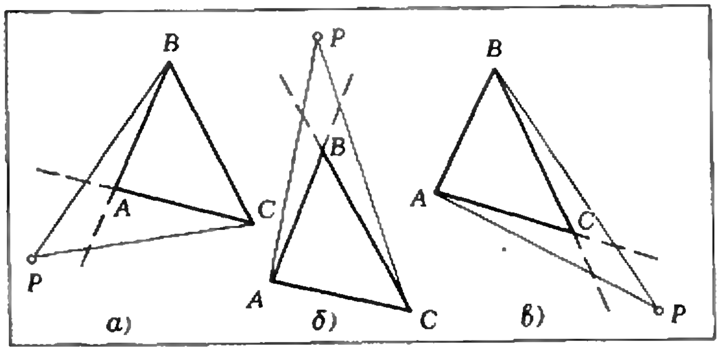


Рис. 5.

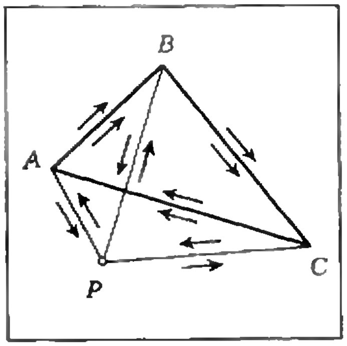


Рис. 6.

вершины B_1, B_2, B_3 расположены по часовой стрелке (рис. 2, *а*), а в противном случае (рис. 2, *б*), «площадью» треугольника $B_1B_2B_3$ считать отрицательное число, модуль которого равен обычной площади этого треугольника.

Полезность этой новой точки зрения хорошо видна на следующем примере. Если точка P расположена внутри треугольника ABC, то (рис. 3).

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC + \text{пл. } PCA. \qquad (*)$$

Однако если точка P расположена вне треугольника ABC, то это равенство должно быть заменено другим, например, в случае, приведенном на рисунке 4, *а* равенством

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC - \text{пл. } PCA.$$

Читатель легко убедится, что в зависимости от расположения точки P справедливы еще пять «похожих равенств» (рис. 4, *б*, *в*; 5, *а*, *б*, *в*). Однако если воспользоваться правилом Мёбиуса, то, как легко проверить, «все эти» семь равенств могут быть записаны в виде (*) (рис. 6).

Итак, правило Мёбиуса дает возможность утверждать, что справедлива

Теорема 1. Как бы ни была расположена в плоскости треугольника ABC точка P,

$$\text{пл. } ABC = \text{пл. } PAB + \text{пл. } PBC + \text{пл. } PCA.$$

Вместо семи теорем — одна! Можно ли после этого сомневаться в целесообразности правила Мёбиуса?

3. Дадим теперь строгое определение площади, использующее правило Мёбиуса.

Прежде всего уточним, о площади каких фигур мы будем говорить. Назовем многовершинником произвольную замкнутую ломаную, для которой указан порядок следования вершин *). Запись $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ будет означать, что вершина A_2 следует за вершиной A_1, A_3 — за A_2, ..., A_n за A_{n-1} и, наконец, что очень важно! — A_1 следует за A_n. Такой порядок называют круговым (или циклическим). Из этого определения следует, что упорядоченный n-вершинник $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ можно обозначать и так: $\overline{A_2A_3\ldots A_nA_1}$. Таким образом, записи $\overline{ABC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CAB}$ означают один и тот же упорядоченный трехвершинник, а записи $\overline{BAC}$, $\overline{ACB}$, $\overline{CBA}$ — другой упорядоченный трехвершинник. Будем говорить, что трехвершинник $\overline{ABC}$ и $\overline{BAC}$ противоположно ориентированы.

Именно для ориентированных (упорядоченных) многовершинников мы и хотим определить понятие площади.

Сделаем это так. Укажем некоторые основные ее свойства. Эти свойства доказываться не будут, но все остальные утверждения про площадь ориентированных многовершинников будут выводиться из этих свойств. (Такой способ определения понятий в математике называют *аксиоматическим*.) Итак, мы считаем, что каждому многовершиннику $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ поставлено в соответствие некоторое число — пл. $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$; оно может быть не только положительным, но и отрицательным, и даже равным нулю; при этом выполняются следующие свойства:

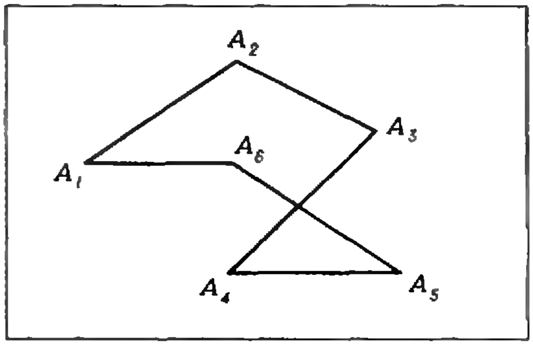


Рис. 7.

(I) $\quad$ пл. $\overline{ABC}$ = —пл. $\overline{BAC}$;

(II) $\quad$ пл. $\overline{A_1A_2A_3\ldots A_n}$ = пл. $\overline{A_1A_2A_3}$ + пл. $\overline{A_1A_3A_4\ldots A_n}$.

Если учесть, что многовершинник $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ совпадает с многовершинником $\overline{A_2A_3\ldots A_nA_1}$, то это свойство можно записать и так:

(II′) пл. $\overline{A_2A_3\ldots A_nA_1}$ = пл. $\overline{A_2A_3A_4}$ + пл. $\overline{A_2A_4\ldots A_nA_1}$.

А теперь вернемся к теореме 1. Исходя из соотношений (I) и (II), ее уже можно строго доказать! В самом деле, как бы ни были расположены в плоскости четыре точки $PABC$, имеют место — согласно (II) и (II′) — равенства: пл. $\overline{PABC}$ = пл. $\overline{PAB}$ + пл. $\overline{PBC}$; пл. $\overline{PABC}$ = пл. $\overline{ABCP}$ = пл. $\overline{ABC}$ + пл. $\overline{ACP}$ и, следовательно, пл. $\overline{PAB}$ + пл. $\overline{PBC}$ = пл. $\overline{ABC}$ + пл. $\overline{ACP}$, т. е. пл. $\overline{ABC}$ = пл. $\overline{PAB}$ + пл. $\overline{PBC}$ — пл. $\overline{ACP}$. Учитывая же, что в силу (I), пл. $\overline{ACP}$ = —пл. $\overline{PCA}$, получим пл. $\overline{ABC}$ = пл. $\overline{PAB}$ + пл. $\overline{PBC}$ + пл. $\overline{PCA}$.

Постарайтесь теперь самостоятельно доказать обобщение теоремы 1:

Теорема 2. Как бы ни была расположена точка P в плоскости упорядоченного многовершинника $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$, имеет место равенство пл. $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ = пл. $\overline{PA_1A_2}$ + пл. $\overline{PA_2A_3}$ + ... + пл. $\overline{PA_nA_1}$.

Выведите такое следствие из этой

---

*) Мы будем рассматривать и такие многовершинники, стороны которых могут пересекаться не только в вершинах (рис. 7).

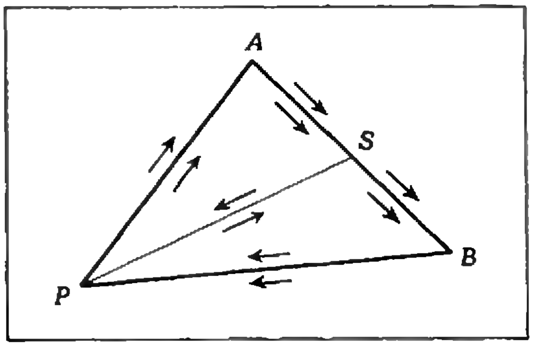


Рис. 8.

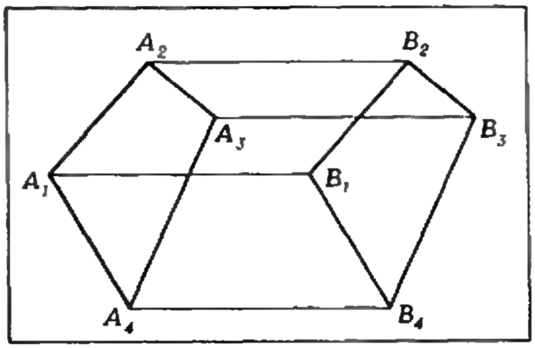


Рис. 9.

теоремы:

$$\text{пл. } \overline{A_1A_2\ldots A_n} = \text{пл. } \overline{A_1A_2\ldots A_i} + \text{пл. } \overline{A_iA_{i+1}\ldots A_nA_1}.$$

4. Еще одно свойство площадей нужно использовать для окончательного построения правил измерения площадей ориентированных многовершинников:

(III) *Если точка S является серединой отрезка AB, то какова бы ни была точка P, площади ориентированных трехвершинников* $\overline{PAS}$ *и* $\overline{PSB}$ *равны* (*рис. 8*).

И это утверждение мы не будем доказывать, а примем как основу дальнейших рассуждений. Строгим логическим следствием из него является следующая, основная в теории измерения площадей,

Теорема 3. Если многовершинник $\overline{B_1B_2\ldots B_n}$ получен из многовершинника $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ в результате параллельного переноса $\vec{a}$, т. е. если $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2} = \ldots = \overrightarrow{A_nB_n} = \vec{a}$ (рис. 9), то ориентированные площади этих многовершинников равны:

пл. $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ = пл. $\overline{B_1B_2\ldots B_n}$.

Читатель без особого труда убедится в справедливости этой теоремы, если последовательно решит следующие задачи.

Задача 1. Точки B_1 и B_2 симметричны точкам A_1 и A_2 (соответственно) относительно произвольной точки P. Что можно сказать о площадях трехвершинников $\overline{PA_1A_2}$ и $\overline{PB_1B_2}$?

Задача 2. Точки $B_1, B_2, \ldots, B_n$ симметричны точкам $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (соответственно) относительно точки P. Что можно сказать о площадях многовершинников $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ и $\overline{B_1B_2\ldots B_n}$?

Задача 3. Трехвершинник $\overline{B_1B_2B_3}$ получен из трехвершинника $\overline{A_1A_2A_3}$ в результате параллельного переноса. Докажите, что

$$\text{пл. } \overline{A_1A_2A_3} = \text{пл. } \overline{B_1B_2B_3}.$$

Дальнейшие наши рассуждения убедят читателя в том, что из этих правил логически строго следует способ вычисления площади любого многовершинника, если какому-либо произвольно выбранному трехвершиннику $\overline{A_1A_2A_3}$ приписать некоторое произвольно выбранное число. Этот трехвершинник принято называть «масштабным».

II. Свойства площадей ориентированных параллелограммов. Кососимметрическое произведение векторов

5. Основное свойство читатель воспримет как почти очевидное; вот оно:

Сумма площадей параллелограммов ABCC′ и C′CDD′ равна площади параллелограмма ABDD′ (рис. 10, *a*). Действительно, треугольник BCD получается из треугольника $AC'D'$ в результате параллельного переноса $\overrightarrow{AB}$ и имеет поэтому (теорема 3) ту же площадь, что и он. Если же отрезать от многоугольника $ABCDD'C'$ треугольник BCD и заменить его треугольником $AC'D'$, то и получится параллелограмм $ABDD'$, площадь которого равна сумме площадей параллелограммов $ABCC'$ и $C'CDD'$.

Успех этого наглядного доказательства зависел от удачного чертежа. На самом же деле формула пл. $ABCC'$ + пл. $C'CDD'$ = пл. $ABDD'$

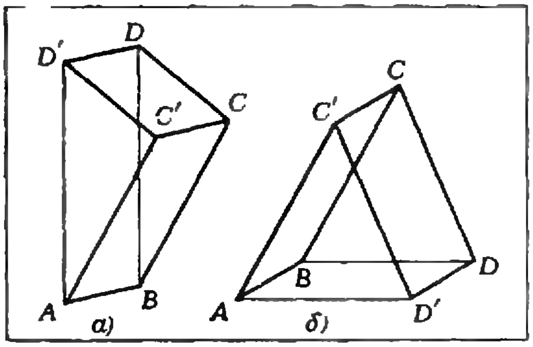


Рис. 10.

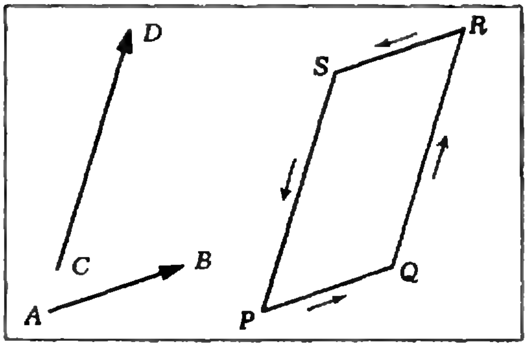


Рис 11.

верна не всегда. Например, если параллелограммы расположены так, как на рисунке 10, *б*, то верна такая формула:

$$\text{пл. } ABCC' - \text{пл. } C'CDD' = \text{пл. } ABDD'.$$

Суть дела в том, что нужно, как и в теореме 1, брать площади *ориентированных* фигур. Справедливой будет только следующая

Теорема 4. Сумма площадей ориентированных параллелограммов $\overline{ABCC'}$ и $\overline{C'CDD'}$ равна площади ориентированного параллелограмма $\overline{ABDD'}$.

$$(A)\ \text{пл. } \overline{ABCC'} + \text{пл. } \overline{C'CDD'} = \text{пл. } \overline{ABDD'}.$$

Доказательство *).

$$\text{пл. } \overline{ABCC'} + \text{пл. } \overline{C'CDD'} = \text{пл. } \overline{ABCDD'C'}\ ^{**)} = \text{пл. } \overline{BCDD'C'A} = \text{пл. } \overline{BCD} + \text{пл. } \overline{BDD'C'A} = \text{пл. } \overline{BCD} + \text{пл. } \overline{D'C'ABD} = \text{пл. } \overline{BCD} + (\text{пл. } \overline{D'C'A} + \text{пл. } \overline{D'ABD}) = \text{пл. } \overline{BCD} + (-\text{пл. } \overline{AC'D'} + \text{пл. } \overline{ABDD'}) = (\text{пл. } \overline{BCD} - \text{пл. } \overline{AC'D'}) + \text{пл. } \overline{ABDD'} = \text{пл. } \overline{ABDD'}.$$

6. Обозначим площадь ориентированного параллелограмма $\overline{PQRS}$, построенного на ориентированных отрезках $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (т. е. параллелограмма, в котором P — произвольно выбранная точка, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{CD}$ рис. 11) *) через $S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. С помощью этого обозначения доказанная нами теорема запишется так:

$$(A_1) S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}).$$

В самом деле, построив отрезки $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ такие, что

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MN}; \quad \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{PQ},$$

мы запишем (A_1) в виде

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}),$$

а это и есть равенство (A).

Читателя не затруднит самостоятельно доказать справедливость равенств:

$$(A_2)\ S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -S(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB});$$

$$(A_2')\ S(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}).$$

(рисунки 12 *а*, *б* подскажут ход рассуждений!).

Из соотношений (A_1) и (A_2) легко следует, что

$$(A_1')\ S(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}) = S(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}) + S(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}).$$

2) Труднее доказать справедливость соотношения

$$(A_3)\ S(\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{MN}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN})\cdot\lambda.$$

---

*) Оно логически строго следует из принятых нами основных свойств площадей и уже доказанных теорем; оно не использует чертежа и «наглядных представлений».

**) См. следствие из теоремы 2.

*) Таких параллелограммов бесконечно много; их ориентированные площади равны между собой, так как параллелограмм $\overline{P'Q'R'S'}$, построенный на отрезках $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, получается из параллелограмма $\overline{PQRS}$ в результате параллельного переноса $\overrightarrow{PP'}$.

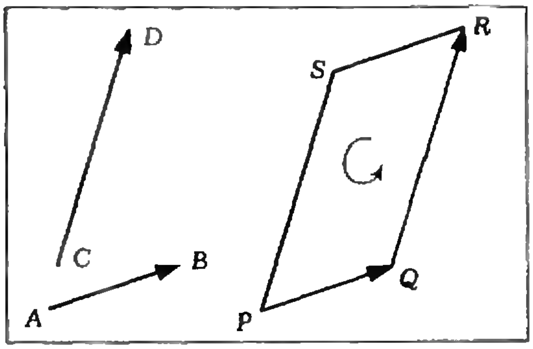


Рис. 12, а.

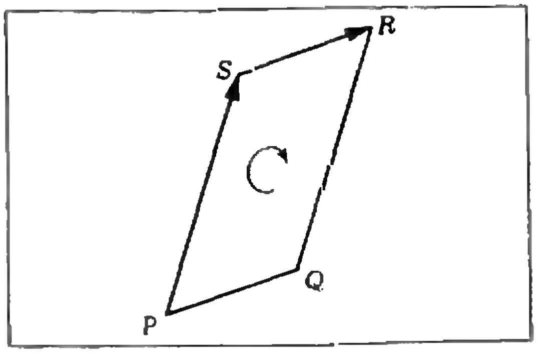


Рис. 12, б.

Задача 4. Докажите (A_3), если
а) λ — целое положительное число,
б) λ — рациональное положительное число,
в) λ — отрицательное рациональное число.

Справедливо также и соотношение

$$(A_3')\quad S(\lambda\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN})\cdot\lambda.$$

(Следует только использовать (A_3) и (A_2) *).)

В заключение этого списка формул, покажем, что из них следует очень важная для всей теории площадей теорема:

Если отрезки AB и CD коллинеарны (т. е. либо лежат на параллельных прямых, либо на одной и той же прямой), то

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 \text{ **)}.$$

В самом деле, в силу (A_2) имеем

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = -S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}),$$

и поэтому

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) = 0.$$

Если отрезок $\overrightarrow{CD}$ коллинеарен отрезку $\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AB}$; поэтому

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = S(\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{AB}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})\cdot\lambda = 0.$$

Доказанную нами теорему можно, очевидно, записать и так:

$$(A_1)\qquad S(\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{AB}) = 0.$$

Задача 5. Докажите справедливость равенств

(B_1) $S(\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{EF}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\cdot\lambda + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF})\cdot\mu$, (B_2) $S(\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{PQ}, \lambda\overrightarrow{CD} + \mu\overrightarrow{EF}) = S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})\alpha\lambda + S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EF})\alpha\mu + S(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CD})\beta\lambda + S(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{EF})\beta\mu$.
(B_3) $S(x_1\overrightarrow{OE_1} + x_2\overrightarrow{OE_2}, y_1\overrightarrow{OE_1} + y_2\overrightarrow{OE_2}) = (x_1y_2 - x_2y_1)\cdot S(\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$.

Замечание. Формулы $A_{1,2,3,4}$ и вытекающие из них формулы $B_{1,2,3}$ дают основание назвать выражение $S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ})$ *произведением векторов* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{PQ}$. Учитывая же, что

$$S(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{PQ}) = -S(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AB}),$$

его называют *кососимметрическим произведением*. В целях краткости его обозначают: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{PQ}$:

$$S(\vec a, \vec b) = \vec a\wedge\vec b.$$

Вот как запишутся теперь формулы (A_1)—(A_4) и (B_1)—(B_3): $\vec a\wedge(\vec b+\vec c) = \vec a\wedge\vec b+\vec a\wedge\vec c$, $\vec a\wedge\vec b = -\vec b\wedge\vec a$, $\vec a\wedge(\lambda\vec b) = (\vec a\wedge\vec b)\cdot\lambda$, $\vec a\wedge(\lambda\vec a) = 0$, $\vec a\wedge(\lambda\vec c+\mu\vec d) = \lambda(\vec a\wedge\vec c)+\mu(\vec a\wedge\vec d)$, $(\alpha\vec a+\beta\vec b)\wedge(\lambda\vec c+\mu\vec d) = \alpha\lambda(\vec a\wedge\vec c) + \alpha\mu(\vec a\wedge\vec d) + \beta\lambda(\vec b\wedge\vec c) + \beta\mu(\vec b\wedge\vec d)$, $(x_1\vec a + x_2\vec b)\wedge(y_1\vec a + y_2\vec b) = (x_1y_2-x_2y_1)(\vec a\wedge\vec b)$.

---

*) Справедливость формул (A_3) и (A_3') при иррациональных λ нельзя установить, исходя из формулы (A_1). Для того чтобы распространить эти формулы и на иррациональные λ, нужно наложить некоторые ограничения на выражение $S(\overrightarrow{AB}, \lambda\overrightarrow{MN})$ как функцию λ. Достаточно, например, считать, что эта функция монотонна.

**) Да это очевидно! — скажет читатель. Ведь параллелограмм $\overline{PQRS}$, построенный на коллинеарных отрезках, вырождается — все его вершины лежат на одной прямой и поэтому его площадь равна нулю. Однако использованное в этом «рассуждении» слово «поэтому» логически совсем не обосновано — только в тех случаях мы можем говорить «поэтому», когда опираемся либо на основные положения I, II, III, либо на уже доказанные с их помощью теоремы.

III. Вычисление ориентированной площади произвольного упорядоченного плоского многовершинника

7. Пусть O — произвольно выбранная точка плоскости, а векторы $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$, в ней расположенные, неколлинеарны.

Если x_1 и x_2 — два произвольных числа, то вектор $x_1\overrightarrow{OE}_1+x_2\overrightarrow{OE}_2$ называют линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$. Пусть

$$(1) \qquad x_1\overrightarrow{OE}_1+x_2\overrightarrow{OE}_2=\overrightarrow{OP}.$$

Таким образом, задание упорядоченной пары чисел $(x_1;\ x_2)$ одновременно определяет и (соответствующую этой паре) точку P. Принято говорить, что x_1 есть первая координата точки P, x_2 есть вторая координата точки P относительно координатной системы $\langle O;\ E_1,\ E_2\rangle$, заданной началом O и «масштабными векторами» $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$.

В дальнейшем изложении будем считать, что точка O и векторы $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$ фиксированы и будем пользоваться вместо записи (1) краткой записью: $P=(x_1,\ x_2)$.

Задача 6. Где расположены точки плоскости $\langle O,\ E_1,\ E_2\rangle$:

а) первая координата которых (в системе $\langle O;\ E_1,\ E_2\rangle$) — некоторое положительное (отрицательное) число, а вторая координата равна нулю,

б) обе координаты которых положительные (отрицательные) числа,

в) у которых первая координата положительная (отрицательная), а вторая отрицательная (положительная)?

Придавая в формуле (1) числам x_1 и x_2 все возможные значения, мы получим и все возможные векторы $\overrightarrow{OP}$ плоскости, содержащей точки O, E_1, E_2; иными словами, каждая точка P этой плоскости имеет свою пару координат: x_1; x_2 (рис. 13). Легко убедиться, что они могут быть вычислены по следующим формулам:

$$(2) \quad x_1=\frac{\text{пл. }\overline{OPE_2}}{\text{пл. }\overline{OE_1E_2}};\quad x_2=\frac{\text{пл. }OPE_1}{\text{пл. }OE_2E_1}.$$

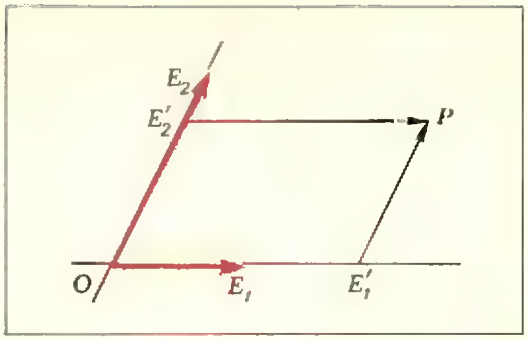


Рис. 13.

В самом деле, умножив (косо!) равенство (1) почленно на $\overrightarrow{OE}_2$, получим

$$\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OE}_2=\overrightarrow{OE}_1\wedge\overrightarrow{OE}_2\cdot x_1,$$

но легко убедиться, что для произвольного треугольника $\overline{OAB}$ его пл. $\overline{OAB}=\tfrac{1}{2}\,\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}$ (это следует из результата задачи 2), и, следовательно, пл. $\overline{OPE_2}=$ $=$пл. $\overline{OE_1E_2}\cdot x_1$.

Умножив (1) на $\overrightarrow{OE}_1$, получим $\overrightarrow{OP}\wedge$ $\wedge\overrightarrow{OE}_1=\overrightarrow{OE}_2\wedge\overrightarrow{OE}_1\cdot x_2$ и, следовательно, пл. $\overline{OPE_1}=$пл. $\overline{OE_2E_1}\cdot x_2$.

8. Подставив эти выражения для x_1 и x_2 в формулу (1), получаем

$$\overrightarrow{OP}\ \text{пл. }\overline{OE_1E_2}+\overrightarrow{OE}_1\ \text{пл. }\overline{OE_2P}+$$
$$+\overrightarrow{OE}_2\ \text{пл. }\overline{OPE_1}=0.$$

Умножив это равенство почленно на OQ, получим

$$\overrightarrow{OP}\wedge\overrightarrow{OQ}\ \text{пл. }\overline{OE_1E_2}+$$
$$+\overrightarrow{OE}_1\wedge\overrightarrow{OQ}\ \text{пл. }\overline{OE_2P}+$$
$$+\overrightarrow{OE}_2\wedge\overrightarrow{OQ}\ \text{пл. }\overline{OPE_1}=0$$

и, следовательно,

$$\text{пл. }\overline{OPQ}\cdot\text{пл. }\overline{OE_1E_2}+$$
$$+\text{пл. }\overline{OE_1Q}\cdot\text{пл. }\overline{OE_2P}+$$
$$+\text{пл. }\overline{OE_2Q}\cdot\text{пл. }\overline{OPE_1}=0.$$

Это равенство, связывающее пять произвольно расположенных на плоскости точек O, P, Q, E_1, E_2, называют *тождеством Мёбиуса*. Оно будет использовано в заключительном разделе нашей статьи.

9. Вот теперь мы можем осуществить полное решение задачи, которая сформулирована в заглавии этого раздела.

Теорема 5. Площадь ориентированного параллелограмма $\overline{OAA'B}$,

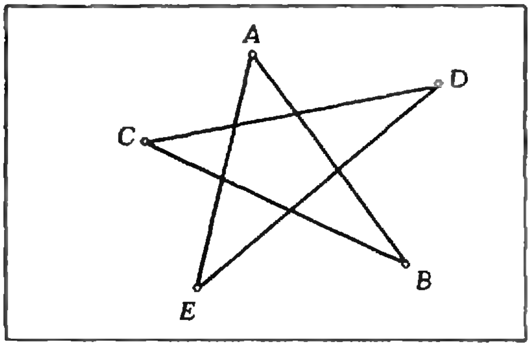


Рис. 14.

построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, может быть вычислена по формуле

$$\text{пл. } \overline{OAA'B} = \begin{vmatrix}\alpha_1 \alpha_2\\ \beta_1 \beta_2\end{vmatrix} (\overrightarrow{OE}_1 \wedge \overrightarrow{OE}_2) \text{ *)},$$

в которой (α_1, α_2) и (β_1, β_2) — координаты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ в координатной системе $\langle O;\ E_1,\ E_2\rangle$.

Доказательство. пл. $\overline{OAA'B} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (\alpha_1\overrightarrow{OE}_1 + \alpha_2\overrightarrow{OE}_2) \wedge (\beta_1\overrightarrow{OE}_1 + \beta_2 OE_2) = (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_1) \times (\overrightarrow{OE}_1 \wedge \overrightarrow{OE}_2)$.

Следствие.

$$\text{пл. } \overline{OAB} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} \left(\overrightarrow{OE}_1 \wedge \overrightarrow{OE}_2\right)$$

Теорема 6.

$$\text{пл. } \overline{ABC\ldots DE} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \gamma_2\end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_2\\ \alpha_1 & \alpha_2\end{vmatrix}\right)(\overrightarrow{OE}_1 \wedge \overrightarrow{OE}_2),$$

где $(\alpha_1;\ \alpha_2)$, $(\beta_1;\ \beta_2)$, $(\gamma_1;\ \gamma_2)$, ... $(\delta_1;\ \delta_2)$, $(\varepsilon_1;\ \varepsilon_2)$ — координаты точек A, B, C, . . . , D, E (соответственно) в координатной системе $\langle O;\ E_1,\ E_2\rangle$. Площадь координатного параллелограмма, т. е. параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OE}_1$ и $\overrightarrow{OE}_2$, должна быть, конечно, задана.

Доказательство.

$$\text{пл. } \overline{ABC\ldots DE} = \text{пл. } \overline{OAB} + \text{пл. } \overline{OBC} + \ldots + \text{пл. } \overline{ODE} + \text{пл. } \overline{OEA}.$$

Остается использовать следствие теоремы 5.

IV. Задача Мёбиуса и ее продолжение

10. В статье, имеющей это название (в третьем номере нашего журнала за прошлый год), мы предложили доказать, что *как бы ни были расположены в плоскости пять точек* A, B, C, D и E, площадь x пятивершинника $\overline{ABCDE}$ есть корень квадратного уравнения

$$x^2 - x(a + b + c + d + e) + (ab + bc + cd + de + ea) = 0, \tag{3}$$

в котором a, b, c, d, e — площади ориентированных трехвершинников

$\overline{ABC}$, $\overline{BCD}$, $\overline{CDE}$, $\overline{DEA}$, $\overline{EAB}$.

Особый интерес, который вызывает эта задача, связан с тем, что пятивершинник $\overline{ABCDE}$ может быть и невыпуклым и даже таким, у которого стороны пересекаются (рис. 14); неудивительно поэтому, что числа a, b, c, d и e могут быть и отрицательными.

Изящное доказательство, которое дал Мёбиус, использует изобретенный им специальный математический аппарат — барицентрическое исчисление (барицентр — центр тяжести), которое Мёбиус открыл в результате изучения вопросов механики твердого тела. Современная векторная алгебра возникла и под влиянием этих идей Мёбиуса. Мы познакомим читателя с векторным доказательством задачи Мёбиуса — оно использует изложенную выше теорию ориентированных площадей, точнее говоря, доказанное в п. 8 «тождество Мёбиуса» — которое мы запишем так:

$$\text{пл. } \overline{ABC} \cdot \text{пл. } \overline{ADE} + \text{пл. } \overline{ADB} \cdot \text{пл. } \overline{ACE} + \text{пл. } \overline{ABE} \cdot \text{пл. } \overline{ACD} = 0. \tag{4}$$

В силу свойств ориентированных площадей пл. $\overline{ABCDE} = x =$ пл. $\overline{ABC} +$ пл. $\overline{ACD} +$ пл. $\overline{ADE} = a +$ пл. $\overline{ACD} + d$;

$$x = \text{пл. } \overline{CDE} + \text{пл. } \overline{CEA} + \text{пл. } \overline{CAB} = c + \text{пл. } \overline{CEA} + a,$$

$$x = \text{пл. } \overline{DEA} + \text{пл. } \overline{DAB} + \text{пл. } \overline{DBC} = d + \text{пл. } \overline{DAB} + b,$$

и, следовательно,

---

*) $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ — запись выражения $ad - bc$.

$$\text{пл. } \overline{ACD} = x - a - d;$$
$$\text{пл. } \overline{DAB} = x - b - d;$$
$$\text{пл. } \overline{CEA} = x - c - a.$$

Подставляя эти выражения в (4), получим

$$ad - (x - b - d)(x - c - a) + e(x - a - d) = 0,$$

т. е. уравнение (3).

11. Мёбиус предлагает также доказать, что если площади (ориентированные!) четырехвершинников $\overline{ABCD}$, $\overline{BCDE}$, $\overline{CDEA}$, $\overline{DEAB}$, $\overline{EABC}$ равны соответственно, α, β, γ, δ, ε, то площадь x пятивершинника $\overline{ABCDE}$ есть корень квадратного уравнения

$$x^2 - x(\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon) + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\varepsilon + \varepsilon\alpha) = 0 \tag{5}$$

(«такого же», говорит Мёбиус, как и уравнение 3).

Это доказательство читатель проведет самостоятельно. Более затруднительным будет решение *«продолжения»* задачи Мёбиуса:

доказать, что если площади ориентированных треугольников

$$\overline{ACD},\ \overline{BDE},\ \overline{CEA},\ \overline{DAB},\ \overline{EBC}$$

равны (соответственно) p, q, r, s, t, то площадь x пятивершинника $\overline{ABCDE}$ есть корень квадратного уравнения

$$x^2 = (p + q + r + s + t)^2 - 4(pr + rt + tq + qs + sp). \tag{6}$$

12. Обратим, наконец, внимание на то, что и задача Мёбиуса и ее «продолжение» представляют собой частные случаи такой задачи.

На сторонах AB, BC, . . . ориентированного пятивершинника $\overline{ABCDE}$ взяты точки A', B', C', D', E' так, что $\overline{AA'} = \lambda\overline{AB}$; $\overline{BB'} = \lambda\overline{BC}$; . . . Требуется составить уравнение, которому удовлетворяет площадь x пятивершинника $\overline{ABCDE}$, если заданы площади треугольников $\overline{ABC'}$, $\overline{BCD'}$, . . . , равные соответственно a', b', c', d', e'. (В случае, когда $\lambda = 0$ — задача Мёбиуса; если же $\lambda = 1$ — ее «продолжение»).

Совсем неожиданный ответ получается для случая, когда $\lambda = {}^1/_3$; вот он:

$$x = \frac{3}{5}(a' + b' + c' + d' + e').$$

Еще более неожиданным покажется, что для произвольно заданного λ (не равного, однако, ${}^1/_3$) задача имеет удивительно... безобразный ответ:

$$x^2(1 - \lambda - \lambda^2) - x(a' + b' + c' + d' + e')(1 - \lambda) + (a' + b' + c' + d' + e')^2\left[\frac{1 - 2\lambda + 2\lambda^2}{(2 - \lambda)^2} - \frac{(1 - \lambda)^2(1 - 3\lambda)^2}{[(1 - \lambda)^5 + 1](2 - \lambda)}\right] + [(1 - \lambda)(a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'a') - \lambda^2(a'c' + c'e' + e'b' + b'd' + d'a')]\,\frac{(2 - \lambda)(1 - 3\lambda)^2}{(1 - \lambda)^5 + 1} = 0. \tag{7}$$

Утешением, быть может, послужит то, что при $\lambda = 0$ и при $\lambda = 1$ эта формула все же приводит к уравнениям (3) и (6). Добавочным стимулом для вывода формулы (7) будет (для настойчивого читателя!) то, что она дает решение такой задачи: при каком значении числа λ $\left(\text{кроме } \lambda = \frac{1}{3}\right)$ площадь пятивершинника $A'B'C'D'E'$ однозначно определяется заданием площадей a', b', c', d', e'?

И, наконец, нельзя ли эту последнюю задачу решить без предварительного вывода «безобразной» формулы?

Ребусы

Попробуйте расшифровать следующие примеры на умножение, в каждом из которых одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры, и ни одно число не начинается нулем.

```
1.     икс
       икс
      ————
      хххх
      ахх
     ххх
    ——————
    тысяча
```

```
2.   икс
     зет
     ———
     икс
    ххх
   сто
   —————
   ххххх
```

```
3.   зет
     зет
     ———
     ххх
   хххх
   зет
   —————
   игрек
```

```
4.   сто
     сто
    ————
    хххх
   хххв
   ахх
   —————
   много
```

Э. Ректин

М. Бронштейн

Необратимость тепловых явлений и статистика

Эта статья — глава из книги «Строение вещества», написанной известным советским физиком, замечательным популяризатором науки М. С. Бронштейном. Книга эта была издана в 1936 году. Текст печатается с небольшими изменениями.

Тепловыми явлениями мы называем все те явления, происходящие с макроскопическими телами, в которых мы уже не можем ограничиться рассмотрением движения макроскопического тела как целого, а должны рассмотреть и перемещения мельчайших частей этого тела друг относительно друга, т. е. в конечном счете учесть атомистическое строение тела; так, например, расширение газа, деформацию металлического стержня и т. п. мы называем в этом смысле слова тепловыми явлениями наряду с нагреванием газа, заключенного в сосуд неизменного объема. Закон сохранения энергии, представляющий один из основных принципов механики, справедлив и в области тепловых явлений; это представляет весьма серьезное доказательство того взгляда, что макроскопическое тело можно трактовать как механическую систему, состоящую из атомов, т. е. иными словами, что «тепло есть движение». Именно поэтому закон сохранения энергии получил название первого принципа механической теории тепла (вместо выражения «механическая теория тепла» еще чаще употребляют более короткое название «термодинамика»).

Когда мы пробуем применять принципы механики к макроскопическому телу, состоящему из огромного количества атомов, мы с самого начала наталкиваемся на две существенные трудности. Первая из этих трудностей имеет чисто практический характер. Она заключается в том, что для решения задачи о поведении механической системы, состоящей, например, из 10^{25} частиц, необходимо написать, а затем и решить такое же огромное количество уравнений; если бы мы наловчились писать по одному уравнению в секунду, то для написания такой системы уравнений нам потребовалось бы миллиарды миллиардов лет.

Рассматривая тепловые явления внимательно, мы видим, что описанная выше точка зрения на теорию тепла как на механику систем, состоящих из огромного числа частиц, наталкивается и на другую трудность, уже не практического, а более глубокого и принципиального характера. Для того чтобы понять смысл этой трудности, рассмотрим следующий пример. Предположим, что нам дан закрытый сосуд, разделенный на две равные части заслонкой (рис. 1).

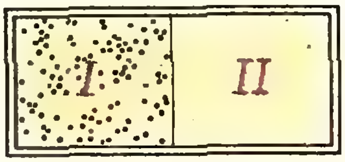


Рис. 1.

Пусть в части *I* находится некоторое количество газа, а в части *II* — пустота. Выдернем в некоторый момент времени заслонку и посмотрим, что будет происходить внутри сосуда, начиная с этого момента времени. Опыт показывает, что газ, первоначально помещенный в части *I*, расширится в соседнюю пустоту и распределится по всему сосуду с равномерной плотностью. Это явление происходит как бы «само собой»: это значит, что с того момента времени, когда выдернута заслонка, газ является замкнутой системой, за которой мы следим извне, никак не вмешиваясь в происходящие в ней процессы. Сколько бы мы ни следили в дальнейшем за газом, он всегда будет оставаться распределенным с одинаковой плотностью по всему сосуду; сколько бы мы ни ждали, нам не удастся наблюдать того, чтобы газ, распределенный по всему сосуду $I + II$, «сам собой», т. е. без всякого вмешательства извне, ушел из части II и сконцентрировался весь в части I, что дало бы нам возможность снова вдвинуть заслонку и тем самым возвратиться к исходному состоянию. Отсюда видно, что процесс расширения газа в пустоту есть процесс *необратимый*: это значит, что хотя сам он может протекать в замкнутой системе без всякого вмешательства извне, но обратный ему процесс (переход всего газа в часть I так, чтобы в части II образовалась пустота) «сам собой» не происходит. Опыт показывает, что тепловые явления почти всегда обладают этим свойством «необратимости»: так, например, если рядом друг с другом находятся два тела, из которых одно теплее другого, то их температура постепенно выравнивается, т. е. тепло «само собой» перетекает от более теплого тела к более холодному; однако обратный процесс без всякого вмешательства извне никогда не происходит. Кусок сахара, помещенный в горячий чай, растворяется в нем, но никогда не бывает, чтобы из горячего чая, в котором уже растворен кусок сахара, этот последний выделялся и вновь становился целым куском. Примеров такой же необратимости можно привести сколько угодно. Попробуем теперь разобраться, можно ли объяснить эту необратимость, исходя из принципов механики. Рассмотрим какое-нибудь движение, происходящее в согласии с этими принципами в некоторой *замкнутой* механической системе (т. е. в неизменных внешних условиях). Пусть явление заключается в том, что мы бросаем из некоторой точки A камень, который в конце концов падает в точку B. Предположим для простоты, что камень движется в безвоздушном пространстве (в противном случае нам пришлось бы принять во внимание сопротивление воздуха полету камня, а это сопротивление является тепловым явлением; так как мы хотим сравнить тепловые явления с такими явлениями, в которых применимость принципов механики является основным и не вызывающим никаких сомнений опытным фактом, то мы и должны в нашем воображаемом механическом опыте заранее исключить все тепловые явления). Является ли полет камня из A в B обратимым? Несомненно, так как обратный процесс очень легко осуществить. Для этого стоит только, став в точке B, швырнуть камень, сообщив ему такую же по абсолютному значению скорость, с какой он упал в точку B, но направленную в противоположную сторону. Из опыта и из принципов механики следует, что при этом камень опишет точь в точь ту же самую дугу, какую он описал раньше, но в противоположном направлении, и упадет в точку A. Рассмотренный пример полета камня является лишь частным случаем общего принципа механики, который гласит, что если в замкнутой механической системе может происходить какое-либо движение, то и «обратное» движение тоже может происходить. Для того чтобы осуществить обратное движение, достаточно только остановить в какой-либо момент времени все части нашей системы и затем сообщить им скорости, равные по абсолютным значениям, но прямо противоположные по направлениям тем скоростям, какие они имели непосредственно перед остановкой. Таким образом, все механические явления являются обратимыми. Почему же тепловые явления необратимы?

На первый взгляд кажется, что необратимость тепловых процессов находится в резком противоречии с тем утверждением механики, что все движения обратимы; поэтому мы могли бы даже усомниться в справедливости утверждения, что «тепло есть движение». Противоречие, о котором мы только что говорили, было разъяснено лишь во второй половине XIX столетия немецким теоретиком Людвигом Больцманом. Больцман доказал, что это противоречие имеет лишь кажущийся характер.

Для того чтобы понять идею Больцмана, рассмотрим следующий пример: предположим, что нам дана горизонтальная отполированная платформа, обнесенная со всех сторон барьером, и что на этой платформе имеется гладко отполированный шарик, который скользит по платформе, отражаясь от барьера, когда он сталкивается с ним. Путь шарика за большой период времени представит весьма сложную и запутанную ломаную линию. Предположим, что вся поверхность платформы белого цвета, за исключением лишь немногих нанесенных на нее черных пятен. Эти пятна могут быть какой угодно формы, круглой, извилистой, удлиненной и т. д., с одним лишь тем условием, что общая поверхность всех пятен вместе взятых составляет ничтожную долю поверхности всей платформы. При движении шарика по платформе он будет лишь изредка вступать на территорию пятен. Если мы будем следить за движением шарика в течение достаточно большого промежутка времени, то обнаружим, что он будет находиться на территории пятен в течение лишь ничтожной доли этого промежутка времени, равной отношению суммарной площади черных пятен к площади всей платформы. Это объясняется тем, что движение шарика настолько путано и извилисто, что через каждый квадратный миллиметр поверхности платформы он будет проходить ровно столько же раз, сколько через любой другой, если только мы будем следить за движением шарика достаточно долго для того, чтобы такое уравнивание произошло. Отношение продолжительности пребывания шарика на черном поле в течение данного достаточно большого промежутка времени к самому этому промежутку времени носит название *вероятности* пребывания шарика на территории черных пятен. Эта вероятность очень мала, и с этим связано следующее утверждение: если положение и скорость шарика в данный момент мне не даны с настолько большой точностью, чтобы я мог рассчитать его движение на следующие 10 секунд, то я всегда могу с достаточно большой вероятностью утверждать, что через 10 секунд шарик будет на белой, а не на черной территории. Если кто-нибудь пожелает биться со мной об заклад, то я могу ручаться за это утверждение достаточно большой денежной суммой против небольшого заклада с другой стороны. Поэтому я имею право сделать следующие два утверждения:

1) если известно, что в настоящий момент шарик находится на черном поле, то весьма вероятно, что через 10 секунд он будет находиться на белом;

2) если известно, что в настоящий момент шарик находится на белом поле, то весьма невероятно, что через 10 секунд он будет находиться на черном.

Эти два утверждения можно заменить следующей краткой формулировкой: переход шарика с черного поля на белое весьма вероятен, переход же его с белого поля на черное весьма мало вероятен. Если же отношение площади черных пятен к площади всей платформы в самом деле чрезвычайно мало, например, равно одной миллиардной, то шарик будет находиться на черной территории в среднем одну секунду в течение тридцати лет (тридцать лет составляют около миллиарда секунд). Поэтому мы вообще в течение ряда лет, быть может, не дождемся того, что шарик окажется на черной территории, если только с самого начала не поместим его намеренно на одно из пятен. (Мы в нашем примере повсюду сознательно устраняем возможность точного расчета пути шарика из направления его движения; для этого достаточно предположить, что начальную скорость шарик получает, например, при случайном и не находящемся под нашим контролем встряхивании платформы. Поэтому мы, хотя и можем прямо посадить шарик в начале движения на черное пятно, но не можем сделать так, чтобы он туда попал впоследствии.)

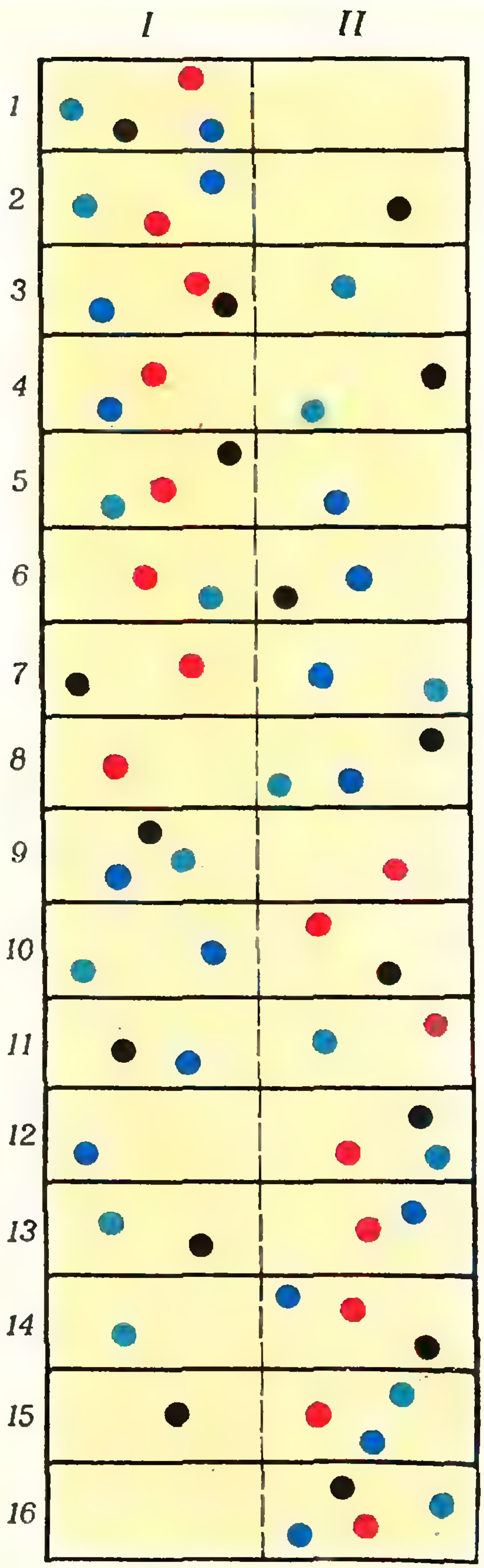
Итак, благодаря ничтожной вероятности пребывания шарика на черном поле, мы практически никогда не сможем наблюдать переход шарика с белого поля на черное, хотя нам очень легко осуществить переход его с черного на белое: для этого достаточно с самого начала посадить его на черное поле. Получается своеобразная *необратимость*: переход шарика с черного поля на белое практически возможен, переход же его с белого на черное практически невозможен. Однако ясно, что эта необратимость только кажущаяся, так как в течение достаточно большого промежутка времени (например, в течение миллиона лет) шарик будет много раз переходить с белого поля на черное и обратно, причем и тот, и другой переходы, очевидно, будут совершаться в точности одинаковое число раз. Отсюда следует, что переход шарика с черного поля на белое в действительности является обратимым, но практически его необратимость возникает вследствие неполного нашего контроля над начальными условиями опыта: мы имеем возможность посадить шарик с самого начала на поле заданного цвета в желательном нам месте, но не можем контролировать направление его начальной скорости. Поэтому единственный способ убедиться в том, что процесс в действительности является обратимым, заключается в достаточно долгом ожидании: если бы мы в описанном примере, где площадь пятен в миллиард раз меньше площади платформы, имели возможность следить за движением шарика десятки лет, то мы, несомненно, в конце концов наблюдали бы шарик и в моменты его нахождения на черной территории.

Мы видим, что практическая необратимость имеет место в том случае, когда процесс, «обращение» которого мы хотим увидеть, заключается в переходе от некоторого весьма мало вероятного состояния механической системы к состоянию весьма вероятному (в нашем примере от нахождения шарика на черном поле к его нахождению на белом поле). В этом случае процесс оказывается практически необратимым, т. е. нам нужно ждать очень много времени для того, чтобы увидеть, как система вновь перейдет из более вероятного в менее вероятное состояние. Разумеется, такая необратимость является лишь кажущейся, так как если бы у нас было достаточно много времени, мы могли бы видеть, как система вновь и вновь входит в менее вероятные состояния и выходит из них.

Гениальная идея Больцмана заключалась в том, что необратимость тепловых явлений имеет как раз такой характер, как необратимость перехода шарика с черного поля на белое в описанном выше примере. Однако тепловые явления отличаются еще и тем свойством, что вследствие огромности числа атомов, из которых состоят обычные макроскопические тела, мы еще менее можем надеяться наблюдать обращение таких процессов, как переход тепла от горячего тела к холодному, расширение газа в пустоту и т. д., чем в случае шарика и платформы, рассмотренном только что.

Обратимся вновь к изображенному на рисунке 1 сосуду. Очевидно, что в случае равенства объемов частей *I* и *II* каждая молекула газа будет в среднем пребывать одинаковое время и в той, и в другой части, т. е. вероятность пребывания данной молекулы в части *I* или в части *II* составляет ровно 1/2. Пусть в нашем сосуде находятся четыре молекулы. Как могут распределяться эти молекулы по объему сосуда? На рисунке 2 приведены все 16 возможных комбинаций. Все эти комбинации равновероятны: если мы следим за нашим сосудом в течение промежутка времени T, то из этого промежутка времени на каждую комбинацию приходится по $\frac{1}{16}T$, если только этот промежуток настолько велик, чтобы такое уравнивание успело произойти. Из всех наших комбинаций только одна соответствует случаю, когда все молекулы собрались в части *I* — комбинация *1*; четыре комбинации соответствуют случаю, когда в части *I* собрались три молекулы, а в части *II* находится одна молекула (комбинации *2*, *3*, *5*, *9*); шесть соответствуют тому случаю, когда имеются две молекулы в части *I* и две — в части *II* (комбинации *4*, *6*, *7*, *10*, *11*, *13*); четыре — тому случаю, когда в части *I* одна молекула, а в части *II* их три (комбинации *8*, *12*, *14*, *15*); и наконец, всего лишь в одной комбинации *16* все молекулы находятся в части *II*. Отсюда видно, что наиболее вероятным является равномерное распределение молекул (шесть комбинаций из 16). Вероятность такого распределения равна $\frac{1}{16}\cdot 6$, т. е. $37^1/_2\%$, в то время как вероятность исходного состояния (которое было в тот момент, когда заслонка была уже поднята, но молекулы еще не успели выйти из части *I*) равна всего лишь $\frac{1}{16}$, т. е. $6^1/_4\%$.

Если мы имеем в нашем сосуде всего N молекул, то общее число возможных комбинаций будет равно 2^N; число же тех из них, в которых часть *I* содержит x молекул, а часть *II* — остальные $N-x$, равно, как показывает элементарная алгебра, числу $\frac{N!}{x!\,(N-x)!}$ *). Поэтому вероятность такого состояния газа, в котором часть *I* содержит x молекул, равна $\frac{N!}{x!\,(N-x)!}\,\frac{1}{2^N}$. Вероятность же исходного состояния равна всего лишь $\frac{1}{2^N}$. Нетрудно видеть, что число $\frac{N!}{x!\,(N-x)!\,2^N}$ тем больше, чем ближе x к $\frac{N}{2}$. Поэтому после того как заслонка поднята, газ перейдет в наиболее вероятное состояние — в такое состояние, в котором его молекулы распределены между обеими частями сосуда поровну. Однако, если мы будем ждать достаточно долго, в конце концов должна появиться и такая комбинация, которая соответствует скоплению всех N молекул в части *I*; после этого мы могли бы вновь опустить заслонку и объявить, что обращение «необратимого» процесса расширения газа в пустоту произошло. Весь вопрос только в том, как долго для этого нужно ждать. Если, например, $N = 10^{20}$, то для того чтобы за время наблюдения суммарное время пребывания всех N молекул сразу в части *I* составляло всего лишь



---

*) Напомним, что символ $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ (так называемый «эн-факториал»).

0,001 секунды, необходимо, чтобы весь промежуток времени, в течение которого мы производим наблюдение над газом, равнялся $0{,}001\cdot 2^N = 0{,}001\cdot 2^{(10^{20})}$ секунд.

Вот какой промежуток времени нам нужно ждать, чтобы можно было надеяться на то, что мы сумеем наблюдать обращение «необратимого» расширения газа в пустоту. Этот промежуток времени, записанный в секундах, выражается числом с тридцатью миллиардами миллиардов цифр перед запятой. Если мы захотим выразить этот промежуток времени не в секундах, а взяв в качестве единицы времени 10^{13} лет (такова, приблизительно, по мнению многих астрономов продолжительность существования нашей звездной системы и Млечного Пути), то нам придется уменьшить число знаков на 20 (1 год $\approx 3\cdot 10^7$ секунд). Но число 20 ничтожно по сравнению с $3\cdot 10^{19}$. Поэтому в этих новых «астрономических» единицах времени мы сможем сказать об интересующем нас промежутке времени то же самое, как если бы он был выражен в секундах, а именно, что он пишется числом, в котором есть тридцать миллиардов миллиардов знаков перед запятой. Итак, рассматриваемый промежуток времени, в течение которого мы должны ждать, чтобы увидеть обращение процесса расширения газа в пустоту, настолько огромен, что в сравнении с ним становится совершенно несущественным и ничтожным различие между одной секундой и продолжительностью существования нашей звездной системы! Практическая необратимость, о которой шла речь выше, поэтому становится ничем не отличимой от принципиальной необратимости, а следовательно, необратимость тепловых явлений оказывается прямым следствием их механики и нисколько не противоречит ей, как думали физики до Больцмана.

Мы можем утверждать поэтому, что тепловые явления *всегда* происходят таким образом, что вероятность состояния возрастает; обращение тепловых явлений, связанное с уменьшением вероятности состояния, невозможно. Этот принцип носит название *второго начала термодинамики* (первым началом, как мы уже говорили, называется закон сохранения энергии).

Обратимся к рассмотренному нами примеру с газом в сосуде. Мы сможем отличать различные состояния друг от друга числом x, т. е. числом молекул в части I. Вероятность состояния с заданным x, как мы видели, равна

$$\frac{N!}{x!\,(N-x)!\,2^N}.$$

Так как нас интересует лишь отношение вероятностей различных состояний, то мы сможем сократить все вероятности на один и тот же множитель $\frac{N!}{2^N}$, не содержащий x и потому одинаковый для всех состояний. Остается выражение

$$\frac{1}{x!\,(N-x)!},$$

которое пропорционально вероятности состояния; оно носит название *статистического веса* данного состояния. Второе начало термодинамики можно формулировать и так: все тепловые явления в замкнутой системе происходят таким образом, что статистический вес состояния при этом возрастает. Если рассматриваемый сосуд с газом разделен не на две, а на большее число равных частей, выражение для статистического веса можно писать аналогичным образом. Например, если сосуд разделен на три части и в первой из них имеется x, во второй y, в третьей — z молекул ($x+y+z=N$), то статистический вес такого состояния равен

$$\frac{1}{x!\,y!\,z!}.$$

Если сосуд разделен на $n+m$ равных частей, в которых имеется x_1, x_2, …, x_n, y_1, y_2, …, y_m молекул, то статистический вес равен

$$\frac{1}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_n!\,y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_m!}.$$

Пусть первые n из этих частей образуют вместе то, что мы будем называть частью I, остальные же m частей образуют часть II (части I и II уже не равны друг другу). Тогда статистический вес части I, рассматриваемой как отдельная система, равен

$$\frac{1}{x_1!\,x_2!\,\ldots\,x_n!},$$

статистический же вес части *II* равен

$$\frac{1}{y_1!\,y_2!\,\ldots\,y_m!}.$$

Отсюда видно, что статистический вес всего газа равен произведению статистических весов его частей *I* и *II*. А так как логарифм произведения равен сумме логарифмов отдельных множителей, то, следовательно, логарифм статистического веса всего газа равен сумме логарифмов статистических весов его частей, т. е. логарифм статистического веса обладает свойством аддитивности. Благодаря такому простому и важному свойству логарифм статистического веса получил специальное название — его называют *энтропией*. Так как логарифм числа тем больше, чем больше само число, то вместе с возрастанием вероятности и статистического веса должна возрастать и энтропия. Поэтому второе начало термодинамики можно формулировать и так: существует физическая величина, называемая энтропией, которая обладает свойством аддитивности и тем свойством, что энтропия замкнутой системы никак не может уменьшаться, а может только возрастать или оставаться постоянной (когда она уже достигла максимума). Заметим, что в этой формулировке второе начало термодинамики было известно из опытов с тепловыми явлениями задолго до того, как Больцман (около семидесятых годов прошлого столетия) открыл истинный смысл энтропии как логарифма величины, пропорциональной вероятности состояния. Первые весьма несовершенные указания на второе начало термодинамики можно найти в работе французского физика Сади Карно (1824 г.), а проведенная только что формулировка была отчетливо высказана Клаузисом (1850 г.) и Вильямом Томсоном (впоследствии лордом Кельвином) (1851 г.) Больцман доказал на примере газов, что второе начало термодинамики вместе с характерной для него необратимостью является следствием механики, а американский теоретик Уиллард Гиббс сумел обобщить это доказательство на любые макроскопические тела, построив механическую теорию систем, состоящих из огромного числа частиц (так называемую *статистическую механику*).

Второе начало термодинамики, как мы видим, гласит, что энтропия замкнутой системы неизменно возрастает, стремясь к максимуму; достигнув этого максимума, она дальше изменяться уже не сможет, вследствие чего тепловые явления, связанные с возрастанием энтропии, перестанут происходить. Такое состояние системы, в котором энтропия достигла максимального значения, носит название *статистического равновесия*. Переход системы без всякого вмешательства извне из состояния статистического равновесия в состояние, очень сильно от него отличающееся, как мы видели, практически невозможен, так как для того, чтобы он осуществился, нужно ждать поистине чудовищные промежутки времени. Это, впрочем, не относится к переходам из состояния статистического равновесия в состояния, которые от него отличаются очень мало, т. е. в состояния, в которых энтропия на совсем ничтожную величину меньше своего максимального значения. В такие состояния система будет сама собой переходить совершенно свободно, что является чрезвычайно характерным для второго начала термодинамики как для закона, имеющего статистический смысл (статистическим называется каждый закон, отступления от которого не абсолютно невозможны, но лишь чрезвычайно мало вероятны). Так как такие отступления тем менее вероятны, чем они больше, то большие отступления от второго начала термодинамики будут на практике почти абсолютно невозможны; что же касается малых отступлений, то всегда можно найти столь малые, что они будут не только довольно вероятны, но даже будут на самом деле почти всегда происходить. Подобные небольшие отклонения от состояния статистического равновесия к всевозможным очень близким неравновесным состояниям, происходящие в равновесной макроскопической системе, получили название *флуктуаций*. Существование флуктуаций является наилучшей иллюстрацией правильности статистических идей Больцмана. Флуктуацией, которую всего легче и проще наблюдать, является броуновское движение, смысл которого заключается в следующем. Количество и средняя сила *) ударов молекул жидкости в единицу поверхности любого погруженного в жидкость тела являются в состоянии статистического равновесия вполне определенными (при данной температуре жидкости) величинами. Однако в действительности эти величины постоянно испытывают небольшие колебания, связанные с отступлениями от статистического равновесия. Эти колебания так малы, что их в состоянии обнаружить лишь весьма малая частица, помещенная в жидкость; тело сколь-нибудь больших размеров нечувствительно к этим колебаниям. В 1827 г. английский ботаник Броун открыл, что микроскопические частицы, взвешенные в в жидкости, дергаются во всевозможные стороны чрезвычайно беспорядочным и хаотическим образом; эта «пляска дикарей» объясняется тем, что в каждый данный момент количество и средняя сила ударов, испытываемых частицей со стороны молекул, распределяются по ее поверхности неравномерно, и частица устремляется туда, где ее бьют не так часто и не так сильно. Но распределение ударов по поверхности частицы все время меняется, поэтому она и мечется во все стороны как сумасшедшая. Явление это исследовалось многими физиками, в особенности Гуи и Перреном; все предсказания статистической механики блестяще оправдываются при сравнении их с этими опытами. На различных других флуктуационных явлениях мы здесь останавливаться не будем.

---

*) Средний импульс, передаваемый за единицу времени

Задачи наших читателей

1. Для некоторой функции f при всех x верно соотношение

$$f(x)=f(x-a)\cdot f(x+a),$$

где a — некоторое фиксированное число. Доказать, что

а) функция f периодическая;

б) $f(x-5a)\cdot f(x+5a)=f(x-7a)\cdot f(x+7a)$;

в) найти период функции f.

О. Светозерский
(г. Владивосток, 8 класс)

2. Выпишем все простые числа, умноженные (каждое) на некоторое фиксированное натуральное число, одно за другим. Доказать, что в полученной последовательности цифр каждая цифра от 0 до 9 будет встречаться бесконечное число раз.

В. Соболев
(г. Москва, 10 класс)

3. Доказать, что если x_0 является общим корнем квадратных трехчленов $a_1x^2+b_1x+c_1$ и $a_2x^2+b_2x+c_2$, D_1 и D_2 — их дискриминанты ($D_2\neq 0$), то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}=\pm\frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2}},$$

причем знак «плюс» берется, если x_0 — больший корень каждого трехчлена или меньший корень каждого трехчлена, а знак «минус» — если x_0 является большим корнем одного трехчлена и меньшим — другого.

И. Васильева
(г. Новочеркасск, 10 класс)

4. Куб первого двузначного числа равен квадрату второго двузначного числа. Второе число в n раз ($n\in \mathbf{N}$) больше первого. Найдите эти двузначные числа.

И. Михалкович
(Минская обл.)

5. В шахматном турнире по круговой системе (т. е. каждый шахматист играет со всеми остальными по одному разу) при подведении итогов оказалось, что количества очков, набранных участниками, образуют арифметическую прогрессию. Сколько очков у чемпиона турнира, если «аутсайдер» набрал $2\frac{1}{2}$ очка?

Р. Винокур
(г. Москва)

6. Существует ли четырехзначное число $\overline{abcd}$ такое, что

а) $\overline{abcd}=\overline{ac}\cdot\overline{bd}$;

б) $\overline{abcd}=\overline{ac}\cdot\overline{bd}+\overline{ac}+\overline{bd}$?

Г. Гольдфайн
(г. Рига)

7. Найти четырехзначное число $\overline{abcd}$, удовлетворяющее равенству

$$\overline{abcd}=8\overline{ab}\cdot(c+d).$$

М. Штеренберг
(г. Саратов)

8. Найти три различные цифры a, b и c такие, что $\overline{abc}=\overline{ba}\cdot\overline{bc}$.

Э. Туркевич
(г. Черновцы)

Я. Гегузин

Пузырьковая модель кристалла

Слово о моделировании

На трудном пути познания экспериментального факта или теоретического положения почти все испытывают потребность в образе, в зримой картинке, в упрощенной модели. Быть может, это преувеличение, но кажется, что один из основных компонентов таланта и ученого и педагога состоит в умении придумывать образы, аналогии и модели, способные разъяснить физическое явление и углубить его понимание.

Какой обязана быть модель? Что модель должна уметь? Что у нее можно просить и что от нее дóлжно требовать? Просить можно о помощи и требовать дóлжно отсутствия фальши, наличия хотя бы доли правды, относящейся к излагаемому явлению. В жизни к полуправде мы относимся презрительно, а по отношению к модели «полуправда» — высокая похвала. И конечно, модель должна быть наглядной, понятной без утомительных комментариев. Лучше всего, если вообще комментарии излишни, если наглядность настолько очевидна, что почти обретает доказательную силу.

Физике известно много выразительных и красивых моделей, физике твердого тела — особенно. В этой статье будет рассказано об одной «живой» модели, великолепно иллюстрирующей (передающей, отражающей) структуру реального кристалла, имеющиеся в нем дефекты, их сложные взаимодействия. Модель эта не нова. Она была придумана выдающимся английским физиком Л. Бреггом еще в начале 40-х годов, а затем осуществлена им и его сотрудниками В. Ломером и Д. Наем. Так мы ее и будем называть: модель БЛН (Брегга — Ломера — Ная).

Что мы хотим моделировать?

Ответ четкий: реальный кристалл. Что значит «реальный кристалл»? Это значит — совокупность огромного числа одинаковых атомов или молекул, которые расположены в строгом порядке, образуя кристаллическую решетку. В некоторых местах строгий порядок может нарушаться, и эти нарушения означают наличие дефектов в кристалле. И еще одна очень важная характеристика: образующие кристалл атомы между собой взаимодействуют. О том, как взаимодействуют, — немного позже, а здесь — лишь бесспорное утверждение: взаимодействуют! Потому что, если бы не взаимодействовали, был бы не кристалл; а груда беспорядочно нагроможденных атомов. Поддержание в кристалле порядка — прямое следствие взаимодействия между образующими его атомами.

Очень распространена так называемая мертвая модель кристалла. Она устроена так: деревянные или глиняные шарики, соединенные друг с другом ровными проволочками. Шарики — атомы, проволочки — символы связей между атомами, их «замороженного» взаимодействия. Замороженность взаимодействия и делает модель мертвой.

В этой модели атомы разного сорта — шарики различных размеров и цвета, разные расстояния между атомами — проволочки различной длины. Это разумная и очень полезная модель кристалла. Рассказывая о кристалле далеко не всю правду, она говорит о нем только правду, не фальшивит. В ней нет никаких видов движения атомов в кристалле, зато очень четко отражен порядок в их расположении. Мертвая модель кристалла — великолепный помощник, когда надо зримо представить себе пространственное расположение атомов или, например, те направления в кристалле, в которых он деформируется или проводит электрический ток легче, чем в других. Она незаменима, если нужно, пользуясь данными опытов и так называемыми общими соображениями, представить себе возможное расположение атомов в еще не изученном кристалле. Именно такое моделирование — шарики и проволочки — помогло сделать одно из самых крупных открытий XX века — установить структуру молекулы ДНК. Немалая заслуга мертвой модели!

Мы, однако, хотим моделировать не «мертвый», а «живой» кристалл. Для этого, очевидно, надо научиться моделировать взаимодействие между атомами в кристалле, оживлять замороженное в проволочках взаимодействие.

Взаимодействие между атомами в кристалле

Одна, пожалуй, самая важная, характеристика этого взаимодействия непосредственно следует из простейшего факта: расстояние между двумя соседними атомами в реальном кристалле при постоянной температуре имеет вполне определенное значение. (Речь идет, разумеется, о расстоянии между положениями, около которых атомы совершают тепловые колебания. Амплитуда этих колебаний значительно меньше расстояния между атомами.)

Определенное расстояние — это означает, что если мы попытаемся его увеличить, атомы, противясь этому, будут притягиваться друг к другу, а если мы попытаемся его уменьшить,— отталкиваться. Итак, только из факта наличия определенного расстояния между атомами следует, что взаимодействие между ними носит черты и притяжения, и отталкивания одновременно.

При некотором расстоянии между атомами (его мы и назвали определенным) силы притяжения и отталкивания оказываются равными по абсолютной величине. На этом расстоянии и расположены атомы в решетке.

Хорошо бы придумать такой прием моделирования, который передавал бы конкуренцию сил притяжения и отталкивания. Иначе говоря, «оживлял» бы взаимодействие между атомами в кристалле. Именно это и сделали авторы модели БЛН! В качестве строительных элементов в этой модели использованы не глиняные и не деревянные шарики, а ... маленькие мыльные пузырьки.

Взаимодействие мыльных пузырьков на воде

Они не безучастны друг к другу: два разобщенных мыльных пузырька на поверхности воды друг к другу притягиваются, а соприкоснувшись, отталкиваются друг от друга. Это можно наблюдать в очень простом опыте, который доступен любому читателю «Кванта». Вот этот опыт.

Вначале раздобудем необходимое «оборудование»: тарелку, медицинскую иглу от шприца, волейбольную камеру и зажим с регулируемым поджатием, с помощью которого можно было бы с различной силой сжимать резиновую трубку — отросток волейбольной камеры. Теперь подготовим опыт. Тарелку почти доверху заполним мыльной водой и добавим в нее несколько капель глицерина. Это для того, чтобы пузырьки, которые мы будем выдувать на поверхности мыльной воды, получались устойчивыми. Надуем волейбольную камеру, зажмем ее отросток и вставим в него иглу от шприца (разумеется, тупым концом). Опустим свободный конец иглы под воду (неглубоко) и немного ослабим зажим (рис. 1) — из иглы одна за другой начнут выходить строго одинаковые порции воздуха, которые будут превращаться в

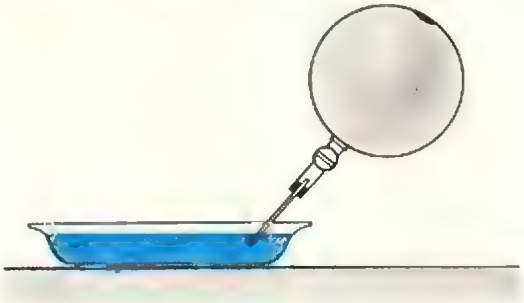


Рис. 1.

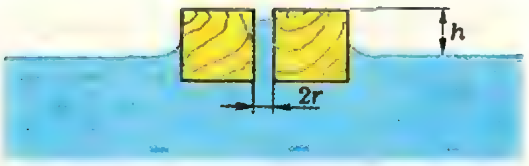


Рис. 2.

одинаковые мыльные пузырьки. Много пузырьков нам понадобится позже, а для первого опыта надо ухитриться создать всего два пузырька на некотором расстоянии друг от друга. Если сразу не получится — получится после пятой попытки! Удобно этот опыт проводить с пузырьками, диаметр которых 1—2 мм.

Пузырьки созданы, теперь можно за ними наблюдать. Сначала очень медленно, а затем ускоряясь (без нашего вмешательства), пузырьки будут двигаться навстречу друг другу. Столкнувшись, они соприкоснутся не в точке, а как бы вдавятся один в другой. При этом несколько по-разному будут себя вести два одинаковых и два различных по размеру пузырька. Понаблюдайте!

Попытаемся понять происхождение силы, которая заставляет пузырьки самопроизвольно сближаться. Несколько удобнее сделать это, рассматривая не два мыльных пузырька, а две спички, параллельно лежащие на поверхности воды. И пузырьки, и спички смачиваются водой, на которой они плавают, поэтому общий характер взаимодействия для тех и других один и тот же. Удобство такой замены в том, что два плавающих пузырька, находясь близко один от другого, образуют вместе с жидкостью очень сложную поверхность, а спички — гораздо более простую (рис. 2). Сила, сближающая две плавающие спички, возникает вот как. Вода смачивает спички, поэтому ее поверхность возле спички искривляется. Кривизна поверхности приводит к появлению сил, действующих на жидкость под поверхностью. Это — силы, обусловленные поверхностным натяжением, направленные в нашем случае вертикально вверх (будем считать, что смачивание полное). Под действием этих сил жидкость поднимается по стенкам спичек, причем поднятие гораздо заметнее в области между спичками (см. рис. 2). Здесь жидкость оказывается как бы растянутой, давление в ней понижается по сравнению с атмосферным давлением на величину добавочного давления $\Delta p = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения, d — расстояние между спичками, $r = d/2$ — радиус кривизны поверхности жидкости *). Следовательно, и сила давления жидкости на спички в области между спичками меньше по абсолютной величине силы атмосферного давления, действующей на спички снаружи. Таким образом, абсолютная величина силы, сближающей спички, равна

$$\left|\vec{F}\right| = \Delta p S = \frac{2\sigma}{d} hl = \frac{4\sigma^2 l}{\rho\left|\vec{g}\right| d^2} \sim \frac{1}{d^2}.$$

Предскажем любопытное явление: так как сила $|\vec{F}| \sim 1/d^2$, спички, находящиеся в вязкой среде, будут сближаться со скоростью, увеличивающейся с уменьшением расстояния между ними.

И не только спички. Пузырьки тоже сближаются ускоряясь (рис. 3). В нашей лаборатории сближение пу-

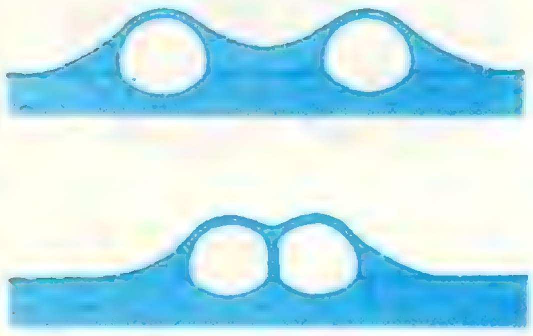


Рис. 3.

---

*) Из условия равновесия столбика жидкости между спичками следует, что добавочное давление Δp равно гидростатическому давлению $\rho|\vec{g}|h$. Высоту поднятия h жидкости легко найти из равенства абсолютных величин сил тяжести $m\vec{g}$ и поверхностного натяжения $\vec{F}$: $m|\vec{g}| = |\vec{F}|$, или $\rho d l h|\vec{g}| = \sigma 2l$ (l — длина спички). Отсюда $\Delta p = \rho|\vec{g}|h = \frac{2\sigma}{d} = \frac{\sigma}{r}$.

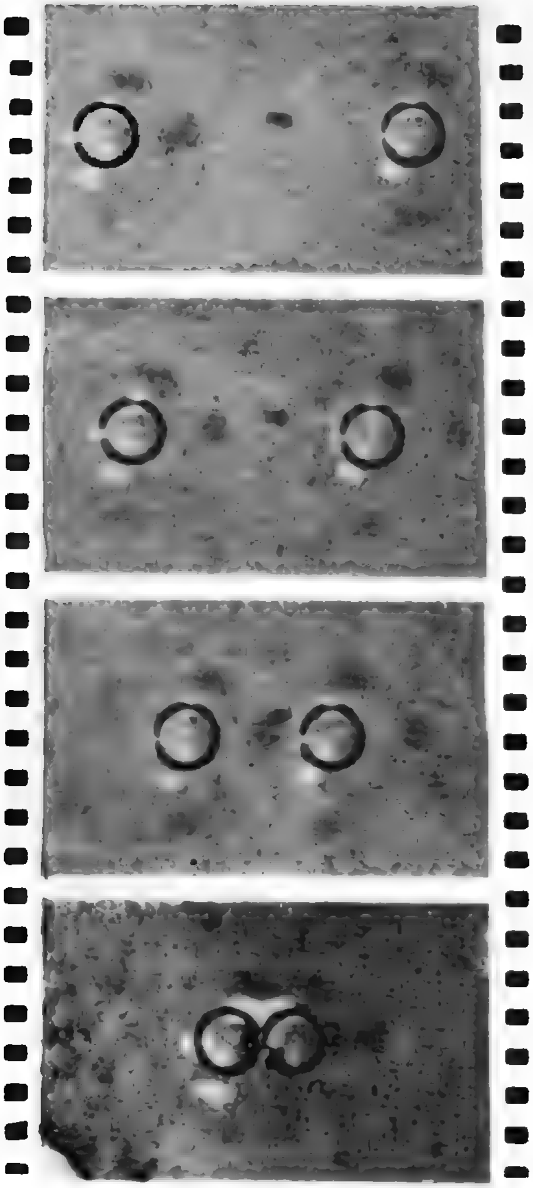


Рис. 4.

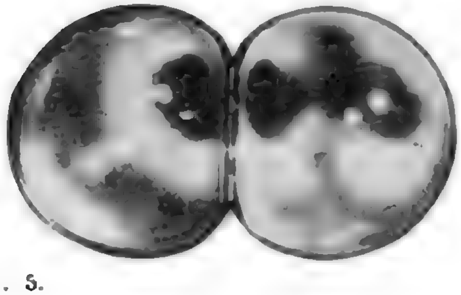


Рис. 5.

зырьков мы наблюдали так. Над кюветой с мыльным раствором и пузырьками расположили кинокамеру и, когда пузырьки начали сближаться, включили ее (рис. 4).

Сближение пузырьков можно проследить вплоть до их столкновения. После того как пузырьки столкнулись, между ними начинает действовать сила отталкивания. Она обусловлена тем, что во взаимно вдавливающихся пузырьках (рис. 5) увеличивается давление газа, которое как бы расталкивает пузырьки.

Видимо, мыльные пузырьки вполне подходят для создания модели кристалла, если на поверхности мыльного раствора поселить не один, не два, а множество одинаковых пузырьков. Если радиус пузырька $R=5\cdot10^{-2}$ см, то на поверхности мыльного раствора в обыкновенной тарелке, радиус которой $R_т=10$ см, можно поселить $N\sim(R_т/R)^2\sim4\cdot10^4$ пузырьков! Такой плот, составленный из пузырьков, между которыми действуют силы притяжения и отталкивания, — двумерная модель кристалла. Например, авторы этой очень красивой модели показали, что взаимодействие пузырьков, радиус которых $R\sim10^{-1}$ см, очень похоже на взаимодействие атомов в кристалле меди.

Модель в действии

Хорошо бы всем читателям «Кванта» показать кинофильм, в котором заснята модель БЛН в действии. Они увидели бы и идеальный кристалл, и кристалл с движущимися и взаимодействующими дефектами, и множество простых и сложных процессов, которые происходят в реальном кристалле. В статье можно лишь кое о чем рассказать и кое-что проиллюстрировать фотографиями и кинограммами.

С помощью модели БЛН оказалось возможным проверить некоторые следствия теории, построенной применительно к кристаллу, абсолютно свободному от каких-либо дефектов, так называемому идеальному кристаллу. Получить такой кристалл в натуре экспериментатор практически не может, а вот построить его из пузырьков оказалось просто и доступно (рис. 6).

Один из самых распространенных дефектов в кристаллах — это пустая позиция в узле решетки, незамещен-

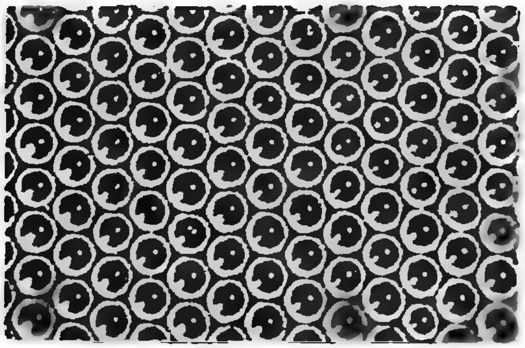


Рис. 6.

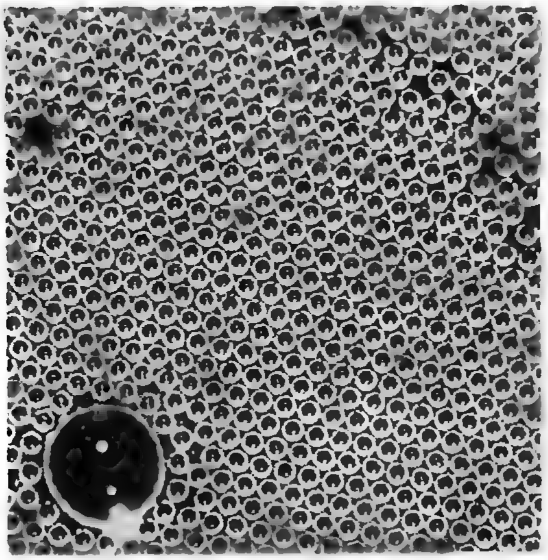


Рис. 7.

ная атомом. Физики называют ее вакансией. В модели БЛН вакансия— это один лопнувший пузырек (рис. 7). В полном согласии со здравым смыслом и результатами опытов с реальными кристаллами модель БЛН свидетельствует о том, что объем одной вакансии немного меньше объема, приходящегося на занятую позицию. Действительно, после того как пузырек лопнул, его бывшие соседи немного переместятся в образовавшуюся пустоту и уменьшат ее. Невооруженным глазом это увидеть почти невозможно, но если спроектировать кино- или фотопленку на экран и тщательно промерить расстояния между пузырьками, можно убедиться, что по сравнению с занятой позицией вакансия немного сжата. Для физиков это свидетельство модели БЛН не просто качественная иллюстрация, оно имеет и количественную ценность.

Очень часто в кристалле, вследствие его предыстории, оказывается постороннее включение, деформирующее кристалл. При решении многих задач физики кристаллов очень важно знать, как при этом смещаются атомы, окружающие включение. Оказывается, присутствие инородного включения чувствуют не только непосредственные соседи, но и атомы, расположенные от включения на значительном расстоянии. Модель БЛН это отчетливо иллюстрирует (см. рис. 7).

Большинство кристаллических тел являются поликристаллами. Это значит, что они состоят из множества произвольно ориентированных кристалликов, разделенных границами. Почти очевидно, что многие свойства поликристаллов (такие как механическая прочность или сопротивление электрическому току) должны зависеть от структуры границ. Модель БЛН и в этом вопросе оказалась очень полезной: подсказала кристаллофизикам, как изменяется структура границы в зависимости от взаимной ориентации граничащих кристалликов, от наличия примесей, расположенных на границе, и многое другое. Вот несколько примеров.

В поликристаллах может происходить процесс укрупнения одних участков (зерен) за счет других, в результате чего средний размер зерна увеличивается. Называется этот процесс рекристаллизацией и происходит он по причине очевидной: чем больше размер зерен, тем меньше суммарная поверхность границ, а значит, меньше и избыточная энергия, которая с границами связана. Энергия поликристалла при рекристаллизации уменьшается, следовательно, этот процесс может происходить самопроизвольно (поскольку приближает состояние устойчивого равновесия, в котором запас энергии минимален). На рисунке 8 приведена кинограмма, иллюстрирующая последовательные этапы «поедания» крупным зерном расположенного в нем мелкого зерна.

Оказывается (это предсказали теоретики и тщательно изучили экспериментаторы в опытах с реальными кристаллами), движущаяся граница между зернами «заглатывает» те вакансии которые ей встречаются по

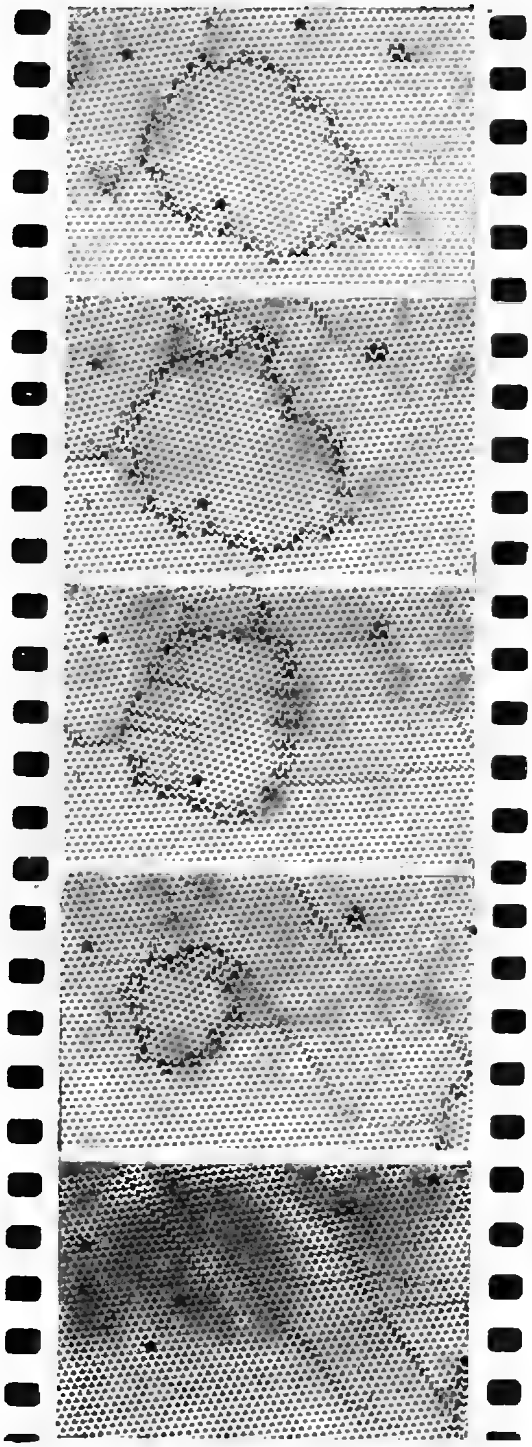


Рис. 8.

пути. При этом граница не изменяет своего строения. Модель БЛН это явление отлично иллюстрирует (рис. 9).

Ограниченность и «полуправда» модели БЛН

Допуская, что читатель проникся и уважением, и доверием к модели

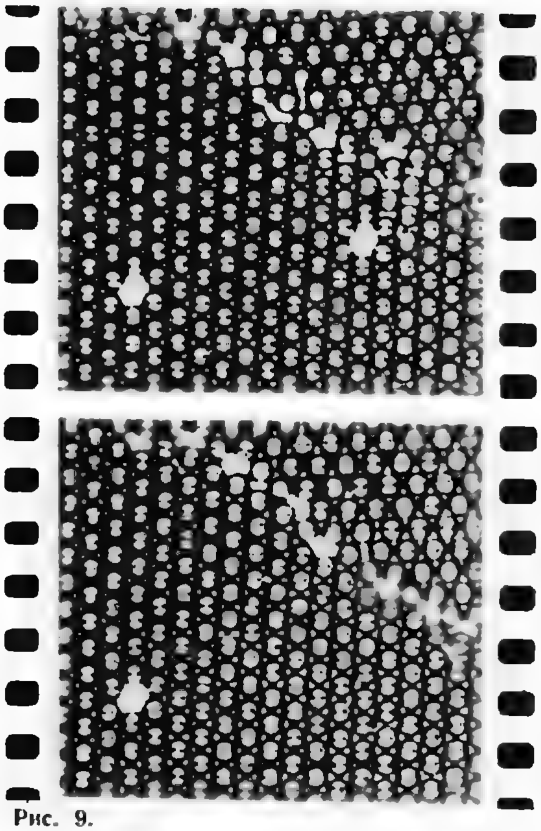


Рис. 9.

БЛН, придется его немного охладить, обратив внимание и на ограниченность модели, и на заключенную в ней «полуправду».

Модель БЛН способна моделировать лишь одну структуру: двумерную гексагональную плотноупакованную. А истинные кристаллы имеют множество структур. Возможности «мертвой» модели неизмерно богаче: в трехмерном пространстве шарики можно располагать несметным числом способов и, следовательно, можно моделировать любую мыслимую структуру. Кроме того, модель БЛН в своем современном варианте — двумерна. Ее авторы пытались осуществить и пространственную (многослойную) пузырьковую модель, но экспериментировать с ней оказалось совсем не просто, и модель не привилась. В нашей лаборатории мы осуществили и двумерную, и трехмерную модели БЛН и убедились, что трехмерная практически нежизнеспособна.

Не будем упрекать модель в ее слабостях, о которых упомянули и о которых умолчали. Будем ей благодарны за ее сильные стороны.

Л. Софман

Суммы длин и минимум энергии

> *Математические задачи часто внушаются природой или, вернее, нашей интерпретацией природы, физическими науками. Решение математической задачи также может внушаться природой; физика обеспечивает нас ключами, которыми мы, будучи предоставлены самим себе, имели бы очень мало шансов себя обеспечить.*
>
> Д. Пойа

В этой заметке мы рассмотрим несколько известных геометрических задач. Мы покажем, как они решаются с помощью простого механического принципа — *принципа минимума потенциальной энергии*, согласно которому *всякая механическая система в положении устойчивого равновесия обладает минимальной потенциальной энергией*.

Задача 1. *На плоскости даны прямая l и точки A и B, лежащие по одну сторону от l. Найти такую точку $X \in l$, чтобы длина ломаной AXB была минимальной.*

Обычно эта задача решается с помощью симметрии: если B' — точка, симметричная B относительно прямой l, то искомая точка $X = l \cap [AB']$ (рис. 1). Таким образом, отрезки AX и BX образуют с l равные углы: $\alpha = \beta$.

Рассмотрим теперь такую механическую задачу. Невесомое кольцо X может скользить без трения по горизонтальному стержню l. К X прикреплены две нити, перекинутые через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных в вертикальной плоскости в точках A и B (рис. 2). К свободным концам нитей C_1 и C_2 прикреплены грузы одинаковых масс. (Нити невесомы и нерастяжимы, блоки вращаются без трения, размеры блоков и кольца X так малы, что их можно рассматривать как материальные точки.) Требуется найти положение кольца X на стержне l, при котором вся механическая система находится в равновесии.

Покажем, что эта механическая задача в некотором смысле эквивалентна нашей геометрической задаче. Действительно, в положении равновесия потенциальная энергия механической системы минимальна; поэтому в положении равновесия грузы должны висеть совместно как можно ниже, т. е. сумма их расстояний от данного горизонтального уровня (поверхности земли) должна быть минимальной (грузы одинаковы!). Следовательно, сумма длин $|AC_1|$ и $|BC_2|$ должна быть максимальной. Так как длина каждой нити постоянна, сумма $|AX| + |BX|$ должна быть минимальной. Итак, механическая за-

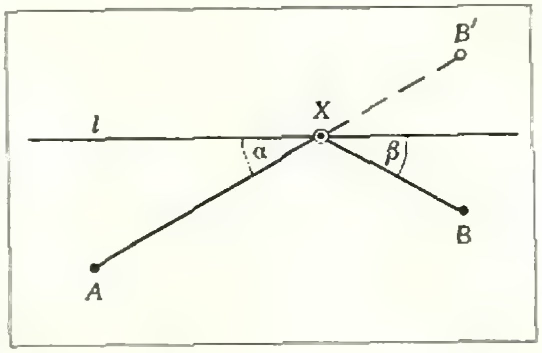


Рис. 1.

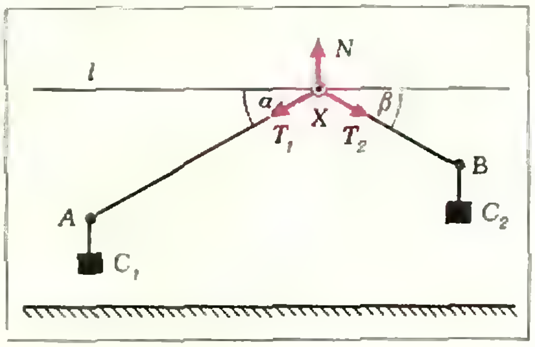


Рис. 2.

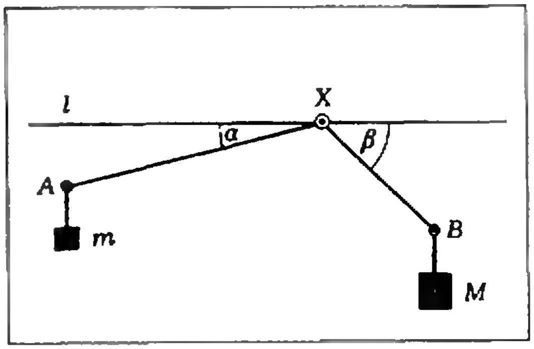


Рис. 3.

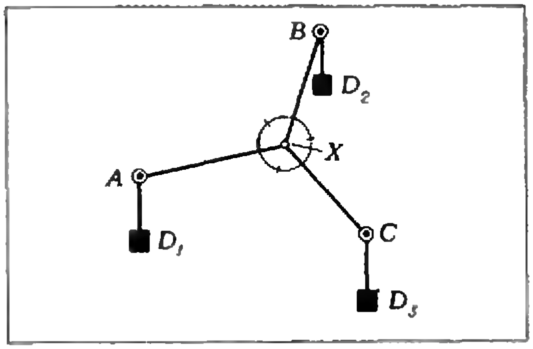


Рис. 4.

дача в самом деле оказалась тождественной с геометрической задачей 1.

Решим поставленную механическую задачу, не используя энергетических соображений. В положении равновесия механической системы сумма сил, действующих на кольцо X, равна нулю. На X действуют силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ ($|\vec{T}_1|=|\vec{T}_2|$ — грузы натягивают каждый свою нить с равной силой, и эти силы передаются блоками без потерь на трение) и сила $\vec{N}$ реакции стержня (см. рис. 2). Поскольку $\vec{N}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=\vec{0}$ и $\vec{N}\perp l$, в проекции на l $|\vec{T}_1|\cdot\cos\alpha=|\vec{T}_2|\cdot\cos\beta$, откуда $\alpha=\beta$. Мы получили тот же результат, что и с помощью приведенного выше геометрического решения.

Изменим немного механическую задачу: допустим, что к свободным концам нитей подвешены разные грузы (масс m и M соответственно). Тогда условие равновесия $\vec{N}+\vec{T}_1+\vec{T}_2=\vec{0}$ в проекции на l дает соотношение $m\cos\alpha=M\cos\beta$, т. е. кольцо X займет такое положение, что привязанные к нему нити образуют со стержнем углы α и β, определяемые из условия $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{M}{m}$ (рис. 3). Используя принцип минимума потенциальной энергии, нетрудно показать, что соответствующая механическая задача тождественна такой геометрической.

Задача 2. *Найти на прямой l точку X, для которой величина $m\cdot|AX|+M\cdot|BX|$ достигает минимального значения; A и B — фиксированные на плоскости точки, M и m — данные положительные числа.*

Следующая задача была впервые сформулирована в начале XIX века немецким геометром Якобом Штейнером. Вот ее условие.

Задача 3. *На плоскости даны три точки (A, B и C). Найти четвертую точку (X) так, чтобы сумма ее расстояний от этих трех точек была минимальной.*

Мы приведем решение этой задачи, использующее механику, для случая, когда заданные точки A, B и C образуют треугольник, все углы которого меньше 120° (это предположение станет понятным ниже). Рассмотрим такую механическую систему. Три нити XAD_1, XBD_2 и XCD_3, соединенные в общем конце X, перекинуты через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных на вертикальной стене в точках A, B и C. К концам D_i ($i=1, 2, 3$) подвешены одинаковые грузы (рис. 4). (Нити нерастяжимы и невесомы, блоки рассматриваются как материальные точки, трение в блоках отсутствует.) Требуется найти точку X так, чтобы описанная механическая система находилась в положении равновесия.

Как и в задаче 1, легко показать, что эта механическая задача эквивалентна задаче 3. В самом деле, в положении равновесия потенциальная энергия механической системы должна быть минимальной; поэтому сумма расстояний от грузов до поверхности земли должна быть минимальной, т. е. сумма длин $|AD_1|$, $|BD_2|$ и $|CD_3|$ должна быть максимальной, и, поскольку нити нерастяжимы, — сумма $|AX|+|BX|+|CX|$ — минимальной.

С другой стороны, в положении равновесия сумма сил, действующих в точке X, равна нулю. В X действуют три равные по абсолютной величине силы натяжения нитей $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$ (равные грузы одинаково натягивают каждый свою нить): $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3|$, и $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}_3=\vec{0}$. Из этих двух условий получаем, что эти силы должны быть одинаково наклонены друг к другу, так что в положении равновесия нашей механической системы угол между любыми двумя из трех нитей с общим концом X должен быть равен 120°. Поэтому ответ в задаче 3 (при условии, что в треугольнике ABC все углы меньше 120°!) следующий: точка X — это такая точка, из которой все стороны треугольника ABC видны под углом в 120°.

(В случае, когда точки A, B и C образуют треугольник, у которого один из углов $\geqslant 120°$, точка X совпадает с одной из точек A, B или C (вершиной «большого» угла). Продумайте этот ответ и постарайтесь его объяснить.)

Механическая интерпретация геометрических задач особенно полезна в тех случаях, когда чисто геометрические методы решения не дают желаемых результатов.

Задача 4. *На разных берегах реки расположено пять населенных пунктов A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 (A_1, A_2, A_3 на одном берегу, B_1, B_2 — на другом; рис. 5). Требуется построить мост CD так, чтобы сумма длин дорог A_1C, A_2C, A_3C, B_1D, B_2D от населенных пунктов до моста была минимальна. (Берега реки параллельны, мост перпендикулярен к берегам.)*

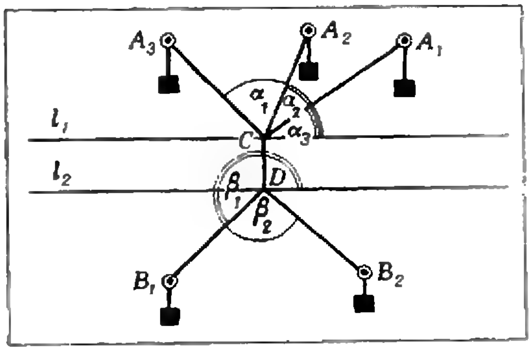


Рис. 5,

Чтобы решить эту задачу, рассмотрим следующую механическую систему. Жесткий стержень CD может скользить без трения по двум параллельным рельсам, оставаясь все время к ним перпендикулярным (см. рис. 5). К концам C и D стержня прикреплены нити, перекинутые через блоки, вращающиеся вокруг осей, закрепленных в точках A_1, A_2, A_3, B_1 и B_2. К свободным концам нитей подвешены одинаковые грузы. Требуется найти положение стержня CD, при котором вся механическая система находится в положении равновесия. (Как и раньше, мы предполагаем, что нити невесомы и нерастяжимы; блоки рассматриваем, как материальные точки, трение в блоках не учитываем.)

Используя принцип минимума потенциальной энергии, нетрудно доказать, что эта механическая задача тождественна нашей геометрической: в положении равновесия механической системы сумма длин участков нитей A_1C, A_2C, A_3C и B_1D, B_2D должна быть минимальной. Будем решать механическую задачу, не используя энергетических соображений; для этого посмотрим, какие силы действуют на стержень CD. На конец C стержня действуют равные по абсолютной величине силы натяжения $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_3$ нитей A_1C, A_2C, A_3C (грузы одинаковы) и сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны направляющего рельса.

На конец D стержня действуют силы $\vec{T}_4$ и $\vec{T}_5$ натяжения нитей B_1D и B_2D ($|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = |\vec{T}_3| = |\vec{T}_4| = |\vec{T}_5|$) и сила реакции $\vec{N}_2$ со стороны второго направляющего рельса (на рисунке 5 силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ не показаны). В положении равновесия механической системы сумма всех сил, действующих на стержень CD, равна нулю: $\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}_3+\vec{T}_4+\vec{N}_1+\vec{N}_2=\vec{0}$. Поскольку силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны к рельсам, а силы $\vec{T}_i$ равны по абсолютной величине, в про-

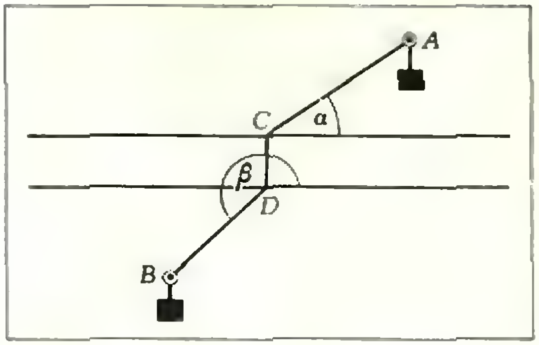


Рис. 6.

екции на прямую, параллельную рельсам, из этого условия получаем

$$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\beta_1+\cos\beta_2=0 \quad (*)$$

(углы отсчитываются против часовой стрелки, $0\leqslant\alpha_i\leqslant\pi$, $\pi\leqslant\beta_j\leqslant 2\pi$, $i=1, 2, 3$, $j=1, 2$; см. рис. 5).

Соотношение (*), хотя и не позволяет осуществить построение отрезка *CD* с помощью циркуля и линейки, часто оказывается полезным при практическом решении задач подобного вида. Если на каждом берегу расположено по одному населенному пункту, то соотношение (*) дает $\cos\alpha+\cos\beta=0$, откуда $\beta=\pi+\alpha$ (рис. 6) — т. е. отрезки *AC* и *BD* должны быть параллельны. В этом случае отрезок *CD* можно построить циркулем и линейкой (постройте!).

Итак, мы видели, что механический метод оказывается весьма полезным для решения геометрических задач рассмотренного типа. В заключение мы предлагаем читателям несколько задач для самостоятельного решения. Некоторые из них могут быть решены чисто геометрически, решение же других возможно лишь с помощью механической интерпретации. Попытайтесь сравнить полученные геометрическое и механическое решения.

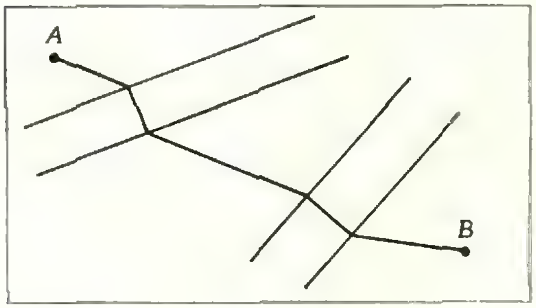


Рис. 7.

Задачи

5. По одну сторону от прямой *l* даны две точки *A* и *B*. Расположите на *l* данный отрезок *CD*, так, чтобы длина ломаной *ACDB* была минимальной.

6. Внутри острого угла *MON* дана точка *A*. Постройте треугольник наименьшего периметра, у которого вершина совпадает с данной точкой *A*, а две другие лежат на разных сторонах угла *MON*.

7. Внутри угла *MON* даны две точки — *A* и *B*. Найдите точки *C* и *D* на лучах *OM* и *ON* соответственно так, чтобы длина ломаной *ACDB* была минимальной.

8. Населенные пункты *A* и *B* разделены несколькими реками. Требуется построить мосты через эти реки так, чтобы полученная дорога из *A* в *B* была наименьшей длины (рис. 7).

9. Между взаимно перпендикулярными шоссейными дорогами расположено круглое озеро. На берегу озера нужно построить санаторий *A* и соединить его асфальтовой дорогой с шоссе l_1 и бетонной дорогой с шоссе l_2 (рис. 8). Строительство одного километра асфальтовой дороги обходится в *p* рублей, а одного километра бетонной дороги — в *q* рублей. Где нужно выстроить санаторий, чтобы общие затраты на строительство дорог были наименьшими?

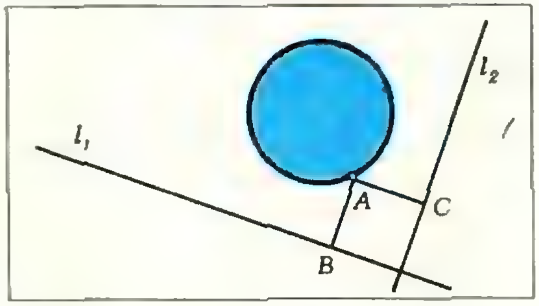


Рис. 8.

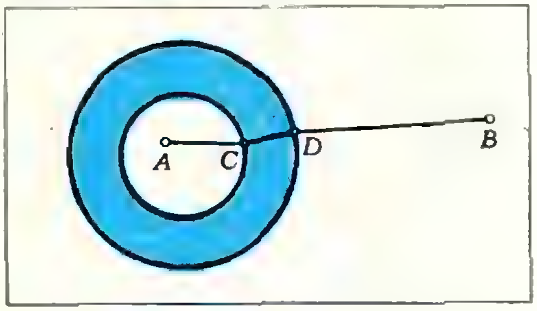


Рис. 9.

10. На круглом острове расположены два города — *A* и *B*. В каком месте на берегу острова нужно построить пристань *C*, чтобы сумма длин дорог *AC* и *BC* от городов до пристани была минимальной?

11. Круглый остров окружен рвом постоянной ширины, заполненным водой. На острове расположен замок *A*. Владелец замка хочет построить кратчайшую дорогу, соединяющую замок *A* с поместьем *B* своего советника. В каком месте нужно построить мост через ров? Мост должен быть перпендикулярен к берегам рва (рис. 9).

Победители конкурса «Кванта»

В прошлом году редакция получила около 10 000 писем с решениями задач из «Задачника «Кванта».

Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса решения задач. В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады победители получили право участвовать в республиканском туре Всесоюзной олимпиады 1978 года.

Математика

А. АЛЕКСЕЕВ — г. Москва, ФМШ 18, 10 кл.
Б. АРОНОВ — г. Саратов, с. ш. 13, 10 кл.
А. БАЛИНСКИЙ — г. Львов, с. ш. 11, 8 кл.
В. БАТЫРЕВ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
О. ВАЙНБЕРГ — г. Казань, с. ш. 18, 10 кл.
Н. ВЕЛИКОРОССОВ — г. Конаково, с. ш. 5, 10 кл.
С. ГАЛСТЯН — г. Ереван, с. ш. 1, 10 кл.
С. ГРИШЕЧКИН — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
В. ГУБА — г. Вологда, с. ш. 8, 9 кл.
О. ЕВДОКИМОВ — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
А. ЕГОЯН — г. Тбилиси, с. ш. 42, 10 кл.
А. ЖЕРДЕВ — г. Славянск, с. ш. 5, 10 кл.
Е. ЗИМАНОВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
Я. ЗОЛОТАРЕВ — г. Ташкент, с. ш. 232, 10 кл.
Р. ИЗМАЙЛОВ — г. Баку, с. ш. 134, 9 кл.
Л. КАКАБАДЗЕ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 10 кл.
А. КАПЛАН — г. Сумгаит, с. ш. 11, 8 кл.
А. КАЧУРОВСКИЙ — г. Новосибирск, с. ш. 165, 10 кл.
С. КОРЧАНОВ — г. Ангарск, с. ш. 10, 10 кл.
В. КОСТУСЯК — г. Запорожье, с. ш. 28, 10 кл.
Е. КУЗЬМИН — г. Череповец, с. ш. 4, 9 кл.
А. КУЛЕСКО — г. Донецк, шк.-инт. 10, 9 кл.
И. ЛОЗИЦКИЙ — г. Ганцевичи, с. ш. 1, 10 кл.
Е. ЛУМЕЛЬСКАЯ — г. Пермь, с. ш. 7, 10 кл.
А. МИЛЕВСКИЙ — г. Мытищи, с. ш. 26, 10 кл.
Д. МИНДЛИН — г. Ташкент, с. ш. 5, 9 кл.
А. МИРЛИН — г. Ленинград, ФМШ 45, 9 кл.
Е. МОСТИВЕНКО — г. Сыктывкар, с. ш. 4, 10 кл.
А. НЕНАШЕВ — г. Ленинград, ФМШ 45, 10 кл.
Д. ПАПУШ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
В. ПОТЕМКИН — г. Донецк, с. ш. 2, 10 кл.
Г. ПУНИНСКИЙ — г. Бобруйск, с. ш. 2, 10 кл.
В. РОМАНОВСКИЙ — Гродней. обл., Новодворская с. ш., 10 кл
А. САРЧИМЕЛИЯ — г. Тбилиси, ФМШ им. Комарова, 9 кл.
В. ТРОФИМОВ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.
Д. ШУЛЕМБАЕВ — г. Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.

Физика

С. ВЕСЕЛЯНСКИЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
В. ГАВРИЛОВ — г. Орск, с. ш. 8, 10 кл.
М. ГАВРИЛОВ — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 9 кл.
Н. ГАЗДА — п. Клевань Ровенской обл., с. ш. 1, 10 кл.
В. ГАРКАВЫЙ — г. Лида, с. ш. 1, 10 кл.
А. ЗАБРОДИН — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 10 кл.
В. ЛАШКИН — г. Киев, с. ш. 96, 9 кл.
Д. ЛЮДМИРСКИЙ — г. Киев, с. ш. 145, 9 кл.
А. НИКИТЕНКОВ — г. Великие Луки, с. ш. 3, 10 кл.
В. ПАЛЕЙ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
П. ПОБЫЛИЦА — г. Ленинград, с. ш. 521, 9 кл.
Е. ПОНОМАРЕВ — пос. Черноголовка, с. ш. 82, 10 кл.
К. ТРУТНЕВ — г. Казань, с. ш. 39, 10 кл.
А. ФОМИН — г. Новосибирск, с. ш. 130, 10 кл.
А. ЧУРИЛОВ — г. Харьков, с. ш. 27, 10 кл.
А. ШЕПТОВЕЦКИЙ — г. Москва, с. ш. 2, 10 кл.

задачник кванта

Задачи

М491—М495; Ф503—Ф507

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 мая 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М491, М492» или «Ф502». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М491. Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа. (Например: 16, 24, 36, 54, 81.)

а) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.

б) При каких натуральных n сумма квадратов n последовательных членов прогрессии обязательно делится на сумму этих n членов?

Ф. Кадиров, А. Агеев

М492. В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что вершины A_1, B_1 и C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB), причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 пересекаются в одной точке Q, причем точки P, Q и центр тяжести треугольника ABC лежат на одной прямой.

В. Коржов

М493. Докажите неравенства

$$0{,}785n^2-n<\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\\+\ldots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<0{,}79\,n^2,$$

А. Сивацкий, ученик 8 кл.

М494. Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше а) $3\,n$; б)* $2n$.

А. Тартаковский, ученик 10 кл.

М495*. В космическом пространстве вокруг планеты O по трем круговым орбитам с центром O равномерно вращаются три спутника. Угловые скорости спутников равны соответственно ω_1, ω_2 и ω_3, а их начальные положения могут быть произвольными. Обязательно ли найдется такой момент времени, когда все три спутника и точка O лежат в одной плоскости, если

а) $\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$; б) $\omega_1=\omega_2=1$, $\omega_3=2$;
в) $\omega_1=2$, $\omega_2=3$, $\omega_3=4$?

Попробуйте выяснить, каков будет ответ на этот вопрос при других соотношениях угловых скоростей.

Г. Гальперин

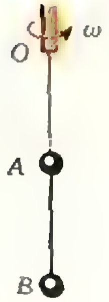


Рис. 1.

Ф503. К вертикальной оси привязана нить длины $2l$, на конце и в середине которой прикреплены одинаковые шарики (рис. 1). Ось приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каком значении угловой скорости участки OA и AB начнут отклоняться от вертикали? Каким будет отношение малых углов отклонения участков нити OA и AB от вертикали?

Г. Бугаенко

Ф504. Колеса легковых автомобилей тщательно балансируют — добиваются того, чтобы центр масс колеса лежал точно на оси его вращения. Для чего необходима балансировка колес?

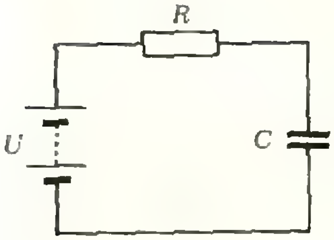


Рис. 2.

Ф505. Рассмотрим схему зарядки конденсатора от батареи (рис. 2). Конденсатор заряжается до напряжения батареи U, приобретая энергию $\frac{1}{2}CU^2$ и заряд $q=CU$. Этот заряд потребляется от батареи, которая, таким образом, совершает работу $qU=CU^2$. Коэффициент полезного действия равен $1/2$. Найти способ зарядки конденсатора до напряжения батареи с бо́льшим к. п. д. Не разрешается использовать дополнительные источники энергии.

А. Ходулев

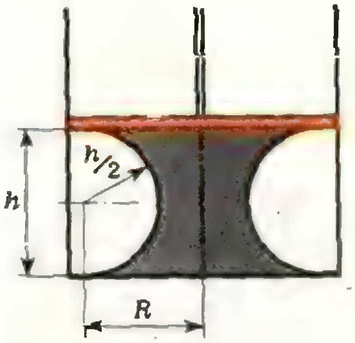


Рис. 3.

Ф506. Под поршнем цилиндра находится ртуть, занимающая объем $V_р$, и k молей идеального газа. Площадь поверхности поршня равна S. Поршень и дно цилиндра изготовлены из материала, идеально смачиваемого ртутью. Ртуть под поршнем приняла симметричную относительно оси цилиндра форму, показанную на рисунке 3. На поршень действует сила F.

1) Вывести уравнение состояния системы ртуть + +газ в форме $p=f(V, T)$, где p — давление, T — абсолютная температура, V — объем части сосуда под поршнем.

2) Найти условие, при котором $p=0$. Поверхностное натяжение ртути равно σ. Силу тяжести не учитывать. Принять, что объем ртути и ее поверхностное натяжение σ постоянны (т. е. не зависят от T и p) и что h [illegible] R.

XXVI физическая олимпиада школьников ПНР

Ф507. Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин — 3 мм и 9 мм, длины — 1 см и 7 см, диаметры проволок — 0,2 мм и 0,6 мм. Коэффициент жесткости первой пружины 0,14 Н/см. Найти коэффициент жесткости второй пружины.

А. Кузнецов, И. Кузнецов

Решения задач

М444, М445; Ф458—Ф461

М444 а) *На рисунке 1 четыре прямые разбивают плоскость на одиннадцать областей: четырехугольник (1), два треугольника (2 и 3), три угла (4, 5 и 6), четыре «бесконечных треугольника»— области, ограниченные каждая отрезком и двумя лучами (7, 8, 9 и 10) и «бесконечный четырехугольник»— область, ограниченную двумя отрезками и двумя лучами (11).*

Будет ли сказанное верно для любых четырех прямых на плоскости, среди которых нет параллельных и нет прямых, проходящих через одну точку?

б) Три больших круга, не проходящие через одну точку, разбивают сферу на восемь треугольников. На какие области разбивают сферу четыре больших круга, никакие три из которых не проходят через одну точку? (Большим кругом на сфере называют окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы, рис. 2.)

в) На какие области могут разбить сферу пять больших кругов, никакие три из которых не проходят через одну точку?

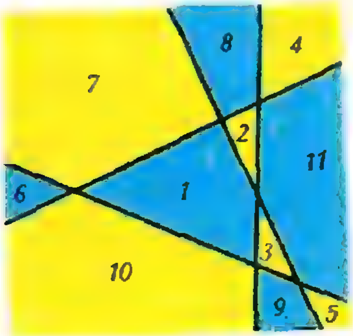


Рис. 1.

Будем говорить, что несколько прямых на плоскости (или больших кругов на сфере) находятся в общем положении, если все они попарно пересекаются, причем в различных точках. Выпуклую фигуру на плоскости, ограниченную двумя лучами и $n-1$ отрезками, будем для краткости называть n-углом (у n-угла n вершин, 1-угол — это угол в обычном смысле). Перейдем к решению задач.

а) Нетрудно убедиться в том, что для любых четырех прямых общего положения разбиение будет всегда одинаковым:

4-угольников	3-угольников	углов	2-углов	3-углов
1	2	3	4	1

— таким же, как на рисунке 1. После нескольких минут, проведенных за рисованием четверок прямых, это становится совершенно очевидным. Рассуждения, присланные по этому поводу читателями, очень разнообразны, но они показывают, что записать короткое и в то же время убедительное доказательство этого очевидного факта не так просто. В самом деле, если не ссылаться на чертеж, пришлось бы при формальном доказательстве опираться прямо на геометрические аксиомы, характеризующие расположение отрезков и прямых на плоскости — решение получилось бы довольно длинным. Мы не будем столь педантичны, а проведем лишь набросок доказательства, по-видимому, вполне убедительного. По существу, именно так обычно и поступают в решениях геометрических задач, «близких к аксиомам».

Докажем, что одной из частей, на которые четыре прямые общего положения делят плоскость, будет четырехугольник. Этого достаточно для решения задачи: ясно, что при продолжении сторон любого выпуклого четырехугольника без параллельных сторон мы получим такие же 10 остальных областей, как на рисунке 1.

Проведем сначала три прямые общего положения. Они попарно пересекаются в трех точках A, B и C. Четвертая прямая l делит плоскость на две полуплоскости. Если две из трех точек A, B, C лежат в одной полуплоскости, а одна (скажем, A) — в другой, то прямая l отсекает от треугольника ABC четырехугольник ($BCED$; рис. 3, *а*). Если все три точки лежат в одной полуплоскости, причем A — дальше от l, чем B и C, то прямая l отсекает от 2-угла с вершинами B и C четырехугольник ($BCED$; рис. 3, *б*).

Для каждой из задач б) и в) мы приведем по два решения, причем вторые решения будут использовать задачу **а)**, а первые — нет.

б) Ответ: *разбиение всегда одинаковое; оно состоит из 14 областей — 6 четырехугольников и 8 треугольников.*

Первое решение. Проведем сначала три больших круга *1*, *2*, *3* (см. рис. 2). Они делят сферу на восемь треугольников. Выясним, сколько из них будет пересекать четвертый большой круг *4*, находящийся в общем положении с *1*, *2* и *3*. Для этого достаточно узнать, на сколько отдельных кусков будет разбит круг *4* точками пересечения с тремя другими. Каждые два больших круга пересекаются в двух диаметрально противоположных точках. Поэтому большой круг *4* пересекает три других больших круга *1*, *2*, *3* всего в шести точках, т. е. разбивается ими всего на шесть дуг. Таким образом, из восьми треугольников, на которые круги *1*, *2*, *3* делят сферу, круг *4* пересекает шесть, разрезая каждый на треугольник и четырехугольник. Два из восьми треугольников остаются нетронутыми.

Второе решение. Идея этого решения — спроектировать сферу на плоскость и свести дело к задаче а). Проведем произвольную плоскость α, не содержащую центр P нашей сферы, и спроектируем сферу из центра P на плоскость α (т. е. поставим в соответствие каждой точке M сферы точку $(MP)\cap\alpha$)\*). Каждый большой круг (мы можем, конечно, считать, что плоскости β_i наших больших кругов, $i=1, 2, 3, 4$, не параллельны плоскости α) перейдет в некоторую прямую $\alpha\cap\beta_i$ на плоскости α. Теперь важно заметить, что разбиение сферы на области, которое нас интересует, симметрично относительно точки P. Каждой паре симметричных относительно P n-угольников на сфере при отображении соответствует либо n-угольник на плоскости α, либо объединение p-угла и q-угла, где $p+q=n$ (первый случай возникает, когда плоскость α', параллельная α и проходящая через точку P, не пересекает нашу пару n-угольников, второй — когда α' пересекает каждый из них; разумеется, во втором случае лучи p-угла и лучи q-угла представляют собой куски одних и тех же двух прямых: эти лучи являются проекциями тех сторон n-угольников на сфере, которые разрезаны плоскостью α').

Плоскость α на рисунке 4, по существу, копия рисунка 1, но области **8** и **9**, **4** и **10**, **6** и **11**, **5** и **7** на плоскости надо «склеить», чтобы получить проекции областей (точнее, пар областей) на сфере. Таким образом, на сфере имеются: три пары четырехугольников (их проекции — $1, 8\cup 9, 6\cup 11$) и четыре пары треугольников (их проекции — $2, 3, 5\cup 7$ и $4\cup 10$), что совпадает со сформулированным выше ответом.

в) Первое решение. Проведем сначала четыре больших круга *1*, *2*, *3* и *4* общего положения. Они разрезают сферу на треугольники и четырехугольники так, что к каждой стороне этих многоугольников с одной стороны примыкает треугольник, с другой — четырехугольник. Это легко вывести из любого решения задачи б), а еще приятнее убедиться в этом, раскрасив пинг-понговый шарик с четырьмя большими кругами на нем в два цвета: треугольники — в желтый, четырехугольники — в голубой.

Проведем пятый большой круг *5*. Он пересекает первые четыре в восьми точках и разрезает пополам восемь областей — четыре треугольника и четыре четырехугольника. Каждый треугольник делится на треугольник и четырехугольник. А вот четырехугольник может быть разделен по-разному: либо на два четырехугольника, либо на пятиугольник и треугольник. Но оказывается, что и в этой задаче разбиение всегда получается одинаковым! А именно, из четырех четырехугольников, разрезаемых кругом *5*, первые два разрезаются на два четырехугольника, а два другие — на пятиугольник и треугольник.

Докажем это. Пусть *5* пересекает треугольник, образуемый кругами *1*, *2*, *3*, в точках A_2 и A_3, лежащих на *2* и *3*. Поскольку каждый из больших кругов *1*, *2*, *3*, *4* пересекает *5* в диаметрально противоположных точках, то при продолжении дуги A_2A_3 в одну сторону, скажем, за точку A_2 (рис. 5), на ней должна сначала встретиться точка пересечения с *1*, а в другую — сначала точка пересечения с *4*; тем самым, из двух четырехугольников — соседей нашего треугольника — круг *5* разбивает один на треугольник и пятиугольник, а другой — на два четырехугольника.

В итоге получаем такой ответ: *пять больших кругов общего положения всегда делят сферу на такие 22 части: 2 пятиугольника, 10 четырехугольников и 10 треугольников.*

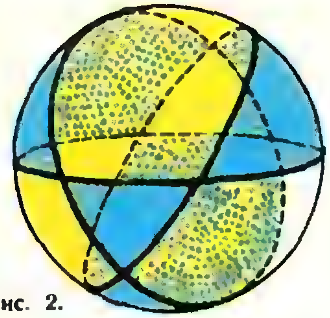
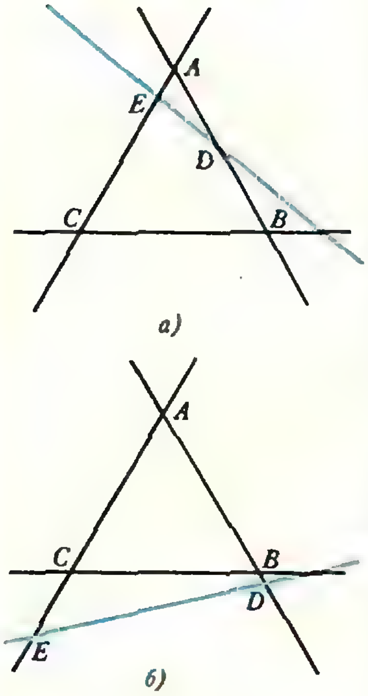


Рис. 2.



а)

б)

Рис. 3.

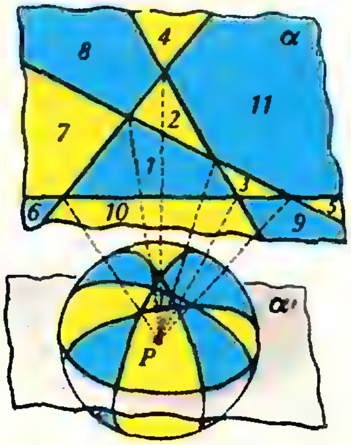


Рис. 4.

---

*) Наше отображение не определено для тех точек M сферы, для которых (MP) параллельна α. Это не помешает нам в решении задачи б) и поможет в решении в).

Этот ответ у нас получился так:

	5-угольников	4-угольников	3-угольников
4 круга разбивают сферу на	0	6	8
5-й круг оставляет нетронутыми	0	2	4
разбивает 3-угольники на	0	4	4
разбивает 4-угольники на	2	$4=2+2$	2
Итого . . .	2	10	10

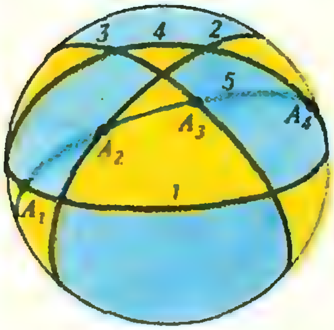


Рис. 5.

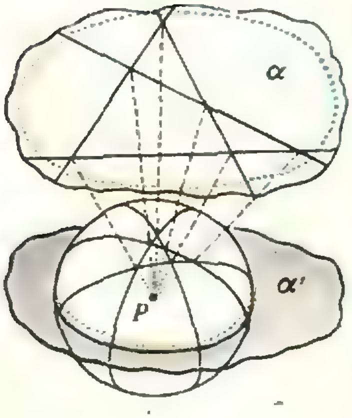


Рис. 6.

А теперь покажем, как этот же ответ получить намного проще.

Второе решение. Спроектируем сферу из центра P на плоскость α, параллельную экватору O. Тогда пара симметричных n-угольников на сфере, не примыкающих к O, отобразится на n-угольник в плоскости α, а пара n-угольников, примыкающих к O — на $(n-2)$-угол; пользуясь результатом задачи а) — единственностью разбиения плоскости четырьмя прямыми и первой табличкой, — мы заключаем, что любые пять больших кругов разбивают сферу на два пятиугольника (их проекция—3-угол), $2(1+4)=10$ четырехугольников (из них восемь примыкает к данному большому кругу O, и эти четыре пары проектируются на 2-углы), и $2(2+3)=10$ треугольников (из них шесть примыкают к большому кругу O). Те, кто знаком с понятием проективной плоскости (см., например, «Квант», 1974, № 3), заметят, конечно, что «проекция», о которой мы говорим, более естественно объясняется как отображение сферы на *проективную плоскость* (при этом отображении две диаметрально противоположные точки сферы склеиваются в одну, образы всех больших кругов — прямые, в том числе образ круга O—*бесконечно удаленная прямая*).

Рисунок 6, иллюстрирующий второе решение, нужно пояснить. Поскольку «бесконечно удаленную прямую» нарисовать трудно, мы на рисунке 6 очень близко к большому кругу — экватору O — провели пунктиром параллель; ее образом при проекции будет окружность очень большого радиуса в плоскости α, содержащая внутри себя все точки пересечения четырех прямых; эти прямые разбивают возникающий на плоскости «очень большой круг» на 11 областей: «пятиугольник», пять «треугольников» и пять «четырехугольников»; возвращаясь с плоскости на сферу, получаем после удвоения ответ.

В заключение заметим, что во всех трех задачах не только вид частей разбиения (число сторон), но и их взаимное расположение определяются однозначно.

Предлагаем читателям «Кванта» в качестве задачи для исследования выяснить, какие бывают разбиения сферы шестью большими кругами или плоскости — пятью прямыми (здесь уже нет единственности). Самое трудное здесь, по-видимому, доказать то, что найдены все возможные варианты разбиения.

Н. Васильев

◆

М445. *Центры одинаковых непересекающихся окружностей находятся в центрах правильных шестиугольников, покрывающих плоскость так, как указано на рисун-*

Заметим, что центры правильных шестиугольников находятся в вершинах ромбов (сторона ромба — удвоенная апофема шестиугольника, угол при вершине равен 60°). Таким образом, мы имеем *ромбическую решетку* на плоскости, вершины ромбов — *узлы* решетки (см. рис. 7). Далее, если многоугольник M с вершинами в узлах представлен в виде объединения *ке 7. Пусть M — многоугольник с вершинами в центрах окружностей. Окрасим в красный цвет те окружности или их части (дуги), которые лежат внутри M. Покажите, что сумма градусных величин красных дуг равна $C\cdot 180°$, где $C=C(M)$ — целое число, и дайте этому числу геометрическую интерпретацию.*

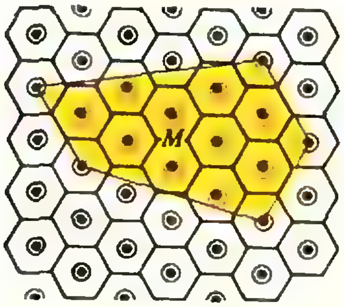


Рис. 7.

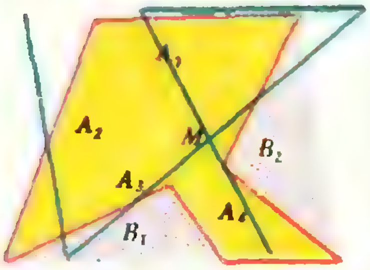
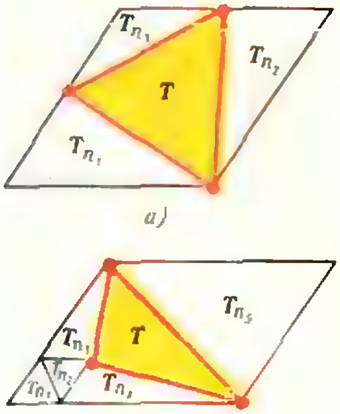


Рис. 8.



а)

б)

Рис. 9.

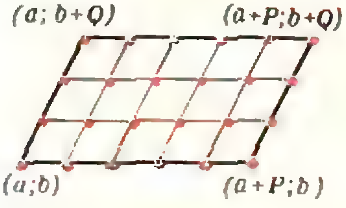


Рис. 10.

многоугольников $A_1, \ldots, A_k$ (с вершинами в узлах): $M=\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$, то

$$C(M)=C(A_1)+\ldots+C(A_k);$$

про такую функцию говорят, что она *аддитивна*. Отсюда следует, что если многоугольник M с вершинами в узлах представлен в виде объединения многоугольников $A_1, \ldots, A_k$, из которого удалено объединение многоугольников $B_1, \ldots, B_l$ (A_i и B_j — с вершинами в узлах) — см. рисунок 8; т. е. если

$$M=\bigcup_{i=1}^{k} A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{l} B_j, \text{ причем } \bigcup B_j \subset \bigcup A_i \qquad (*)$$

(здесь $\setminus$ — значок *разности множеств или дополнения*), то

$$C(M)=\sum_{i=1}^{k} C(A_i)-\sum_{j=1}^{l} C(B_j).$$

Ниже мы покажем, что всякий многоугольник M (с вершинами в узлах) представляется в виде (*), где A_i и B_j — треугольники. Поэтому утверждение задачи достаточно доказать для треугольников T с вершинами в узлах.

Итак, покажем, что $C(T)$ — целое число. Впишем треугольник T в параллелограмм $П$ со сторонами, параллельными сторонам решетки. Поскольку вершины T находятся в узлах, вершины $П$ также находятся в узлах. Представим параллелограмм $П$ в виде объединения треугольника T и треугольников $T_П$, у которых две стороны параллельны сторонам решетки (рис. 9, *а*), *б*)). Очевидно, что для любого параллелограмма $П$ с вершинами в узлах и длинами сторон a и b (за единицу длины мы выбираем длину стороны ромба, порождающего решетку, числа a и b — целые), число $C=C(П)=2ab$ ($П$ разбивается на ab порождающих решетку ромбов R (рис. 10), а для каждого такого ромба $C(R)=2$: в ромбе сумма градусных величин красных дуг равна $360°=2\cdot180°$). Итак, для каждого $П$ с вершинами в узлах число $C(П)$ — четное. Следовательно, для каждого треугольника $T_П$ с вершинами в узлах, две стороны которого параллельны осям решетки, число $C(T_П)$ — целое ($T_П$ всегда можно дополнить до параллелограмма $П$ (рис. 11); тогда $2C(T_П)=C(П)=2ab$, откуда $C(T_П)=ab$ — целое число). Для произвольного же треугольника T с вершинами в узлах имеем: $C(T)=C(П)-\Sigma C(T_П)$, т. е. $C(T)$ — также целое число. Итак, для треугольника с вершинами в узлах утверждение доказано.

Заметим, кстати, что из равенства $C(П)=2ab$ сразу следует, что $C(П)$ пропорционально площади $П$: $S(П)=ab\sin 60°$, и $C(П)/S(П)=1/\sqrt{3}$. Аналогично, и $C(T_П)/S(T_П)=1/\sqrt{3}$ ($S(T_П)$ — площадь треугольника $T_П$). Поэтому $C(T)=(S(П)-\Sigma S(T_П))/\sqrt{3}=S(T)/\sqrt{3}$, и мы получаем, что для всякого треугольника T с вершинами в узлах $C(T)/S(T)=1/\sqrt{3}$. Поскольку функция $C(M)$ и площадь $S(M)$ аддитивны, то и для произвольного многоугольника M

$$C(M)=S(M)/\sqrt{3}.$$

Это и есть геометрическая интерпретация числа C: *для всякого многоугольника M число $C(M)$ пропорционально его площади.*

Осталось показать, что всякий n-угольник M можно представить в виде (*).

Заметим, что если диагональ AB не пересекает сторон M и лежит внутри M, то она разбивает M на k-угольник и l-угольник, причем $k<n$ и $l<n$. Если же она лежит вне M, то M представляется в виде разности k- и l-угольников. Поэтому достаточно показать, что в любом многоугольнике найдется диагональ, не пересекающая его сторон.

Возьмем три последовательные вершины многоугольника M: A_1, A_2, A_3. Если диагональ A_1A_3 не пересекается со сторонами M, то нужная диагональ найдена. В противном случае

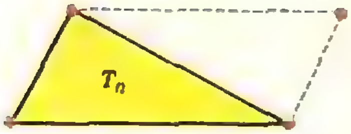


Рис. 11.

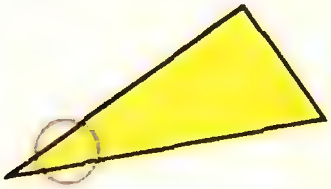


Рис. 12.

отыщем такую его вершину B, лежащую внутри $\triangle A_1A_2A_3$, что угол A_1A_2B — наименьший из возможных. Тогда если A_1B — диагональ, то она не пересекает ни одной стороны M, если же A_1B — сторона M, то диагональ A_2B не пересекается со сторонами M.

Таким образом, мы от n-угольника за конечное число шагов перейдем к треугольникам.

Решения большинства читателей опирались на то соображение, что окружности, разрезаемые сторонами многоугольника, можно объединить попарно относительно середины стороны, так, чтобы дуги, попадающие внутрь M, давали в сумме целую окружность. На этом пути решение получить можно, но, как видно из рисунка 12, одного этого соображения недостаточно.

И. Климова

◆

Ф458. *Мальчик плывет со скоростью, в два раза меньшей скорости течения реки. В каком направлении он должен плыть к другому берегу, чтобы его снесло течением как можно меньше?*

Пусть $\vec{v}_0$ — скорость течения реки, $\vec{v}_1$ — скорость мальчика относительно течения. Тогда скорость мальчика относительно берега равна

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{v}_1.$$

Вектор скорости мальчика относительно течения может иметь различные направления, но его конец должен обязательно лежать на окружности радиуса $|\vec{v}_1|$ (рис. 13). Из рисунка видно, что вектор $\vec{v}$ составляет минимальный угол с береговой линией в том случае, когда он направлен по касательной к окружности — геометрическому месту концов возможных векторов $\vec{v}_1$. В этом случае мальчик, очевидно, будет снесен течением на минимально возможное расстояние. Из рисунка найдем, что при этом мальчик должен плыть под углом к береговой линии, равным

$$\alpha=\arccos\frac{|\vec{v}_1|}{|\vec{v}_0|}=\arccos\frac{1}{2}=60^\circ.$$

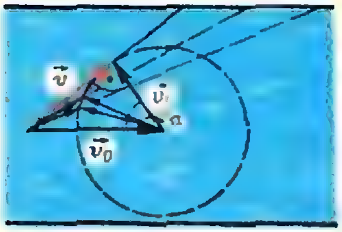


Рис. 13.

О. Савченко

◆

Ф459. *Электроплитка содержит три спирали с сопротивлениями $R=120$ Ом каждая, соединенные параллельно друг с другом. Плитка включается в сеть последовательно с сопротивлением $r=50$ Ом. Как изменится время, необходимое для нагревания на этой плитке чайника с водой до кипения, при перегорании одной из спиралей?*

Сопротивление плитки с тремя параллельно соединенными спиралями равно $R_1=R/3=40$ Ом. После перегорания одной спирали сопротивление плитки станет равным $R_2=R/2=60$ Ом.

До перегорания спирали по цепи идет ток $I_1=\dfrac{U}{R_1+r}$ (U — напряжение сети). После перегорания — $I_2=\dfrac{U}{R_2+r}$.

Количество теплоты Q, необходимое для нагревания чайника с водой до кипения, в первом случае выделяется в плитке за время

$$t_1=\frac{Q}{I_1^2R_1}=\frac{Q(R_1+r)^2}{U^2R_1},$$

во втором случае — за время

$$t_2=\frac{Q}{I_2^2R_2}=\frac{Q(R_2+r)^2}{U^2R_2}.$$

Найдем отношение времен t_1 и t_2:

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{(R_1+r)^2R_2}{(R_2+r)^2R_1}=\frac{243}{242}.$$

Отсюда $t_2=\dfrac{242}{243}t_1$.

Ф460. *В схеме, изображенной на рисунке 14, переключатель все время переключается из верхнего положения в нижнее и обратно. В верхнем положении он задерживается на время $\tau_1=2\cdot 10^{-3}$ с, в нижнем — на время $\tau_2=10^{-3}$ с. Найти мощность, потребляемую от источника через очень большой промежуток времени после начала работы переключателя. Емкость конденсатора такова, что за время τ_2 он не успевает разрядиться сколь-нибудь существенно.*

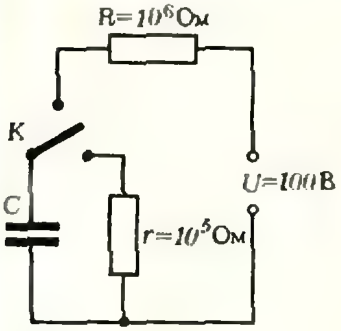


Рис. 14.

Пусть U_C — напряжение на конденсаторе. Так как, по условию, изменение заряда конденсатора за время τ_1 (и следовательно, за время τ_2) мало́, то можно считать, что через большой промежуток времени после начала работы переключателя напряжение U_C не меняется со временем. Тогда, при зарядке конденсатора по цепи идет ток $I_1=\dfrac{U-U_C}{R}$, и за время τ_1 проходит заряд $q_1=I_1\tau_1=\dfrac{U-U_C}{R}\tau_1$. При разрядке конденсатора по цепи идет ток $I_2=\dfrac{U_C}{r}$, так что за время τ_2 проходит заряд $q_2=I_2\tau_2=\dfrac{U_C}{r}\tau_2$. q_1 и q_2 — это изменение заряда конденсатора при его зарядке и разрядке. В установившемся режиме $q_1=q_2$, т. е.

$$\frac{U-U_C}{R}\tau_1=\frac{U_C}{r}\tau_2.$$

Отсюда найдем U_C:

$$U_C=U\frac{r\tau_1}{r\tau_1+R\tau_2}.$$

Энергия, потребляемая от источника за время τ_1, равна $UI_1\tau_1$. Следовательно, за время $\tau_1+\tau_2$ средняя мощность, потребляемая от источника, равна

$$P_{\text{ср}}=\frac{UI_1\tau_1}{\tau_1+\tau_2}=\frac{U^2\left(1-\dfrac{r\tau_1}{r\tau_1+R\tau_2}\right)\tau_1}{R(\tau_1+\tau_2)}=$$

$$=\frac{1}{180}\ \text{Вт}.$$

◆

И. Слободецкий

Ф461. *Каждый квадратный метр поверхности тела, нагретого до температуры T, излучает за единицу времени энергию $W=5.67\times 10^{-8}\,T^4$ Вт. На каком расстоянии R от Солнца железные опилки превратятся в капли, если плотность потока солнечного излучения (энергия, проходящая в единицу времени через единицу площади) на орбите Земли $E_0=1400$ Вт/м²? Температуру плавления железа принять равной $T_0=1535$ К, расстояние от Земли до Солнца $R_0=1{,}5\cdot 10^{11}$ м.*

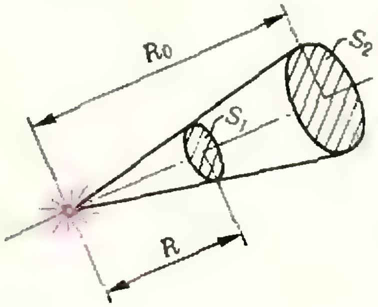


Рис. 15.

Крупинка железа нагревается до такой температуры T, при которой энергия, излучаемая ею, становится равной энергии, получаемой от Солнца. Излучаемая в единицу времени энергия пропорциональна площади поверхности крупинки. Будем для оценки считать, что опилки — шарики, средний радиус которых равен r. Тогда энергия, излучаемая за единицу времени каждой крупинкой, нагретой до температуры T_0, равна

$$W_{\text{изл}}=4\pi r^2 W.$$

Энергия, получаемая от Солнца за единицу времени, пропорциональна площади наибольшего сечения крупинки, то есть πr^2, и равна

$$W_{\text{погл}}=\pi r^2 E,$$

где E — плотность потока солнечного излучения на том расстоянии R от Солнца, на котором находится крупинка. Так как в единице телесного угла от Солнца распространяется постоянная энергия, то (рис. 15) $ES_1=E_0S_2$ и

$$E=E_0\frac{S_2}{S_1}=E_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Следовательно,

$$W_{\text{погл}}=\pi r^2E_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Приравняв $W_{\text{изл}}$ и $W_{\text{погл}}$, получим

$$4\pi r^2W=\pi r^2E_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2.$$

Из этого уравнения найдем

$$R=\frac{R_0}{2}\sqrt{\frac{E_0}{W}}\approx 5\cdot 10^6\ \text{км}.$$

А. Стасенко

А. Земляков

Как выглядит парабола?

Старайся наблюдать различные приметы

А. Пушкин

Вы никогда не задумывались над тем, почему параболу — график квадратичной функции $y=x^2$ — рисуют на координатной плоскости так, как показано на рисунке 1,*а*? Почему ее не рисуют так, как на рисунках 1, *б* или 1,*в*?

Вы можете ответить, что если рисовать график $y=x^2$ по точкам (рис. 2), то получится «как на рисунке 1, *а*». Однако нельзя взять бесконечно много пробных точек, и непонятно, как все-таки продолжить график при больших значениях x. Мы приведем два разных рассуждения, показывающих, что графики на рисунках 1,*б* и 1,*в* продолжены неправильно.

Алгебраическое рассуждение

Прямая $y=kx$ может пересекаться с параболой $y=x^2$ не более, чем в двух точках (рис. 3, *а*; объясните). Графики же на рисунках 1,*б* и 1,*в* с некоторыми из таких прямых пересекаются в трех или даже в большем числе точек (рис. 3,*б*,*в*).

Аналитическое рассуждение

Угловой коэффициент касательной к графику дифференцируемый функции $y=f(x)$ в точки с абсциссой x равен $k(x)=f'(x)$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 52). Если при возрастании x коэффициент $k(x)$ возрастает, то касательная образует все бóльший угол с осью Ox, а график идет все круче (в случае $k(x)>0$; см. рис. 4). Для квадратичной функции $f(x)=x^2$ угловой коэффициент касательной $k(x)=2x$ как раз обладает этим свойством, и график $y=x^2$ идет все круче при $x>0$ (рис. 5, *а*). Напротив, угловые коэффициенты касательных к графику 1,*б* и 1,*в* убывают на промежутках от a до b; см. рисунки 5*б*, *в*. (В этом рассуждении существенно используется геометрический смысл касательной — см. замечание 3 из упомянутого п. 52 учебника и статью «Геометрический смысл производной», «Квант», 1977, № 2).

Комментарий

Алгебраическое, как и аналитическое, рассуждение применимо не только к параболе, но и к другим графикам функций, в чем можно убедиться, решив задачи, предлагаемые ниже. Второе рассуждение, в котором анализируется характер поведения касательной к графику, к тому же приводит к важному понятию выпуклости функций (их графиков) (см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 79). Заметим, что возрастание или убывание углового коэффициента $k(x)=f'(x)$ может быть установлено с помощью производной: $k'(x)=f''(x)$, и $k(x)$ возрастает или убывает в зависимости от знака второй производной исходной функции f.

Задачи

1 Который из графиков, изображенных на рисунке 6, может отвечать функции $y=x^6$?

2 На рисунках 7, *а*, *б* изображены два графика степенной функции $y=x^\alpha$, где $\alpha>0$. Для какого из графиков $\alpha>1$, а для какого $\alpha<1$?

(Приведите в задачах 1, 2 и аналитическое, и алгебраическое рассуждения.)

3. (10 класс) Как правильно нарисовать графики $y=a^x$ и $y=\log_a x$ при $a>1$ — как на рисунках 8, *а*, 9, *а*, или как на рисунках 8,*б*, 9,*б*? (Ответ обоснуйте.)

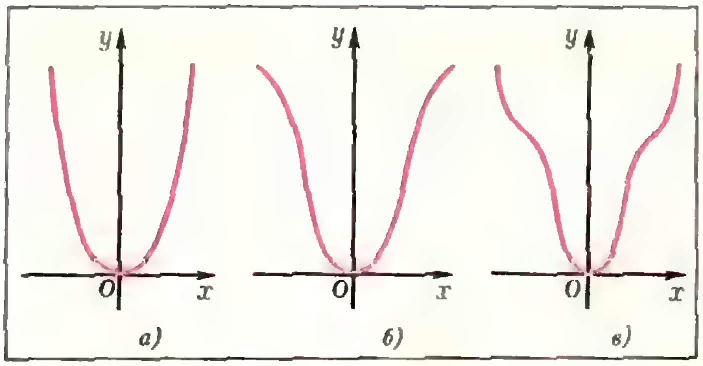


Рис. 1

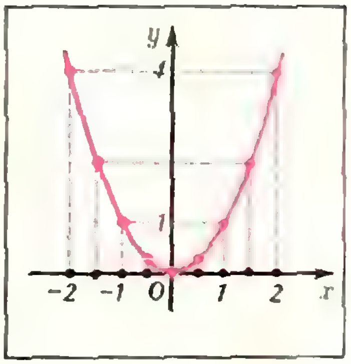


Рис. 2.

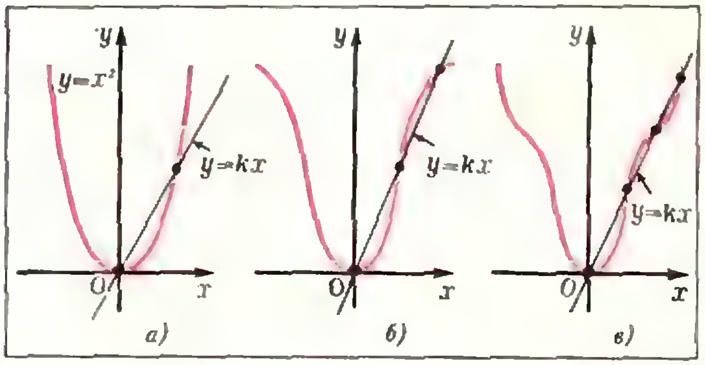


Рис. 3.

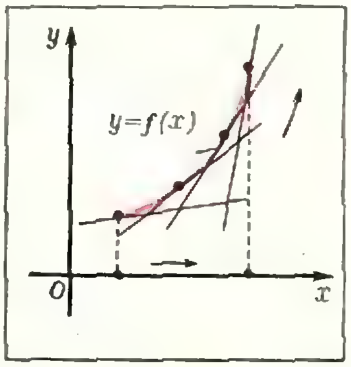


Рис. 4.

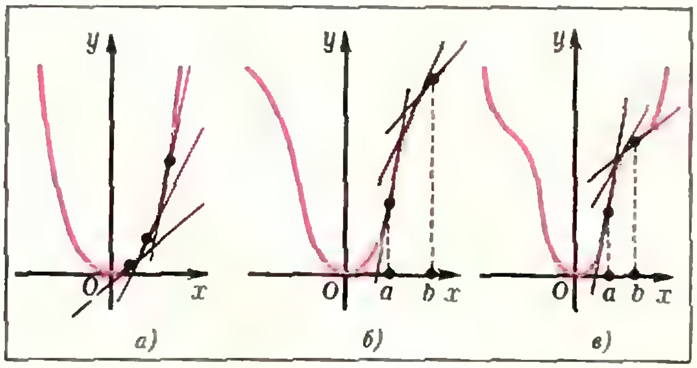


Рис. 5.

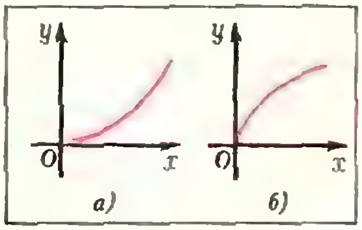


Рис. 7.

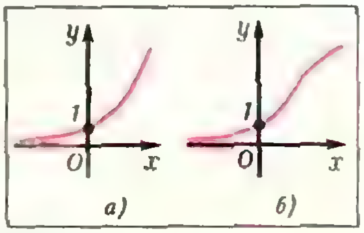


Рис. 8.

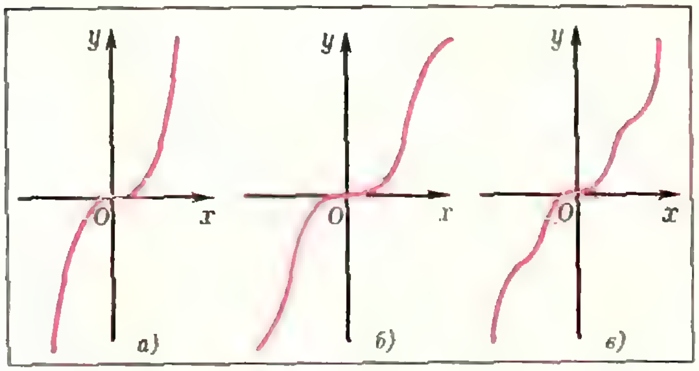


Рис. 6.

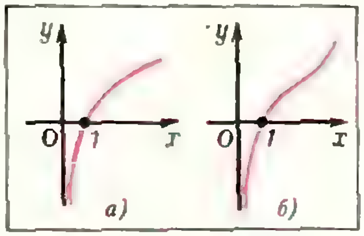


Рис. 9.

Вивианна

Кривую, определенную в подписи к четвертой странице обложки, называют иногда «кривой Вивиани», иногда «окнами Вивиани», иногда кратко «вивианной», а порой и просто «косой восьмеркой» за ее форму. Указал на эту пространственную кривую впервые итальянский математик Винченцо Вивиани (1622—1703), которому посчастливилось быть учеником Г. Галилея и другом Э. Торричелли. В 1692 г. Вивиани разослал ряду математиков письма, в которых предложил им проделать (разумеется, умозрительно) в «куполе» (полусфере) два окошка так, чтобы поверхность продырявленного купола была равновелика квадрату, который можно построить на диаметре купола. Оказалось, что вивианна, если по ней выполнить разрез купола, удовлетворяет условию этой задачи. Среди ученых, внимание которых привлекла задача Вивиани, были И. Бернулли, Г. В. Лейбниц и Ж. П. Роберваль.

Лейбниц с помощью интегрального исчисления справился с задачей Вивиани быстрее всех — за один день. Сам Вивиани решил свою задачу без помощи интегралов.

Вивианну можно построить циркулем на поверхности цилиндра; нужно только, чтобы раствор циркуля равнялся длине диаметра цилиндра, т. е. радиусу сферы (рис. 1). Чтобы доказать эквивалентность двух определений вивианны, указанных в подписи к четвертой странице обложки, рассмотрим рисунок 2, на котором O — центр сферы, M — текущая точка вивианны, A — точка, в которой вивианна сама себя пересекает, N — проекция точки M на основание цилиндра. Теперь из равенств $|OM| = |OA| = r$ следует, что $\dfrac{r\cos\alpha}{\cos\beta} = r$, т. е. $\alpha = \beta$.

В декартовых координатах вивианна определяется системой двух уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ (сфера)} \\ x^2 + y^2 = Rx \text{ (цилиндр)}; \end{cases}$$

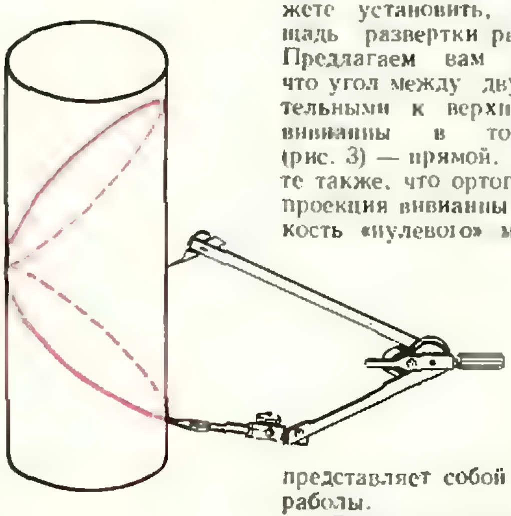


Рис. 1.

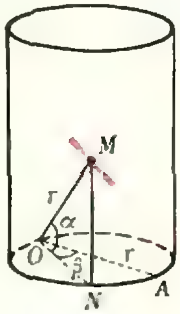


Рис. 2.

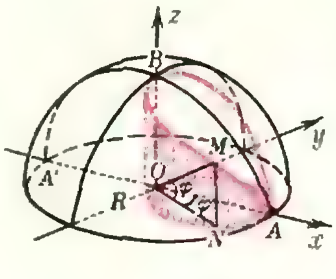


Рис. 3.

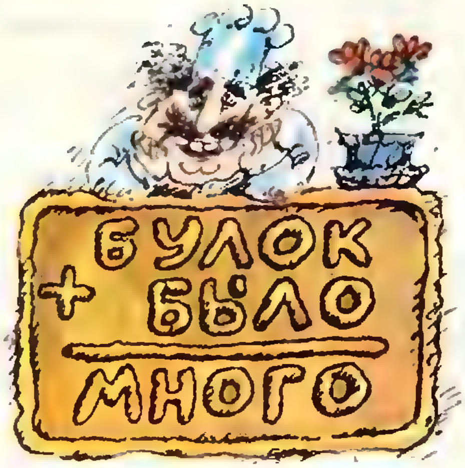
координаты x, y, z можно выразить через угол φ (рис. 3): $x = R\cos^2\varphi$, $y = R\sin\varphi\cos\varphi$, $z = R\sin\varphi$.

Рассмотрим часть поверхности цилиндра, ограниченную снизу основанием цилиндра, сверху — вивианной (рис. 3). Поскольку при $\widehat{AON} = \varphi$ имеем $|MN| = r\sin\varphi$, криволинейный край развертки рассматриваемого куска поверхности цилиндра на плоскость оказывается синусоидой. Владея элементами интегрального исчисления, вы сможете установить, что площадь развертки равна $2R^2$. Предлагаем вам доказать, что угол между двумя касательными к верхней петле вивианны в точке A (рис. 3) — прямой. Докажите также, что ортогональная проекция вивианны на плоскость «нулевого» меридиана представляет собой дугу параболы.

Рассмотрим теперь центральные проекции вивианны из разных точек сферы на различные плоскости, проходящие через ее центр. Если за центр проектирования принять точку B, то проекцией вивианны на плоскость Oxy будет строфоида («Квант», 1977, № 2, с. 43). Если в качестве центра проектирования взять точку A, то проекцией вивианны на плоскость Oyz будет равносторонняя гипербола (эта кривая обычно используется для демонстрации обратной пропорциональности величин). Если, наконец, оставить ту же плоскость проектирования, а в качестве центра проекции выбрать точку A' сферы, диаметрально противоположную точке A, то образом вивианны будет лемниската Бернулли («Квант», 1977, № 1, с. 25).

В. Березин

«Квант» для младших школьников

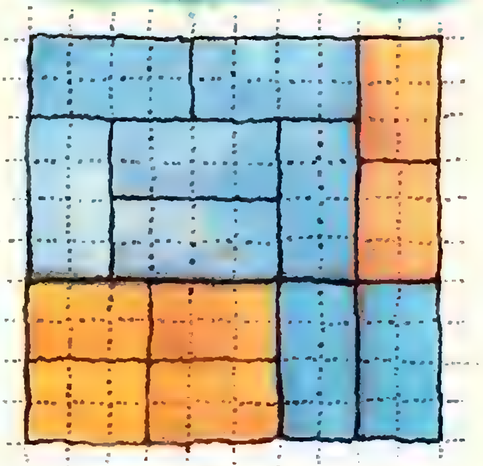


Задачи

1. Сколько булок было у пекаря? Ответом служит наибольшее возможное число «много» в примере, изображенном на рисунке.

2. Средний возраст одиннадцати игроков футбольной команды — 22 года. Во время матча один из игроков получил травму и ушел с поля. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21 году. Сколько лет футболисту, получившему травму?

3. Из восьми прямоугольников размером 2×4 и шести прямоугольников размером 2×3 Леня сложил квадрат размером 10×10 (см. рис.). Посмотрев на этот квадрат внимательно, он обнаружил, что в двух случаях стороны этих прямоугольников образуют отрезки, соединяющие противоположные стороны квадрата. Это показалось Лене некрасивым, и он решил попытаться сложить из данных четырнадцати прямоугольников тот же квадрат, но уже так, чтобы подобных отрезков не было. Однако он этого сделать не смог. Помогите Лене, ребята!



4. Задача-фокус. Возьмите многозначное число, у которого все цифры разные. Возьмите второе число, записанное теми же цифрами (в любом другом порядке). От большего числа отнимите меньшее. Любую отличную от нуля цифру разности обведите в кружочек, а сумму остальных цифр сообщите отгадчику (если разность — число двузначное или однозначное, то назовите оставшуюся цифру или нуль соответственно). Отгадчик «угадывает» цифру, обведенную в кружочек. Как он это делает?

Спрятанная арифметика

Б. Кордемский

Вы, наверное, не раз встречали арифметические равенства, в которых все или некоторые цифры заменены буквами или другими символами. В таких задачах требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись.

В Индии и Китае этот вид «математических развлечений» появился более 1000 лет назад. В Европе подобные задачи стали придумывать лишь с начала XX столетия. В тридцатых годах нашего века такие задачи назвали *криптарифметическими* *) — cryptarithmie (фр.), criptarithmetic (англ.). В европейских и американских журналах это название стало общепринятым. (В нашей литературе их обычно называют «числовыми головоломками» или «числовыми ребусами».) Установились и некоторые правила шифровки: разные цифры заменять разными буквами; избегать буквы О для замещения нуля; применять один небуквенный символ («звездочку»), заменяющий любую цифру. Желательно, чтобы задача имела единственное решение.

Едва появившись, криптарифметические задачи сразу становятся очень популярными. Их составители проявляют все большую изобретательность и изощренность. Возникают, например, задачи, в которых буквы, заменяющие цифры, образуют слова и даже фразы. Первым такие задачи начал придумывать известный английский составитель математических головоломок Г. Е. Дьюдени. Исторически первыми были две его буквенно-арифметические головоломки, опубликованные в 1924 году:

send + more = money; *)
(two)·(two) = three.

Первая головоломка обошла весь мир и приобрела репутацию классической в этом жанре.

Рассмотрим один пример «спрятанной» арифметики:**)

$$\begin{array}{r} \text{ИНН} \\ \times\ \text{ДОН} \\ \hline \text{С}{*}{*}{*} \\ \text{Р}{*}{*} \\ {*}{*}\text{Е}{*} \\ \hline {*}{*}{*}\text{КИ}{*} \end{array}$$

---

*) По-гречески κρυπτο — *спрятанный*.

*) Send more money — пришли больше денег (англ.).

**) Инн, Дон — реки (Инн — приток Дуная).

Здесь кружочком обозначена буква, отличная от остальных.

Первоначальный обзор примера показывает, что

1) ни одна цифра множимого и множителя не равна ни нулю, ни единице;

2) произведение (ИНН)·Н — четырехзначное число;

3) произведение (ИНН)·О — трехзначное число.

Будем испытывать возможные значения Н. Нетрудно убедиться, что Н не может равняться двум. Положим Н = 3; тогда И $\geqslant$4 и 1<О<3, причем значение О = 2 возможно только при И = 4. Получаем

$$\begin{array}{r} \times\, 433 \\ \text{Д}23 \\ \hline 1299 \\ 866 \\ {*}{*}\text{Е}{*} \\ \hline {*}{*}{*}\text{КИ}{*} \end{array}$$

Сумма 9 + 6 определяет значение И = 5 — в отличие от предположения, что И = 4. Значит, и случай Н = 3 невозможен.

Испытание следующего значения Н = 4 также приводит к несовпадению предполагаемых и получающихся в записи результата умножения значений И. Поэтому перейдем к предположению, что Н = 5. Если так, то И $\geqslant$ 2. В случае любого И > 2 нет подходящих значений для О. Если же И = 2, то О = 4 или О = 3. В первом случае, как нетрудно установить, вновь возникает разногласие в значениях И. Во втором случае получаем

$$\begin{array}{r} \times\, 255 \\ \text{Д}35 \\ \hline 1275 \\ 765 \\ {*}{*}\text{Е}{*} \\ \hline {*}{*}{*}\text{К}25 \end{array}$$

Значение И = 2 подтвердилось в итоговой сумме, а из всех возможных значений Д$\geqslant$4 пригодно лишь значение Д = 8.

Окончательно: ИНН = 255, ДОН = 835. Испытав остальные возможные значения Н = 6, 7, 8 и 9, убедитесь в том, что других решений задача не имеет.

Решите несколько «криптарифметических» задач;

1) one + two + five = eight;

2) zero + one + two = three;

3) two + three + seven = twelve;

4) ЛИНИЯ + ЛИНИЯ = ФИГУРА (здесь ЛИНИЯ — наименьшее из возможных чисел);

5) ЗАДАЧА + АНАЛИЗ = РЕШЕНИЕ (здесь РЕШЕНИЕ — наибольшее из возможных чисел);

6) БОРЯ + ИДИ + БУДЬ = ДОБР (здесь БОРЯ— это максимальное из возможных слагаемых);

7) ТРИ + ТРИ + ОДИН = СЕМЬ (здесь «спрятаны» все 10 цифр, причем числа ТРИ и СЕМЬ делятся соответственно на 3 и 7).

Ожерелье Антуана

Так называется замысловатое украшение, изображенное на первой странице обложки. Но это не творение художника-ювелира: оно было создано в начале 20-х годов французским математиком Л. Антуаном. (Несколько позднее, но независимо, аналогичный пример был получен советским математиком П. С. Урысоном, непосредственно перед его трагической гибелью в возрасте 26 лет.)

Что же изображает рисунок? Цепочку из шести торов первого ранга $T_1^{(1)}$, $T_2^{(1)}$, ..., $T_6^{(1)}$. В каждом из них — снова цепочка (меньших) торов; всего — 36 торов второго ранга, образующих более замысловатую цепочку $T_1^{(2)}, T_2^{(2)}, \ldots, T_{36}^{(2)}$. По этой же схеме строятся торы третьего ранга $T_1^{(3)}$, $T_2^{(3)}, \ldots, T_{216}^{(3)}$ и т. д. По определению, ожерелье Антуана есть пересечение всех этих цепочек: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{i=1}^{6n-1} T_i^{(n)})$.

Разумеется, Антуан придумал это множество не для забавы и даже не для красоты: множество A обладает совершенно неожиданными свойствами; эти свойства изучаются в одном из самых значительных разделов современной математики — топологии.

А. Б.

Куйбышевский государственный университет

Мы уже рассказывали о Куйбышевском государственном университете («Квант», 1977, № 7). Добавим только, что в этом году расширяется прием на химико-биологический факультет. На этом факультете имеются две специальности: «химия» (специализации — *физическая, органическая и неорганическая химия*) и «биология» (специализации — *биохимия, зоология, геоботаника, гистология и цитология, физиология человека и животных*). Ниже публикуются образцы вариантов письменного экзамена и задач из билетов устного экзамена по математике, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году, и примеры задач из билетов устного экзамена по физике.

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. Вычислить объем правильной треугольной пирамиды, если известен двугранный угол при боковом ребре, равный α, и радиус R круга, описанного около одной из боковых граней.

2. Доказать, что если $\frac{\alpha}{\beta}$ — иррациональное число, то уравнение

$$\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = 1$$

не имеет корней.

3. Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$$y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\cos 3x.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin \pi x, \quad y = 4(x^2 - x).$$

5. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x+5}}{\lg(9-x)}.$$

Физический факультет

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доказать, что расстояние между плоскостями, одна из которых проходит через вершины A, B_1, D_1, а другая — через вершины B, C_1, D, равно $\frac{1}{3}$ диагонали куба.

2. Найти модуль разности экстремумов функции

$$y = x^3 + 3x^2 - 3x + 1.$$

3. При каких значениях α неравенство

$$\frac{(2+\alpha)x^2 + (3+\alpha)x + 1 - \alpha}{x^2 + x + 2} \quad 2$$

выполняется для всех действительных x?

4. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{\cos x - \frac{1}{2}}}{\sqrt{6 + 35x - 6x^2}}.$$

Химико-биологический факультет

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, двугранный угол при основании равен α. В эту пирамиду вписан шар. Найти объем пирамиды, вершинами которой служат точки касания шара с боковыми гранями данной пирамиды и произвольная точка, лежащая в плоскости основания данной пирамиды.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x^2 - 8x + 1 \text{ и } y = x^2 - 8x - \sqrt{3}\,x + 1.$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\lg \frac{5x - x^2}{4}}.$$

4. Доказать, что последовательность

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n}$$

имеет предел.

Из билетов устного экзамена

Механико-математический факультет

1. Дано: α, β и γ — углы треугольника. Доказать равенство

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

2. Доказать неравенство

$$|\sin nx| \leqslant n |\sin x|.$$

3. Доказать, что если значения квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ являются целыми числами при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 2$, то при любом целом x значение данного трехчлена является целым числом.

Физический факультет

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2,\\ x+y=12.\end{cases}$$

5. Решить уравнение

$$\log_2 \sin x - \log_2 \cos x - \log_2 (1-\operatorname{tg} x) - \log_2 (1+\operatorname{tg} x) = 1.$$

6. Решить уравнение

$$3^{2x^2} - 2\cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2(x+6)} = 0.$$

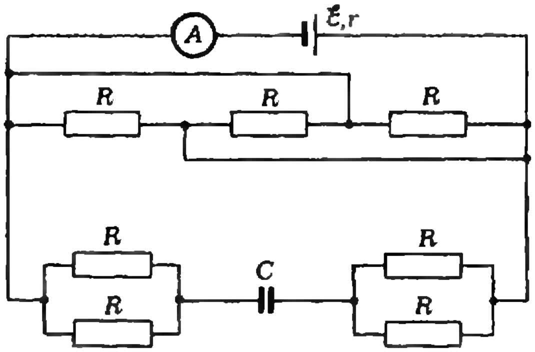
7. При каких значениях x выполняется неравенство

$$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-5\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2>0?$$

Физика

Механико-математический факультет

1. Может ли смещение луча, падающего из воздуха на плоскопараллельную стеклянную пластину, быть больше толщины этой пластины? Найти максимальное смещение луча.



Физический факультет

2. Найти силу тока, текущего через амперметр, и заряд на обкладках конденсатора в схеме, изображенной на рисунке, если величина э. д. с. источника тока равна $\mathscr{E}$, его внутреннее сопротивление r, емкость конденсатора C, величины сопротивлений во внешней цепи R.

Химико-биологический факультет

3. На высоте H от пола и расстоянии s от вертикальной стены параллельно полу брошен теннисный шар. Какова должна быть начальная скорость движения шара, чтобы после абсолютно упругого отражения от стены он упал на пол на расстоянии от стены, большем s?

В. Алимпиев, Л. Беркович,
С. Мешков, А. Хвостов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже публикуются варианты письменного экзамена по математике, предлагавшиеся на факультете вычислительной математики и кибернетики и на физическом факультете (для окончивших среднюю школу в 1977 году), и примеры задач устного экзамена по физике.

Математика

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Решить неравенство

$$2^{2x+1}-21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}+2\geqslant 0.$$

2. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2(-2x)-(3-\sqrt{2})\operatorname{tg}(5y)=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2},\\ \operatorname{tg}^2(5y)+(3-\sqrt{2})\sin(-2x)=\dfrac{3\sqrt{2}-1}{2}.\end{cases}$$

4. Города A, B, C, D, расположенные так, что четырехугольник $ABCD$ — выпуклый, соединены прямолинейными дорогами $AB=6$ км, $BC=14$ км, $CD=5$ км, $AD=15$ км и $AC=15$ км.

Из одного из городов одновременно вышли три туриста, идущие без остановок с постоянными скоростями. Маршруты всех туристов различны, причем каждый из них состоит из трех дорог и проходит через все города. Первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в одном городе, а третий закончил маршрут на час раньше туриста, закончившего маршрут последним.

Найти скорости туристов, если скорость третьего больше скорости второго и на $\frac{1}{2}$ км/час меньше скорости первого, причем скорости всех туристов заключены в интервале от 5 км/час до 8 км/час.

5. Найти все значения параметра α, удовлетворяющего неравенствам $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, при которых минимум функции $f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos\alpha - \sin\alpha) - 3x^2\sin 2\alpha$ на отрезке $-\sin\alpha \leqslant x \leqslant \cos\alpha$ принимает наименьшее значение.

Физический факультет

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \frac{3}{4}.$$

2. Найти площадь замкнутой фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 0, \quad y = 20 - 2x^2 - 6x.$$

3. Найти отрицательные члены последовательности

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где A_{n+4}^4 — число размещений, а P_{n+2} и P_n — числа перестановок.

4. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

5. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1 \times ((AA_1) \| (BB_1) \| (CC_1) \| (DD_1))$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

И. Горев

Физика

Физический факультет

1. После взрыва ракеты, летящей вертикально, образовались три осколка одинаковой массы, которые упали на землю одновременно. Расстояния от места старта до места падения двух из них равны $s_1 = 3$ км и $s_2 = 4$ км, причем линии, соединяющие места их падения с местом старта, составляют между собой прямой угол. Каково расстояние s_3 от места старта до места падения третьего осколка? (При вычислениях сопротивление воздуха не учитывать.)

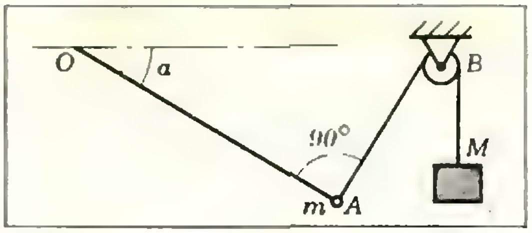


Рис. 1.

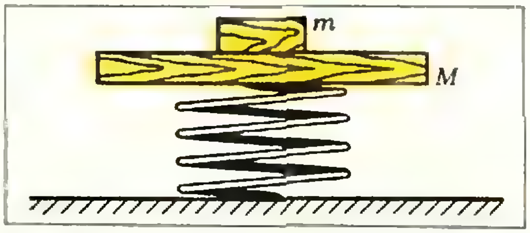


Рис. 2.

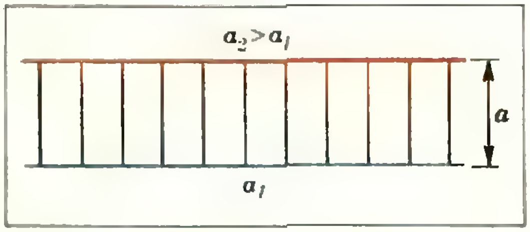


Рис. 3.

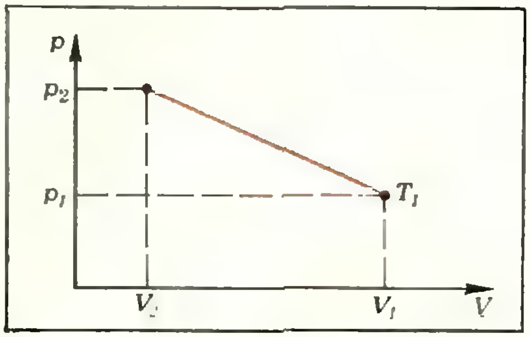


Рис. 4.

2. Тело массы $m = 1$ кг одной нитью связано с неподвижной точкой O, а второй нитью, перекинутой через невесомый блок B, с телом массы $M = 2$ кг (рис. 1). В некоторый момент времени угол OAB прямой, а отрезок OA составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Определить натяжение нити AB в этот момент времени.

3. На платформе пружинных весов массы $M = 10$ кг лежит тело массы $m = 3$ кг (рис. 2). С какой минимальной силой $|\vec{F}|$ нужно сдавить пружину весов, чтобы после прекращения действия силы тело при подъеме подпрыгнуло на платформе?

4. Из двух металлических тонких полосок склепана фигура в виде лестницы (рис. 3). Расстояние между полосками равно a. Полоски имеют разные коэффициенты линейного расширения α_1 и α_2 ($\alpha_1, \alpha_2 \ll 1$). При нагреве в результате различного удлинения полосок лестница искривляется. Найти радиус кривизны лестницы, если ее нагреть на Δt гра-

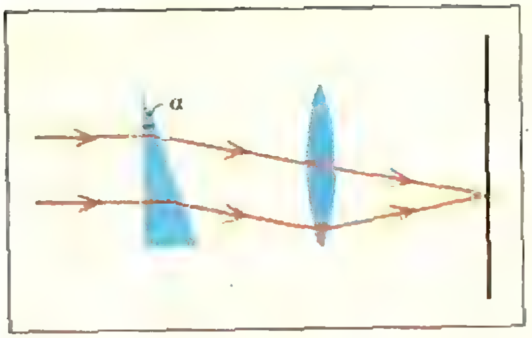


Рис. 5.

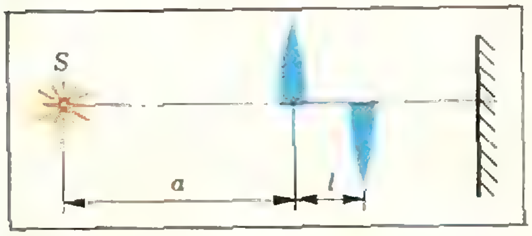


Рис. 6.

дусов. (Ширина лестницы много меньше ее длины.) Удлинением поперечных перекладин пренебречь.

5. Некоторое количество идеального газа меняет свое состояние таким образом, что этот процесс изображается прямой на диаграмме pV (рис. 4). Найти максимальную температуру в таком процессе. Известны p_1, V_1, T_1 и p_2V_2.

6. В однородном электрическом поле находятся отрицательный заряд $-q$ с массой m и положительный заряд $+Q$ с массой M. Заряды точечные; линия, соединяющая эти заряды, совпадает с направлением поля. Напряженность электрического поля равна $\vec{E}$. На каком расстоянии должны находиться эти заряды, чтобы они двигались с одинаковыми ускорениями? Как они при этом должны быть расположены?

7. Электрический паяльник мощностью 50 Вт рассчитан на включение в сеть переменного тока с напряжением 127 В. Какая мощность будет выделяться в паяльнике, если его включить в сеть переменного тока с напряжением 220 В последовательно с идеальным диодом? Сопротивление диода при прямом направлении тока можно считать равным нулю, при обратном — бесконечно большим. Сопротивление паяльника считать постоянным.

8. В воде идут два параллельных луча. Первый луч на границе вода — воздух испытывает полное внутреннее отражение. На пути второго луча на поверхности воды расположена плоскопараллельная стеклянная пластинка. Выйдет ли второй луч из воды или тоже испытает полное отражение?

9. Пучок параллельных лучей света падает нормально на тонкий стеклянный клин (призму) с показателем преломления $n=1{,}5$ и преломляющим углом $\alpha=6°$ (рис. 5). После клина свет проходит через линзу с фокусным расстоянием $F=20$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, образуется световое пятно. Если клин убрать, пятно сместится. Определить величину смещения.

10. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F=10$ см разрезана поперек на две половинки. Половинки линзы смещены друг относительно друга вдоль главной оптической оси на расстояние $l=10$ см (рис. 6). На расстоянии $a=30$ см от верхней половинки на главной оптической оси помещен точечный источник света S. На каком расстоянии от источника нужно поставить плоское зеркало (перпендикулярно к оптической оси), чтобы оба действительных изображения источника совпали?

Ф. Кросс

Физический закон

Великие открытия совершаются чисто случайно.

Чисто случайно встретились в лесу Еж и Лев.

— Приготовься, Еж, — говорит Лев. — сейчас я тебя ударю.

Приготовился Еж: свернулся клубком, не поймешь, где у него душа, а где пятки.

Лев размахнулся и — хлоп! В чем дело? По всем расчетам Ежу бы на три метра отлететь, а он отлетел только на полтора. А на остальные полтора отлетел Лев. Да и этих метров показалось ему мало: поджал хвост — и ходу!

«Интересное явление, — подумал Еж, — надо будет его проверить!»

Стал он его проверять, как полагается в научном исследовании. Делал опыты и на волках, и на медведях. Все подтвердилось: чем сильнее удар, тем дальше зверь и отлетает. Вот как Еж и открыл закон: действие равно противодействию.

Это было великое научное открытие. До сих пор в лесу только действовали, а противодействовать никто не решался. Теперь же все воспрянули духом. Зайцы, бобры, суслики — всякая лесная мелкота повылезла из своих нор, прет прямо на Льва.

— А ну, — говорит, — ударь!

Начал Лев ударять. Народу перебил — глядеть страшно.

— Это не по закону! — возмущается мелкота. — По закону действие равно противодействию!

Ударяет Лев. Ему наплевать на законы.

И тут нашелся один Суслик. Подытожил все опыты и — дополнил закон Ежа:

Действие равно противодействию — это физический закон.

Но там, где действует физическая сила, физические законы бездействуют.

В науке этот закон известен под именем закона Ежа — Суслика.

Из книги Ф. Кривина «Ученые сказки»

С. Овчинников

Принадлежность точек прямой и плоскости

При решении геометрических задач часто пользуются условием принадлежности точек прямой или плоскости. Применение векторов позволяет записать эти условия в простой и компактной форме. При этом в решении задачи зачастую отпадает необходимость в довольно хитроумных дополнительных построениях.

В этой заметке мы выведем условия принадлежности точек прямой и плоскости, и рассмотрим примеры их применения. Начнем с решения следующей задачи.

Задача 1 (Экономический факультет, МГУ, 1975). Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $|AB| = 5|AM|$, $|BC| = 3|BN|$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников AOC и ABC.

Решение (рис. 1). Так как

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{AMC}} = \frac{|AM|}{|AB|} \cdot \frac{|OC|}{|MC|} = \frac{1}{5} \cdot \frac{|OC|}{|MC|},$$

нам достаточно определить, в каком отношении точка O делит отрезок MC. Проведем ME, $E \in [BC]$, параллельно AN; тогда $\frac{|EN|}{|BN|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{1}{5}$. Но $|BN| = \frac{1}{3}|BC|$, откуда $|EN| = \frac{1}{15}|BC|$. Далее,

$$\frac{|OC|}{|MC|} = \frac{|NC|}{|EC|} = \frac{{}^2/_3|BC|}{{}^2/_3|BC| + {}^1/_{15}|BC|} = \frac{10}{11}.$$

Значит,

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2}{11}.$$

Заметим, что большинство абитуриентов не сумели додуматься до дополнительного построения $ME \parallel AN$ и поэтому не решили эту задачу.

Рассмотрим другое решение, основанное на результате задачи 254 учебника «Геометрия 9». Сформулируем этот результат так:

Теорема 1. *При любом выборе точки O равенство*

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \qquad (1)$$

для некоторого числа α является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C ($A \neq B$) одной прямой. При этом $\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{BA}$.

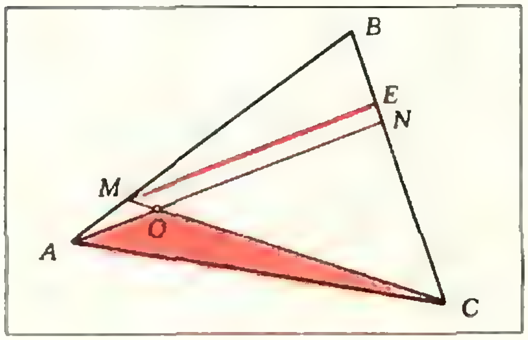


Рис. 1.

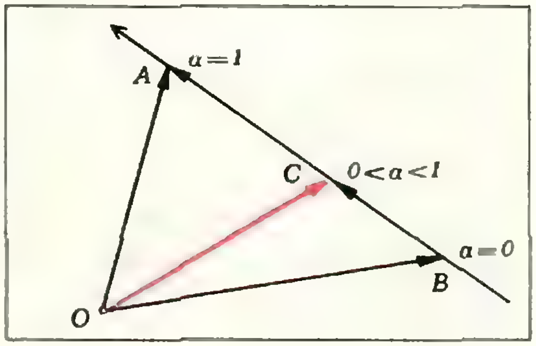


Рис. 2.

Рисунок 2 иллюстрирует теорему 1. Заметим, что значение коэффициента α определяет положение точки на прямой (AB). Если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то точка C находится между A и B; если $\alpha > 1$, то точка A находится между C и B и, наконец, если $\alpha < 0$, то точка B находится между A и C. Коэффициент α играет роль своеобразной координаты на прямой (AB): началом координат служит точка B, а масштаб задается отрезком BA, так что точка A имеет координату единица.

Вернемся к задаче 1, обозначим $\overrightarrow{BA} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$. Тогда $\overrightarrow{BM} = \frac{4}{5}\vec{p}$ и $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\vec{q}$. Так как точка O принадлежит прямым AN и CM, то

$$\overrightarrow{BO} = \alpha_1\overrightarrow{BM} + (1-\alpha_1)\overrightarrow{BC} = \alpha_2\overrightarrow{BA} + (1-\alpha_2)\overrightarrow{BN},$$

т. е.

$$\frac{4}{5}\alpha_1\vec{p} + (1-\alpha_1)\vec{q} = \alpha_2\vec{p} + \frac{1}{3}(1-\alpha_2)\vec{q},$$

откуда $\begin{cases} \frac{4}{5}\alpha_1 = \alpha_2, \\ 1-\alpha_1 = \frac{1}{3}(1-\alpha_2). \end{cases}$

Решая полученную систему, находим $\alpha_1 = \frac{10}{11}$, $\alpha_2 = \frac{8}{11}$. По теореме 1 $\overrightarrow{CO} = \alpha_1\overrightarrow{CM} = \frac{10}{11}\overrightarrow{CM}$, откуда $\frac{|CO|}{|CM|} = \frac{10}{11}$ и $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2}{11}$.

Задача 2 (Геологический факультет, МГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|CF|}{|EF|} = \frac{1}{5}$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{|MF|}{|ME|} = \frac{1}{4}$. Найти диагонали параллелограмма.

Решение (рис. 3). Пусть $\overrightarrow{CB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{q}$ и $\overrightarrow{CF} = x \cdot \vec{q}$. По условию

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CE} + \frac{4}{5}\overrightarrow{CF} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q} = \frac{2}{15}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q}.$$

Так как $\overrightarrow{CM}$ и $\overrightarrow{CA}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CA}$. Но $\overrightarrow{CA} = \vec{p} + \vec{q}$, откуда

$$\frac{2}{15}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q} = k\vec{p} + k\vec{q}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{p}$ и $\vec{q}$, получаем $\frac{2}{15} = k$; $\frac{4}{5}x = k$, откуда $x = \frac{1}{6}$. Но $|\overrightarrow{CF}| = x\,|\vec{q}| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$.

Далее, по условию, $|\overrightarrow{EF}| = 5|\overrightarrow{CF}| =$

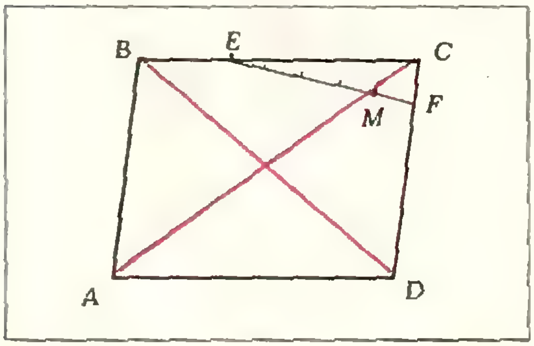


Рис. 3.

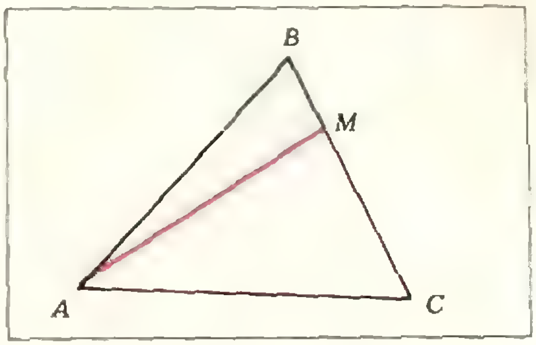


Рис 4.

$=\frac{10}{3}$. Обозначив $B\widehat{C}D$ через φ, из треугольника ECF по теореме косинусов находим $\cos\varphi=\frac{1}{10}$. Зная $\cos\varphi$, вычисляем по теореме косинусов диагонали $|AC|=\sqrt{45}$ и $|BD|=\sqrt{37}$.

Задача 3*). Дан треугольник ABC и точка M на стороне BC. Доказать, что

$$|AM|\cdot|BC|\leqslant|AB|\cdot|MC|+|AC|\cdot|BM|.$$

Решение (рис. 4). Имеем

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}.$$

Так как $\alpha=\frac{|MC|}{|BC|}$, то $1-\alpha=\frac{|BM|}{|BC|}$. Далее,

$$\left|\overrightarrow{AM}\right|=\left|\alpha\overrightarrow{AB}+(1-\alpha)\overrightarrow{AC}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha\left|\overrightarrow{AB}\right|+(1-\alpha)\left|\overrightarrow{AC}\right|=$$

$$=\frac{|MC|}{|BC|}\cdot|AB|+\frac{|BM|}{|BC|}\cdot|AC|,$$

откуда и следует утверждение задачи.

Теорема 1 допускает следующее обобщение на случай пространства.

Теорема 2. *Пусть A, B и C — попарно различные точки, не лежащие на одной прямой. При любом выборе точки O равенство*

$$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть (2) выполнено. Находим $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\beta(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$, откуда $\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ компланарны и, следовательно, точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

2) *Необходимость.* Если A, B, C и D принадлежат одной плоскости, то векторы $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ компланарны. Так как точки A, B и C попарно различны и не лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ неколлинеарны. Применяя теорему 11 из § 21 учебника «Геометрия 9», получаем, что вектор $\overrightarrow{CD}$ единственным образом представляется в виде

$$\overrightarrow{CD}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB},$$

откуда для любой точки O

$$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\alpha(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})+\beta(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})$$

или

$$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}.$$

Теорема 2 позволяет в решении некоторых задач обойтись без дополнительных построений, выполнение которых в пространстве обычно вызывает затруднения.

Задача 4 (Мехмат, МГУ, 1966). Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S отрезки

$$|SK|=\frac{2}{3}|SA|,\quad |SL|={}^{1}/_{2}|SB|,$$

$|SM|={}^{1}/_{6}|SC|$ соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найти длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

Решение (рис. 5). Пусть $\overrightarrow{SA}=\vec{p}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{q}$ и $\overrightarrow{SC}=\vec{r}$. Тогда $\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\vec{q}+(\vec{p}-\vec{q})+(\vec{r}-\vec{q})=\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}$. Имеем

$$\overrightarrow{SN}=k\overrightarrow{SD}=k(\vec{p}-\vec{q}+\vec{r}).$$

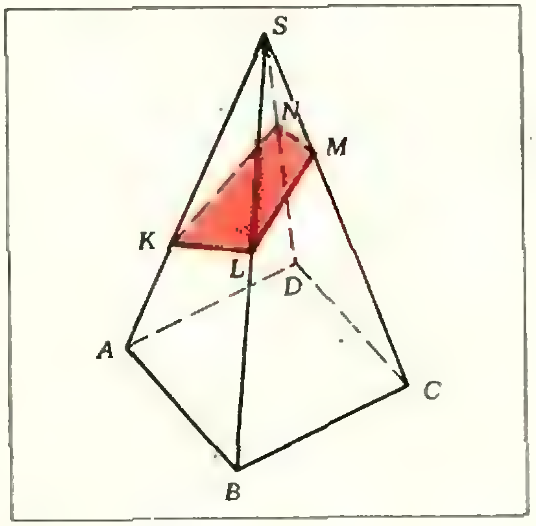


Рис. 5.

---

*) Эта задача предложена И. Шарыгиным.

Далее

$$\vec{SK} = \frac{2}{3}\vec{p},\quad \vec{SL} = \frac{1}{2}\vec{q} \text{ и } \vec{SM} = \frac{1}{3}\vec{r}.$$

Так как точки k, L, M и N принадлежат одной плоскости, то по теореме 2

$$\vec{SN} = \alpha\vec{SK} + \beta\,\vec{SL} + (1-\alpha-\beta)\vec{SM} = \frac{2}{3}\alpha\vec{p} + \frac{1}{2}\beta\vec{q} + \frac{1}{3}(1-\alpha-\beta)\vec{r}.$$

Мы получили два разложения вектора $\vec{SN}$ по некомпланарным векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Приравнивая коэффициенты этих разложений, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3}\alpha, \\ -k = \frac{1}{2}\beta, \\ k = \frac{1}{3}(1-\alpha-\beta). \end{cases}$$

Из этой системы находим $k = {}^2/_5$, откуда

$$|\vec{SN}| = \frac{2}{5}a.$$

Мы, по существу, здесь не использовали условия правильности пирамиды $SABCD$. (Какое на самом деле использовалось свойство правильной пирамиды?) Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу, не опираясь на теорему 2.

Задача 5 (Мехмат, МГУ, 1965). Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении $5:1$. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Решение (рис. 6). Пусть N и E — середины ребер AB и A_1C_1. Обозначим $\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{AC} = \vec{q}$ и $\vec{AA_1} = \vec{r}$. Тогда $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{p}$, $\vec{AE} = \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q}$ и $\vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{p}+\vec{q}) + \frac{5}{6}\vec{r}$.

Пусть X — произвольная точка секущей плоскости. Тогда

$$\vec{AX} = \alpha\vec{AP} + \beta\vec{AE} + (1-\alpha-\beta)\vec{AN} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2}\right)\vec{p} + \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}\right)\vec{q} + \left(\frac{5}{6}\alpha + \beta\right)\vec{r}. \quad (3)$$

Для построения сечения выясним, в каких точках секущая плоскость пересекает ребра призмы.

1) Ребро AA_1. Пусть $X = L$ точка пересечения секущей плоскости с ребром AA_1. Имеем $\vec{AL} = k\vec{r}$. Но в то же время справедливо разложение (3), откуда имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{5}{6}\alpha + \beta = k. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $k = -{}^1/_2$. Таким образом, $|AL| = \frac{1}{2}|AA_1|$.

2) Ребро AC. Пусть $X = F$ точка пересечения ребра AC и секущей плоскости. Тогда $\vec{AP} = k\vec{q}$. Сравнивая с (3), получаем систему

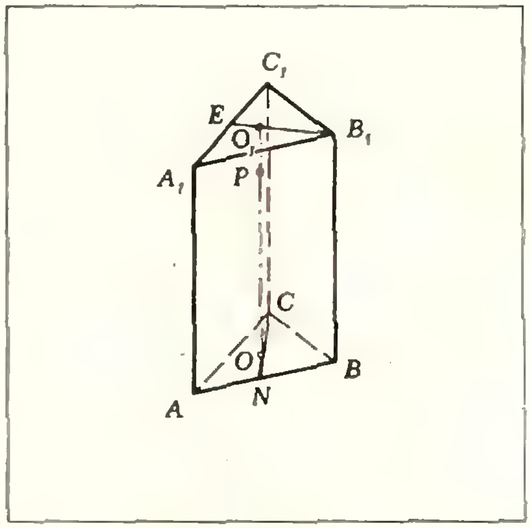


Рис. 6.

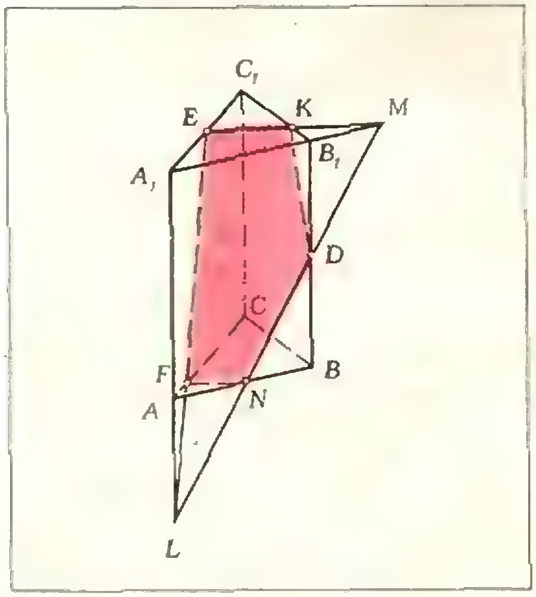


Рис. 7.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{2}=0, \\ \dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}=k, \\ \dfrac{5}{6}\alpha+\beta=0, \end{cases}$$

откуда $k=\frac{1}{6}$ и $|AF|=\frac{1}{6}|AC|$.

3) Ребро BB_1. Положим $X=D$. Тогда $\overrightarrow{AD}=\vec{p}+k\vec{r}$. Сравнивая с (3), получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}-\dfrac{\alpha}{6}-\dfrac{\beta}{2}=1, \\ \dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{\beta}{2}=0, \\ \dfrac{5}{6}\alpha+\beta=k, \end{cases}$$

откуда $k=\frac{1}{2}$ и $|BD|=|B_1D|=$ $=\frac{1}{2}|BB_1|$. Рассматривая аналогично ребра C_1B_1 и A_1B_1, находим $|B_1K|=\frac{1}{4}|C_1B_1|$ и $|B_1M|=$ $=\frac{1}{2}|A_1B_1|$.

Итак, сечение полностью определено (рис. 7). Вычислим объем многогранника A_1EKB_1DNAF. Для этого надо из объема пирамиды LA_1EM вычесть объемы пирамид $LAFN$ и DB_1KM. Пусть V — объем призмы. Из предыдущих вычислений нам известны соотношения между высотами $|LA_1|$, $|DB_1|$, $|LA|$ пирамид LA_1EM, $LAFN$, DB_1KM и высотой призмы, а также соотношения между площадями оснований. Это позволяет легко найти, что $V_{LA_1EM}=\frac{3}{8}V$,

$$V_{LAFN}=\frac{1}{72}V \quad \text{и} \quad V_{MKB_1D}=\frac{1}{48}V,$$

откуда объем многогранника $AEKB_1DNAF$ равен $\frac{3}{8}V-\frac{1}{72}V-$ $-\frac{1}{48}V=\frac{49}{144}V$. Итак, секущая плоскость делит объем призмы в отношении 49 : 95.

Заметим, во-первых, что в нашем решении нигде не использовалось условие, что призма правильная. Во-вторых, наш метод решения пригоден и в том случае, когда точки E и N не являются серединами ребер A_1C_1 и AB, тогда как решение с дополнительными построениями *) это обстоятельство существенно использует (прямая EP пересекает BB_1 в точке D потому, что $|A_1E|=$ $=|EC_1|$).

Внимательный читатель, наверное, заметил, сравнивая теоремы 1 и 2, что в теореме 1 коэффициенту α было дано простое геометрическое истолкование, тогда как геометрический смысл коэффициентов α и β в теореме 2 остается неясным. Мы восполним этот пробел в одном важном частном случае, оставляя обобщение читателю.

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 2 точка D лежит в треугольнике ABC, то из равенства*

$$\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$$

следует

$$\begin{cases} \alpha=S_{BDC}:S_{ABC}, \\ \beta=S_{ADC}:S_{ABC}, \\ 1-\alpha-\beta=S_{ADB}:S_{ABC}. \end{cases}$$

---

*) Сравните решение этой задачи с приведенным в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова, Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы», Москва, 1976, раздел 3, § 6, задача 7 (с. 514).

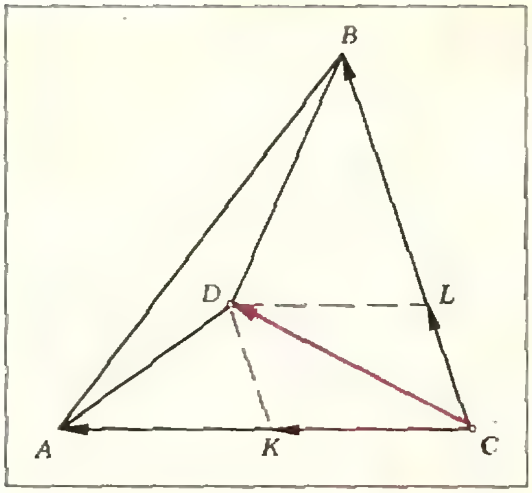


Рис. 8.

Доказательство (рис. 8). Как следует из доказательства теоремы 2 $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$. Положим $\overrightarrow{CK} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CL} = \beta\overrightarrow{CB}$. Из рисунка 8 видно, что $S_{ADC} : S_{ABC} = \beta$ и $S_{BDC} : S_{ABC} = \alpha$. Из этих равенств легко вытекает, что $S_{ADB} : S_{ABC} = 1-\alpha-\beta$.

Задачи

1. (Геофак, МГУ, 1966). Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении 3 : 1, считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?

2. (Геофак, МГУ, 1974). Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $|AK| : |KP| = 1 : 3$, $|CM| = |PM|$. Найти отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

3. (Химфак, МГУ, 1970). Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $|SD| = \frac{1}{2}|DL|$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4. (Геофак, МГУ, 1976). В параллелограмме $ABCD$ с диагоналями, равными $|AC| = 6$ и $|BD| = 24$, проведен отрезок EF, соединяющий точку E диагонали AC с точкой F стороны BC. Точки E и F выбраны таким образом, что $\frac{|FC|}{|BF|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|EA|}{|EF|} = \frac{1}{3}$. Известно, что точка M пересечения диагонали BD с отрезком EF делит его в отношении $\frac{|EM|}{|MF|} = \frac{1}{2}$. Найти стороны параллелограмма.

5. Дан треугольник ABC. На стороне AB взята точка D, а на стороне BC — точки E и F так, что $|AD| : |DB| = 3 : 2$, $|BE| : |EC| = 1 : 3$ и $|BF| : |FC| = 4 : 1$. В каком отношении прямая (AE) делит отрезок DF?

6. (Мехмат, МГУ, 1964). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?

7. (Мехмат, МГУ, 1965). Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

8. Внутри треугольника ABC взята точка O. Прямые (AO), (BO) и (CO) пересекают стороны BC, CA и AB соответственно в точках P, Q и R. Доказать, что

$$\frac{|AR|}{|RB|}\cdot\frac{|BP|}{|PC|}\cdot\frac{|CQ|}{|QA|} = 1.$$

9. Точки P и Q делят стороны BC и CA треугольника ABC в данных отношениях:

$$\frac{|BP|}{|PC|} = a, \quad \frac{|CQ|}{|QA|} = b.$$

Пусть O — точка пересечения прямых AP и BQ. Найти отношение площади четырехугольника $OPCQ$ к площади треугольника ABC.

10. Пусть $OABC$ — треугольная пирамида с вершиной O, а M — точка внутри треугольника ABC. Тогда

$$|OM|\cdot S_{ABC} \leqslant |OA|\cdot S_{MBC} + |OB|\cdot S_{MAC} + |OC|\cdot S_{MAB}.$$

Поправка. В условии задачи М483, опубликованной в Задачнике «Кванта» («Квант», 1978, № 1), допущена опечатка. Ниже мы помещаем правильное условие этой задачи. Срок присылки ее решений продлевается до 1 мая 1978 года.

М483. а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/20.

б) Какое наибольшее значение может принимать это отношение?

В. Орлов

Парадокс «большого» тела

При решении задач, в которых рассматривается взаимодействие тел с существенно различными массами, изменением энергии тела большей массы обычно пренебрегают. И это пренебрежение часто оказывается вполне корректным. Однако необходимо четко представлять себе, когда такое допущение возможно, а когда этого делать нельзя.

Для выяснения этого вопроса рассмотрим ряд задач, сформулированных в виде парадоксов.

Задача 1. Камень массы m падает на Землю с высоты h. 1) Запишем закон сохранения энергии, рассматривая движение камня в системе отсчета, связанной с центром масс системы камень — Земля. К моменту падения камня на Землю вся его потенциальная энергия mgh перешла в кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$:

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

где $\vec{v}$ — скорость камня перед ударом о Землю.

2) Запишем закон сохранения энергии, рассматривая движение в системе отсчета, связанной с лифтом, который движется вниз с постоянной скоростью $\vec{v}$ относительно Земли. В этой системе Земля обладает кинетической энергией $\frac{Mv^2}{2}$ (M — масса Земли), камень в начальный момент имел кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$ и потенциальную энергию mgh. К моменту падения камня на Землю и его кинетическая энергия, и его потенциальная энергия равны нулю, так что для всей системы можно записать:

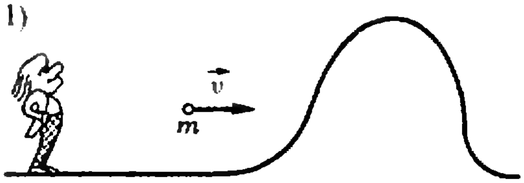
$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} + mgh = 0.$$

Получается, что закон сохранения энергии не выполняется в системе «лифт», но выполняется в системе отсчета, относительно которой лифт движется с постоянной скоростью. Парадокс?!

Задача 2. Пуля массы m, летящая со скоростью $\vec{v}$, попадает в склон горы и застревает в нем.

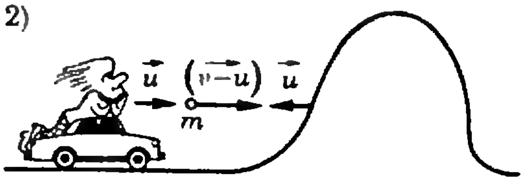
1)



Применив закон сохранения энергии в системе отсчета, в которой Земля неподвижна, найдем изменение энергии пули:

$$\Delta K_1 = 0 - \frac{mv^2}{2} = -\frac{mv^2}{2}.$$

2)

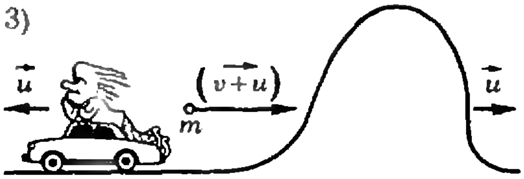


Будем рассматривать движение пули в системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью $\vec{u}$ в ту же сторону, что и пуля. Тогда изменение кинетической энергии пули равно

«Большим» телом в данной статье мы будем называть тело, масса которого во много раз больше, чем массы остальных тел, взаимодействующих с ним.

$$\Delta K_2 = \frac{mu^2}{2} - \frac{m(|\vec{v}| - |\vec{u}|)^2}{2} = -\frac{mv^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

3)



В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью $\vec{u}$ в сторону, противоположную направлению движения пули,

$$\Delta K_3 = \frac{mu^2}{2} - \frac{m(|\vec{v}| + |\vec{u}|)^2}{2} = -\frac{mv^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

Куда девается часть кинетической энергии пули? При резком торможении пули выделяется тепло; иными словами, энергия пули переходит в тепло: $|\Delta K| = Q$. И мы можем измерить количество выделяющегося тепла (пуля, например, попадает точно в калориметр). Однако из наших рассуждений следует, что производя три раза одни и те же измерения, мы должны получить различные результаты: $Q_1 \neq Q_2 \neq Q_3$. Парадокс?!

Можно придумать еще много подобных задач, в которых «парадоксы» возникают только оттого, что рассматриваемые системы тел — незамкнутые, а во всех рассуждениях это не учитывается. В приведенной выше задаче 2 в систему не включено такое «большое» тело, как Земля. А в задаче 1, пункт 2), хотя и включена в систему Земля, но изменение ее энергии считается равным нулю. В пункте 1) энергия Земли вообще не фигурирует, однако, наверняка, любой читатель скажет, что здесь все записано верно.

В чем же дело? Почему при выборе одних систем отсчета получаются вполне корректные результаты, при выборе других — парадоксы? Какую надо выбрать систему отсчета при решении задачи, чтобы телом большой массы можно было пренебречь, упрощая тем самым решение задачи? Чтобы ответить на эти вопросы, вернемся к задачам-«парадоксам» и проведем все рассуждения «абсолютно строго».

Задача 1. 1) В системе отсчета, связанной с центром масс системы тел камень — Земля, в начальный момент Земля покоится и вся энергия системы равна потенциальной энергии камня. К моменту падения камня на Землю энергия системы равна $\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$, где $\vec{v}$ — скорость, которую приобрел камень под действием силы притяжения Земли, а $\vec{u}$ — скорость, которую приобрела Земля под действием силы притяжения камня. Найдем скорость $|\vec{u}|$, воспользовавшись законом сохранения импульса:

$$m|\vec{v}| - M|\vec{u}| = 0,$$

откуда

$$|\vec{u}| = \frac{m}{M}|\vec{v}|.$$

Теперь запишем закон сохранения энергии системы:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{M\left(\frac{m}{M}|\vec{v}|\right)^2}{2} = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Эта запись — «абсолютно строгая». Однако ясно, что во всех реальных задачах (о падении тел на Земле) $m \ll M$ и величина $\frac{m}{M}$ ничтожно мала по сравнению с 1, так что ею можно пренебречь. Тогда в системе отсчета, связанной с центром масс системы тел камень — Земля, закон сохранения энергии запишется так:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}.$$

2) В системе отсчета «лифт» начальная энергия системы камень — Земля равна $mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}$, к моменту падения камня энергия системы равна $\frac{Mu^2}{2}$, где $\vec{u}$ — ско-

рость Земли к этому моменту. Воспользовавшись законом сохранения импульса —

$$m|\vec v| + M|\vec v| = M|\vec u|,$$

найдем $|\vec u|$:

$$|\vec u| = |\vec v|\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Итак, энергия системы к моменту падения камня равна

$$\frac{Mu^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + mv^2 + \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}.$$

Мы же раньше считали, что энергия Земли не меняется и к моменту падения камня равна $\frac{Mv^2}{2}$, т. е. мы пренебрегли величиной $\frac{Mu^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = mv^2 + \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}$, которая больше кинетической энергии камня. Очевидно, что в этом была наша ошибка, которая и привела к парадоксу. «Строго» закон сохранения энергии системы следует записать так:

$$mgh + \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + mv^2 + \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}.$$

Используя условие «большого» тела, т. е. учитывая, что $m \ll M$, мы можем пренебречь величиной $\frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}$, и тогда из закона сохранения энергии найдем

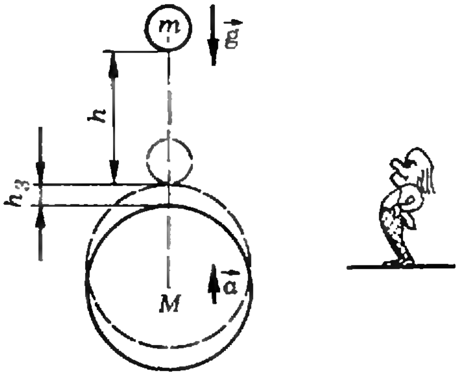
$$mgh = \frac{mv^2}{2}!$$

Итак, в системе отсчета, связанной с центром масс системы камень — Земля, в которой *«большое» тело* — Земля — *первоначально покоится, изменением энергии «большого» тела можно пренебречь*. В системе «лифт» *«большое» тело* Земля *имеет начальную скорость* $\vec v$, изменение ее энергии сравнимо с изменением энергии камня, и *пренебрегать этим изменением* нельзя.

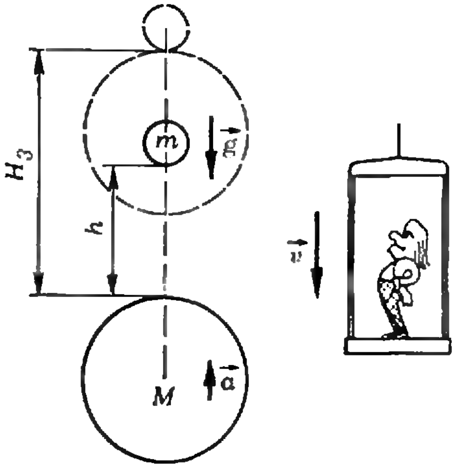
Изменения кинетической энергии Земли в двух рассмотренных системах отсчета можно найти и по-другому — рассчитав работу силы притяжения, действующей на Землю со стороны камня. В обеих системах сила притяжения одна и та же и равна

$$\vec F = M\vec a = -m\vec g.$$

Однако перемещения Земли в разных системах различны:



$$h_{\text{з}} = \frac{|\vec a|t^2}{2}.$$



$$\vec H_{\text{з}} = |\vec v|t + \frac{|\vec a|t^2}{2}.$$

Совершаемые силой $\vec F$ работы, а следовательно, изменения кинетической энергии Земли, равны

$$A_1 = \Delta K_1 = m|\vec g|\frac{|\vec a|t^2}{2},$$

$$A_2 = \Delta K_2 = m|\vec g|\left(|\vec v|t + \frac{|\vec a|t^2}{2}\right).$$

Подставив $|\vec a| = \frac{m|\vec g|}{M}$ и $|\vec v| = |\vec g|t$, получим

$$\Delta K_1 = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M},$$

$$\Delta K_2 = mv^2 + \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M}.$$

Эти результаты показывают, что изменение кинетической энергии одного и того же тела может быть существенно различным в различных системах отсчета. Однако закон сохранения энергии для замкнутой системы тел выполняется в любой инерциальной системе отсчета.

Обратимся теперь к задаче 2.

Задача 2. Изменение кинетической энергии пули в рассмотренных системах отсчета различно:

$$\Delta K_1 = -\frac{mv^2}{2},$$

$$\Delta K_2 = -\frac{mv^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}|,$$

$$\Delta K_3 = -\frac{mv^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}|.$$

Согласно теореме о кинетической энергии — $A = \Delta K$ — различна и работа внешней силы, — силы, действующей на пулю со стороны склона горы. Другими словами, вследствие относительности перемещения в различных системах отсчета относительна и работа внешней силы, а следовательно, относительно и изменение кинетической энергии незамкнутой системы тел.

Парадокс, к которому мы пришли в этой задаче, вызван ошибочной записью

$$Q = -\Delta K.$$

Это выражение справедливо лишь для замкнутых систем тел, так как для таких систем изменение кинетической энергии всех тел системы инвариантно (т. е. неизменно) относительно любых инерциальных систем отсчета.

Так что в задаче 2 количество выделившегося тепла равно $Q = |\Delta K_п| + |\Delta K_3|$, где $\Delta K_п$ и ΔK_3 — изменения кинетических энергий пули и Земли. Однако ответ, полученный в пункте 1), верен, именно такое количество тепла выделяется, в какой бы системе мы ни решали задачу:

$$Q = |\Delta K_1| = \frac{mv^2}{2}.$$

Докажем это утверждение. Для этого проведем строго все наши прежние рассуждения:

1) В системе отсчета, в которой Земля (гора) первоначально покоится, энергия системы равна кинетической энергии пули $\frac{mv^2}{2}$. При попадании пули в гору Земля приобретает некоторую скорость $\vec{u}$, которую мы можем найти из закона сохранения импульса: $M|\vec{u}| = m|\vec{v}|$, откуда $|\vec{u}| = \frac{m}{M}|\vec{v}|$. Следовательно, Земля приобретает кинетическую энергию $\Delta K_3' = \frac{Mu^2}{2}$, и закон сохранения энергии всей системы должен быть записан в виде

$$|\Delta K_п| = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2} + Q,$$

или

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}.$$

Воспользовавшись условием «большого» тела — $m \ll M$, получим

$$Q = \frac{mv^2}{2} = |\Delta K_1|!$$

2) В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью $\vec{u}$ в ту же сторону, что и пуля, кинетическая энергия Земли изменяется на величину $\Delta K_3'$. Это изменение вызвано уменьшением ее скорости от значения $|\vec{u}|$ до значения $|\vec{u} - \Delta\vec{u}|$.

Величину Δu можно определить, применив закон сохранения импульса для системы тел пуля — Земля в инерциальной системе отсчета, связанной с их центром масс (изменение скорости инвариантно относительно инерциальных систем отсчета!):

$$M|\Delta\vec{u}| = m|\vec{v}|, \quad \Delta\vec{u} = \frac{m}{M}|\vec{v}|.$$

С учетом этого значения Δu изменение кинетической энергии Земли в рассматриваемой системе отсчета равно

$$\Delta K_3' = \frac{M(u-\Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = - M|\vec{u}||\Delta\vec{u}| + \frac{M\Delta u^2}{2} = -m|\vec{v}||\vec{u}| + \frac{m}{M}\cdot\frac{mv^2}{2}.$$

Так как $m \ll M$, то можно записать: $\Delta K_3' = -mvu$.

С учетом уменьшения энергии Земли закон сохранения энергии запишем в виде

$$\frac{m(v-u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2} - m|\vec{v}||\vec{u}| + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mv^2}{2}!$$

3) В системе отсчета, связанной с автомобилем, который движется со скоростью $\vec{u}$ в сторону, противоположную направлению движения пули, кинетическая энергия Земли увеличивается на величину $\Delta K_3''' = m|\vec{v}||\vec{u}|$. (Доказательство этого аналогично выше проведенному.) С учетом увеличения кинетической энергии Земли закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{m(v+u)^2}{2} = \frac{mu^2}{2} + m|\vec{v}||\vec{u}| + Q.$$

Отсюда

$$Q = \frac{mv^2}{2}!$$

Итак, выражение $Q = \Delta K$, справедливое лишь для замкнутых систем тел (т. е. когда ΔK есть изменение энергии всей системы), оказывается корректным и для незамкнутой системы тел, когда эта система рассматривается в системе отсчета, в которой «большое» тело первоначально покоится.

В заключение предлагаем вам самостоятельно разобраться в следующих «парадоксах».

1. Автомобиль *А* движется со скоростью $\vec{v}$ относительно Земли. После того как скорость автомобиля увеличилась вдвое, его кинетическая энергия возросла на величину

$$\Delta K_1 = \frac{m(2v)^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}mv^2.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в автомобиле *Б*, который движется с той же скоростью $\vec{v}$ и в том же направлении, что и автомобиль *А*, изменение кинетической энергии автомобиля *А* будет равно

$$\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2} - 0 = \frac{mv^2}{2}.$$

Для наблюдателя, находящегося в автомобиле *В*, который движется с той же по модулю скоростью, что и автомобиль *А*, но в противоположном направлении, изменение кинетической энергии автомобиля *А* будет равно

$$\Delta K_3 = \frac{m(3v)^2}{2} - \frac{m(2v)^2}{2} = \frac{5}{2}mv^2.$$

Получился странный на первый взгляд результат: количество сгоревшего топлива в автомобиле *А* неизменно, а изменение кинетической энергии автомобиля *А* в различных системах отсчета различно. Нет ли здесь противоречия с законом сохранения энергии?

2. Пуля массы m, движущаяся со скоростью $\vec{v}$, попадает в платформу с песком, движущуюся со скоростью $\vec{u}$ в том же направлении, и застревает в ней. Найдем количество теплоты, выделяющееся при этом.

В системе отсчета, связанной с Землей,

$$Q_1 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{m}{2}(v^2 - u^2).$$

В системе отсчета, связанной с платформой,

$$Q_2 = \frac{m}{2}(v-u)^2.$$

Получился парадокс: возможно, в одной системе отсчета пуля расплавится, а в другой — нет?!

3. Из пушки, установленной в самолете, летящем со скоростью $\vec{u}$, производится выстрел в направлении полета.

1) Пусть относительно системы отсчета, движущейся со скоростью $\vec{u}$, снаряд приобретает скорость $\vec{v}$. Кинетическая энергия $\frac{mv^2}{2}$ снаряду сообщается за счет энергии Π сгоревших пороховых газов:

$$\Pi = \frac{mv^2}{2}.$$

2) Относительно системы отсчета, связанной с Землей, скорость снаряда равна $\vec{v} + \vec{u}$, и следовательно,

$$\Pi = \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}.$$

Поскольку величина Π инвариантна относительно систем отсчета, то из приведенных рассмотрений следует, что

$$v^2 + u^2 = (v+u)^2.$$

Найдите ошибку в рассуждениях.

Новые книги

В этом году мы продолжаем публиковать аннотации на новые книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. По многочисленным просьбам читателей мы будем помещать также аннотации на некоторые книги, выпускаемые издательствами «Молодая гвардия», «Детская литература», «Атомиздат» и «Знание».

В этом номере мы расскажем о книгах, выходящих в первом квартале 1978 года.

Большинство этих книг можно приобрести через специализированные магазины «Книга — почтой»:

1. Москва, В-464, Мичуринский проспект 12, магазин «Книга — почтой»;
2. Москва, К-50, ул. Медведева 1, маг. № 8;
3. Москва, ул. Кржижановского 14, маг. № 93;
4. Москва, ул. Литвина-Седого 2а, маг. № 108.

Заказы на книги лучше всего оформлять на почтовых открытках (на каждую книгу — по отдельной открытке).

Математика

Издательство «Наука»

1. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи.* Издание 4-е. Объем 6 л., тираж 50 000 экз., цена 27 к.

Числа Фибоначчи, возникшие из знаменитой задачи о размножающихся кроликах, имеющей почти семисотпятидесятилетнюю давность, до сих пор остаются одной из самых увлекательных глав элементарной математики. Задачи, связанные с числами Фибоначчи, рассматриваются на занятиях школьных математических кружков, предлагаются на математических олимпиадах, приводятся во многих популярных книгах по математике. В предлагаемой книжке наиболее подробно изложены теоретико-числовые свойства чисел Фибоначчи; в частности, разобраны некоторые сложные вопросы, связанные с делимостью. Кроме того, демонстрируются связи чисел Фибоначчи с непрерывными дробями, с геометрией, показывается их роль в теории поиска.

Книга рассчитана на школьников старших классов.

2. Постников М. М. *Теорема Ферма. Введение в теорию алгебраических чисел.* Объем 8 л., тираж 50 000 экз., цена 31 к.

Книга является введением в теорию алгебраических чисел. Основные понятия и идеи этой теории изложены в ней в связи с теоремой Ферма́. Одна из целей книги — убедить читателя в глубине и сложности проблематики, связанной с теоремой Ферма́, и в полной бесперспективности поисков ее элементарного доказательства.

Изложение в книге ведется так, что даже читатель с минимальной подготовкой может усвоить ее основные идеи.

Книга предназначена школьникам старших классов (первые главы), студентам, учителям и всем любителям математики, которые хотят познакомиться с теорией алгебраических чисел в ее классическом аспекте.

3. Соболь И. М. *Метод Монте-Карло.* Издание 3-е, доп. Объем 3 л., тираж 30 000 экз., цена 15 к.

Эта книжка написана на основе лекций, читанных автором на протяжении нескольких лет слушателям факультета вычислительной техники Общественного университета. В 1971 году она была удостоена почетной грамоты Всесоюзного конкурса на лучшие учебные пособия для народных университетов.

Метод Монте-Карло — это численный метод решения математических задач при помощи моделирования случайных величин. Иногда метод Монте-Карло называют методом статистических испытаний.

При решении задач методом Монте-Карло некоторое испытание повторяется большое число раз, после чего результаты всех опытов осредняются. Метод Монте-Карло позволяет моделировать любой процесс, на протекание которого влияют случайные факторы. Кроме того, для многих чисто математических задач, не связанных с какими-либо случайностями, можно искусственно придумать вероятностную модель, позволяющую решать эти задачи (например, задачу приближенного вычисления определенного интеграла). Все это позволяет говорить о методе Монте-Карло как о весьма универсальном численном методе решения математических задач.

Создателями метода Монте-Карло считают американских математиков Дж. Неймана и С. Улама.

4. Понтрягин Л. С. *Метод координат.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 25 коп.

Эта книга — первая из четырех небольших популярных книг, которые будут опубликованы под общим названием «Знакомство с высшей математикой». В ней излагаются важнейшие математические применения прямоугольных декартовых координат на плоскости. Даются геометрические определения эллипса, гиперболы и параболы при помощи фокусов и директрис и приводится классификация кривых второго порядка. Большое внимание уделяется комплексным числам, геометрически изучаются комплексные многочлены от комплексных переменных и дается геометрическая идея доказательства основной теоремы алгебры (о том, что каждый многочлен степени n имеет ровно n корней).

Каждая глава книги снабжена добавлениями, относящимися уже не к плоскости, а к пространству. Книга будет полезна школьникам старших классов, а также преподавателям средней и высшей школы.

Издательство «Мир»

5. **Барр С.** *Россыпи головоломок.* Перевод с англ. Объем 23 л., тираж 50 000 экз, цена 2 р.

Настоящий сборник головоломок продолжает серию книг по занимательной математике. Он составлен из трех небольших книг, написанных американским писателем и любителем математики Стивенсом Барром. Вышедшие в США тремя отдельными изданиями: «Россыпи головоломок», «Новые россыпи головоломок» и «Топологические эксперименты», — эти книги имели большой успех у читателей, — даже больший, чем успех чисто беллитристических произведений Барра.

В первых двух книгах (в настоящем издании они объединены в первой части) собраны увлекательные и остроумные головоломки, причем не только математические, но и «головоломки из повседневной жизни». Третья книга в популярной и занимательной форме знакомит читателя с топологией — одним из важнейших разделов современной математики. «Топологические эксперименты» Барра, безусловно, могут способствовать пробуждению интереса к топологии и развитию некоторой топологической интуиции.

Книга будет доступна и интересна самому широкому кругу читателей.

Физика

Издательство «Наука»

1. **Компанеец А. С.** *Симметрия в макро- и микромире.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 38 к.

Эта книга состоит из 3-х научно-популярных статей: «О симметрии», «Симметрия в микромире» и «Мир теории относительности». Все эти статьи подчинены одной идее — показать роль симметрии в современой физике.

Книга рассчитана на широкий круг читателей и вполне доступна школьникам старших классов.

2. **Кресин В. З.** *Сверхпроводимость и сверхтекучесть.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

В книге в интересной и увлекательной форме рассказывается о необычных «сверх»-явлениях — сверхпроводимости и сверхтекучести, наблюдаемых при низких температурах. Избегая излишнего увлечения математикой, автор делает основной упор на качественное объяснение соответствующих закономерностей.

Книгу с интересом прочтут школьники старших классов, интересующиеся физикой.

3. **Ландау Л. Д., Китайгородский А. И.** *Физика для всех. Физические тела.* Издание 4-ое, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Цель этой книги — дать читателю в популярной форме отчетливое представление об основных идеях и достижениях современной физики.

Книга написана оригинально, свежо и с большим вкусом. Хорошее оформление книги способствует пониманию излагаемых вопросов.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

4. **Зигель Ф. Ю.** *Астрономы наблюдают.* Объем 10 л., тираж 75 000 экз., цена 38 к.

В книге увлекательно рассказывается о том, как астрономы наблюдают небо (с древних времен до наших дней). Читатель познакомится с основными астрономическими инструментами — от подзорной трубы до радиотелескопа.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

5. **Рябов Ю. А.** *Движения небесных тел.* Издание 3-е, перераб. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге содержится популярное изложение истории возникновения небесной механики и ее основных проблем, касающихся конкретных движений небесных тел: планет, астероидов, спутников планет, звезд. Большой раздел книги посвящен движению искусственных спутников Земли и автоматических межпланетных станций.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

6. **Гейзенберг В.** *Смысл и красота физики.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 65 к.

В книге собраны научно-популярные статьи и речи Вернера Карла Гейзенберга (1901—1976) — классика современного естествознания, одного из создателей квантовой теории. В сборник включены также статьи о Гейзенберге видных советских и зарубежных физиков.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

7. **Эльштейн П.** *Юному конструктору ракет и космических кораблей.* Перевод с польского. Объем 16 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 15 к.

Книга предназначена для ребят, интересующихся конструированием космических ракет. В ней рассмотрен широкий круг вопросов, связанных с расчетом параметров и проектированием моделей ракет и космических летательных аппаратов. Даны рекомендации по изготовлению различных топливных смесей, обеспечению безопасности старта, а также мерам, гарантирующим безопасное приземление моделей с помощью тормозных (парашютных) устройств. Приводится подробное описание моделей-рекордсменов, отмеченных высшими наградами на последних международных соревнованиях, оригинальной модели ракеты-носителя пилотируемых космических кораблей «Союз», ракеты со складывающимися в полете крыльями, двухступенчатой «ракеты-бумеранга», которая всегда сама возвращается в точку старта, и др.

Книга предназначена для массового читателя.

Издательство «Атомиздат»

8. **Головин И. Н.** *Игорь Васильевич Курчатов.* Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 45 к.

Эта книга посвящена биографии выдающегося советского физика академика И. В. Курчатова.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

И. Клумова,
М. Смолянский

Почему и как исчезает пустота

Так называется очередная научно-популярная книга профессора Я. Е. Гегузина *), известного читателям «Кванта» как автора «Капли» (см. «Квант», 1974, № 8) и «Очерков о диффузии в кристаллах» (см. «Квант», 1975, № 7). Как и первые две книги, она написана живо, увлекательно, ярко. При первом взгляде может показаться, что тема слишком узкая и специальная: книга посвящена истории развития физических идей современной теории спекания, то есть процесса, при котором из порошков создаются сплошные металлические или керамические материалы. Однако на самом деле содержание книги намного шире. По существу это книга о научном поиске, о борьбе идей, о том, как теория движет практику, а практика указывает путь теории, как логика живой науки ведет мысль ученого.

Как спекается порошок? Как пористое тело превращается в тело сплошное? Куда «уходит пустота»? Как сцепляются между собой частицы? Для ответа на эти вопросы надо рассмотреть — это и делает автор книги, — как построено сплошное тело, каковы дефекты его атомной структуры, какую роль играют поры в кристалле и как они движутся, как передвигаются крупинки на поверхности твердого тела и т. п.

Попутно автор рассказывает о множестве опытов, находок экспериментаторов, о борьбе теорий. Перед глазами читателя возникают живые портреты. Вот стеклодув Е. В. Петушков обращает внимание физиков на то, что отверстие в стеклянной пластинке может при нагревании не заплывать, а наоборот, расти — все дело в соотношении диаметра отверстия и толщины пластинки. Вот доцент Харьковского университета Н. Н. Овчаренко, склонясь над микроскопом, следит как «залечиваются» тончайшие поры в кристалле, измеряя их толщину по ярким цветам интерференционной картины. Вот столкнулись идеи выдающегося теоретика Я. И. Френкеля (исходившего из теории жидкого состояния вещества) и замечательного экспериментатора Б. Я. Пинеса (основывавшегося на опыте технологии производства огнеупоров). Вот сам автор, Я. Е. Гегузин, запальчиво спорит на международном конгрессе с профессором Морганом, а потом ставит опыты в своей лаборатории и ... убеждается в том, что прав был не он, а Морган.

В книге почти нет формул, нет математических выводов, но есть четкие качественные пути вывода формул, меткие оценки порядков величин и основных предпосылок.

Круг рассматриваемых вопросов очень широк. Здесь и атомное строение кристаллов с их дефектами структуры, и физика процесса диффузии, и кинетика движения дефектов в кристалле, и физика технологических процессов и операций, и подробное описание ряда опытов. Достаточно привести заголовки некоторых разделов — «Как это началось?», «Существует ли искомая формула?», «Цена формуле», «Слияние теорий», «О технологе — грамотном и творческом», «Много ли технологии надо физику?», «Взгляд в будущее», — чтобы увидеть, сколь живо и увлекательно ведет свое повествование автор. Особенно ценно то, что он не ставит точку, не завершает, не стремится показать обязательно что-то законченное, а сознательно ставит в конце знак вопроса — взгляд в будущее, в то, что еще предстоит сделать.

Книга читается как увлекательная повесть, от нее трудно оторваться. В то же время автор книги нигде не увлекается излишней популяризацией. Изложение везде строго, точно, на самом современном уровне науки. Сам автор определяет свою книгу, как книгу о научном поиске, «об обстоятельствах, при которых производились исследования, ... об истории научных результатов, которые некогда выглядели откровением, а на поверку оказались ошибкой, о статьях, которые при их появлении были признаны немощными, а на деле оказались жизнеспособными, о конференциях, встречах и дискуссиях за круглыми и некруглыми столами, во время которых отыскивалась истина, прятавшаяся среди множества экспериментальных кривых, электронно-микроскопических фотографий, четких формул и не очень четких комментариев к ним»...

Замысел этот автору вполне удался. Начав с простого вопроса о том, как прессуют порошки, изготовляя из них металлические детали машин или огнеупорные материалы, автор привлек широкий круг физических явлений в кристаллах и кристаллических порошках и рассказал о них живо, ярко и увлекательно на фоне исторической картины развития науки в этой области.

М. Шаскольская

---

*) Я. Е. Гегузин. Почему и как исчезает пустота. М., «Наука», 1976.

Суммы длин и минимум энергии

9. Рассмотрим следующую механическую систему. Сквозь три кольца A, B и C продета невесомая и нерастяжимая нить; эта нить прикреплена к кольцу A. Кольцо A может скользить без трения по окружности K, кольца B и C — по прямым l_1 и l_2 (рис. 1). К концам нити подвешены грузы масс p и q. Покажите, что задача определения положения равновесия этой механической системы эквивалентна нашей задаче. В положении равновесия суммы сил, действующих на кольца A, B и C, равны нулю, поэтому $[AB]\perp l_1$ и $[AC]\perp l_2$, $p\sin\alpha = q\sin\beta$. Задача сводится к делению угла между прямыми l_1 и l_2 на две части α и β с известным отношением синусов. Это построение можно осуществить циркулем и линейкой.

Рассмотрите случай, когда угол между дорогами l_1 и l_2 произвольный.

11. Рассмотрим следующую механическую систему. В вертикальной плоскости расположены две концентрические окружности с центром O радиусов r и R. В этой же плоскости расположен жесткий стержень, который может вращаться без трения вокруг точки O (рис. 2). К точкам C и D стержня OP ($|OC|=r$, $|OD|=R$) прикреплены две невесомые и нерастяжимые нити, пропущенные через блоки в точках A и B соответственно. К концам нитей прикреплены одинаковые грузы.

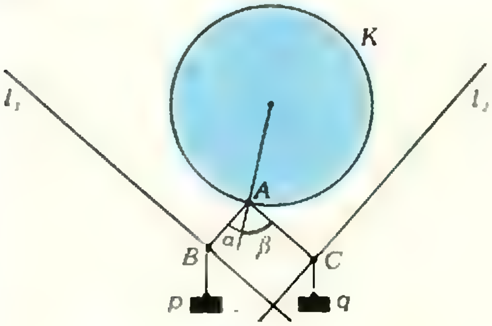


Рис. 1.

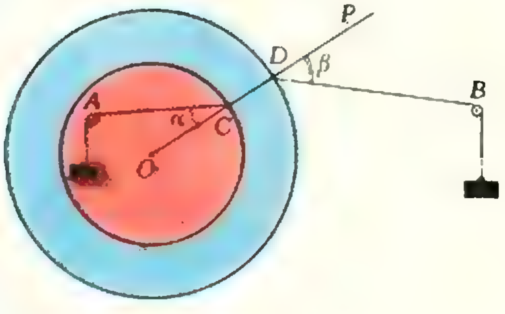


Рис. 2.

Задача определения положения равновесия этой механической системы эквивалентна нашей геометрической задаче. Условием равновесия стержня OP является равенство нулю суммы моментов сил натяжения нитей, действующих на этот стержень. Отсюда получаем условие для искомого положения моста CD: $r\sin\alpha = R\sin\beta$.

Как выглядит парабола?

1. Первый способ. Для $f(x) = x^5$ вторая производная равна $f''(x) = 20x^3$, поэтому при $x>0$ угловой коэффициент касательной $k(x) = 5x^4$ возрастает. Этому условию удовлетворяет только график 6,*а*.

Второй способ. Поскольку уравнение $x^5 = kx$ может иметь не более трех решений ($x=0$; $\sqrt[4]{k}$; $-\sqrt[4]{k}$), прямая $y = kx$ пересекается с графиком $y = x^5$ не более, чем в трех точках. Графики 6,*б*,*в* могут пересекаться с прямыми $y = kx$ в бо̀льшем числе точек.

2. Первый способ. Если $f(x) = x^\alpha$, то $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, поэтому угловой коэффициент касательной возрастает при $x>0$ в случае $\alpha>1$ и убывает в случае $0<\alpha<1$, что отвечает рисункам 7,*а* и 7,*б* соответственно.

Второй способ. Отличная от начала координат точка пересечения графика $y = x^\alpha$ с прямой $y = x$ имеет координаты $(1;1)$. Если $\alpha>1$, то из неравенства $0<x<1$ следует, что $x^\alpha<x$; в случае $0<\alpha<1$, наоборот, из $0<x<1$ следует $x^\alpha>x$ (объясните). Поэтому если на интервале $]0;1[$ график $y = x^\alpha$ ниже биссектрисы $y = x$, то $\alpha>1$, а если выше, то $0<\alpha<1$.

3. Для функции $f(x) = a^x$ вторая производная $f''(x) = (\ln a)^2\cdot a^x$ всегда положительна, поэтому график 8,*б* неправильный. Аналогично, в случае $a>1$ вторая производная функции $f(x) = \log_a x$ равна $f''(x) = -\dfrac{1}{\ln a\cdot x^2}$ и отрицательна (при $x>0$), поэтому график 9,*б* неверный.

Принадлежность точек прямой и плоскости

1. 3 : 2.
2. 3 : 4.
3. 1 : 14.
4. $\sqrt{186}$ и $2\sqrt{30}$.
5. 3 : 11.
6. 7 : 29.
7. 1 : 1.
9. $\dfrac{b(1+2a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}$.
10. Указание: воспользуйтесь теоремой 3 и решением задачи 3.

Парадокс «большого» тела

1. Противоречия с законом сохранения энергии нет. «Парадокс» возникает из-за того, что рассматривается незамкнутая система тел. При ускорении автомобиля A происходит взаимодействие его с Землей. При

этом взаимодействии энергия Земли изменяется, причем в различных системах отсчета это изменение будет не только отличаться по модулю, но и знак его будет различным — в одних системах энергия Земли увеличивается, в других уменьшается.

В системе отсчета, в которой Земля первоначально покоится, часть энергии топлива расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля, а часть — на увеличение энергии Земли $\Delta K'_{\text{З}}$. Увеличение энергии Земли в этой системе отсчета равно

$$\Delta K'_{\text{З}} = \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

При учете соотношения $m \ll M$ этим увеличением можно пренебречь и считать, что вся энергия W, выделившаяся при сгорании топлива, расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля:

$$W = \frac{3}{2} mv^2 + \Delta K'_{\text{З}} \approx \frac{3}{2} mv^2.$$

В системе отсчета, связанной с автомобилем $Б$, Земля имеет начальную скорость $|\vec{v}|$. При ускорении автомобиля A скорость Земли увеличивается. Связанное с этим изменением увеличение кинетической энергии равно

$$\Delta K''_{\text{З}} = \frac{M}{2}\left(v + \frac{m}{M} v\right)^2 - \frac{Mv^2}{2} = \\ = mv^2 + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M}.$$

При учете соотношения $m \ll M$ имеем: $\Delta K''_{\text{З}} \approx mv^2$.

Таким образом, в системе отсчета «автомобиль $Б$» часть энергии топлива, сгоревшего в автомобиле A, расходуется на увеличение кинетической энергии автомобиля A: $\Delta K_2 = \frac{mv^2}{2}$, а другая часть этой энергии расходуется на увеличение энергии Земли: $\Delta K''_{\text{З}} = mv^2$. Так что

$$W = \Delta K_2 + \Delta K''_{\text{З}} = \frac{mv^2}{2} + mv^2 = \\ = \frac{3}{2} mv^2.$$

В системе отсчета, связанной с автомобилем B, изменение кинетической энергии автомобиля A действительно равно $\frac{5}{2} mv^2$. Часть этой энергии автомобиль A получает за счет топлива, а другую часть сообщает ему Земля, которая в этой системе уменьшает свою скорость при ускорении автомобиля A, и следовательно, «теряет» часть своей кинетической энергии. Эта потеря равна

$$\Delta K'''_{\text{З}} = \frac{M}{2}\left(v - \frac{mv}{M}\right)^2 - \frac{Mv^2}{2} = \\ = -mv^2 + \frac{mv^2}{2} \cdot \frac{m}{M} \approx -mv^2.$$

Таким образом, и в этом случае парадокс снимается при учете изменения энергии «большого» тела — Земли:

$$Q = \Delta K_3 + \Delta K'''_{\text{З}} = \\ = \frac{5}{2} mv^2 - mv^2 = \frac{3}{2} mv^2.$$

2. Изменения кинетической энергии пули в выбранных системах отсчета действительно различны:

$$\Delta K_1 = -\frac{m}{2}(v^2 - u^2),$$

$$\Delta K_2 = -\frac{m}{2}(v - u)^2.$$

Однако часть этой энергии расходуется на увеличение энергии платформы $\Delta K_{\text{пл}}$. В системе отсчета, в которой платформа неподвижна, изменением энергии платформы можно пренебречь, так как $M \gg m_{\text{п}}$. В этом случае количество выделившегося тепла равно

$$Q = -\Delta K_2 = \frac{m}{2}(v - u)^2.$$

В системе отсчета «Земля» платформа двигалась со скоростью $\vec{u}$, следовательно, пренебречь изменением энергии платформы нельзя.

Действительно, изменение энергии платформы в этой системе отсчета равно

$$\Delta K_{\text{пл}} = \frac{M(u + \Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = \\ = M|\vec{u}|\,|\Delta\vec{u}|,$$

где $\Delta\vec{u}$ — изменение скорости платформы после взаимодействия с пулей. Согласно закону сохранения импульса

$$m\left(|\vec{v}| - |\vec{u}|\right) = M|\Delta\vec{u}|,$$

то есть

$$\Delta\vec{u} = \frac{m\left(|\vec{v}| - |\vec{u}|\right)}{M}.$$

Следовательно,

$$\Delta K_{\text{пл}} = M|\vec{u}|\frac{m\left(|\vec{v}| - |\vec{u}|\right)}{M} = \\ = m|\vec{u}|\left(|\vec{v}| - |\vec{u}|\right).$$

С учетом этого изменения энергии платформы можно записать:

$$-\Delta K_1 = Q + \Delta K_{\text{пл}},$$

откуда

$$Q = -\Delta K_1 - \Delta K_{\text{пл}} = \frac{m}{2}(v^2 - u^2) -$$

$$- m\left|\vec{u}\right|\left(\left|\vec{v}\right| - \left|\vec{u}\right|\right) = \frac{m}{2}(v-u)^2.$$

3. Запишем закон сохранения энергии с учетом изменения энергии «большого» тела — самолета. В первой системе отсчета

$$П = \frac{mv^2}{2} + \Delta K'_c,$$

во второй системе

$$П = \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} + \Delta K''_c.$$

В первой системе отсчета самолет покоился, и изменением его энергии при выстреле можно пренебречь. Покажем это.

$$\Delta K'_c = \frac{M\Delta u^2}{2};$$

изменение скорости $|\vec{u}|$ определяется из закона сохранения импульса: $\left|\Delta\vec{u}\right| = \frac{m|\vec{v}|}{M}$; следовательно,

$$\Delta K'_c = \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M}.$$

В системе отсчета «Земля» изменением энергии самолета пренебрегать нельзя, так как до выстрела он имел скорость $\vec{u}$ относительно Земли. Рассчитаем изменение энергии самолета $\Delta K''_c$:

$$\Delta K''_c = \frac{M(u-\Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} =$$

$$= -M\left|\vec{u}\right|\left|\Delta\vec{u}\right| + \frac{M\Delta u^2}{2}.$$

Так как изменение скорости самолета $\left|\Delta\vec{u}\right|$ — инвариантная величина, то $\left|\Delta\vec{u}\right| = \frac{m|\vec{v}|}{M}$, и

$$\Delta K''_c = -m\left|\vec{v}\right|\left|\vec{u}\right| + \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M}.$$

Итак,

$$П = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M},$$

$$П = \frac{m(v+u)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}\cdot\frac{m}{M} -$$

$$- m\left|\vec{v}\right|\left|\vec{u}\right|.$$

Из этих двух выражений следует тождество

$$(v+u)^2 = (v+u)^2.$$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. БА = 96, ЭТ = 21: $96^2 = 9216$, $21^3 = 9261$.

2. **Ответ.** Когда я употребляю какое-нибудь слово, — сказал Шалтай-Болтай довольно презрительно, — оно означает только то, что я хочу, чтобы оно обозначало, — ни больше, ни меньше.

3. Из условия следует, что $2x + 4y = 35$, где x — число рыб, пойманных сыном Николая, а y — число рыб, пойманных сыном Петра. Так как это равенство невозможно ни при каких целых x и y, то мы приходим к выводу, что на рыбалке было не четыре человека, а три: Петр, его сын Николай и внук Петра Григорий. Таким образом, сына Петра зовут Николаем.

4. **Ответ.** Шесть. В високосном году один и тот же день недели приходится на 1 января, 1 апреля, 2 июня, 1 июля, 2 сентября и 2 декабря. 1 января будет пятницей, например, в 1988 году.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор А Ипатова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 27/XII-77 г.
Подписано в печать 7/II-78 г.
Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,47 Т-00490
Цена 30 коп Заказ 2962 Тираж 309 027 экз

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

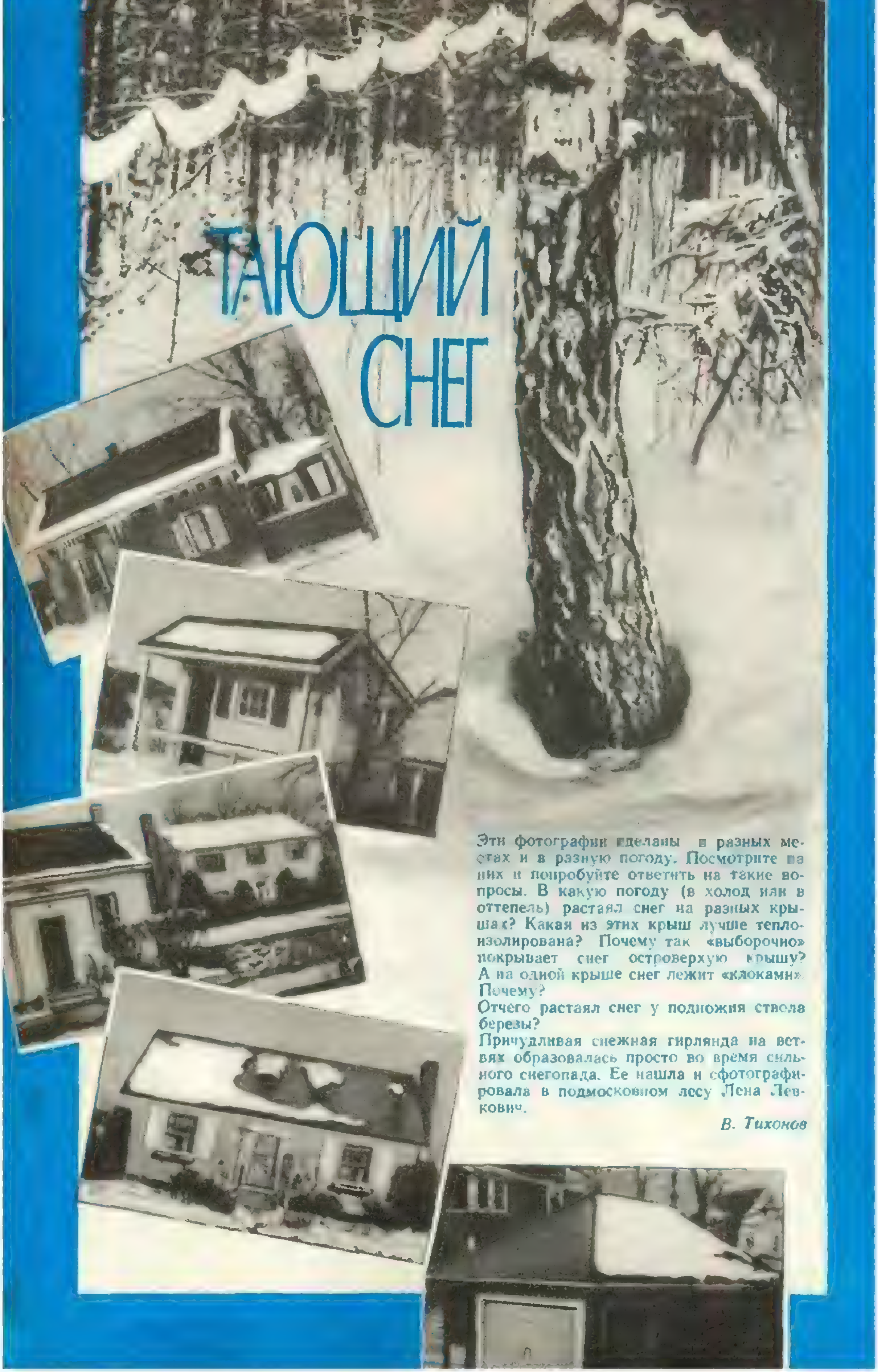
Рукописи не возвращаются

марте 1978 года исполняется 70 лет со дня рождения главного редактора журнала «Квант», выдающегося советского физика, заместителя директора Института атомной энергии имени И. В. Курчатова, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственных премий СССР академика ИСААКА КОНСТАНТИНОВИЧА КИКОИНА.

Помимо плодотворной научной деятельности Исаак Константинович много времени и энергии отдает педагогическим проблемам средней школы. Он — один из авторов новой программы по физике и учебника «Физика 8», председатель Комиссии по физике Учебно-методического совета Министерства просвещения СССР и председатель Центрального Оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Исаака Константиновича с его семидесятилетием и желают ему долгих лет жизни, большого личного счастья, новых успехов в научной и педагогической деятельности.

ТАЮЩИЙ СНЕГ



Эти фотографии сделаны в разных местах и в разную погоду. Посмотрите на них и попробуйте ответить на такие вопросы. В какую погоду (в холод или в оттепель) растаял снег на разных крышах? Какая из этих крыш лучше теплоизолирована? Почему так «выборочно» покрывает снег островерхую крышу? А на одной крыше снег лежит «клоками». Почему?

Отчего растаял снег у подножия ствола березы?

Причудливая снежная гирлянда на ветвях образовалась просто во время сильного снегопада. Ее нашла и сфотографировала в подмосковном лесу Лена Левкович.

В. Тихонов

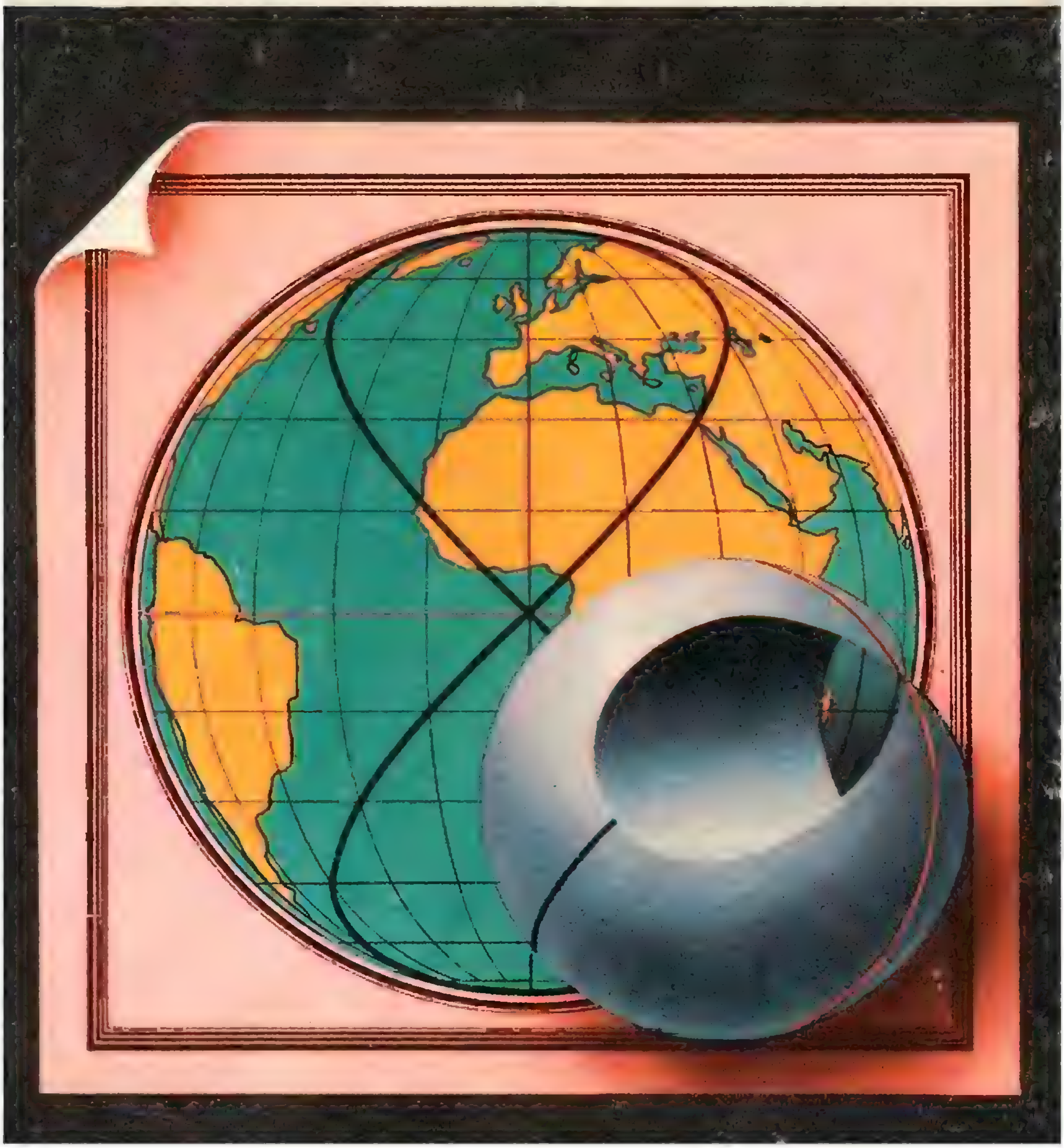
Цена 30 коп.
Индекс 70465

Пространственную кривую, называемую *вивианной*, можно нарисовать на сфере разными способами. Два из них показаны здесь.

На верхнем рисунке она представлена как множество точек, широта которых совпадает с численным значением долготы (т. е., например, точки (30° с. ш.; 30° з. д.) и (30° с. ш.; 30° в. д.) принадлежат вивианне).

На нижнем — как пересечение со сферой цилиндра, полученного при вращении вокруг «длинной» оси симметрии следующего прямоугольника: его «длинная» сторона — это диаметр сферы, соединяющий полюса; длина «короткой» стороны равна радиусу сферы.

Подробнее о вивианне читайте на с. 29.



НОМЕР
4

Основан в 1970 году

Квант

4
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ

2 Ленинский завет: «Учиться, учиться и учиться!»
6 *И. Шкловский.* Астрономия невидимого
13 *В. Березин.* Циклоиды на плоскости и на сфере
14 *А. Земляков.* Арифметика и геометрия столкновений

Лаборатория «Кванта»

22 *А. Дозоров.* Демонстрация невесомости

◆

23 *И. Антипов, С. Шварцбурд.* Удивительный вычислитель

Задачник «Кванта»

26 Задачи М496-М500; Ф508-Ф512
28 Решения задач М446-М448; Ф462-Ф466

По страницам школьных учебников

36 *В. Дубровский.* Шесть доказательств теоремы о медианах

«Квант» для младших школьников

39 Задачи
40 *Ф. Бартенев.* Наблюдения в математике

Практикум абитуриента

42 *А. Кикоин.* Что такое э. д. с.?
48 *Н. Розов.* Читатели советуют
53 *С. Козел, Ю. Никольский, Б. Федосов, В. Чехлов. А. Шелагин.* Московский физико-технический институт

Рецензии, библиография

56 *И. Зорич.* Красивая физика

Информация

58 *Ю. Иванов.* Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества.
60 1 апреля
62 **Ответы, указания, решения**
Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта» (*21, 38, 52, 57, 59*)
Смесь (*35*)

На обложке журнала вы видите рисунок М. Эшера «Лист Мёбиуса» (см. с. 35)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

Ленинский завет: «Учиться, учиться и учиться!»

> Статья 45. Граждане СССР имеют право на образование. Это право обеспечивается бесплатностью всех видов образования, осуществлением всеобщего обязательного среднего образования молодежи, широким развитием профессионально-технического, среднего специального и высшего образования на основе связи обучения с жизнью, с производством; развитием заочного и вечернего образования; предоставлением государственных стипендий и льгот учащимся и студентам; бесплатной выдачей школьных учебников; возможностью обучения в школе на родном языке; созданием условий для самообразования.
>
> *Конституция СССР*

«Выражая волю советского народа, выполняя его поручение, Верховный Совет СССР принял новую Конституцию Союза Советских Социалистических Республик. Утвержден Основной Закон первого в мире общенародного социалистического государства. Конституционно закреплен новый исторический рубеж в нашем движении к коммунизму — построение развитого социалистического общества. Пройдут годы, десятилетия, но этот октябрьский день навсегда останется в памяти народной как яркое свидетельство подлинного торжества ленинских принципов народовластия.» На весь мир прозвучали эти слова Леонида Ильича Брежнева, произнесенные в Кремле 7 октября 1977 года, в день принятия Конституции СССР — выдающегося манифеста эпохи строительства коммунизма.

Специальный раздел Конституции — «Государство и личность» — устанавливает права, свободы и обязанности граждан СССР. И отдельная статья этого раздела закрепляет право каждого советского человека на образование. Причем право на образование не просто декларируется — Основной Закон четко указывает, чем конкретно гарантируется это право. Миллионы советских школьников, учащихся профессионально-технических училищ, студентов техникумов на своем личном повседневном опыте хорошо знают, как реально обеспечивается право на образование, постоянно чувствуют отеческую заботу Коммунистической партии, Советского правительства, всего нашего народа.

Конституция СССР гарантирует каждому советскому человеку право на образование. Наше государство берет на себя крупные расходы на образование и воспитание молодежи: так, затраты в год на одного учащегося в общеобразовательной школе составляют 160 рублей (без учета расходов по бесплатной выдаче школьных учебников), в техникуме — 640 рублей, в вузе — свыше 1000 рублей. Однако, обеспечивая право на образование, социалистическое общенародное государство в то же время требует от каждого своего гражданина максимального использования этой возможности. В Основном Законе страны прямо говорится: «Обязанность и дело чести каждого способного к труду гражданина СССР — добросовестный труд в избранной им области общественно полезной деятельности, соблюдение трудовой дисциплины» (статья 60). Это положение Конституции СССР в полной мере относится и к юным гражданам нашей Родины — к школьникам. Каждый советский школьник должен настойчиво и упорно учиться, бороться за высокий уровень знаний, воспитывать в себе глубокую идейную убежденность, трудолюбие, дисциплинированность, готовиться к общественно полезному труду.

На всех этапах истории Советского государства партия и правительство уделяли особое внимание вопросам образования, обучения и воспитания подрастающего поколения. Свершилась Октябрьская революция — и перед Советской властью встали тысячи и тысячи неотложных, кардинальных проблем. От судьбы многих из них зависело само существование молодой республики. Но и в этих тяжелейших условиях В. И. Ленин всегда находил время направлять процесс формирования новой советской системы воспитания юношества, становления новой советской школы. Уже в первой нашей Конституции — Конституции РСФСР 1918 года — была сформулирована жизненно важная задача «предоставить рабочим и беднейшим крестьянам полное, всестороннее и бесплатное образование». В годы интервенции и гражданской войны, в годы экономической разрухи, безработицы и голода в полной мере проявилась ленинская забота о детях — страна отдавала им все возможное и все лучшее.

С первых дней своего существования Советское правительство под руководством В. И. Ленина энергично приступило к искоренению позорного наследия царизма — массовой безграмотности. И эта серьезнейшая проблема была решена в невиданно короткий срок. В 1906 году русский журнал «Вестник воспитания» писал, что для ликвидации неграмотности в Казахстане и Средней Азии потребуется 4600 (!) лет. Но Казахстан и республики Средней Азии уже давно стали краем сплошной грамотности. В городах и селах только одной Казахской ССР в настоящее время трудится свыше 160 тысяч учителей; до Великого Октября в Казахстане не было вузов, а ныне в 50 высших учебных заведениях республики обучаются более 200 тысяч студентов. Основа этих достижений — социалистический строй Страны Советов; ничто подобное невозможно в капиталистическом мире. Вот данные федерального бюро просвещения США: в самой богатой капиталистической стране, провозгласившей себя «государством всеобщего благоденствия», сегодня насчитывается 23 миллиона взрослых людей, которые не могут прочитать даже железнодорожное расписание. По оценкам экспертов международной организации ЮНЕСКО, занимающейся проблемами образования, науки и культуры, сейчас на земном шаре до 800 миллионов человек полностью неграмотны, т. е. один взрослый из трех не умеет ни читать, ни писать.

Славный путь прошла советская школа за 60 лет существования нашего государства, и все ее успехи — реальное воплощение в жизнь бессмертных ленинских заветов. Одно из замечательных социальных и культурных достижений советского народа за годы девятой пятилетки — переход ко всеобщему среднему образованию. Теперь всеобщее обязательное среднее образование молодежи закреплено в Конституции СССР. Намечая перспективы десятой пятилетки, пятилетки эффективности и качества, XXV съезд КПСС в «Основных направлениях развития народного хозяйства СССР на 1976—1980 годы» указал на необходимость «осуществить дальнейшее развитие системы народного образования в соответствии с требованиями научно-технического прогресса и задачами неуклонного повышения культурно-технического и общеобразовательного уровня трудящихся». Выполняя это указание съезда, ЦК КПСС и Совет Министров СССР приняли ряд Постановлений, в которых намечены конкретные пути совершенствования процесса обучения и воспитания учащихся средних общеобразовательных школ и профессионально-технических учебных заведений. В № 1 нашего журнала за 1977 год уже рассказывалось о том специальном внимании, которое партия и правительство уделяют дальнейшему улучшению условий работы сельской общеобразовательной школы.

Широко известны слова В. И. Ленина, сказанные им на III Всероссийском съезде комсомола: «Коммунистом стать можно лишь тогда, когда обогатишь свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество». Эту задачу Владимир Ильич сформулировал на заре социалистического общества. Она была актуальной тогда — и она еще более актуальна сегодня. Ведь то, что делает сегодня рядовой рабочий или колхозный механизатор, еще недавно считалось доступным только технику или инженеру. А это предъявляет все новые и новые требования к уровню и качеству знаний любого работника — независимо от того, трудится он на заводе или в поле, на строительстве или на транспорте, в научной лаборатории или в школе. Таким образом, для каждого члена общества, строящего коммунизм, среднее образование стало объективной необходимостью.

Именно поэтому в Постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании процесса обучения и воспитания учащихся системы профессионально-технического образования» поставлена задача «развивать и улучшать работу средних профессионально-технических училищ, ... в которых созданы необходимые условия для молодежи по овладению современными рабочими профессиями, получению полного среднего образования, всесторонней подготовке к самостоятельной трудовой жизни». Советская профтехшкола должна выпускать всесторонне развитых молодых рабочих, обладающих прочными профессиональными навыками, широким политехническим кругозором, способных осваивать и совершенствовать новейшую технику. Профессионально-техническое училище, давая законченное среднее образование, открывает все пути для дальнейшего обучения как в техникумах — средних специальных учебных заведениях, так и в высшей школе. Более того, тот, кто с отличием окончил среднее профессионально-техническое училище, после успешной сдачи вступительных экзаменов зачисляется в вуз вне конкурса.

В самый канун 1978 года было опубликовано Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовки их к труду». В этом документе нашли широкое развитие актуальные вопросы трудового обучения, идейно-политического и нравственного воспитания, профессиональной ориентации учащихся. В нем, в частности, сказано: «В современных условиях, когда в стране осуществлен переход ко всеобщему среднему образованию, выпускники средней школы за период учебы должны овладеть глубокими знаниями основ наук и трудовыми навыками для работы в народном хозяйстве, вплотную подойти к овладению определенной профессией. Необходимость решительного поворота школы к улучшению подготовки молодежи к труду в сфере материального производства, к обоснованному выбору профессии должна быть глубоко осознана советским учительством, учащимися и их родителями».

Решения партии и правительства по вопросам образования ставят перед редакционной коллегией и редакцией «Кванта» важные задачи, требуют дальнейшего повышения качества журнала в соответствии с актуальными проблемами школы. Развитие интереса молодежи к науке, укрепление связи между наукой и школой, пропаганда физических и математических знаний, всестороннее разъяснение роли и значения математики и физики для практики — все это, несомненно, будет способствовать как углублению знаний школьников, так и их профессиональной ориентации.

Сегодняшние старшеклассники завтра встанут в ряды активных строителей коммунистического общества. И нет сомнения в том, что они отдадут все свои силы и знания воплощению в жизнь бессмертных заветов великого Ленина.

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ КОЛМОГОРОВ

В апреле 1978 года исполняется 75 лет со дня рождения первого заместителя главного редактора журнала «Квант», выдающегося советского математика, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственных премий СССР академика Андрея Николаевича Колмогорова.

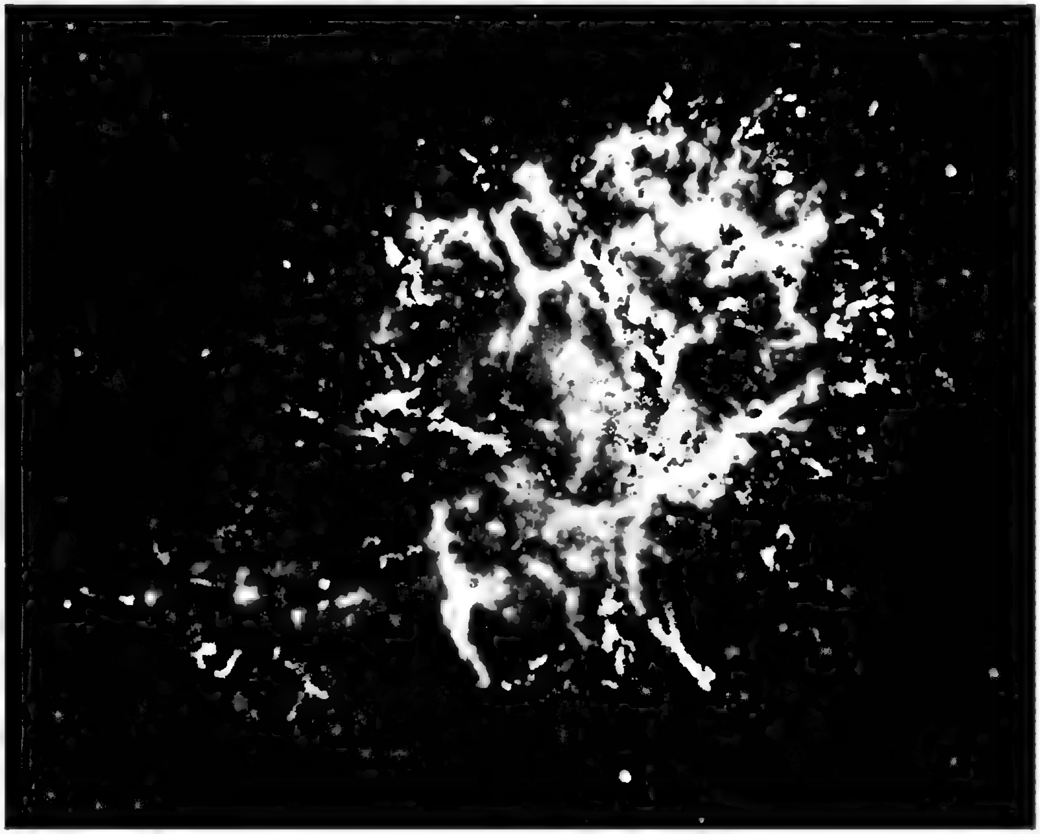
Помимо плодотворной научной деятельности Андрей Николаевич много времени и энергии отдает педагогическим проблемам средней школы. Он — один из авторов новой программы по математике, автор и научный редактор ряда учебников для средней школы, председатель Комиссии по математике Учебно-методического совета Министерства просвещения СССР.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени многих тысяч читателей поздравляют Андрея Николаевича с его семидесятипятилетием и желают ему долгих лет жизни, большого личного счастья, новых успехов в научной и педагогической деятельности.

АЛЕКСЕЙ ИВАНОВИЧ МАРКУШЕВИЧ

Исполнилось 70 лет члену редколлегии нашего журнала, действительному члену Академии педагогических наук СССР, доктору физико-математических наук, профессору Алексею Ивановичу Маркушевичу.

Плодотворную научную работу Алексей Иванович сочетает с большой организацией работ по перестройке школьного образования в нашей стране. Он один из авторов новой программы по математике для средней школы. Под редакцией Алексея Ивановича вышло ряд учебников для средней школы по новой программе: учебники по математике для 4 и 5 классов, «Алгебра-6», «Алгебра-7», «Алгебра-8». Редколлегия и редакция журнала «Квант» от своего имени и от имени могих тысяч читателей поздравляют Алексея Ивановича с его семидесятилетием и желают ему здоровья, долгих лет жизни и новых больших успехов в его благородной деятельности ученого и педагога.



И. Шкловский

Астрономия невидимого

Это просто чудо, что мы сквозь огромную толщу земной атмосферы можем видеть звезды! Ведь над каждым квадратным сантиметром поверхности нашей планеты находится один килограмм вещества атмосферы — факт, известный даже Остапу Бендеру... Это настоящая броня. Почему же она поглощает только 15—20% падающего из космоса излучения? Но — стоп! Необходима существенная оговорка: *речь идет о видимом излучении.*

Видимый нашими глазами свет — это очень узкая полоска в шкале электромагнитных излучений, ограниченная длинами волн $8 \cdot 10^{-7}$ м (красные лучи) и $4 \cdot 10^{-7}$ м (фиолетовые). В сторону длинных волн к этой полоске примыкает широкая полоса инфракрасных волн, простирающаяся примерно до длины волны 10^{-4} м. Еще дальше тянется огромная область радиоволн от субмиллиметровых до многокилометровых волн. В сторону коротких волн от полоски видимого света располагаются ультрафиолетовые волны с длиной до 10^{-8} м, еще более короткие рентгеновские и, наконец, самые короткие гамма-лучи.

Удивительная прозрачность толстой брони земной атмосферы относится прежде всего к видимым лучам. Кроме того, земная атмосфера прозрачна и для радиоволн с длиной от одного сантиметра до 15—20 метров. Существуют также отдельные «окна прозрачности» и в инфракрасной области спектра. Все остальные виды электромагнитного излучения земная атмосфера полностью поглощает.

То обстоятельство, что земная атмосфера прозрачна для видимых лучей, с точки зрения общих законов природы является чистой случайностью. Например, если бы характер спектра поглощения молекулярного кислорода был другой, земная атмосфера могла бы оказаться непрозрачной для видимых лучей. Или, если бы атмосфера была нагрета до температуры 4—5 тысяч градусов, она также была бы непрозрачной (на Солнце атмосфера нагрета примерно до такой температуры, ее слой массой один грамм над квадратным сантиметром уже совершенно не прозрачен для видимых лучей). Так или иначе, но жизнь на Земле развивалась в условиях, когда толстая броня атмосферы, необходимой для жизнедеятельности, была прозрачна для видимых лучей. И еще два, как будто бы тоже случайных обстоятельства: основная часть энергии, излучаемой Солнцем, находится как раз в видимой части спектра и спектральная чувствительность человеческого глаза почти в точности повторяет спектральную кривую Солнца. Итак, земная атмосфера беспрепятственно пропускает основную часть солнечного излучения — источника жизни на нашей планете, а человеческий глаз в максимальной степени чувствителен к этому излучению. Поэтому тот факт, что мы видим звезды, является не столько случайностью, сколько закономерным следствием эволюции жизни на Земле.

Как мы уже говорили, в земной атмосфере имеется еще одно «окно прозрачности»— в диапазоне радиоволн. Однако для развития жизни на Земле оно было несущественно. Во-первых, только ничтожная доля (меньше миллиардной) солнечного излучения падает на этот диапазон. Во-вторых, для того чтобы «видеть» в радиолучах, живые существа должны были бы обладать природными оптическими системами — глазами, размеры которых порядка десятков и сотен метров... Природа, конечно, не могла пойти на такое расточительство.

Но хотя человек своими органами чувств не может непосредственно воспринимать радиоволны, он может построить — и построил — весьма совершенные искусственные «радиоглаза». Они позволяют человеку изучать слабые потоки радиоизлучения, приходящие на Землю от различных объектов из глубин мирового пространства. Речь идет о *радиотелескопах* — приборах, в огромной степени обогативших астрономию за последнюю четверть века. До этого времени все, что мы знаем о Вселенной, было добыто астрономами путем тщательного изучения тех слабых потоков видимого света, которые приходят от удаленных звезд, туманностей, галактик. Эти потоки исследовались очень совершенными приборами —оптическими телескопами *) и спектрографами. С их помощью удалось изучить физические условия, господствующие в звездных атмосферах и туманностях (например, измерить температуру и плотность газов, а также химический состав). Опирающаяся на эти астрономические наблюдения теория позволила «заглянуть» в недра звезд, открыть величественную картину разбегания галактик, понять, как рождаются, живут и умирают звезды. И в наши дни роль оптической астрономии не уменьшилась. Напротив, обогащенная достижениями новейшей электроники и вычислительной техники, она как бы получила «второе дыхание» и по-прежнему является главным источником нашей информации о космосе.

Однако естественные спектральные пределы, которыми ограничена оптическая астрономия, вызвали к жизни такие новые области науки о Вселенной, как *радиоастрономия*. Чего же достигла радиоастрономия на сегодняшний день?

Когда сразу же после второй мировой войны первые радиоастрономы (как правило, это были инженеры-радиофизики, а не профессионалы астрономы) стали наводить свои, по современным понятиям примитивные, радиотелескопы **) на небо, их ждали открытия, одно сенсационнее дру-

---

*) Об оптических телескопах очень подробно рассказано в статье А. Михайлова «Шестиметровый телескоп» (см. «Квант», 1977, № 9)

**) Принцип устройства радиотелескопа такой же, как и оптического телескопа. А диапазоны длин волн воспринимаемого излучения существенно различаются

Советский радиотелескоп с диаметром зеркала 22 метра, работающий в Крымской Астрофизической обсерватории.

гого. Это была поистине «Terra incognita» (неизвестная страна). Даже весьма скромные средства наблюдения приводили подчас к открытиям огромной важности.

Около 1950 года начали строить специальные радиотелескопы (до этого времени исследования проводились преимущественно на переоборудованных радиолокационных станциях). Получила огромное развитие специфическая для радиоастрономии интерференционная методика, позволившая преодолеть основной недостаток радиотелескопов — их низкую разрешающую способнось. Разберемся в этом по порядку. Сначала — что такое *разрешающая способность* телескопа и что значит «низкая разрешающая способность»?

Представьте себе, что вы рассматриваете два близких точечных источника (например, две звезды) с помощью телескопа или какого-нибудь другого оптического прибора. Согласно законам геометрической оптики вы должны были бы получить два четких, близко расположенных друг к другу точечных изображения. Однако из-за явления дифракции (свойственного, кстати сказать, *всем* волновым процессам) вместо двух раздельных точек видна сложная картина: две системы светлых и темных колец, которые могут накладываться друг на друга. Оказывается, наблюдать раздельно два близких источника можно только в том случае, если угловое расстояние φ между ними порядка отношения длины волны λ к диаметру D объектива телескопа: $\varphi \sim \lambda/D$. Это же соотношение справедливо и для радиотелескопа. Но для радиоволн λ очень велико (например, порядка 1 м), поэтому даже при диаметре объектива D порядка 100 м угловое расстояние $\varphi \sim 0{,}01$ радиана, или $\varphi \sim 0{,}5$ градуса. Это очень большое значение φ. Для сравнения: угловой диаметр Солнца, видимый с Земли, тоже порядка 0,5 градуса. С помощью такого радиотелескопа нельзя «увидеть» никаких деталей на солнечном диске. В таком случае и говорят, что разрешающая способность телескопа очень низкая.

Теперь немного о сущности интерференционной методики, применяемой в радиоастрономии. Оказывается, разрешающую способность радиотелескопа можно повысить искусственно. Для этого проводят одновременные наблюдения одного и того же объекта с помощью нескольких антенн радиотелескопа, расстояния между которыми (исчисляемые километрами) можно изменять. Результат «сложения» всей полученной информации получается таким, как будто диаметр D телескопа увеличился до значения расстояния l между антеннами. Развитие этого метода привело к тому, что, как это ни парадоксально, разрешающая способность в радиоастрономии в отдельных случаях значительно выше, чем в оптической. Например, если длина волны $\lambda = 3$ см, а расстояние между радиотелескопами $l = 10\,000$ км, то $\varphi = \frac{\lambda}{l} = 3 \cdot 10^{-9}$ радиана, или $\varphi = 0{,}0006$ угловой секунды! Это невообразимо малая величина. Например, автомобильное колесо на поверхности Луны было бы видно земному наблюдателю приблизительно под таким углом!

Особенно впечатляющи успехи радиоастрономии в области повышения *чувствительности*, то есть способности измерять предельно слабые потоки космического радиоизлучения. Это достигнуто, во-первых, увеличением площади собирающих излучение зеркал радиотелескопов, а во-вторых, — повышением чувствительности радиоприемников, измеряющих величину собираемых этими зеркалами потоков. Сейчас диаметры крупнейших современных радиотелескопов достигают 100—300 м. В комбинации со сверхчувствительными приемниками, изготовленными с учетом последних достижений квантовой радиофизики, такие зеркала позволяют регистрировать минимальные потоки порядка 10^{-21} Вт/м^2 $= 10^{-18}$ эрг(см$^2\times$ $\times$с). Попробуем представить себе эту величину. Слабейшие из звезд, наблюдаемые одним из крупнейших в мире оптическим телескопом с диаметром 5 м, имеют 24-звездную величину. Это соответствует потоку $3\times$ $\times 10^{-14}$ эрг/(см$^2\cdot$с), что в тысячи раз больше минимального потока радиоизлучения. Поражает совершенно ничтожное абсолютное значение энергии, падающей от космических источников. Достаточно сказать, что суммарная энергия этого радиоизлучения, принятая всеми радиотелескопами мира за все годы существования радиоастрономии, не превосходит тысячной доли эрга. Этой энергии едва ли хватит, чтобы нагреть миллиграмм воды на одну десятимиллионную градуса! Если по существующим тарифам оценить эту энергию (предоставляем это сделать читателям самостоятельно) — стоимость получится смехотворно низкая...

Как же оценить значение тех удивительных открытий, которыми радиоастрономия обогатила науку? Каковы основные научные достижения этой молодой ветви астрономии? Прежде всего следует подчеркнуть, что радиоастрономия не дублирует, а существенно дополняет оптическую астрономию. Оказалось, что во Вселенной имеются объекты, которые особенно мощно излучают в радиодиапазоне. В частности, радиоизлучение всегда сопутствует грандиозным космическим взрывам. Например, очень слабые в оптических лучах клочки туманностей, образовавшиеся после взрывов звезд (так называемых сверхновых звезд), являются довольно мощными источниками радиоизлучения. Причиной этого радиоизлучения, как было установлено советскими учеными, являются движущиеся в магнитных полях с почти световой скоростью электроны.

В несравненно большем масштабе взрывные процессы, сопровождаемые образованием огромного количества заряженных, весьма энергичных частиц, которые, двигаясь в магнитных полях, генерируют радиоизлучение огромной мощности, наблюдаются в ядрах некоторых удаленных галактик. Собственно, почти у всех галактик, имеющих ядра, последние являются источниками радиоизлучения. Но мощность этого излучения весьма различна. Особенно велика она у *квазаров* (квазизвездных объектов). Ядра этих объектов мощно излучают не только в радио-, но и в оптическом диапазонах. Из-за огромной мощности их излучения они «видны» с рекордно больших расстояний (сейчас квазары являются самыми далекими небесными телами). Расстояние до квазаров определяется по смещению линий излучения в их оптических спектрах. Это явление уже давно известно как «красное смещение»: измеренные в спектрах галактик длины волн спектральных линий λ несколько больше, чем их лабораторные, «земные» значения λ_0. Это объясняется тем, что излучающие галактики удаляются от нас (галактики как бы разбегаются друг от друга). Чем сильнее смещение линий в спектре данной галактики, тем больше скорость ее удаления от нас. До открытия квазаров (которое было сделано радиоастрономами, после чего оптические астрономы нашли на их местах ранее ничем не примечательные «звездочки», оказавшиеся совсем не звездами...) наибольшее красное смещение, определяемое отношением λ/λ_0, было немногим больше, чем 1,4. А сейчас известны квазары, у которых это отношение близко к 4. Легко сказать, но попробуем представить себе, что это такое. Прежде всего ситуация необычна с чисто наблюдательной, экспериментальной точки зрения: линии наблюдаются лишь в ви-

Серпуховский радиотелескоп Физического института Академии наук СССР.

димой части спектра, которые «съехали» туда с далекой ультрафиолетовой части. Ни у каких других астрономических объектов (звезд, туманностей) эти линии никогда не наблюдались (ультрафиолетовая часть спектра нацело поглощается атмосферой). Далее, оказывается, что скорость удаления такой галактики близка к 250 000 км/с, что составляет 0,8 от скорости света в вакууме!

Наблюдаемое уже много лет явление красного смещения современная космология, начиная от нашего замечательного физика и математика А. А. Фридмана, объясняет *реальным расширением Вселенной*. С течением времени расстояния между галактиками увеличиваются все больше, следовательно, растут масштабы Вселенной. Наблюдая квазар с $\lambda/\lambda_0=4$, мы как бы заглядываем в далекое прошлое Вселенной, когда ее размеры были в 4 раза меньше нынешних, а средняя плотность вещества — в 64 раза больше. Ну, а что было еще раньше?

Пока квазаров с λ/λ_0 больше 4,6 еще не обнаружено. Очень возможно, что их либо совсем не будет, либо будет очень мало. Это означает, что галактики (а следовательно, и их ядра) образовались на определенной стадии развития Вселенной, когда ее масштабы были в 4—5 раз меньше нынешних. Еще в более раннюю эпоху никаких галактик не было. А что же было? Оказывается, был газ, причем довольно простого химического состава — смесь водорода и гелия. По мере расширения этого газа, связанного с расширением Вселенной, он уменьшал свою плотность и охлаждался. Значит, когда «возраст» Вселенной исчислялся несколькими миллионами лет, температура заполняющего ее газа достигала нескольких тысяч градусов. При такой температуре этот газ был частично ионизирован, то есть представлял собой плазму.

Важной особенностью Вселенной на ранних стадиях ее эволюции было то, что она содержала огромное количество излучения. Спектральный состав этого излучения был такой же, как и у раскаленного до соответствующей температуры тела. Плотность энергии этого излучения (энергия, приходящаяся на единицу объема) была в сотни миллионов раз больше плотности тепловой энергии газа (так как вещество во Вселенной тогда имело еще сравнительно низкую плотность). Кванты лучистой энергии находились в равновесии с атомами газа, которые поглощали и излучали их. Это значит, что число квантов, поглощенных атомами, равно числу испускаемых ими квантов (за одно и то же время). По этой причине температуры вещества и излучения были одинаковы. Но это могло продолжаться лишь до поры, до времени. Из-за расширения Вселенной плотность газа быстро убывала, и по этой причине обмен энергией между излучением и газом происходил все медленнее и медленнее. Наконец, эти процессы стали настолько медленными, что излучение, наполняющее Вселенную, потеряло всякую связь с газом. Это произошло как раз тогда, когда возраст Вселенной был несколько миллионов лет, а размеры примерно в тысячу раз меньше современных. По мере дальнейшего расширения Вселенной плотность излучения, заполняющего Вселенную, быстро уменьшалась в соответствии с тем, что его температура изменялась пропорционально размерам. И теперь, когда со времени «отклейки» излучения от вещества Вселенная увеличила свои размеры больше чем в тысячу раз, ожидаемая температура заполняющего ее излучения должна быть порядка нескольких градусов.

Величайшим достижением радиоастрономии является обнаружение этого заполняющего всю Вселенную излучения, по справедливости получившего название «реликтового». Подобно тому, как среди живущих на Земле видов животных и растений попадаются «живые анахронизмы» — представители фауны и флоры давно прошедших эпох (например, кенгуру, папоротники и прочие реликты), это излучение — наблюдаемый остаток давно прошедшего состояния Вселенной, когда в ней еще не было галактик и звезд, а был только горячий газ и заполняющее весь мир излучение. Это открытие было сделано 12 лет тому назад. Оказалось, что на радиоволнах сантиметрового и миллиметрового диапазонов все небо излучает одинаково по всем направлениям. Спектральный состав этого излучения соответствует телу, нагретому до температуры 2,7 градуса абсолютной шкалы Кельвина. Максимальная интенсивность приходится на длину волны около одного миллиметра. Значение этого открытия состоит прежде всего в том, что оно дало возможность изучать Вселенную, когда она была в десятки тысяч раз «моложе», чем сейчас, и совершенно не похожа на нынешнюю. Вселенная имеет историю, она под действием внутренних причин непрерывно развивается и, конечно, усложняется. Ибо сейчас Вселенная неизмеримо богаче и сложнее, чем это было в ту отдаленную эпоху. Например, тогда вещество еще не имело того богатого химического состава, как сейчас. Элементы, отличные от водорода и гелия, образовались в недрах звезд значительно позже. Не следует также забывать, что и жизнь во Вселенной могла возникнуть только после образования тяжелых элементов.

Парадоксально, что мы знаем сейчас о той отдаленной от нас эпохи, когда образовалось «реликтовое» излучение, значительно больше, чем об условиях образования нашей Солнечной системы и, в частности, Земли, хотя это весьма важное событие произошло не так уж давно: всего «каких-нибудь» пять миллиардов лет тому назад, когда размеры Вселенной были раза в два меньше современных. Это хороший пример тому, что наука развивается неравномерно, что прогресс наших знаний идет на «прорыве» в неизвестное.

Одно из важнейших направлений в радиоастрономии может быть названо «астрорадиоспектроскопия». Речь идет об исследовании различных спектральных линий, длины волн которых находятся в радиодиапазоне. Чаще всего эти линии наблюдаются в отдельных облаках весьма резреженной межзвездной среды, всестороннее изучение которой в последние годы приобрело особенно большое значение. Самая «знаменитая» радиолиния имеет длину волны 21 см и принадлежит водороду. Так как водород является наиболее обильным элементом во Вселенной, изучение этой линии дает весьма ценную информацию, относящуюся ко всей нашей звездной системе — Галактике. Изучение этой линии позволяет выяснить температуру межзвездной среды, ее плотность и характер движения облаков межзвездного газа.

Наряду с атомами в межзвездном газе содержатся молекулы. Многие из них излучают радиолинии, которые успешно наблюдаются. Неожиданностью было открытие в межзвездном пространстве сложных, многоатомных молекул, например, муравьиной кислоты, этилового и метилового спиртов и ряда других. Исследование радиолиний от молекул открывает уникальную возможность изучения изотопного состава вещества во Вселенной. Именно таким образом впервые был обнаружен межзвездный дейтерий — тяжелый водород, у которого радиолиния имеет длину волны около 92 см. Оказалось, что в межзвездной среде на каждые сто тысяч атомов обычного водорода приходится один атом тяжелого.

Это открытие имеет довольно неожиданные последствия. Дело в том, что дейтерий никак не может образовываться в недрах звезд. Уже при довольно «умеренной» температуре в несколько миллионов градусов происходят ядерные реакции, ведущие к разрушению ядер дейтерия. Поэтому так же, как и обычный водород, дейтерий должен иметь «реликтовое» происхождение. Оказывается, что ядерные реакции, при которых синтезировался дейтерий, должны были происходить тогда, когда температура Вселенной была несколько миллиардов градусов, а возраст — всего лишь около 10 минут! Вот куда могут заглянуть «глаза» радиотелескопов...

Особое место в космической радиоспектроскопии занимают исследования линий молекулы гидроксила OH, длины волн которых (их всего четыре) около 18 см. Дело в том, что на этой волне совершенно неожиданно были обнаружены ярчайшие, очень маленькие источники, обычно находящиеся в газовых туманностях. Выяснилось, что эти источники работают по тому же принципу, что и *лазеры*— квантовые генераторы электромагнитных волн в видимом диапазоне спектра. Для радиодиапазона такие источники называют *мазерами*. Кроме того, примерно в тех же местах неба были обнаружены очень яркие источники в линии водяного пара H_2O с длиной волны 1,35 см, имеющие ту же природу. Таким образом, оказалось, что природа реализует в естественных условиях прибор, являющийся в наши дни символом переживаемой человечеством научно-технической революции! Всего любопытнее то, что эти удивительные источники находятся в непосредственной близости от областей Галактики, где по всем данным происходит пока еще во многом загадочный процесс образования молодых звезд из межзвездной газовой среды. Таким образом, радиоастрономия совершенно неожиданно оказалась мощным средством изучения этой давно уже ставшей классической проблемы.

Перечисляя выдающиеся достижения радиоастрономии за последние 10—15 лет, нельзя умолчать об открытии, взволновавшем человечество 10 лет тому назад. Речь идет об открытии *пульсаров*. Этот совершенно необычный класс радиоисточников характерен строгой периодичностью радиосигналов. Самый короткий из известных периодов близок к 1/30 секунды, самый длинный — около 4 секунд. Исследования показали, что пульсары — это очень быстро вращающиеся *нейтронные звезды*, причем период вращения совпадает с наблюдаемой периодичностью радиоимпульсов. Что же такое нейтронная звезда? Представьте себе наше Солнце, сжатое до размеров около 10 км. Так как радиус Солнца близок к 700 000 км, а его средняя плотность равна 1,4 г/см^3, то средняя плотность 10-километрового шара — нейтронной звезды — будет близка к 10^{15} г/см^3. Это — чудовищно большая величина, близкая к плотности вещества атомного ядра.

Нейтронные звезды, как закономерный конец эволюции некоторых звезд, были теоретически предсказаны свыше 40 лет тому назад. В оптических лучах эти звезды (за одним важным исключением) обнаружить невозможно. Только методы современной радиоастрономии позволили в наши дни обнаружить нейтронные звезды — мечту двух поколений физиков и астрономов всего мира. Это — одно из величайших открытий в астрономии и физике XX века, столь богатого выдающимися достижениями науки.

◆

Циклоиды на плоскости и на сфере

Свойства циклоид изучали многие выдающиеся ученые прошлого. Среди них Г. Галилей (1564—1642), давший циклоиде имя (от греческого κύκλος—«круг»).

Плоская циклоида — это траектория фиксированной точки окружности, катящейся (без скольжения) по заданной прямой. Если подвижная окружность катится не по прямой, а по неподвижной окружности, находясь внутри нее, траектория фиксированной точки подвижной окружности называется *гипоциклоидой*. Гипоциклоида, получающаяся при $\frac{r}{R}=\frac{1}{3}$ (r — радиус подвижной, R — неподвижной окружности), называется *дельтоидой* («Квант», 1977, № 3, с. 19). Если подвижная окружность катится по неподвижной, касаясь ее снаружи, фиксированная точка подвижной окружности описывает *эпициклоиду*. При $r=R$ эпициклоида называется *кардиоидой* («Квант», 1977, № 12, с. 33), при $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$ — *нефроидой* («Квант», 1977, № 9, с. 43).

Все описанное в предыдущем абзаце происходило на плоскости. Для перехода к пространству, к циклоидам на сфере опишем плоскую циклоиду по-другому: представим себе, что на неподвижную плоскость наложена подвижная плоскость, на которой нарисована окружность, и циклоида получается при движении подвижной плоскости по неподвижной.

Представим себе теперь неподвижную сферу Σ_1, на которой нарисован «экватор» L. Представим одновременно сферу Σ_2 *с тем же центром и радиусом*, которая может поворачиваться относительно их общего центра. На сфере Σ_2 нарисована окружность l. Сфера Σ_2 поворачивается так, что окружность l катится (без скольжения) по окружности L. В этом случае траектория фиксированной точки окружности l опишет на сфере Σ_1 *сферическую циклоиду* γ. На рисунке 1 показан один виток сферической циклоиды. Если радиусы окружностей L и l несоизмеримы, то точки сферической циклоиды заполнят на сфере полосу.

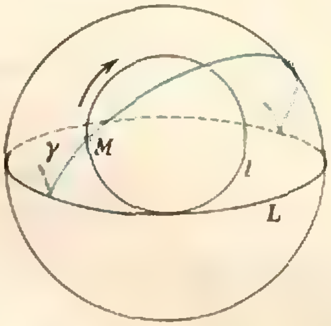


Рис. 1.

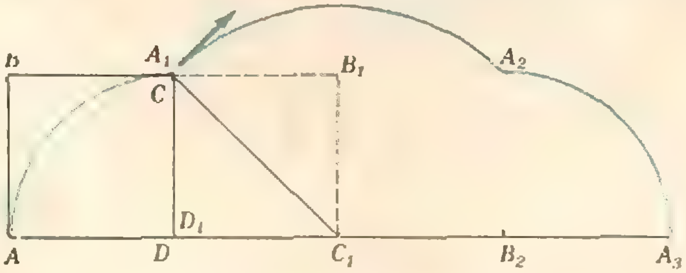


Рис. 2.

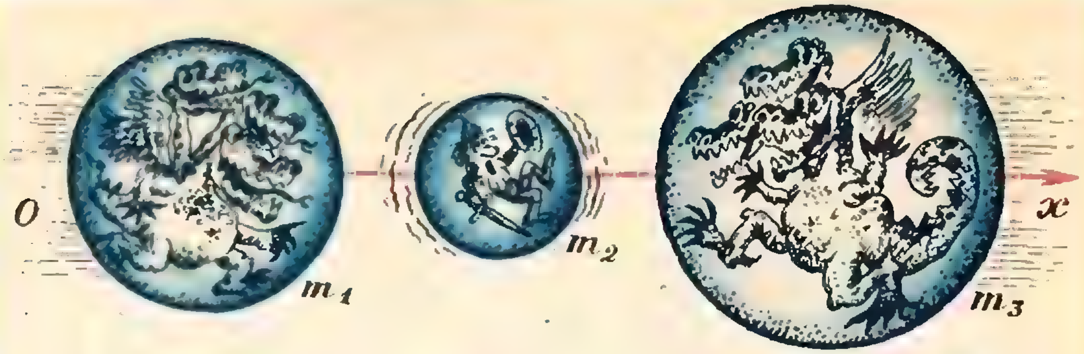
Попробуйте установить, какую форму имеет сферическая циклоида, если $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$.

Декарт одним из первых показал, как можно определить направление касательной к плоской циклоиде в любой ее точке. Заменим подвижную окружность квадратом $ABCD$ того же периметра и заставим его катиться по данной прямой, следя за траекторией точки A (рис. 2). При этом квадрат будет поочередно вращаться около своих вершин D, C, B, занимающих, соответственно, положения D, C_1 и B_2. Если центр вращения в данный момент находится, скажем, в точке C_1, нормаль (перпендикуляр к касательной) в точке C будет проходить через точку C_1. Заменим квадрат на правильный пятиугольник, шестиугольник, . . . , n-угольник того же периметра. Картина будет та же: нормаль будет проходить через вершину, около которой в данный момент происходит вращение. В пределе при $n \to \infty$ правильный многоугольник превратится в окружность, траектория точки A — в циклоиду, а точка, через которую обязана проходить нормаль в данной точке циклоиды, — в точку касания подвижной окружности (в соответствующем положении) с опорной прямой. Имея нормаль, нетрудно провести касательную.

Подобные рассуждения можно провести для эпициклоиды и гипоциклоиды, только «правильные многоугольники» придется строить из дуг неподвижной окружности, а не из отрезков прямых. И вновь оказывается, что касательная к эпи- или гипоциклоиде в данной точке будет проходить через точку касания подвижной окружности в соответствующем положении.

Петербургский математик Я. Герман (1678—1733) показал, что это утверждение верно и для сферической циклоиды.

В. Березин



А. Земляков

Арифметика и геометрия столкновений

Пусть по прямой движутся n шариков, упруго сталкиваясь между собой. Может ли между шариками произойти бесконечное число столкновений или они через некоторое время разлетятся? Оказывается, эту механическую задачу можно решить с помощью геометрии. Соответствующие конструкции (в частности, придуманное в конце XIX века американским физиком У. Гиббсом конфигурационное пространство) имеют фундаментальное значение и применяются при решении многих задач классической механики и статистической физики.

В этой статье мы ответим на следующие вопросы *):

1. По прямой двигаются n одинаковых шариков. Какое *максимальное число столкновений* между ними может произойти?

2. Тот же вопрос для трех шариков масс m_1, m_2 и m_3.

3. По прямой двигаются n произвольных шариков. Может ли общее число столкновений между ними оказаться бесконечным?

(Всюду здесь шарики рассматриваются как материальные точки, сталкивающиеся друг с другом абсолютно упруго, то есть с сохранением суммарных импульса и энергии. Предполагается также, что все *происходящие столкновения* — парные: по три и более шариков в одной точке одновременно не оказываются.)

§ 1. Шары равных масс: обмен скоростями

1°. Условимся скоростью материальной точки при движении по прямой — по координатной оси Ox — называть величину проекции вектора скорости на ось Ox; таким образом, скорости будут числами (для точки, движущейся вправо по оси Ox, скорость $v>0$, при движении точки влево $v<0$). Обозначим скорости двух соударяющихся шаров одинаковой массы m до столкновения через v_1 и v_2, после столкновения — через z_1 и z_2, и найдем z_1, z_2, считая v_1 и v_2 известными. Для этого нужно записать законы сохранения импульса и энергии *):

$$\begin{cases} mv_1 + mv_2 = mz_1 + mz_2, \\ \frac{1}{2} mv_1^2 + \frac{1}{2} mv_2^2 = \frac{1}{2} mz_1^2 + \frac{1}{2} mz_2^2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = v_1 + v_2, \\ z_1^2 + z_2^2 = v_1^2 + v_2^2, \end{cases}$$

а затем решить полученную систему уравнений относительно z_1, z_2. Вмес-

---

*) Задача М449 («Квант», 1977, № 6).

*) См. учебник физики для 8 кл., с. 168 и 192.

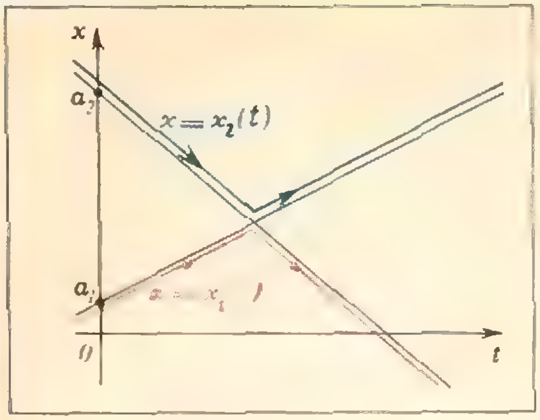


Рис. 1.

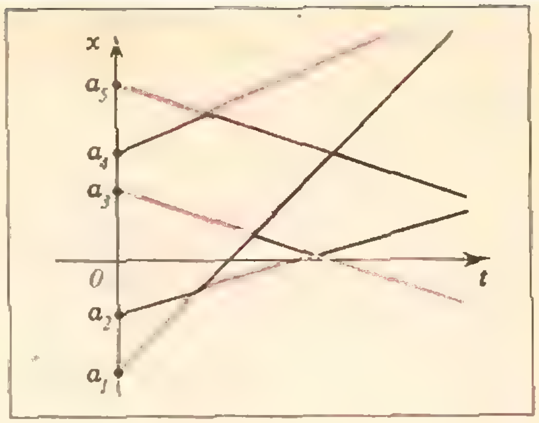


Рис. 2.

то непосредственного решения системы можно заметить, что она имеет не более двух решений, ибо при подстановке $z_2 = v_1 + v_2 - z_1$ во второе уравнение системы получается квадратное уравнение относительно z_1; с другой стороны, два решения очевидны — это $\begin{cases} z_1 = v_1, \\ z_2 = v_2 \end{cases}$ и $\begin{cases} z_1 = v_2, \\ z_2 = v_1. \end{cases}$

Первое из них лишено физического смысла: оно означает, что шары продолжают движение с прежними скоростями, как бы проскакивая друг через друга. Следовательно, при абсолютно упругом соударении двух шаров одной массы происходит *обмен скоростями*: $z_1 = v_2$ и $z_2 = v_1$.

2°. Этот вывод особенно удобно интерпретировать на графиках движения шаров на координатной плоскости Otx (t — время, x — координата по оси Ox). До столкновения шары двигаются по законам $x = x_1(t) = a_1 + v_1 t$ и $x = x_2(t) = a_2 + v_2 t$ (здесь a_1 и a_2 — начальные координаты шаров); их графики движения — прямые (точнее — отрезки или лучи) на плоскости Otx, с угловыми коэффициентами v_1 и v_2. Моменту соударения шаров соответствует точка пересечения графиков. После соударения графики $x = x_1(t)$ и $x = x_2(t)$ также являются прямыми. Поскольку угловой коэффициент первого графика $x = x_1(t)$ стал равен $z_1 = v_2$, то первый график после соударения является продолжением второго графика $x = x_2(t)$ до соударения; аналогично, второй график после соударения является продолжением первого графика перед соударением (рис. 1). Отсюда ясно, что совокупность графиков движения n шаров равных масс представляет собой объединение n лучей на плоскости Otx, проведенных из начальных положений шаров a_i (при $t = 0$) с угловыми коэффициентами v_i; по такой картинке легко проследить график движения $x = x_i(t)$ каждого шара — см. рисунок 2.

3°. Эти рассмотрения показывают, что максимальное число $N_{\max}$ соударений n шаров равных масс равно максимальному числу точек попарного пересечения n лучей на плоскости. Поскольку каждые два луча могут пересекаться только в одной точке, $N_{\max}$ равно числу пар из n лучей, то есть $N_{\max} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2. Три шара разных масс: конфигурационное пространство

При столкновении двух шаров разных масс происходит не обмен скоростями, а более сложное перераспределение скоростей. В рассматриваемом случае (три шара разных масс) рассмотрение графиков на плоскости Otx уже ничего хорошего не дает. Более того, совсем не очевидно, что число столкновений будет обязательно конечным: представьте себе, что на легкий шарик с двух сторон (не одновременно!) налетают два массивных шара (см. рисунок на заставке); не будет ли маленький шарик бесконечно колебаться между большими? Ниже будет показано, что максимальное число столкновений конечно и дается формулой

$$N_{\max} = -$$

$$-\left[\frac{\pi}{\arccos\sqrt{\dfrac{m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}}}\right],$$

где m_1, m_2, m_3 — массы шаров (шар с массой m_2 расположен на оси Ox между шарами m_1 и m_3), $[a]$ — целая часть числа a.

1°. Обозначим координаты шаров на оси Ox (слева направо) через x_1, x_2, x_3; их скорости — соответственно через v_1, v_2 и v_3; массы — через m_1, m_2, m_3.

Трудно одновременно следить за тремя точками двигающимися по (одномерной) прямой, проще следить за одной точкой, двигающейся в (трехмерном) пространстве. Каждому положению наших шаров на оси Ox мы поставим в соответствие точку $M = M(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в координатном пространстве $Ox_1x_2x_3$. При движении шаров координаты точки M будут меняться, то есть точка M будет двигаться в пространстве, причем вектор скорости точки M равен $\vec{v} = (v_1;\ v_2;\ v_3)$. При соударениях шаров $x_1 = x_2$ или $x_2 = x_3$; точка M будет при этом попадать на плоскость P_{12}, заданную уравнением $x_1 = x_2$, или плоскость P_{23} с уравнением $x_2 = x_3$. В промежутках времени между соударениями вектор скорости точки M не меняется, поэтому M движется в каждом из таких промежутков по отрезку некоторой прямой с концами на плоскостях P_{12} и P_{23}. Координаты точки M всегда удовлетворяют неравенствам $x_1 \leqslant x_2$ и $x_2 \leqslant x_3$. Каждое из них задает в координатном пространстве полупространство, ограниченное плоскостью P_{12} или P_{23}, а система этих неравенств задает пересечение полупространств — двугранный угол Φ.

Таким образом, при движении и соударениях наших шаров соответствующая точка $M = M(x_1;\ x_2;\ x_3)$ движется по ломаной, лежащей в двугранном угле Φ; точки излома ломаной принадлежат граням угла и соответствуют столкновениям шаров (рис. 3).

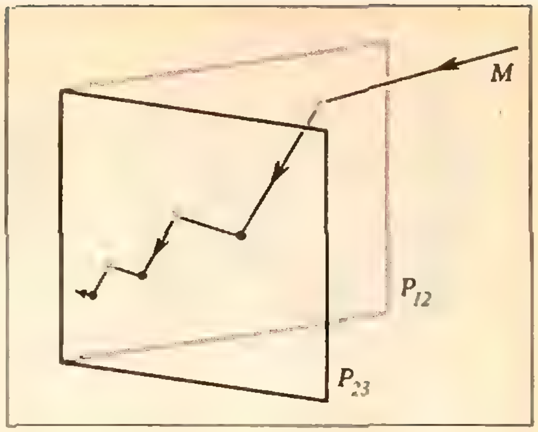


Рис. 3.

Начальное расположение шаров определяет начальное положение точки M, начальные скорости шаров определяют направление первого звена ломаной. Чтобы определить направление каждого следующего звена ломаной, нужно пересчитать скорости шаров после соответствующего соударения (исходя из законов сохранения импульса и энергии). Решаемая задача сводится к тому, чтобы найти максимальное возможное число точек излома траектории M, или, иными словами, число «соударений» точки M с гранями двугранного угла Φ.

2°. Как мы увидим дальше, искомое число легко может быть найдено, если точка M каждый раз отражается от граней угла Φ по закону упругого отражения: «угол падения равен углу отражения». При упругом отражении точки M от плоскости P:

(А) абсолютные величины скоростей $\vec{v}$ и $\vec{z}$ точки M до и после отражения одинаковы: $|\vec{v}| = |\vec{z}|$ или $\vec{v}^2 = \vec{z}^2$;

(Б) составляющая скорости, перпендикулярная плоскости P, при отражении меняет знак, а составляющая, параллельная P, сохраняется: если $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$, $\vec{z} = \vec{z}_\perp + \vec{z}_\parallel$ (рис. 4), то $\vec{z}_\perp = -\vec{v}_\perp$ и $\vec{z}_\parallel = \vec{v}_\parallel$.

Заметим, что соотношение $\vec{z}_\perp = -\vec{v}_\perp$ можно вывести из условия (А) и соотношения $\vec{z}_\parallel = \vec{v}_\parallel$ (проделайте это).

При движении точки M, описанном в п. 1°, условие (А) не выполне-

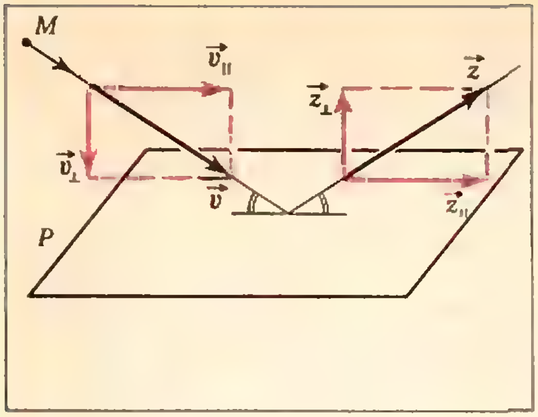


Рис. 4.

но, однако закон сохранения энергии дает сходное с (А) соотношение

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + m_3v_3^2 = \\ = m_1z_1^2 + m_2z_2^2 + m_3z_3^2. \quad (1)$$

Введем новые координаты;
$\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}\, x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}x_2$, $\tilde{x}_3 = \sqrt{m_3}\, x_3$ (свои для каждого шара!). В этих координатах скорости равны $\tilde{v}_i = \sqrt{m_i}\, v_i$, и скорость точки $\tilde{M} = M(\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;\tilde{x}_3)$ при соударениях соседних шаров уже будет сохраняться: из соотношения (1) следует, что

$$\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 = \tilde{z}_1^2 + \tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_3^2.$$

Поскольку старые координаты удовлетворяли неравенствам

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \text{ и } x_i = \tilde{x}_i/\sqrt{m_i},$$

новые координаты удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} \leqslant \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} \leqslant \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}}.$$

Эти неравенства задают в координатном пространстве $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ двугранный угол $\tilde{\Phi}$, ограниченный плоскостями соударений:

$$\tilde{P}_{12} = \left\{ (\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;\tilde{x}_3) \,\middle|\, \frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = 0 \right\} \text{ и}$$

$$\tilde{P}_{23} = \left\{ (\tilde{x}_1;\tilde{x}_2;\tilde{x}_3) \,\middle|\, \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} - \frac{\tilde{x}_3}{\sqrt{m_3}} = 0 \right\}.$$

Оказывается, для новых координат будет выполнено и условие (Б) упругого отражения точки $\tilde{M}$ от граней $\tilde{P}_{12}$ и $\tilde{P}_{23}$. Проверим это для отражения $\tilde{M}$ от $\tilde{P}_{12}$. В силу замечания после условия (Б), достаточно проверить, что составляющая скорости, параллельная плоскости $\tilde{P}_{12}$, сохраняется.

Выберем два вектора, параллельных плоскости $\tilde{P}_{12}$. Поскольку эта плоскость задана уравнением $\frac{\tilde{x}_1}{\sqrt{m_1}} - \frac{\tilde{x}_2}{\sqrt{m_2}} = 0$, она содержит начало координат и точки с координатами (0;0;1) и $(\sqrt{m_1};\sqrt{m_2};0)$. Следовательно, векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ с этими координатами будут параллельны $\tilde{P}_{12}$. Очевидно, $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны, поэтому для проверки соотношения $\vec{\tilde{z}}_\parallel = \vec{\tilde{v}}_\parallel$ достаточно установить, что составляющие вектора скорости точки $\tilde{M}$ в направлениях $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ сохраняются или что $\vec{\tilde{z}}\cdot\vec{a}_1 = \vec{\tilde{v}}\cdot\vec{a}_1$ и $\vec{\tilde{z}}\cdot\vec{a}_2 = \vec{\tilde{v}}\cdot\vec{a}_2$; здесь $\vec{\tilde{v}} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$, $\vec{\tilde{z}} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$ — скорости точки $\tilde{M}$ до и после соударения с плоскостью $\tilde{P}_{12}$. В координатах соотношение $\vec{\tilde{z}}\cdot\vec{a}_1 = \vec{\tilde{v}}\cdot\vec{a}_1$ имеет вид $\sqrt{m_3}\, z_3 = \sqrt{m_3}\, v_3$; оно выполнено, поскольку при соударении 1-го и 2-го шаров скорость 3-го шара не меняется. Второе соотношение $\vec{\tilde{z}}\cdot\vec{a}_2 = \vec{\tilde{v}}\cdot\vec{a}_2$ в координатах имеет вид

$$\tilde{z}_1\cdot\sqrt{m_1} + \tilde{z}_2\cdot\sqrt{m_2} = \\ = \tilde{v}_1\cdot\sqrt{m_1} + \tilde{v}_2\cdot\sqrt{m_2}$$

или $\qquad m_1z_1 + m_2z_2 = m_1v_1 + m_2v_2,$

а это выполнено в силу закона сохранения импульса.

Итак, наша задача сведена к следующей: внутри двугранного угла $\tilde{\Phi}$ движется точка $\tilde{M}$, отражаясь от его граней по закону упругого отражения; требуется выяснить, каково максимальное число отражений точки $\tilde{M}$

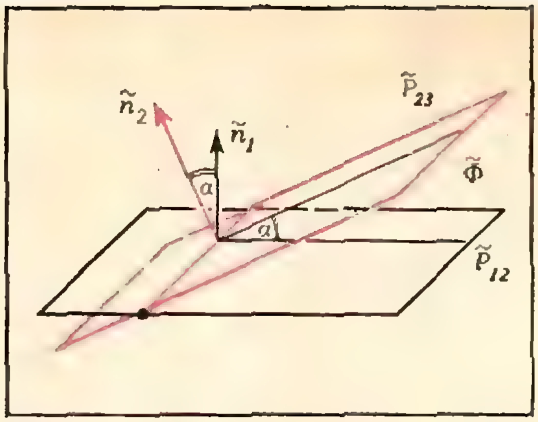


Рис. 5.

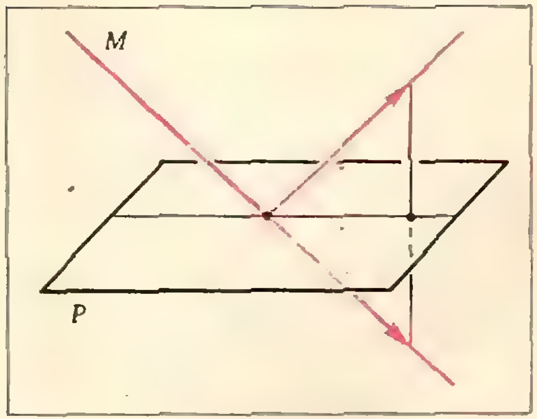


Рис. 6.

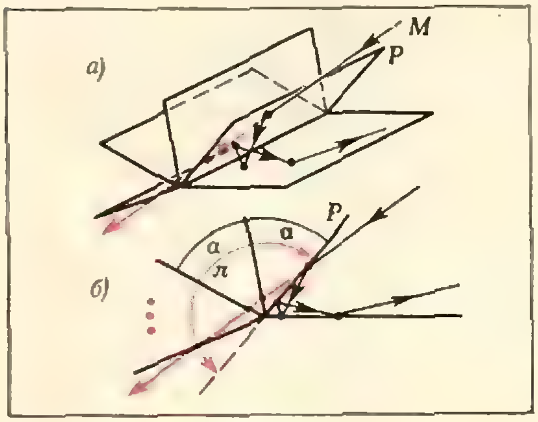


Рис. 7.

от граней. Заметим, что величина α угла $\tilde{\Phi}$ легко вычисляется: она равна величине угла между векторами

$$\vec{n}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{m_1}},\ \frac{1}{\sqrt{m_2}},\ 0\right)$$

$$\text{и } \vec{n}_2 = \left(0,\ \frac{1}{\sqrt{m_2}},\ -\frac{1}{\sqrt{m_3}}\right),$$

перпендикулярными плоскостям $\tilde{P}_{12}$ и $\tilde{P}_{23}$; векторы мы взяли, исходя из уравнений плоскостей, причем выбрали направленными в соответствующие полупространства, как показано на рисунке 5 (проверьте). Имеем

$$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{m_2}}{\sqrt{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_3}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m_1 m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}}.$$

3°. Осталось решить чисто геометрическую задачу о максимальном числе отражений точки от граней двугранного угла данной величины α. Из условий (А) и (Б) вытекает, что отрезок траектории точки после отражения от P симметричен относительно плоскости P продолжению исходного отрезка траектории за точку попадания на P (рис. 6). Следовательно, любую ломаную — траекторию точки, движущейся по закону упругого отражения между гранями двугранного угла, — можно «выпрямить», то есть последовательными симметриями относительно граней угла превратить в прямую, как показано на рисунке 7, *а* (при этом сам двугранный угол мы отражаем вместе с траекторией). Удобнее на эту картинку смотреть «сбоку» — со стороны общего ребра получающихся двугранных углов (иными словами, пространственный чертеж можно спроектировать на плоскость, перпендикулярную ребру двугранного угла, как на рисунке 7, *б*). Если в первый раз точка M соударяется с гранью P, то после выпрямления продолжение траектории будет лежать по одну сторону от плоскости P и может пересекать только те из получающихся последовательными симметриями полуплоскостей, которые лежат по ту же сторону от P. Ясно, что число таких полуплоскостей равно $\{\pi/\alpha\}$, если только $\alpha \neq \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$; в случае, когда $\alpha = \pi/n$, последняя полуплоскость будет лежать в плоскости P, и выпрямленная траектория ее пересечь не может — в этом случае число точек пересечения не больше $[\pi/\alpha] - 1$. Поскольку точкам пересечения выпрямленной траектории с указанными полуплоскостями отвечают точки отражения от граней исходного угла, находим, учитывая самую первую точку пересечения, максимальное число отражений:

$$N_{\max}(\alpha)=\begin{cases}\left[\dfrac{\pi}{\alpha}\right]+1 \text{ при } \alpha\neq\dfrac{\pi}{n}, \\ \qquad\qquad\qquad n\in\mathbf{N} \\ \left[\dfrac{\pi}{\alpha}\right] \text{ при } \alpha=\dfrac{\pi}{n}.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $N_{\max}(\alpha)$ можно записать одной формулой $N_{\max}(\alpha)=-[-\pi/\alpha]$. Для двугранного угла, соответствующего шарам масс m_1, m_2 и m_3 на прямой, имеем

$$\alpha=\arccos\sqrt{\frac{m_1m_3}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}},\text{ —}$$

откуда и получается формула, указанная в начале параграфа.

Как сообщил автору статьи Л. Блохинцев, задача, решенная в этом параграфе, возникла при исследовании так называемых «особенностей фейнмановских диаграмм»; при ее решении методами квантовой теории рассеяния была получена доказанная выше формула!

4°. Основная идея изложенного выше решения состояла в одновременном слежении сразу за несколькими точками с помощью интерпретации их конфигурации (расположения) как одной точки в соответственным образом выбранном множестве (в данном случае положениям трех шаров x_1, x_2, x_3 отвечала точка $M(x_1; x_2; x_3)$ двугранного угла $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$ координатного пространства). Совокупность таких точек, отвечающих всем возможным расположениям системы исходных точек, называется *конфигурационным пространством* этой системы. Иногда, как и в разобранном случае, для каждой материальной точки удобно выбирать свои координаты. Введение конфигурационного пространства полезно и удобно во многих задачах. Приведем две из них.

Задача 1. Две материальные точки масс m_1 и m_2 движутся по отрезку $0\leqslant x\leqslant a$ на оси Ox, абсолютно упруго сталкиваясь между собой и абсолютно упруго отталкиваясь от концов отрезка (от точек $x=0$ и $x=a$). Введите конфигурационное пространство этой системы и подберите координаты для каждой из точек так, чтобы изображающая точка M двигалась как точечный биллиардный шар внутри некоторого прямоугольного треугольника (рис. 8)!

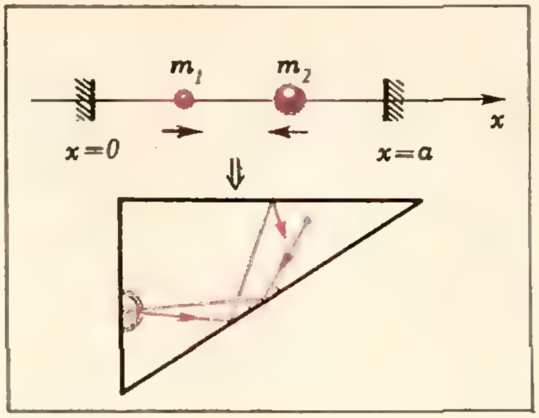


Рис. 8.

Задача 2. (Задача Н. Н. Константинова.) Города A и B соединены двумя дорогами (рис. 9). Известно, что две машины, связанные веревкой длины меньше $2r$, могут проехать из A в B, каждая — по своей дороге, не разорвав веревки. Смогут ли разъехаться два круглых воза радиуса r, выезжающих навстречу друг другу, каждый — по своей дороге?

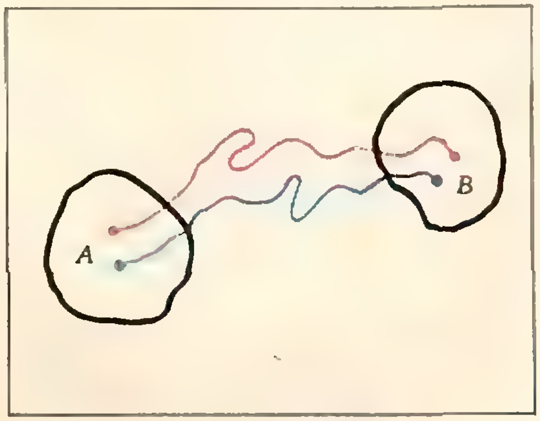


Рис. 9.

§ 3. Шары произвольных масс

Для n шаров масс m_1, m_2, ..., m_n, движущихся по прямой Ox, также можно ввести конфигурационное пространство — это будет $(n-1)$-гранный угол в n-мерном координатном пространстве $Ox_1x_2...x_n$, выделяемый неравенствами $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n$. Рассуждения п. 2° из § 2 проходят и в этом случае, но рассмотрения п. 3° проваливаются. Однако рассуждением от противного, используя n-мерную геометрию, можно показать, что общее число соударений не может быть бесконечным; по такой схеме эта задача была решена в 1971 году ее автором профессором МГУ Я. Г. Синаем. Мы изложим другое решение, не требующее знания многомерной геометрии; идея решения была предложена учеником ФМШ при МГУ А. Авдеевым (ныне студентом МФТИ; позже аналогичные решения были найдены студентом Киевского университета А. Резниковым и аспирантом МГУ Г. Гальпериным).

1°. Рассуждения будем вести индукцией по числу шаров. В § 2 было доказано, что при $n = 3$ число столкновений конечно. Допустим, что при любых начальных условиях в группе из $k < n$ шаров за время от 0 до T (где T может быть равно $+\infty$) происходит только конечное число столкновений. Предположим, что при каких-то начальных условиях n шаров за время от 0 до T сталкиваются бесконечно много раз. Перенумеруем шары в порядке их следования по оси Ox, но справа налево. В каждый момент времени рассмотрим суммарный импульс k правых шаров:

$$P_k = m_1 v_1 + m_2 v_2 + \ldots + m_k v_k \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

При каждом парном столкновении величина P_k может только увеличиться: действительно, P_k не меняется, если сталкиваются шары левее k-го или правее $(k+1)$-го; если k-й шар сталкивается с $(k+1)$-ым, P_k увеличивается, (ибо $(k+1)$-й шар толкает k-й вправо).

Обозначим теперь через $v_i^{(s)}$ скорость i-го шара после s-го по порядку столкновения (в котором i-й шар может и не участвовать), через $P_k^{(s)}$ — импульс P_k после s-го столкновения. Из сказанного выше следует, что при каждом k последовательность $P_k^{(s)}$ $(s = 1,\ 2,\ \ldots)$ — неубывающая.

С другой стороны, при всех столкновениях суммарная кинетическая энергия всех шаров сохраняется:

$$\frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 + \ldots + m_n v_n^2\right) = E = \text{const}.$$

Отсюда следует, что при каждом i в любой момент времени скорость ограничена:

$$m_i v_i^2 \leqslant 2E \text{ и } |v_i| \leqslant \sqrt{2E/m_i} \leqslant \sqrt{2E/m},$$

где m — наименьшая из масс $m_1, \ldots, m_n$. Отсюда вытекает ограниченность каждой из последовательностей $P_k^{(s)}$:

$$|P_k^{(s)}| \leqslant m_1 |v_1^{(s)}| + \ldots + m_k |v_k^{(s)}| \leqslant (m_1 + \ldots + m_k)\sqrt{2E/m}.$$

Итак, при каждом k последовательность $P_k^{(s)}$ монотонная и ограниченная, поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, все эти последовательности имеют пределы при $s \to \infty$. Но $P_1^{(s)} = m_1 v_1^{(s)}$, поэтому существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} v_1^{(s)} = w_1$. Далее, $P_2^{(s)} = m_1 v_1^{(s)} + m_2 v_2^{(s)}$, поэтому существует и предел $\lim\limits_{s\to\infty} v_2^{(s)} = w_2$ (объясните). Продолжая это рассуждение, мы выводим существование пределов скоростей всех шаров: $\lim\limits_{s\to\infty} v_k^{(s)} = w_k$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

2°. Теперь мы покажем, что все предельные скорости w_k должны быть равны между собой. Рассмотрим два соседних шара: k-й и $(k+1)$-й. За время от 0 до T эти шары должны сталкиваться между собой бесконечно много раз, ибо в противном случае из предположения индукции следовала бы конечность числа столкновений всех n шаров (объясните). Пусть s-е соударение произошло между этими шарами. Запишем законы сохранения импульса и энергии для этого соударения:

$$m_k v_k^{(s)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s)} = m_k v_k^{(s-1)} + m_{k+1} v_{k+1}^{(s-1)},$$

$$m_k \left(v_k^{(s)}\right)^2 + m_{k+1}\left(v_{k+1}^{(s)}\right)^2 = m_k \left(v_k^{(s-1)}\right)^2 + m_{k+1}\left(v_{k+1}^{(s-1)}\right)^2,$$

откуда

$$m_k \left(v_k^{(s)} - v_k^{(s-1)}\right) = m_{k+1}\left(v_{k+1}^{(s-1)} - v_{k+1}^{(s)}\right),$$

$$m_k\left(\left(v_k^{(s)}\right)^2-\left(v_k^{(s-1)}\right)^2\right)=$$

$$=m_{k+1}\left(\left(v_{k+1}^{(s-1)}\right)^2-\left(v_{k+1}^{(s)}\right)^2\right).$$

Разделив последнее равенство на предпоследнее, получим соотношение

$$v_k^{(s)}+v_k^{(s-1)}=v_{k+1}^{(s-1)}+v_{k+1}^{(s)}.$$

Оно справедливо для бесконечного числа столкновений, и в нем можно перейти к пределу при $s\to\infty$. Для предельных скоростей, таким образом, будем иметь: $2w_k=2w_{k+1}$, откуда $w_k=w_{k+1}$. Итак, все предельные скорости равны между собой, $w_1=w_2=\ldots=w_n=w$.

3°. Пусть $v_1^0, \ldots, v_n^0$ — начальные скорости; тогда из закона сохранения импульса следует

$$m_1v_1^0+\ldots+m_nv_n^0=$$

$$=m_1v_1^{(s)}+\ldots+m_nv_n^{(s)}$$

при любом s. Поэтому, переходя к пределу при $s\to\infty$, получим

$$m_1v_1+\ldots+m_nv_n=(m_1+\ldots+m_n)w,$$

где w — общий предел всех скоростей. Следовательно,

$$w=\frac{m_1v_1+\ .\ .\ .\ +m_nv_n}{m_1+\ .\ .\ .\ +m_n},$$

то есть w есть скорость движения центра масс всех шаров.

Перейдем к системе центра масс, то есть к системе отсчета координат, которая движется относительно исходной системы отсчета со скоростью w. В этой системе все предельные скорости равны 0; следовательно, и предельная энергия в системе центра масс равна 0. Поскольку система центра масс также инерциальная, в ней справедлив закон сохранения энергии, поэтому и начальная суммарная энергия шаров в системе центра масс равна 0. Это может быть лишь тогда, когда все начальные скорости в системе центра масс были равны 0, то есть когда в исходной системе отсчета все начальные скорости были равны w; но при одинаковых начальных скоростях столкновений между шарами вообще не может быть — противоречие.

Читатель, которому в доказательстве совпадения начальных скоростей не понравился переход к системе центра масс, может непосредственным вычислением показать, что величина $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\left(v_i^s-w\right)^2$ сохраняется (и должна стремиться к 0 при $s\to\infty$).

Отметим, что московские математики Л. Вассерштейн и Г. Гальперин обобщили приведенные рассуждения на случай шаров на плоскости или в пространстве, абсолютно упруго сталкивающихся между собой, и также доказали конечность числа столкновений.

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М446—М460 и Ф448—Ф462 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Т. Абдульвагабов (С. Ярашазмаляр ДАССР) **52**; *К. Абдулхаликов* (Алма-Ата) **46**, **54**, **60а**), **б**); *А. Авоян* (Кировакан) **46**; *А. Агаев* (с. Попровка АзССР) **57**; *В. Айрикян* (Раздан) **46**; *А. Алексеев* (Пермь) **46**, **47**, **51**, **53**, **54**; *К. Архангельский* (Киев) **46**, **57**; *Б. Биасиндорж* (МНР) **54**; *Н. Бабина* (п. Научный Крымской обл.) **54**; *Е. Балакина* (Москва) **47**, **54**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **46**, **48**, **51**, **52**, **56**, **60а**); *В. Батырев* (Москва) **47**, **48**, **50—52**,**54**, **56**, **57**,**60а**); *В. Бахрушин* (Орджоникидзе) **46**; *Ю. Бащенко* (с. Демидовка Винницкой обл.) **54**; *М. Бествина* (СФРЮ) **46**, **48**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **54**; *В. Болотников* (Харьков) **46**, **51**, **54**; *В. Бондоренко* (Красновишерск) **51**; *А. Бржезинска* (ПНР) **51**; *О. Вайнберг* (Казань) **46**, **52**, **56**, **60а**); *Н. Великороссов* (Конаково) **46**, **47**, **50**; *Д. Виноградов* (Дзержинск) **54**; *С. Галстян* (с. Чахрлу АрмССР) **46**, **47**, **50—52**, **54**, **56**, **57**; *Д. Голуб* (Сумы) **48**, **50**, **51**, **54**; *В. Гречка* (Новокузнецк) **54**; *Н. Гринберг* (Киев) **54**; *С. Гришечкин* (Москва) **46—48**, **50—59**, **60а**); *В. Губа* (Вологда) **60а**), **б**), **г**); *А. Демушкин* (Москва) **47**; *М. Дмифиров* (Кировобад) **52**, **54**; *О. Евдокимов* (Ленинград) **46**, **47**, **50—58**, **60а**), **б**); *А. Егоян* (Тбилиси) **51**; *С. Железовский* (Саратов) **54**; *В. Забелин* (Саратов) **52**, **54**; *И. Зайцев* (Николаев) **54**; *И. Захаревич* (Ленинград) **47**, **48**, **50--55**; *М. Зельдич* (Киев) **58**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **46**, **56**, **57**, **60а**); *Я. Золотарев* (Ташкент) **47**, **56**; *Р. Измайлов* (Баку) **47**, **50—54**, **56—58**; *С. Исаков* (Пермь) **46**, **53**; *И. Искендеров* (с. Нюснюс НахАССР) **47**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **54**; *Л. Какабидзе* (Тбилиси) **46**; *В. Калинаичев* (Елизово) **46**, **54**; *А. Каплан* (Сумгаит) **54**; *А. Карнаухов* (п. Кутана ЯАССР) **54**; *А. Кац* (Ташкент) **46**, **48**, **50**; *А. Качуровский* (Новосибирск) **47**, **50**, **51**;

(Продолжение см. с. 38)

А. Дозоров

Демонстрация невесомости

Состояние невесомости достигается в свободном полете. И спутник на орбите, и свободно летящий камень, и подпрыгнувший человек находятся в состоянии невесомости. Груз, подвешенный на нити, в свободном полете невесом и, следовательно, не натягивает нить. Легко изготовить прибор, который дает возможность «наблюдать» состояние невесомости.

На рисунке 1 дана принципиальная схема прибора.

В «нормальном» состоянии груз (*Г*) натягивает нить, упругая пластина (*УП*) изгибается, разрывая контакт между клеммами (*К1* и *К2*) цепи. При этом включенная в цепь лампа (*Л*), естественно, не горит. Если все устройство подброшено вверх, груз находится в состоянии невесомости, а следовательно, не растягивает нить. Упругая пластина возвращается в неизогнутое положение, клеммы замыкаются, загорается лампочка. Лампочка горит лишь в том случае, если все устройство находится в состоянии невесомости. Обратите внимание, что состояние невесомости осуществляется и при движении вверх, и при движении вниз.

Регулировочный винт (*В*) позволяет установить клеммы так, чтобы они при неподвижном положении устройства были слегка раздвинуты. Все устройство крепится внутри прозрачной коробки. На рисунке 2 показан общий вид прибора.

Несколько практических советов по изготовлению прибора. Чтобы можно было пользоваться как большой (плоской) батарейкой, так и маленькой «Кроной», лучше при изготовлении ориентироваться на более крупную плоскую батарейку. Чаще всего в приборе приходится менять именно батарейку, поэтому доступ к ней должен быть простым; можно прикрепить ее к наружной части устройства, а для соединительных проводов сделать в корпусе небольшие отверстия.

В качестве упругой пластины годится любая тонкая полоска упругого металла, даже половинка лезвия для безопасной бритвы.

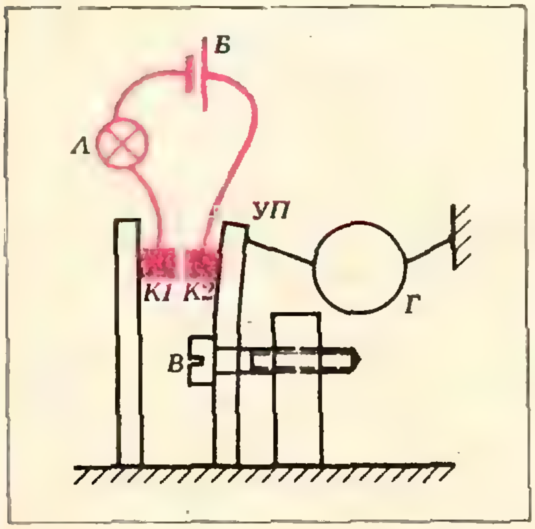


Рис. 1

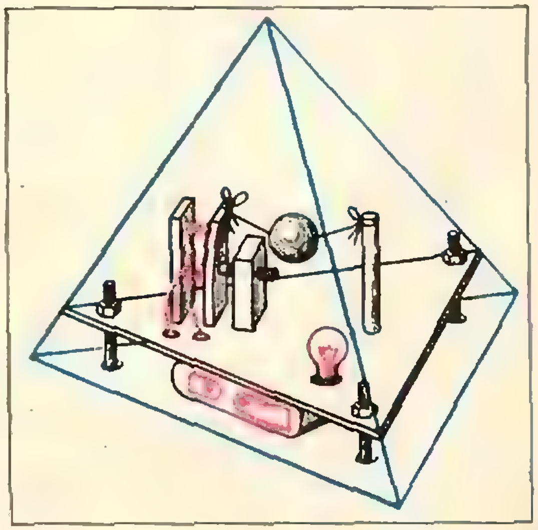
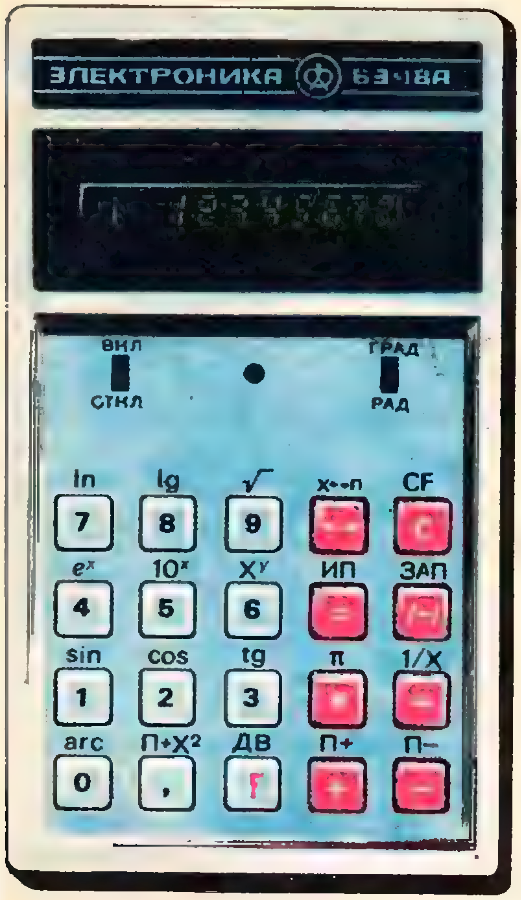


Рис.2



И. Антипов, С. Шварцбурд

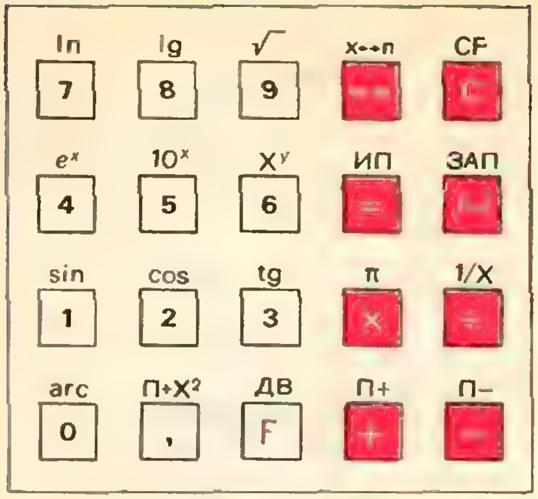
Удивительный вычислитель

Многие из вас, наверное, слышали о маленьких вычислительных машинках, которые помещаются в кармане и умеют считать «все, что угодно». В этой статье рассказывается об одной из таких машинок: микрокалькуляторе «Электроника Б3-18». Размеры этого прибора 160×90×46 мм, а масса — всего 400 граммов, но в этой «волшебной шкатулке» благодаря достижениям современной электроники помещается более 60 тысяч элементов: транзисторов, резисторов, конденсаторов...! Так что непонятно чему удивляться, то ли тому, что она замечательно считает, то ли тому, как удалось в такую маленькую коробочку уместить столько электронных приборов. Рассказать в одной статье и об устройстве «Электроники», и о том, что она умеет делать, невозможно. Поэтому мы ограничимся рассказом о её математических способностях.

Нам нередко приходилось наблюдать за людьми, впервые взявшими «Электронику» в руки. Большинство из них пытались разобраться в ее возможностях самостоятельно, не заглядывая в инструкцию. Пожалуй, этот путь освоения калькулятора интереснее всего. Но для большинства наших читателей этот путь закрыт. Поэтому мы предлагаем вам призвать на помощь воображение и представить, что у вас в руках оказалась «Электроника».

Первым делом, конечно, нужно нажать кнопку «вкл» (это всякий сообразит). При этом в самом правом разряде цифрового табло высвечиваются число 0 и запятая. Найдем с помощью калькулятора сумму 7+3. Естественно нажать клавиши с изображением цифр и знака операции. Итак, нажимаем клавишу «7» (см. рисунок) — на цифровом табло появляется число 7, высвечиваемое зеленым цветом. Далее нажимаем клавишу «+» — никаких изменений не наблюдается. Затем нажимаем клавишу «3»: с табло исчезает прежнее число и вместо него появляется число 3. Наконец, нажимаем на клавишу «=», и на табло появляется 10 — результат решения задачи (отметим, что все числа — 7, 3, 10 — высвечиваются в правой части табло).

Ясно, что точно так же следует решать любой арифметический пример с однозначными числами. А как быть с многозначными числами? Нажмем два раза подряд на клавишу 7. На табло загорается «77». А если нам нужно число 65? Какую клавишу следует нажать первой? Попробовав оба варианта, легко выяснить, что сначала нужно нажать на клавишу «6», а потом — на «5». Теперь понятно, как пользоваться кнопками с изображением цифр и тремя



кнопками с изображениями знаков операций: «+», «—», «×». Клавиша «÷» выполняет деление. Решив несколько задач, мы заметим, что все получаемые числа имеют не больше восьми разрядов, а самый левый — девятый — разряд табло предназначен для знака числа: в нем загорается «—», если результат — отрицательное число.

На калькуляторе можно вычислять значения выражений с несколькими операциями. Так, чтобы сложить несколько чисел, нужно набрать первое слагаемое, нажать на клавишу «+», затем набрать второе слагаемое, снова нажать на «+» и т. д., а в самом конце нажать на «=». Клавиши «,» и «/—/» служат для введения десятичных дробей и изменения знака числа. Если нужно набрать десятичную дробь, то сначала набираются ее знаки до запятой, потом нажимается клавиша «,», а затем — ее остальные знаки. Чтобы снабдить число знаком «минус» нужно нажать клавишу «/—/». Например, в таблице показано, как следует набирать число — 48,587.

Итак, калькулятор может выполнять любые арифметические действия: делает он это бесшумно и практически мгновенно. Те, кому приходилось работать на арифмометре, смогут оценить преимущества «Электроники». Но этим возможности рассматриваемого прибора не исчерпываются. Он умеет так же быстро вычислять значения многих функций. Из рисунка видно, что кроме символа, размещенного непосредственно на клавише, над каждой клавишей записано некоторое обозначение. В основном это обозначения функций: логарифмических, тригонометрических и др. Для того чтобы вычислять значения этих функций, нужно воспользоваться клавишей «*F*».

Пусть, например, требуется вычислить $\sqrt{20{,}25}$. Для этого следует набрать число 20,25; оно будет высвечено на табло. Затем нужно нажать клавиши «*F*» и «$\sqrt{\ }$» («$\sqrt{\ }$» — это та же клавиша, что и «9»), после чего на табло высветится результат — число 4,5.

Обратите внимание на последовательность символов-клавиш, используемых при решении данной задачи:

«2»«0»«,»«2»«5»«*F*»«$\sqrt{\ }$»

Выписанная последовательность символов является *командой* вычисления значения квадратного корня из заданного числа. В такой команде сначала располагается исходное число — аргумент функции, затем признак функции *F* и далее — обозначение

Клавиша	Табло									Пояснения
									0.	начальное состояние (переключатель «вкл.»)
4									1.	
8								4	8.	
.								4	8.	отделение (фиксация) целой части вводимого числа
5							4	8.	5	
8						4	8.	5	8	
7					4	8.	5	8	7	
(−)	−				4	8.	5	8	7	изменение знака числа (умножение на —1)

функции (в отличие от обычной записи).

Аналогичным образом на калькуляторе вычисляются значения функций $^1/x$, 10^x, e^x, логарифмических функций (десятичного и натурального логарифма) и тригонометрических функций.

Расскажем, как вычислять на калькуляторе значения функции x^y. Пусть, например, надо вычислить $5{,}1^{3{,}92}$. Сначала набираем число 5,1 (оно появляется на табло). После этого нажимаем на клавиши «F» и «x^y». На табло появляется число $1{,}629241 = \ln 5{,}1$ (дело в том, что калькулятор вычисляет x^y по формуле $x^y = e^{y \ln x}$). Далее набираем число 3,92 (оно появляется на табло). Наконец, нажав на клавишу «=», получим на табло число 593,8486, представляющее собой искомый результат: $5{,}1^{3{,}92} = 593{,}8486$.

Чтобы оценить удобство решения вычислительных задач с помощью калькулятора, достаточно вспомнить, как решаются аналогичные задачи на уроках математики в школе — с использованием таблиц или логарифмической линейки. При этом приходится логарифмировать, потенцировать и выполнять другие операции. На все это уходит много времени. Калькулятор же, давая большой выигрыш во времени решения задачи, гарантирует точность решения и исключает разные технические ошибки.

Для вычисления значений обратных тригонометрических функций используется клавиша «arc»; а с помощью преключателя «рад/град» результат может быть выражен в градусах или радианах. Например, чтобы вычислить arctg 1 в градусах, необходимо установить переключатель в положение «град» и последовательно нажать клавиши «1», «F», «arc», «tg». На табло появится результат — число 45 (или, возможно, его приближенное значение, например, 44,99999).

Мы объяснили действие далеко не всех клавиш. «Необъясненные» клавиши в основном предназначены для работы с памятью прибора. Да, да, не удивляйтесь, у нашего прибра есть память для хранения данных и результатов вычислений. Использование этих клавиш иногда позволяет обойтись без записи промежуточных результатов. Пусть, например, нас интересует значение выражения 255 :(42—25). Если вычислять его «в лоб», то потребуется отдельно вычислить разность 42—25. Если же последовательно нажать на клавиши «4»«2»«—»«2»«5»«÷»«2»«5»«5»«←→»«=», то на табло появится ответ: 15. Поясним, как получается результат. За нажатием клавиши «÷» на табло высвечивается число 17. После набора 255 на табло загорается число 255, а число 17 пересылается в память прибора, причем прибор знает, что ему нужно поделить содержимое памяти на число, записанное на табло. Нажав клавишу «←→», мы меняем местами содержимые памяти и табло: 17 оказывается на табло, а 255 — в памяти. Наконец, нажав «=», мы получим окончательный результат.

К сожалению, рассказать более подробно о работе с памятью прибора в этой статье мы не можем.

Решая задачу с помощью калькулятора, человек практически не замечает времени выполнения отдельных действий, — ему не приходится ждать. В действительности же на выполнение различных команд «Электроника» тратит разное время. Так, на сложение двух чисел она может затратить 0,05 секунды, а на возведение в степень — около секунды. Дело в том, что для вычисления значений функции приходится выполнить десятки арифметических операций, которые калькулятор совершает автоматически, по своей внутренней программе, без участия человека. Но в любом случае математик не может пожаловаться на то, что калькулятор как-то тормозит его работу. Пожалуй, наоборот, — калькулятору приходится тратить слишком много времени на ожидание следующей команды.

В учебной практике калькулятор является достойным преемником математических таблиц и счетных линеек. Мы надеемся, что недалеко то время, когда такие или им подобные вычислительные машинки станут необходимыми (и доступными!) приборами на уроках математики, физики, химии.

задачник Кванта

Задачи

М496-М500; Ф508-Ф512

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июня 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М496, М497» или «Ф508». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М496. Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел, или не представимых?

С. Фомин

М497. На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1; на отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.

В. Гутенмахер

М498*. Для каждого натурального $n \geqslant 3$ укажите наименьшее k такое, что любые n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно разделить k прямыми. (Прямые *разделяют* данные точки, если для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.)

Н. Васильев, А. Егоров

М499. Назовем число *уравновешенным*, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 — нет.) Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему справа любой из 10 цифр становится уравновешенным.

Г. Гуревич

М500. N первоклассников выстроены в одну шеренгу (плечом к плечу). По команде «нале-ВО» все одновременно повернулись на 90°, некоторые — налево, а другие — направо. Ровно через секунду *каждый, кто стал лицом к лицу со своим соседом, поворачивается «кругом» — на 180°*. Еще через секунду каждый оказавшийся теперь лицом к лицу с соседом снова поворачивается на 180° и т. д. (рис. 1).

а) Докажите, что через конечное время движение прекратится.

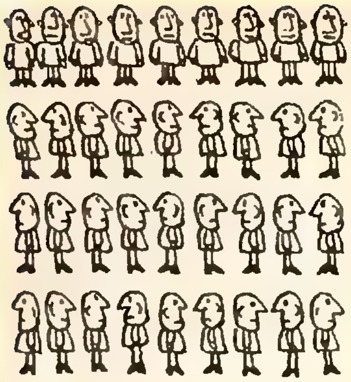


Рис. 1.

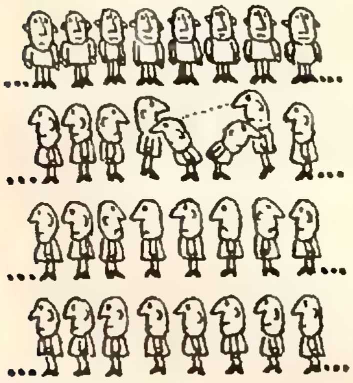


Рис. 2.

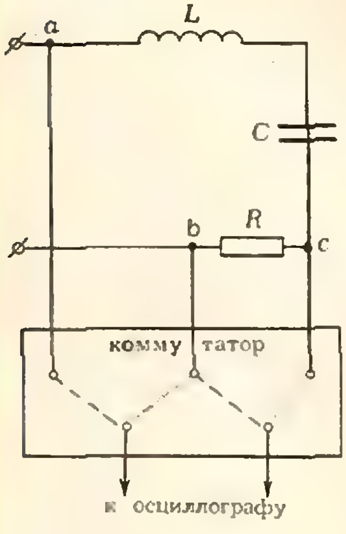


Рис. 3.

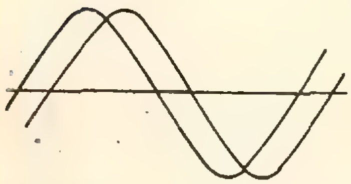


Рис. 4.

б) * Какое наибольшее число раз мог повернуться «кругом» один человек?

в) * Какое наибольшее количество времени могло продолжаться движение в строю?

г) Пусть шеренга бесконечна в обе стороны, и по команде «нале-ВО» только конечное множество K первоклассников повернулось направо, а остальные — налево. Тогда по правилу задачи (выделенному курсивом) движение продолжалось бы бесконечно долго. Докажите, однако, что движение прекратится через конечное время, если это правило заменить таким: первоклассник поворачивается на 180°, только если первый (его сосед) и третий из стоящих перед ним обращены к нему лицом (рис. 2).

Г. Курдюмов, Ю. Неретин

Ф508. Период обращения Меркурия вокруг Солнца составляет 88 земных суток, а вокруг своей оси — 59 земных суток. Какова продолжительность дня и ночи на Меркурии?

Е. Левитан

Ф509. В океане имеется течение, захватывающее лишь верхний слой воды. По течению плывет плот со звукоулавливающей установкой. На дне, впереди по течению, расположен неподвижный источник звука. Наблюдатель на плоту обнаружил, что в некоторый момент времени звук достигает плота по направлению, составляющему угол α с вертикалью. Какой угол с вертикалью составляет в этот момент направление на источник звука?

Скорость течения v, скорость звука в воде c, толщина движущегося слоя много меньше глубины океана.

Г. Коткин

Ф510. На резиновый шар натянута прочная резиновая сетка, нити которой идут по меридианам шара. Какую форму примет шар, если повысить в нем давление?

Ф511. Пластины плоского конденсатора площадью S образуют малый угол α ($\alpha \ll 1$) друг с другом. Среднее расстояние между пластинами равно d. Нарисовать примерную картину силовых линий электростатического поля конденсатора и найти емкость конденсатора.

Ф512. Цепь, показанная на рисунке 3, включена в сеть переменного тока частоты $\nu = 50$ Гц. С помощью коммутатора на вход осциллографа подается попеременно то напряжение между точками a и b, то напряжение между точками b и c. На экране осциллографа получаются изображения двух кривых. Рисунок 4 сделан с фотографии картины на экране осциллографа. Определить индуктивность L контура, если $C = 32$ мкФ, $R = 65$ Ом.

В. Нижник

Решения задач

М446-М448; Ф462-Ф466

М446. *Окружность длины 1 катится снаружи по окружности длины $\sqrt{2}$. В начальный момент времени точка касания окружности отмечена липкой красной краской. При качении покрашенные точки той и другой окружности вновь красят точки, с которыми они соприкасаются. Сколько различных точек неподвижной окружности будет запачкано к тому моменту, когда подвижная окружность сделает 100 оборотов вокруг неподвижной?*

Выясним сначала, сколько красных следов оставит на неподвижной окружности a (длины $\sqrt{2}$) первая красная точка B подвижной окружности b (длины 1) за n оборотов.

Покатим окружность b по прямой. Тогда (если принять первую красную точку на прямой за начало отсчета O) следы точки B попадут в точки с целыми неотрицательными координатами (рис. 1). Теперь намотаем прямую на окружность a, начав с точки O. Каждому обороту соответствует отрезок прямой длины $\sqrt{2}$. Ясно, что различные красные точки прямой перейдут при этом в различные точки окружности a, поскольку равенство $k_1-k_2=m\sqrt{2}$ при целых m, $k_1\neq k_2$, невозможно (ведь число $\sqrt{2}$ иррационально). Таким образом, за первые n оборотов точка B оставит $[n\sqrt{2}]+1$ следов: именно столько целых точек на отрезке $[0;\ n\sqrt{2}]$.

Попробуем учесть теперь все многократные следы, оставляемые на той и другой окружностях. На первый взгляд кажется, что их число растет по экспоненте в зависимости от числа оборотов n: после каждого оборота средняя плотность красных точек (число точек, приходящихся на единицу длины) возрастает примерно вдвое — ведь к имеющимся на каждой окружности красным точкам добавляются следы точек с другой окружности. Однако это предположение оказывается совершенно неверным: на окружности a не появится никаких других красных точек, кроме тех, в которые попадает самая первая точка B! Действительно, пусть некоторая точка $B'\in b$ красится при соприкосновении с красной точкой $A'\in a$. Поскольку A' — красная, с ней уже соприкасалась до этого первая точка B. Ясно, что, став красной, B' будет попадать в те же самые точки (отстоящие от A' на расстоянии 1, 2, . . . в направлении вращения), в которых уже побывала B после своего соприкосновения с A'.

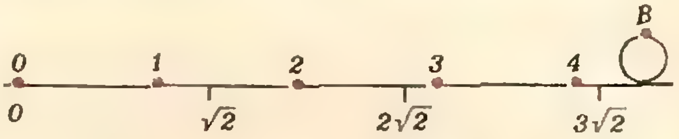


Рис. 1.

Точно так же можно доказать, что на окружности b не появится никаких точек, кроме тех, которые закрасит самая первая красная точка $A\in a$, так что через n оборотов на окружности b появится $(n+1)$-я по счету красная точка.

Итак, число красных точек растет не по показательному, а всего лишь по линейному закону $[n\sqrt{2}]+1$.

Н. Васильев

◆

М447. *В остроугольном треугольнике ABC отрезки BO и CO (где O — центр описанной окружности) продолжены до пересечения в точках D и E со сторонами AC и AB треугольника. Оказалось, что $B\widehat{D}E=50°$, а $C\widehat{E}D=30°$. Найдите величины углов треугольника ABC и докажите равенства $|EA|=|ED|$, $|CE|=|CB|$, $|CD|=|CO|$.*

Ответ: $\widehat{A}=50°$, $\widehat{B}=70°$, $\widehat{C}=60°$.

Величина угла A находится легко (см. рис. 2): поскольку $B\widehat{O}C=E\widehat{O}D=180°-30°-50°=100°$, величина вписанного угла $\widehat{A}=50°$. Заметим также, что $O\widehat{B}C=O\widehat{C}B=40°$ (поскольку $|BO|=|CO|$).

Найти величины других углов треугольника ABC можно с помощью теоремы синусов. Положим $E\widehat{B}D=\varphi$. Тогда $O\widehat{E}B=100°-\varphi$, $A\widehat{B}C=\varphi+40°$, $A\widehat{C}B=90°-\varphi$,

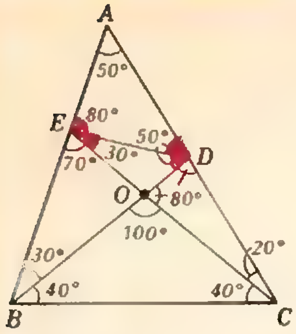


Рис. 2.

$\widehat{OCD} = 50° - \varphi$, $\widehat{ODC} = \varphi + 50°$; таким образом, $0° < \varphi < 50°$. Из треугольников ODE, OBE и OCD находим:

$$\frac{\sin 50°}{\sin 30°} = \frac{|OE|}{|OD|} = \frac{|OE|}{|OB|} \cdot \frac{|OC|}{|OD|} = \frac{\sin \widehat{OBE}}{\sin \widehat{OEB}} \cdot \frac{\sin \widehat{ODC}}{\sin \widehat{OCD}} =$$

$$= \frac{\sin \varphi \ \sin(\varphi + 50°)}{\sin(100° - \varphi) \sin(50° - \varphi)}.$$

Уравнение, из которого мы должны найти φ $(0° < \varphi < 50°)$:

$$\frac{\sin \varphi \ \sin(\varphi + 50°)}{\sin(100° - \varphi) \sin(50° - \varphi)} = 2 \sin 50°,$$

эквивалентно следующим:

$$2 \sin 50° (\cos 50° - \cos(150° - 2\varphi)) =$$
$$= \cos 50° - \cos(50° + 2\varphi),$$

$$\sin 20° - \sin(2\varphi - 40°) + 2 \sin 50° \cos(2\varphi + 30°) = 0,$$

$$\cos(\varphi - 10°) \ \sin(30° - \varphi) + \sin 50° \sin(60° - 2\varphi) = 0,$$

$$\sin(30° - \varphi)(\cos(\varphi - 10°) + 2 \sin 50° \cos(30° - \varphi)) = 0.$$

Поскольку $\cos(\varphi - 10°)$ и $\cos(\varphi - 30°)$ положительны при $0° < \varphi < 50°$, последнее уравнение имеет единственный корень $\varphi = 30°$.

Отсюда $\widehat{ABC} = 70°$, $\widehat{ACB} = 60°$.

Далее, $\widehat{BEC} = 70° \Rightarrow |CE| = |CB|$; $\widehat{ODC} = 80° \Rightarrow$
$\Rightarrow |CD| = |CO|$; $\widehat{ADE} = 50° \Rightarrow |EA| = |ED|$.

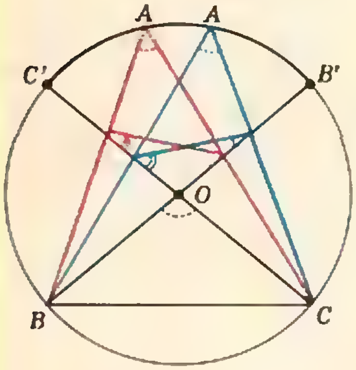


Рис. 3.

Равенства длин, которые требуется установить в задаче, подсказывают, какие углы должен иметь треугольник ABC. Но даже зная ответ, придумать данное выше тригонометрическое решение трудно. Вместо этого можно рассуждать иначе.

Заметим прежде всего, что условия $\widehat{OED} = 30°$, $\widehat{ODE} = 50°$ определяют ответ однозначно. Действительно (рис. 3), если на окружности с центром O закрепить точки B и C так, что $\widehat{BOC} = 100°$, и перемещать точку A по дуге $B'C'$ (симметричной дуге BC) от точки B' к точке C', то точка $D \in [B'O]$ будет приближаться к O, а $E \in [OC']$ — удаляться от O; при этом величина угла $\widehat{ODE}$ будет возрастать, а угла $\widehat{OED}$ — убывать; значит, только при одном положении A эти величины могут принять нужные значения (50° и 30°).

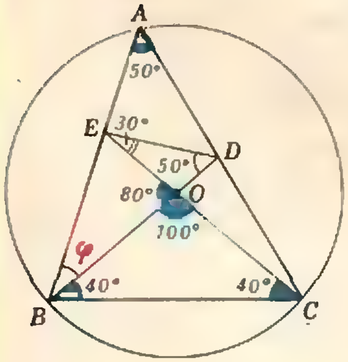


Рис. 4.

Теперь нужно лишь доказать, что треугольник с углами $\widehat{A} = 50°$, $\widehat{B} = 70°$, $\widehat{C} = 60°$ удовлетворяет условию, то есть что все углы — такие, *как указано на рисунке 4. Это ясно для* углов, дужки которых не закрашены. Несколько труднее доказать, что красные углы имеют указанные величины (достаточно это сделать для одного из углов). Приведем два доказательства.

1°. Достаточно проверить, что DE — биссектриса угла ADB:

$$\frac{|AE|}{|EB|} = \frac{|AE|}{|EC|} \cdot \frac{|EC|}{|EB|} = \frac{\sin 20° \sin 70°}{\sin 50° \sin 40°} =$$

$$= \frac{2 \sin 20° \cos 20°}{2 \sin 50° \sin 40°} = \frac{\sin 30°}{\sin 50°} = \frac{|AD|}{|DB|}.$$

Здесь мы снова использовали теорему синусов. А вот чисто геометрическое доказательство.

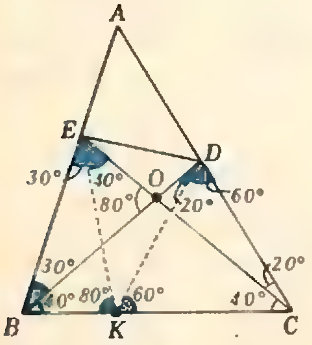


Рис. 5.

2°. Треугольник ECB имеет ось симметрии, поскольку $\widehat{CEB} = \widehat{CBE}$. Пусть K — точка, симметричная точке O относительно этой оси (рис. 5). Тогда треугольник KCD равносторонний ($|KC| = |OC| = |DC| = a$, $\widehat{KCD} = 60°$), и потому $|KD| =$

$=a$, $D\widehat{K}C=K\widehat{D}C=60^\circ$, а $\triangle KBE\cong\triangle OEB$, и потому $B\widehat{E}K=30^\circ$, $E\widehat{K}B=80^\circ$, $|EK|=|OB|=a$. Итак, треугольник EKD равнобедренный, $E\widehat{K}D=40^\circ$, поэтому $K\widehat{E}D=K\widehat{D}E=70^\circ$, $O\widehat{D}E=70^\circ-O\widehat{D}K=70^\circ-(80^\circ-60^\circ)=50^\circ$, $O\widehat{E}D=70^\circ-40^\circ=30^\circ$.

Н. Васильев,
Я. Суконник

◆

М448. *Докажите, что центры всех эллипсов, вписанных в данный четырехугольник, лежат на прямой, проходящей через середины диагоналей этого четырехугольника.*

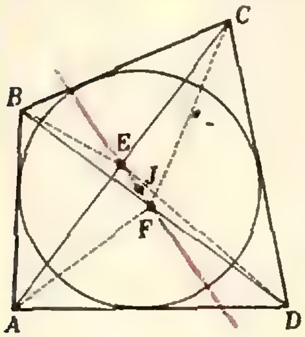


Рис. 6.

Назовем *растяжением* преобразование плоскости, которое в некоторой системе координат Oxy записывается формулой $(x, y)\to(x, ky)$, где $k>0$. Эллипс можно некоторым растяжением перевести в окружность *). А прямые при растяжении плоскости переходят в прямые, середина отрезка — в середину его образа. Следовательно, из данного эллипса $Э$, вписанного в четырехугольник $Ч$, мы можем растяжением P получить окружность $P(Э)$, вписанную в четырехугольник $P(Ч)$, причем центр эллипса $Э$ и середины диагоналей $Ч$ перейдут соответственно в центр окружности $P(Э)$ и середины диагоналей $P(Ч)$. Таким образом, достаточно решить задачу для того случая, когда в условии вместо «эллипса» стоит «окружность»: доказать, что *для любого описанного четырехугольника $ABCD$ центр окружности J лежит на прямой, соединяющей середины E и F диагоналей AC и BD* **).

Это можно сделать с помощью векторов или метода координат. Более приятное геометрическое решение следующее.

Заметим, что все три точки E, F и J принадлежат множеству таких точек M, для которых

$$S(AMB)+S(CMD)=S(BMC)+S(AMD) \qquad (*)$$

(где $S(PMQ)$ означает площадь $\triangle PMQ$).

Для E и F это вытекает из того, что медиана делит треугольник на два равновеликих ($S(AFB)=S(AFD)$, $S(BFC)=S(CFD)$, $S(AEB)=S(BEC)$, $S(AED)=S(CED)$ на рисунке 6); для J — из свойства $|AB|+|CD|=|AD|+|BC|$ описанного четырехугольника. Теперь докажем, что множество точек M, определяемых условием $(*)$, — прямая (если $ABCD$ — не ромб). Каждая из функций $f_1: M\to S(AMB)$, $f_2: M\to S(BMC)$, $f_3: M\to S(AMD)$, $f_4: M\to S(CMD)$ линейна; значит, и их линейная комбинация

$$f: M\to S(AMB)+S(CMD)-S(BMC)-S(AMD)$$

— *линейная* функция (на любой прямой); то есть для любых трех точек K, L, N одной прямой из $\overrightarrow{OK}=t\overrightarrow{OL}+(1-t)\overrightarrow{ON}$ (рис. 7) следует $f(K)=tf(L)+(1-t)f(N)$. Так как $f(E)=f(F)=0$, то $f(M)=0$ для любой точки $M\in(EF)$ и (если f не тождественно равна 0) $f(M)\neq0$ для точек M, не лежащих на прямой EF ***).

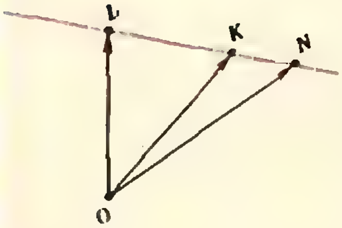


Рис. 7.

В нашей задаче $f(M)\equiv0$ для всех точек M на плоскости лишь для ромба $ABCD$ (для него утверждение задачи очевидно), а для любого четырехугольника, отличного от ромба, множество точек $\{M : f(M)=0\}$, то есть точек, удовлетворяющих условию $(*)$, — прямая.

На рисунке 8 изображено все семейство эллипсов, вписанных в некоторый четырехугольник. Как доказал И. Ньютон около 250 лет назад, центры эллипсов заполняют отрезок, соединяющий середины диагоналей этого четырехугольника.

Н. Васильев

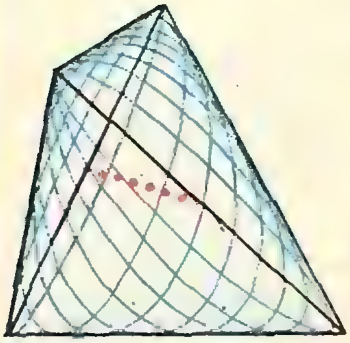


Рис. 8.

---

*) См. «Квант», 1975, № 1, с. 2.

**) Об аналогичном методе доказательства см. «Квант», 1977, № 8, с. 38.

***) Подробнее о линейных функциях на плоскости и их геометрических приложениях см. в книге Н. Васильева и В. Гутенмахера «Прямые и кривые» (§§ 2 и 5), М., «Наука».

Ф462. *Если терморегулятор электрического утюга поставлен в положение «капрон», то утюг периодически включается на $\tau_1 = 10$ с и выключается на $\tau_2 = 40$ с. Поверхность утюга при этом нагревается до температуры $t_1 = 100$°С. Если терморегулятор поставить в положение «хлопок», то утюг периодически включается на $\tau_1' = 20$ с и выключается на $\tau_2' = 30$ с. Определить установившуюся температуру t_2 поверхности утюга в этом положении терморегулятора. Найти, до какой температуры t_3 нагреется включенный утюг, если терморегулятор выйдет из строя.*

Считать, что теплоотдача пропорциональна разности температур утюга и окружающего воздуха. Температура в комнате $t_0 = 20$°С.

Пусть P — мощность, выделяющаяся в утюге. Тогда за время τ_1 в нем выделится энергия

$$W_1 = P\tau_1.$$

За время $\tau_1 + \tau_2$ утюг отдает энергию

$$W_2 = \alpha\,(t_1 - t_0)\,(\tau_1 + \tau_2),$$

где α — коэффициент пропорциональности.

При установившейся температуре утюга $W_1 = W_2$:

$$P\tau_1 = \alpha\,(t_1 - t_0)\,(\tau_1 + \tau_2). \qquad (1)$$

Точно так же в режиме, когда терморегулятор установлен в положении «хлопок»,

$$P\tau'_1 = \alpha\,(t_2 - t_0)(\tau'_1 + \tau'_2). \qquad (2)$$

Подставив в (2) значение P из (1), найдем t_2:

$$t_2 = \frac{\tau_1'}{\tau_1}\,\frac{(t_1 - t_0)(\tau_1 + \tau_2)}{\tau_1' + \tau_2'} + t_0 = 180\text{°C}.$$

С помощью аналогичных рассуждений и расчетов найдем t_3:

$$t_2 = 420\text{°C}.$$

В. Скороваров

◆

Ф463. *Две льдины движутся поступательно с одинаковыми по абсолютному значению скоростями, одна — на север, другая — на запад. Оказалось, что в любой момент времени на обеих льдинах можно так расположить часы, что скорости концов секундных стрелок относительно Земли будут равными, причем, для каждого момента времени такое расположение единственно. Определить, на какое расстояние перемещаются льдины за сутки, если длина каждой секундной стрелки равна 1 см. Циферблаты часов расположены горизонтально.*

Скорость $\vec{v}$ конца стрелки относительно Земли равна векторной сумме скорости льдины $\vec{v}_1$ и скорости $\vec{v}_2$ конца стрелки относительно льдины.

Пусть вектор $\overrightarrow{OA}$ на рисунке 9 — скорость льдины; векторы $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AB''}$, $\overrightarrow{AB'''}$ — скорости конца стрелки относительно льдины при некоторых ориентациях часов. Тогда векторы $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OB''}$, $\overrightarrow{OB'''}$ соответственно — скорости конца стрелки относительно Земли.

Ясно, что при всех возможных ориентациях вектора $\overrightarrow{AB}$ ($\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AB''}$, ...) геометрическим местом точек B (B', B'', ...) является сфера (при горизонтальном положении часов — окружность) с центром в точке A. Возможные скорости $\vec{v}$ в таком «пространстве скоростей» изображаются соответственно векторами с началом в точке O и концом в точке B на сфере (или окружности). Построение для второй льдины отличается поворотом вектора скорости льдины на 90°.

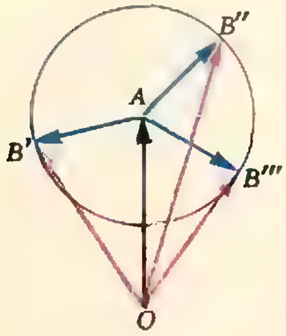


Рис. 9.

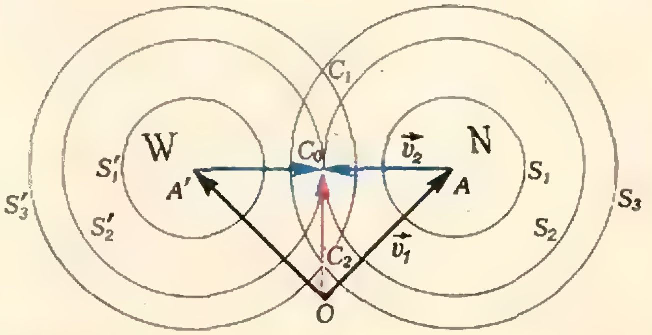
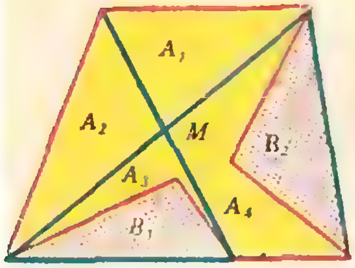


Рис. 10.

Поправка

В «Кванте» № 3 по вине типографии рисунок к решению задачи М445 (см. с. 35, рис. 8) воспроизведен неверно. Рисунок должен выглядеть так:



Ф464. *На рисунке 11 изображены два замкнутых цикла: АБВА и АВГА. Оба цикла проведены с идеальным одноатомным газом.*

1) Указать, на каких участках циклов газ получает и на каких участках отдает тепло.

2) У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

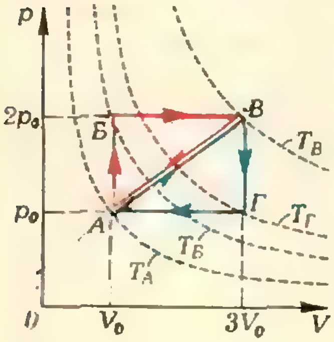


Рис. 11.

На рисунке 10 приведено построение сразу для двух льдин. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ есть скорости льдин, а окружности S и S' — геометрические места концов векторов $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ при различных соотношениях между величинами скоростей льдин и концов стрелок. Если скорости концов стрелок слишком малы, то окружности (S_1 и S_1') не имеют общих точек и скорости $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ не могут быть равными ни при какой ориентации часов. Окружности S_3 и S_3' соответствуют случаю, когда ориентация не единственна.

Условиям задачи отвечает ситуация, изображаемая касающимися окружностями S_2 и S_2'. Как видно из рисунка, при этом $|\vec{v}|=|\vec{v}_2|$, а скорость льдины $|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|\sqrt{2}$. Секундная стрелка делает один оборот за 60 секунд, следовательно, скорость ее конца равна $|\vec{v}_2|=2\pi l/60\approx 0,105$ см/с ($l=1$ см — длина стрелки). Для скорости льдины получаем $|\vec{v}_1|\approx 0,15$ см/с≈ 130 м/сутки.

В. Белонучкин

◆

Рассмотрим цикл $АБВА$. Из pV-диаграммы видно, что $T_В > T_Б > T_А$. Следовательно, на участках $АБ$ и $БВ$ газ получает тепло, а на участке $ВА$ — отдает. При этом на участке $АБ$ газ нагревается, не совершая работы ($\Delta V=0$), а на участках $БВ$ и $ВА$ газ совершает работу, равную (изменение внутренней энергии газа за цикл равно нулю)

$$A_1=Q_{АБ}+Q_{БВ}+Q_{ВА} \quad (Q_{ВА}<0).$$

Таким образом, в цикле $АБВА$

$$\eta_1=\frac{A_1}{Q_{АБ}+Q_{БВ}}.$$

Рассмотрим цикл $АВГА$. Из pV-диаграммы видно, что $T_В > T_Г > T_А$, так что на участке $АВ$ газ получает тепло, а на участках $ВГ$ и $ГА$ — отдает. На участке $ГА$ газ совершает работу

$$A_2=Q_{АВ}+Q_{ВГ}+Q_{ГА} \quad (Q_{ВГ}, Q_{ГА}<0),$$

так что

$$\eta_2=\frac{A_2}{Q_{АВ}}.$$

Сравним величины η_1 и η_2. Из pV-диаграммы видно, что $A_1=A_2$ (поскольку работа, совершаемая за цикл, численно равна площади фигуры, ограниченной графиком цикла), так что

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{Q_{АВ}}{Q_{АБ}+Q_{БВ}},$$

и так как $Q_{АБ}+Q_{БВ}>Q_{ВА}$, то $\eta_2>\eta_1$.

Вычислим отношение $\frac{\eta_1}{\eta_2}$. Для этого найдем $Q_{АБ}$, $Q_{БВ}$ и $Q_{АВ}$.

Согласно pV-диаграмме $Q_{АБ}=\Delta U_{АБ}$, где $\Delta U_{АБ}$ — изменение внутренней энергии газа на участке $АБ$. Для одного моля одноатомного идеального газа $\Delta U_{АБ}=\frac{3}{2}R\times$ $\times(T_Б-T_А)$. Из уравнения газового состояния найдем $T_Б=\frac{2p_0V_0}{R}$, $T_А=\frac{p_0V_0}{R}$. Таким образом,

$$Q_{АБ}=\Delta U_{АБ}=\frac{3}{2}R\left(\frac{2p_0V_0}{R}-\frac{p_0V_0}{R}\right)=\frac{3}{2}p_0V_0.$$

На участке $БВ$ $Q_{БВ}=\Delta U_{БВ}+A_{БВ}$, где

$$\Delta U_{БВ}=\frac{3}{2}R(T_В-T_Б)=$$

$$=\frac{3}{2}R\left(\frac{2p_0 3V_0}{R}-\frac{2p_0V_0}{R}\right)=6p_0V_0$$

(для одного моля),

$$A_{БВ}=2p_0 2V_0=4p_0V_0.$$

Таким образом,

$$Q_{БВ}=6p_0V_0+4p_0V_0=10p_0V_0,$$

$$Q_{АБ}+Q_{БВ}=11{,}5\,p_0V_0.$$

Но $Q_{АВ}=-Q_{ВА}$,

$$Q_{ВА}=A_1-(Q_{АБ}+Q_{БВ})=$$

$$=p_0V_0-11{,}5\,p_0V_0=-10{,}5\,p_0V_0,$$

так что

$$Q_{АВ}=10{,}5\,p_0V_0.$$

Итак,

$$\frac{\eta_1}{\eta_2}=\frac{Q_{АВ}}{Q_{АБ}+Q_{БВ}}=\frac{10{,}5}{11{,}5}\approx\frac{21}{23}.$$

А. Зильберман

◆

Ф465. *В высоковольтном электростатическом генераторе заряды переносятся диэлектрической лентой и заряжают высоковольтный сферический электрод радиуса $R=1{,}5$ м (рис. 12). Оценить максимальные значения напряжения и тока, которые можно получить от такого генератора, если скорость ленты $v=20$ м/с, а ее ширина $l=1$ м. Пробой в воздухе возникает при напряженности электростатического поля $E_0=30$ кВ/см.*

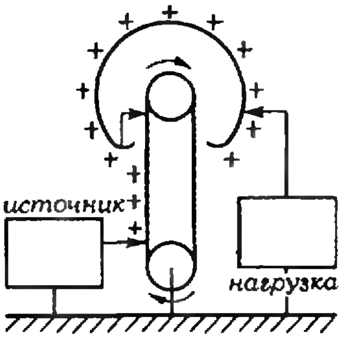


Рис. 12.

Максимальный потенциал, до которого можно зарядить высоковольтный сферический электрод генератора, определяется электрической прочностью воздуха: напряженность электростатического поля вблизи поверхности электрода не может превышать значения $E_0=30$ кВ/см, при котором наступает пробой, то есть

$$E_{\max}=E_0.$$

Следовательно, максимальный возможный потенциал на электроде равен

$$\varphi_{\max}=E_{\max}R=E_0R=4{,}5\cdot10^6\ \text{В}.$$

(Это соотношение вытекает из закона Кулона и из выражения для потенциала кулоновского поля.)

Максимальный ток, который можно получить от генератора, также определяется электрической прочностью воздуха. Обозначим через σ поверхностную плотность зарядов, переносимых лентой. Тогда напряженность поля вблизи поверхности ленты $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Эта величина не должна превышать E_0. Следовательно, максимальная возможная поверхностная плотность зарядов на ленте равна

$$\sigma_{\max}=2\varepsilon_0E_0.$$

Максимальный ток равен, очевидно, максимальному заряду, переносимому лентой за единицу времени, то есть

$$I_{\max}=\sigma_{\max}lv=2\varepsilon_0E_0lv\approx10^{-3}\ \text{А}.$$

Приведенный расчет показывает, почему электростатические генераторы должны иметь большие размеры.

С. Козел

Ф466. *Рисунок 13 сделан с фотографии треков частиц в камере Вильсона. Распады ядер газа, наполняющего камеру Вильсона, вызваны в данном случае действием на них быстрых нейтронов. Камера Вильсона была заполнена смесью водорода* (H_2), *паров спирта* (C_2H_5OH) *и воды* (H_2O) *и помещена в магнитное поле с индукцией 1,3 Т. Вектор магнитной индукции направлен перпендикулярно плоскости рисунка.*

1) *Определить энергию протона, появившегося в точке A. Траектория этого протона — кривая AA'. Почему меняется кривизна траектории протона? Определить энергию протона в точке C его траектории. Масса протона равна* $1{,}67\cdot 10^{-27}$ *кг.*

2) *Определить, ядро какого элемента распалось в точке A, если треки частиц, начинающиеся в этой точке, идентифицированы как следы двух протонов и двух α-частиц.*

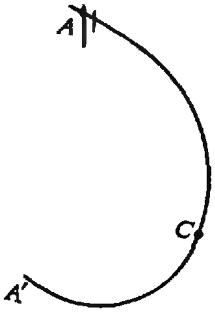


Рис. 13.

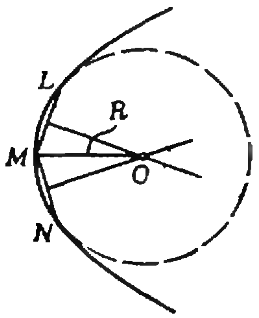


Рис. 14.

1) Для того чтобы найти кинетическую энергию протона $E_к = \frac{m_p v^2}{2}$, необходимо знать абсолютное значение его скорости $\vec{v}$. Непосредственно из рисунка определить эту величину нельзя. Чтобы найти ее, воспользуемся следующими соображениями.

На протон, движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила Лоренца

$$|\vec{F}_л| = e|\vec{v}||\vec{B}|$$

(мы считаем, что протон движется в плоскости рисунка, то есть $\vec{v}\perp\vec{B}$). Согласно второму закону Ньютона эта сила сообщает протону ускорение $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m_p}$. Так как $\vec{F}\perp\vec{v}$, то ускорение $\vec{a}$ — это центростремительное ускорение: $|\vec{a}| = \frac{v^2}{R}$, где R — радиус кривизны траектории в данной точке, то есть радиус окружности, дугой которой является участок траектории, примыкающий к данной точке.

Итак, $\frac{e|\vec{v}||\vec{B}|}{m_p} = \frac{v^2}{R}$, откуда $|\vec{v}| = \frac{e|\vec{B}|R}{m_p}$, и следовательно,

$$E_к = \frac{\left(e|\vec{B}|R\right)^2}{2m_p}.$$

Величину R можно определить из рисунка. Сделать это можно так (рис 14). Выделим вблизи точки M траектории две точки — L и N. Проведем хорды LM и NM и восстановим перпендикуляры к серединам хорд. Точка пересечения перпендикуляров совпадает с центром окружности, дугой которой является участок LN траектории

Определив таким образом радиусы кривизны траектории протона в точках A и C и подставив найденные значения в выражение для $E_к$, найдем $E_к^A$ и $E_к^C$. Неточности в измерениях радиусов кривизны, несомненно, влияют на точность найденных значений $E_к$. Сделанные по рисунку расчеты (исходя из условия, что масштаб фотографии 1 : 1) приводят к значению $E_к^A \approx 0{,}10$ (2) МэВ. (Очевидно; что порядок величины должен быть такой же при возможных отклонениях в значащих цифрах.)

Уменьшение радиуса кривизны траектории свидетельствует об уменьшении скорости протона — энергия его расходуется на ионизацию среды, в которой он движется.

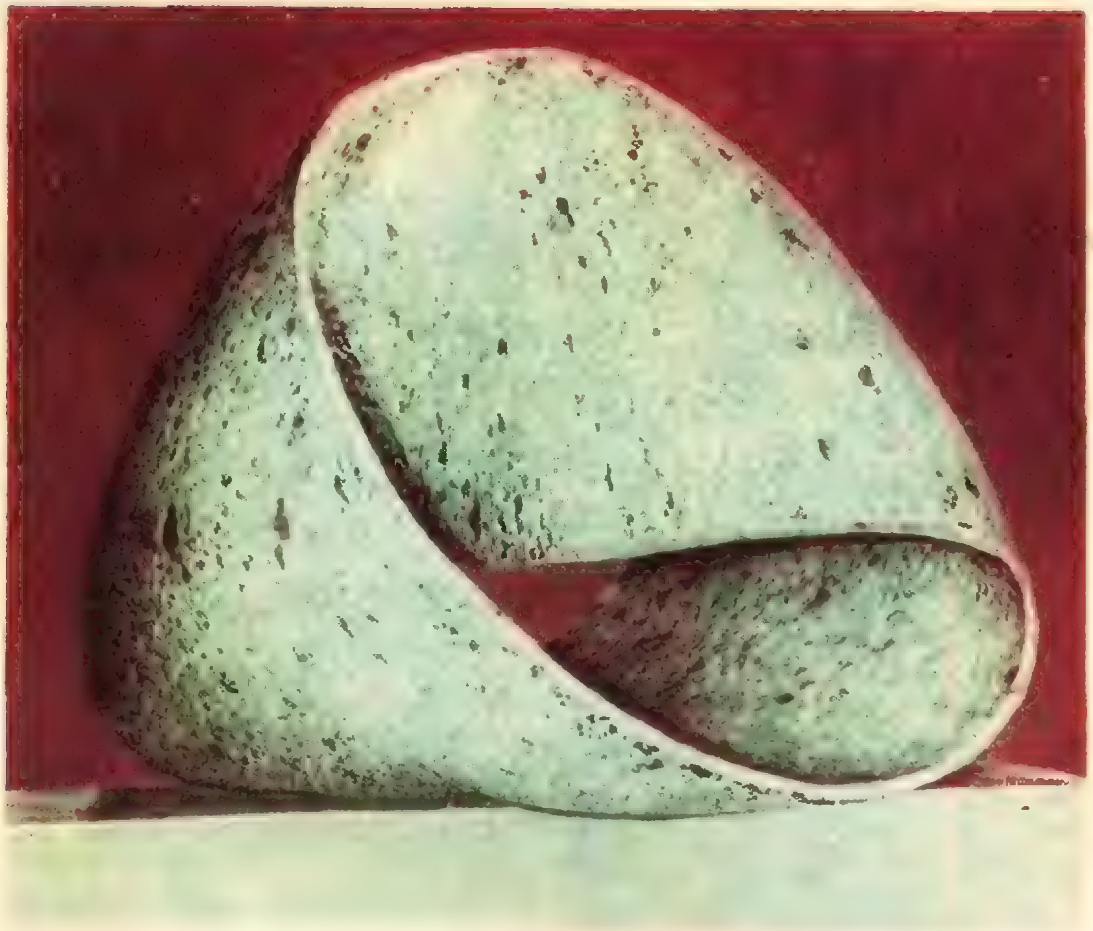
2) Реакция деления неизвестного ядра X под действием нейтрона протекала следующим образом:

$$^{M}_{Z}X + ^{1}_{0}n \rightarrow 2\,^{4}_{2}He + 2\,^{1}_{1}H + k\,^{1}_{0}n.$$

Из закона сохранения заряда следует, что $Z=6$. Следовательно, ядро X — ядро углерода $^{12}_{6}C$ (в камере, очевидно, находился стабильный изотоп, поэтому $M=12$). Из закона сохранения массы находим, что $k=12+1-8-2=3$. Окончательно реакция запишется так:

$$^{12}_{6}C + ^{1}_{0}n \rightarrow 2\,^{4}_{2}He + 2\,^{1}_{1}H + 3\,^{1}_{0}n$$

Н. Родина



Лист Мебиуса в искусстве

Лист Мебиуса — это наиболее популярный представитель *односторонних поверхностей* *). Что это такое, объясняется уже не только в математической, но даже и в художественной литературе. Например, в романе коста-риканского писателя Хоакина Гутьерреса «Умрем, Федерико?...» («Иностранная литература», 1976, № 2) говорится:

«Сегодня учительница показала нам ленту Мебиуса. Вот это здорово. Возьмешь бумажную полоску — лучше от газеты, чтобы была длиннее, — и видишь, что полоска имеет две стороны; подтверждение этому — если муравей захочет поползать по одной стороне, он может сколько угодно делать это, но чтобы попасть на другую, должен обязательно перелезть через кромку. Поэтому и говорят, что полоса имеет две стороны. А вот лента Мебиуса получается так. Надо перевернуть один конец полосы, словно собираешься ее закручивать, но делаешь всего один поворот и склеиваешь концы. Тогда бумага будет иметь только одну сторону, и любой, кто хочет, может проверить, если сомневается. Ведя пальцем, будто преследуешь муравья по всей ленте, вдруг убеждаешься в том, что обе стороны сошлись в одну и не надо пересекать кромку».

К листу Мебиуса не раз прибегали и художники, и скульпторы. Довольно много разнообразных рисунков с изображением листа Мебиуса оставил известный голландский художник М. Эшер (1898—1971). На обложке нашего журнала помещен один из них.

Целую серию вариантов листа Мебиуса создал скульптор Макс Билл (род. в 1908 г.). В течение почти двадцати лет он неоднократно обращался к листу Мебиуса, стремясь выразить в скульптуре идею вечного движения и развертывающейся в пространстве формы. Одно из его произведений — скульптура «Узел без конца», находящаяся в Национальном музее современного искусства в Париже, — изображено на снимке.

Н. Х

---

*) Подробно о листе Мебиуса будет рассказано в одном из ближайших номеров; кроме того, см. «Квант», 1974, № 3 и 1975, № 7.

В. Дубровский

Шесть доказательств теоремы о медианах

Кашу маслом не испортишь

Теорема о пересечении медиан треугольника в учебниках «Геометрия 6, 7, 8» не доказывается, а предлагается в виде задачи. Эта теорема затем используется в учебнике «Геометрия 9». Здесь мы приводим сразу несколько ее доказательств.

Теорема. *Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в некоторой точке M, причем каждая из них делится этой точкой в отношении* $2:1$, *считая от вершины*:

$$|AM|:|MA_1| = |BM|:|MB_1| = |CM|:|MC_1| = 2. \qquad (1)$$

Во всех приводимых далее доказательствах, кроме шестого, мы устанавливаем только, что *медиана BB_1 проходит через точку M, которая делит медиану AA_1 в отношении* $2:1$. Если в соответствующем рассуждении заменить $[BB_1]$ на $[CC_1]$, то мы получим, что и $[CC_1]$ проходит через M. Этим будет доказано, что все три медианы пересекаются в некоторой точке M, причем $|AM|:|MA_1| = 2$. Поскольку все медианы равноправны, можно заменить $[AA_1]$ на $[BB_1]$ или $[CC_1]$; отсюда вытекает (1).

Первое доказательство (для 6-го класса). Пусть K — середина отрезка AM, B' — точка пересечения прямой BM со стороной AC. Нам достаточно доказать, что $|AB'| = |B'C|$. Через точки K и A_1 параллельно прямой BM проведем отрезки $[KL]$ и $[A_1N]$ (рис. 1). Поскольку $|AK| = |KM| = |MA_1|$ и $|CA_1| = |A_1B|$, по теореме Фалеса получаем $|AL| = |LB'| = |B'N| = |NC|$. Отсюда $|AB'| = |B'C|$.

Второе доказательство (для 7-го класса). Рассмотрим гомотетию $H_M^{-1/2}$. Точка A переходит при этой гомотетии в A_1. Пусть B переходит в B' (рис. 2). Тогда $\overrightarrow{A_1B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ («Геометрия 7», п.80). С другой стороны, средняя линия $[A_1B_1]$ получается из стороны $[BA]$ при гомотетии $H_C^{1/2}$; таким образом, $\overrightarrow{A_1B_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Итак, $\overrightarrow{A_1B'} = \overrightarrow{A_1B_1}$, следовательно, $B' = B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, причем центр гомотетии лежит в точке M. По определению гомотетии, точки B, M и $B' = B_1$ лежат на одной прямой.

Третье доказательство (7 класс). Рассмотрим тре-

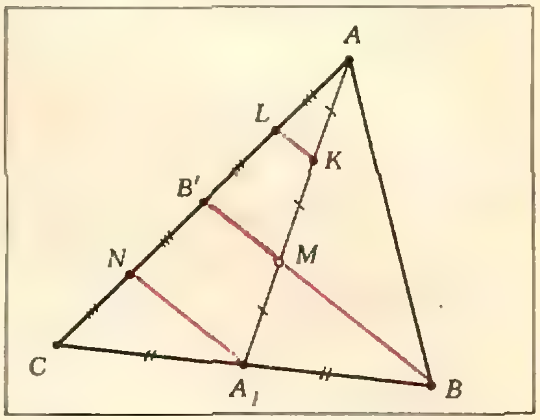


Рис. 1.

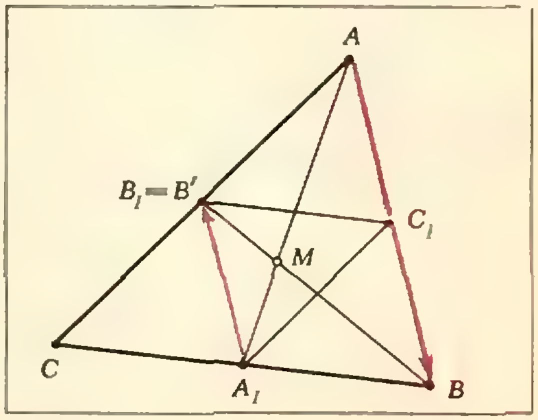


Рис. 2.

угольники MAC и MA_1C (рис. 3). Их высоты, опущенные из вершины C, совпадают, а длины противолежащих этой вершине сторон относятся как $2:1$, поэтому $S_{AMC} = 2S_{A_1MC}$. Аналогично, $S_{AMB} = 2S_{A_1MB}$. Но $S_{A_1MC} = S_{A_1MB}$. Следовательно, $S_{AMC} = S_{AMB} = S_{BMC}$. Таким образом, треугольники MAB, MBC и MCA равновелики. Пусть $B' = (BM) \cap (AC)$. Докажем, что $|AB'| = |B'C|$. С одной стороны, $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'M}}$. С другой стороны $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Итак, $\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'M}}{S_{CB'B}} = \frac{S_{AB'B}}{S_{CB'B}}$. Пользуясь теоремой $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c-a}{d-b} = \frac{a}{b}$, отсюда получаем

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{S_{AB'B} - S_{AB'M}}{S_{CB'B} - S_{CB'M}} =$$

$$= \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = 1.$$

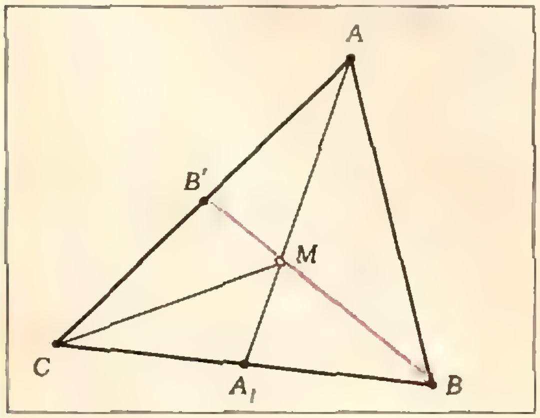


Рис. 3.

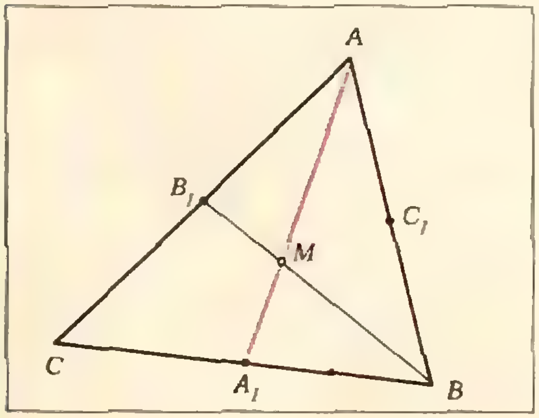


Рис. 4.

Значит, $|AB'| = |B'C|$.

Четвертое доказательство (7 класс). Из рисунка 4

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} =$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} =$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} =$$

$$= \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} =$$

$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_1}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}.$$

Следовательно, точка M лежит на медиане BB_1.

Пятое доказательство (8 класс). Пусть опять $B' = (BM) \cap (AC)$ (рис. 3). Применяя теорему синусов сначала к треугольникам $AB'B$ и $CB'B$, а затем — к треугольникам ABM и A_1BM, и учитывая, что $\sin \widehat{AB'B} = \sin \widehat{CB'B}$, $\sin \widehat{AMB} = \sin \widehat{A_1MB}$, $|BC| = 2|A_1B|$ и $|MA| = 2|MA_1|$, получим

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} =$$

$$= \frac{|AB| \sin A\widehat{B}M}{\sin A\widehat{B'}B} : \frac{|BC| \sin A_1\widehat{B}M}{\sin C\widehat{B'}B} =$$

$$= \frac{|MA| \sin A\widehat{M}B}{2|MA_1| \sin A_1\widehat{M}B} = 1.$$

Значит, $|AB'| = |B'C|$.

Шестое доказательство (9 класс). Проведем через точки A и B плоскость α, не содержащую C, и построим в этой плоскости правильный треугольник ABC' (рис. 5). Из общих свойств параллельной проекции («Геометрия 9», § 12) следует, что параллельная проекция вдоль прямой CC' переводит $\triangle ABC$ в

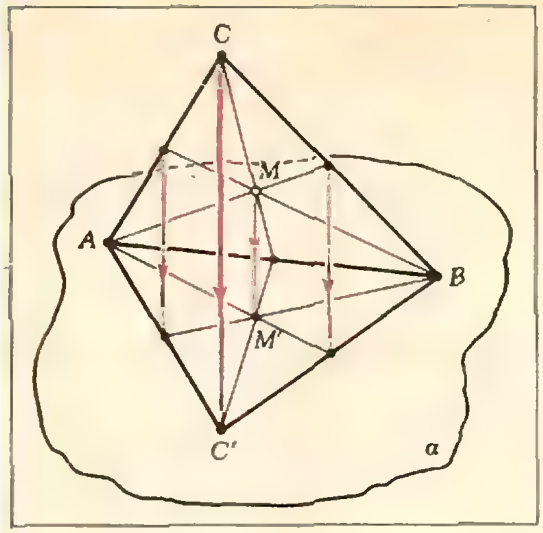


Рис. 5.

$\triangle ABC'$, причем медианы треугольника ABC проектируются в медианы треугольника ABC'. Но в правильном треугольнике медианы являются и биссектрисами, а следовательно, пересекаются в одной точке. Легко доказать также (докажите!), что для треугольника ABC' справедливы равенства (1).

Отсюда вытекает, что наша теорема верна и для $\triangle ABC$.

В заключение заметим, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA_1}=0$, а если точка P не совпадает с M, то $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{PM}\neq\vec{0}$. В общем случае точка G называется *центроидом* (или *центром тяжести*) системы точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\ldots+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника является центроидом системы его вершин (ее называют также центроидом самого треугольника).

Задачи

1. Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции, точка пересечения продолжений ее боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Вывести отсюда теорему о медианах.

2. Дан треугольник ABC. Указать все такие точки P, что $S_{PAB}=S_{PBC}=S_{PCA}$.

3. Каждая из вершин пятиугольника соединена с серединой противоположной стороны. Доказать, что если четыре из полученных прямых пересекаются в одной точке, то и пятая прямая проходит через эту точку.

4. Через каждое из ребер трехгранного угла и биссектрису противоположного плоского угла проведена плоскость. Доказать, что три полученные плоскости имеют общую прямую.

5. Точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC. Известно, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке P, причем

$$\frac{|AP|}{|PA_1|}=\frac{|BP|}{|PB_1|}=\frac{|CP|}{|PC_1|}.$$

Доказать, что P — центроид треугольника ABC.

6. Доказать, что семь отрезков: отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центроидами противоположных граней, и отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, — пересекаются в одной точке. В каких отношениях эти отрезки делятся их общей точкой?

7. Доказать, что центроид треугольника является единственной точкой, в которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника достигает своего минимального значения.

(Начало см. с. 21)

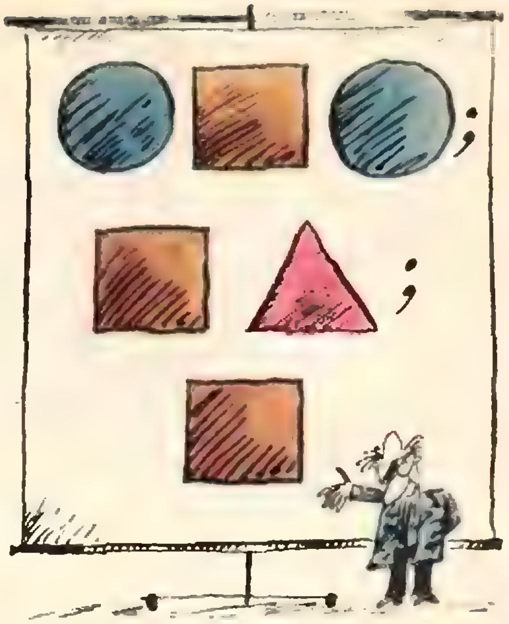
И. Кевхишвили (Тбилиси) 47, 52, 54; *А. Королев* (Горький) 57, 60а), б), г); *С. Корчанов* (Ангарск) 46, 47, 49а), 50, 56, 57, 60а); *В. Костусяк* (Запорожье) 46, 48, 50; *Л. Костюк* (Киев) 54; *Е. Кузьмин* (Череповец) 46, 48, 54, 56, 57; *А. Кудинов* (Воронеж) 57; *С. Кузнецов* (Ангарск) 53; *А. Кулеско* (Донецк) 47, 50, 53—55, 60а), б), в); *П. Кулинич* (Воронеж) 54; *А. Куркиев* (Николаев) 52; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 52; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 46, 48, 52, 53; *Е. Лумельская* (Пермь) 56, 57; *В. Марицой* (Алма-Ата) 54; *Г. Мартиросян* (п. Талин АрмССР) 46; *Д. Мартынов* (Черкизово) 57; *Р. Мешойрер* (Москва) 51, 56, 57, 60а); *А. Милевский* (Мытищи) 51, 52, 57; *Д. Миндлин* (Ташкент) 46, 48, 50, 51, 54, 56; *Б. Минцберг* (Ленинград) 54; *А. Мирлин* (Ленинград) 46, 47, 49а), в), 50, 51, 53—58, 60а), б), в), г); *А. Молотовщиков* (Тейково) 54; *Е. Мостивенко* (Сыктывкар) 51, 54; *И. Мыцё* (Черновцы) 57; *Н. Наумова* (Камышин) 54; *А. Ненашев* (Ленинград) 46, 48, 50—59, 60а), б), в), г); *Н. Нестеренко* (Новосибирск) 47, 48, 51—54; *А. Никитенков* (Великие Луки) 48; *Г. Николов* (НРБ) 52, 56, 57; *А. Опарин* (Горький) 47, 48, 53, 60а), б); *В. Остапенко* (Алма-Ата) 54; *Д. Папуш* (Харьков) 46, 50—52, 54—57; *И. Пашин* (Темиртау) 46; *И. Пономарев* (Пенза) 46; *А. Попов* (Чусовой) 54, 60а), б); *В. Потемкин* (Донецк) 52; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 46, 52, 54, 60а), б), в), г); *С. Путинцев* (Невинномысск) 51—55; *Х. Ривилис* (Одесса) 49б), 56—58; *И. Ройзман* (п. Калиновка Винницкой обл.) 51, 54; *В. Романовский*

(Продолжение см. с. 52)

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Дано трехзначное число. Найдем сумму его цифр. Затем найдем сумму цифр результата. Каким было исходное число, если его и две полученные суммы можно записать так, как изображено на рисунке (одинаковые фигуры соответствуют одинаковым цифрам)?



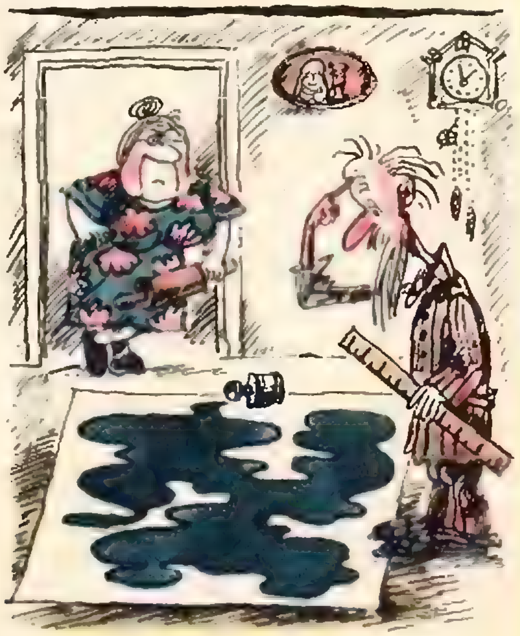
2. Имеется несколько кувшинов, среди которых есть два кувшина разной формы, а также два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.

3. Натуральное число A таково, что при делении на A любое нечетное число и его куб дают один и тот же остаток. Найдите все такие числа.

4. На белую плоскость пролили черные чернила. Верно ли, что:

а) найдутся две точки одного цвета, удаленные на расстояние 1 м;

б) найдутся две точки разных цветов, удаленные на расстояние 1 м?



Ф. Бартенев

Наблюдения в математике

> *Свойства чисел, известные сегодня, по большей части были открыты путем наблюдений.*
>
> *Леонард Эйлер*

Как обычно исследуются законы природы?

Физики, химики, биологи ставят эксперименты. Затем исследуют получающиеся результаты измерений, подмечают закономерности, делают те или иные выводы.

Как ни удивительно, но и ученые-математики в своем научном творчестве зачастую пользуются наблюдениями, как и естествоиспытатели. Чтобы глубоко понимать даже «школьную» математику, решать разные замысловатые задачи, нужно научиться наблюдать в математике.

Вот один интересный факт из истории науки. Выдающимся математикам К. Гауссу и А. Колмогорову в детстве предложили аналогичные задачи: десятилетнему Гауссу — найти сумму $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$, а шестилетнему Колмогорову — сумму $1 + 3 + 5 + \ldots + 95 + 97 + 99$. Гаусс решил свою задачу почти мгновенно, заметив, что $1 + 99 = 2 + 98 = 3 + 97 = \ldots$ Колмогоров, посчитав суммы $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, заметил, что $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$, и также быстро нашел ответ.

А как решить такую задачу:

Найти две последние цифры числа 311^{28}?

Не вычислять же в самом деле 28-ю степень числа 311? Конечно, нет! Достаточно заметить, что две последние цифры числа 311^1— это 11, числа 311^2 — 21, 311^3 — 31, ...; так что у числа 311^{28} две последние цифры — это 81.

Рассмотрим еще одну похожую задачу:

Какими двумя цифрами оканчивается число 7^{51}?

Найдем вначале две последние цифры у чисел 7^1, 7^2, 7^3, 7^4 и 7^5. Легко видеть, что у 7^1 всего одна цифра — 7; запишем это так: 07; у 7^2 — 49, у 7^3 — 43 (две последние цифры произведения 49 на 7), у 7^4 — 01, так что у 7^5 две последние цифры — снова 07. Мы видим, что две последние цифры степеней семерки чередуются, образуя так называемую *периодическую последовательность* с периодом 4:

$$\underbrace{07, 49, 43, 01}, \underbrace{07, 49, 43, 01}, \underbrace{07, 49, \ldots}$$

Остается только найти остаток от деления числа 51 на 4 — он равен трем, и посмотреть, какими двумя цифрами оканчивается куб семерки: у чисел 7^{51} и 7^3 две последние цифры совпадают. Итак, вот **ответ**: две последние цифры числа 7^{51} — это 43.

Решим еще одну задачу, отличную от предыдущих.

Для каких чисел справедливо неравенство:

$$|a| + |b| > |a + b|?$$

Рассмотрим несколько примеров. Для этого заполним несколько строк следующей таблицы:

a	b	$\|a\|+\|b\|$	$\|a+b\|$
—3	2	5	1
—7	—1	8	8
0	—4	4	4
4	0	4	4
2	3	5	5
7	—1	8	6
. . .	. . .	. . .	. . .

Глядя на эту таблицу, уже нетрудно догадаться, каков должен быть ответ в последней задаче: сумма абсолютных величин двух чисел больше абсолютной величины суммы этих чисел только тогда, когда оба эти числа отличны от нуля и имеют разные знаки.

Конечно же, всякая «догадка», гипотеза, нуждается в строгом математическом доказательстве. Это мы оставляем нашим читателям.

Если вы разобрались в решении первых трех задач, попробуйте решить самостоятельно еще три задачи немного посложнее.

Задачи

1. Какими цифрами не могут оканчиваться суммы 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, 1+2+ +3+4+...?

2. По кругу расположены 60 положительных и отрицательных единиц (причем есть и те и другие). Известно, что произведение любых трех последовательных чисел равно —1. Найдите сумму всех чисел.

3. Сколько потребуется разрезов, чтобы куб со стороной 3 см разрезать на кубики со стороной 1 см?

В заключение предостережем читателей от скоропалительных выводов из результатов наблюдений. Чтобы *доказать* какое-либо утверждение, нужно убедиться, что оно справедливо в каждом частном случае; в то же время, чтобы *опровергнуть* какое-либо утверждение, достаточно показать, что оно не справедливо хотя бы в одном частном случае (как говорят математики, привести *контрпример*). Поясним, что мы имеем в виду.

Рассмотрим множество чисел вида $m = n^2 + 3n + 1$, где n — любое натуральное число. Для значений $n = 1, 2, 3, 4$ и 5 получаем $m = 5, 11, 19, 29$ и 41, то есть первые пять значений m — простые числа. Можно ли сделать вывод, что любой элемент нашего множества будет простым числом (для любого натурального n)? Разумеется, нет: уже при $n = 6$ получаем составное значение $m = 55$.

Задачи

4. Пусть A — множество чисел вида $6n—1$, а P — множество простых чисел. Верно или ложно высказывание: $A \subset P$, если $n \in N$?

5. Верно ли, что при любом целом n справедливо неравенство $4n^2+40n+99>0$?

Иногда найти контрпример, опровергающий общее утверждение, очень трудно. Бывает, что легче доказать *существование* соответствующего контрпримера, чем его *построить*.

Например, очевидно, что если 100 школьников получили 101 тетрадь, причем каждый школьник получил хотя бы одну тетрадь, то найдется школьник, получивший две тетради.

Прием рассуждений, с помощью которого мы сделали вывод в последнем примере, называется *«принципом Дирихле»* и часто применяется к решению задач. Решим с его помощью следующую задачу:

Доказать, что из 101 числа можно выбрать два, разность которых делится на 100.

В самом деле, при делении на 100 в остатке может получиться одно из следующих чисел: 0, 1, 2, ..., 99 — сто разных чисел. Поэтому среди 101 числа обязательно найдутся два, дающие при делении на 100 равные остатки. Следовательно, их разность делится на 100.

И, наконец, еще одна задача на принцип Дирихле.

Задача 6. В лесу растет 710 000 елочек. На каждой елочке не больше 100 000 иголочек. Докажите, что в лесу есть по крайней мере 8 елочек с одинаковым числом иголочек.

А. Кикоин

Что такое э.д.с.?

В самом начале XIX века итальянский ученый Алессандро Вольта создал устройство, способное поддерживать постоянный электрический ток в замкнутой проводящей цепи. Устройство это он назвал электродвижущим аппаратом. Позднее его стали называть гальваническим элементом. Вольта полагал, и не без основания, что в этом устройстве действуют какие-то силы, заставляющие двигаться электрические заряды. Может быть, поэтому основную характеристику устройства, придуманного Вольта, и всех других подобных устройств стали обозначать термином «электродвижущая сила». Так ее называют и в наши дни.

Однако величина, которую издавна называют электродвижущей силой, вовсе не сила. О ней, например, нельзя сказать, что она равна произведению массы какого-то тела на его ускорение; она не измеряется в ньютонах или в динах и т. д.

Что же в действительности есть электродвижущая сила — э. д. с.?

Чтобы разобраться в этом вопросе, напомним коротко основные сведения о таких понятиях, как электрический ток и электростатическое поле.

Электрический ток и электростатическое поле

Электрический ток — это упорядоченное, то есть направленное движение одноименных электрических зарядов. В металлах направленно движущимися заряженными частицами являются электроны. «Направляет» эти частицы сила, с которой на них действует электростатическое поле, создаваемое в металле. Электростатическое поле — поле, создаваемое неподвижными электрическими зарядами. Основная характеристика электростатического поля — напряженность $\vec{E}$.

В электростатическом поле работа при перемещении заряда из одной точки поля в другую не зависит от того, по какой траектории заряд перемещается между этими точками. Отсюда следует, что работа поля над зарядом при его движении по замкнутому пути равна нулю.

Работа, которую совершает поле при перемещении единичного заряда между двумя точками, называется электрическим напряжением между этими точками поля.

Из курса механики известно, что величина работы связана с другой величиной — потенциальной энергией. Именно, работа при перемещении тела равна взятому с обратным знаком изменению потенциальной энергии тела при таком перемещении.

Для того чтобы задать значение потенциальной энергии заряда в данной точке поля, нужно выбрать «нулевой уровень» — точку, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю. В электротехнике за нулевой уровень принимается любая точка, соединенная проводником с Землей. В физике обычно выбирают любую точку, бесконечно удаленную от заряда, создающего поле.

Так как работа при перемещении заряда между двумя точками в электростатическом поле не зависит от траектории, по которой движется заряд, то потенциальная энергия заряда в данной точке поля не зависит от того, каким образом (по какому пути) попал заряд в данную точку. Отнесенная к единице положительного заряда эта энергия может служить характеристикой данной точки поля. Это — потенциал в данной точке поля. Так что потенциал поля в данной точке — это в сущности напряжение между этой точкой и точкой с нулевым потенциалом.

Таким образом, электрическое напряжение между двумя точками поля — это разность потенциалов между этими точками. (Следует заметить, что это справедливо только для электростатического поля. Существуют и такие электрические поля, для которых это не так.)

Положительный электрический заряд в электростатическом поле движется в направлении вектора напряженности поля. При этом поле совершает положительную работу, и следовательно, потенциальная энергия заряда уменьшается. Это значит, что положительный заряд в электростатическом поле движется от более высокого потенциала к более низкому. Наоборот, отрицательный заряд в поле движется от низкого потенциала к высокому.

Постоянный электрический ток и работа электростатического поля

Рассмотрим теперь замкнутую цепь, по которой течет электрический ток. Мы обратимся к наиболее знакомому читателям примеру тока в цепи, составленной из металлических проводников. В этих проводниках движущимися зарядами (носителями тока) являются свободные электроны. Это электроны, оторвавшиеся от атомов и ставшие поэтому «свободными». Их свобода и состоит в том, что под действием электрического поля они могут передвигаться в металле. Сами атомы, потерявшие электроны, — это положительно заряженные ионы, которые образуют кристаллическую решетку металла. Как известно, ток — это направленное движение одноименных зарядов. «Направляет» эти заряды сила, с которой на них действует электростатическое поле, созданное в металле. Двигаясь в металле, электроны взаимодействуют с ионами и передают им энергию, приобретенную ими в электрическом поле. (Мы знаем об этом из опыта — металл при прохождении тока нагревается.) Приобретаемая электронами энергия равна, очевидно, работе, совершаемой полем над электронами. Следовательно, эта работа не равна нулю. Но, как известно, работа электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю. Значит, движение электронов по замкнутой цепи не может происходить только под действием электростатического поля. И если в цепи есть ток, то это означает, что где-то в цепи создано какое-то другое, неэлектростатическое, поле, работа которого над зарядами по замкнутому пути не равна нулю. Здесь должны действовать какие-то посторонние по отношению к электростатическим силы. Их обычно называют сторонними силами. Работа этих сторонних сил, очевидно, и компенсирует электронам ту энергию, которую они теряют при взаимодействии с ионами. Так что в конечном счете именно эти силы и поддерживают постоянный ток в цепи.

Роль сторонних сил

Чтобы понять роль сторонних сил в цепи постоянного тока, рассмотрим сначала незамкнутую цепь, например, такую как на рисунке 1. Допустим, что каким-то образом в какой-то момент на конце A цепи собрано избыточное число электронов, так что он окажется отрицательно заряженным. Тогда на другом конце цепи окажется в избытке положительный заряд. Внутри металла будет существовать электростатическое поле, и свободные электроны устремятся от A к B. В металле, следовательно, будет существовать электрический ток, направленный от B к A. Но этот ток не будет постоянным. За очень короткое время в A исчезнет избыток электронов, а в B — избыток положительного заряда. В металле исчезнет поле, а вместе с ним и электрический ток.

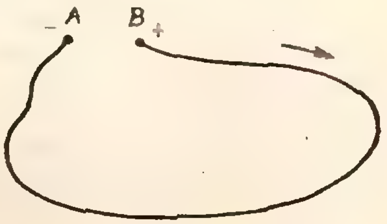


Рис. 1.

Но представим себе, что в промежутке между A и B устроилась некая волшебная фея, да такая расторопная, что она успевает каждый приходящий в B электрон снова перенести в A. Тогда, очевидно, в A будет поддерживаться постоянный отрицательный заряд, а в B — постоянный положительный заряд. В металле будет поддерживаться постоянное электростатическое поле и постоянный электрический ток.

Заметим, однако, что наша фея должна при этом совершать работу против электростатического поля. Ведь заряды в A и B создают такое поле не только внутри металла, но и вне его. И поле вне металла в промежутке между A и B тоже направлено от B к A. Фее, значит, приходится переносить электроны от положительно заряженного конца B, к которому электроны притягиваются, к отрицательно заряженному концу A, от которого они отталкиваются. Электростатические силы на это, конечно, не способны. Так что фея, которая это делает, действует на электроны не электростатической силой, а какой-то другой — сторонней силой. Становится ясной роль сторонней силы в электрической цепи: переносить электрические заряды против электростатических сил, отделять отрицательные заряды от положительных и «присоединять» их к отрицательным. Сторонние силы своей работой замыкают цепь и обеспечивают постоянство тока. В электрической цепи существуют два участка: в одном усилиями феи заряды различных знаков разделяются, а в другом (во внешней части цепи) они снова соединяются. Фея совершает работу, разделяя заряды и создавая электростатическое поле. А это последнее соединяет заряды, и внутри металла эта работа оборачивается нагреванием металла. Деятельность феи напоминает деятельность Сизифа, осужденного, согласно древнему мифу, вкатывать на вершину горы камень, который, едва достигнув вершины, скатывался вниз. Подобно тому как Сизиф, поднимая камень, совершал работу против силы тяжести только для того, чтобы камень, приобретя потенциальную энергию, мог под действием силы тяжести скатиться с горы, наша фея, разделяя разноименные заряды, совершает работу против сил электростатического поля только для того, чтобы, приобретя потенциальную энергию, эти заряды могли под действием электростатических сил вновь соединиться. Однако труд феи нельзя назвать Сизифовым в том смысле, как это принято говорить. Ведь Сизифовым называют «бессмысленный», бесполезный труд. А труд феи приводит к ощутимым результатам — по цепи течет постоянный ток.

Вернемся вновь к нашей электрической цепи. Разумеется, никаких неэлектростатических фей в действительности не существует. Но существуют особые устройства, в которых действуют неэлектростатические (сторонние) силы, способные отделять отрицательно заряженные электроны от положительных зарядов. Называют эти устройства источниками тока, хотя в действительности они ими, как мы только что видели, не являются. Отличаются одни источники тока от других характером действующих в них сил и происходящих в них процессов и конструкцией самих устройств. Количественно же они различаются величиной, называемой электродвижущей силой.

Что же такое электродвижущая сила?

Рассмотрим некоторый участок электрической цепи между точками a и b (рис. 2), в котором существует электрический ток. Раз ток существует, значит, есть электростатическое поле. Пусть на этом участке существует напряжение U, или, что то же самое, разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Тогда работа при перемещении некоторого заряда q от a к b равна

$$A = qU.$$

А теперь представим себе, что на участке ab имеется также некоторый источник тока, в котором действуют сторонние силы (рис. 3). Теперь к работе электростатического поля qU нужно добавить работу сторонних сил.

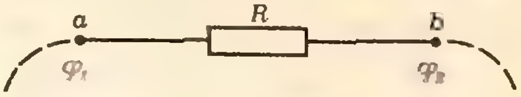


Рис. 2.

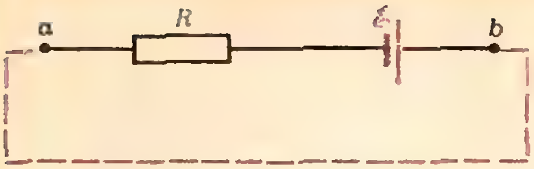


Рис. 3.

Если при перемещении единицы заряда сторонние силы совершают работу $\mathcal{E}$, то над зарядом q при перемещении его по участку ab совершается работа

$$A = qU + q\mathcal{E}.$$

Но если цепь замкнута (на рисунке 3 замыкание цепи обозначено пунктиром), то работа qU электростатического поля равна нулю, и следовательно, $A = q\mathcal{E}$. Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}.$$

Вот эта-то *работа сторонних сил в источнике тока, отнесенная к единице заряда, и называется электродвижущей силой* (*э. д. с.*) источника тока. Мы видим, таким образом, что источник тока — это в действительности источник энергии. Сторонние силы в источнике — это истинные (и единственные!) труженики в электрической цепи. Это они, разделяя заряды противоположных знаков и совершая при этом работу против сил притяжения между ними, создают на так называемых полюсах источника разность потенциалов, а в проводниках, образующих цепь, — электростатическое поле. За счет работы и выделяется энергия в цепи — проводники нагреваются.

Как известно, когда электрическая цепь состоит из металлических проводников, действует закон Ома. Согласно этому закону напряжение U на концах некоторого участка цепи равно произведению силы тока на этом участке на сопротивление R участка:

$$U = IR.$$

Напомним, что напряжение U — это работа электростатического поля над единицей положительного заряда. Если на этом участке имеется источник тока с э. д. с. $\mathcal{E}$, то к работе U нужно добавить и работу $\mathcal{E}$, так что

$$I(R+r) = U + \mathcal{E}. \qquad (*)$$

Мы добавили к сопротивлению R участка цепи сопротивление r самого источника тока. Ведь сопротивление — это величина, характеризующая тот процесс взаимодействия электронов с атомами проводника, из-за которого в нем выделяется тепло. Но подобное взаимодействие происходит и внутри источника тока, и ему поэтому тоже нужно приписать некоторое сопротивление.

Формула (*) относится к участку цепи. Для полной (то есть замкнутой) цепи $U=0$, и формула принимает вид

$$I(R+r) = \mathcal{E}. \qquad (**)$$

Это — закон Ома для полной цепи.

Из формулы (**) видно, каким образом электродвижущая сила должна измеряться. Этой формуле можно придать вид $IR + Ir = \mathcal{E}$. Так как $IR = U$, то $\mathcal{E} = U + Ir$. Отсюда сразу видно, что при $I = 0$ $\mathcal{E} = U$. Это значит, что для определения э. д. с. источника нужно измерить разность потенциалов на его полюсах, когда в нем нет тока (из-за того, что цепь разомкнута, или из-за того, что ток от источника компенсируется током другого источника).

Электростатический генератор

В качестве примера источника тока рассмотрим электростатический генератор, часто называемый генератором Ван-де-Граафа. На рисунке 4

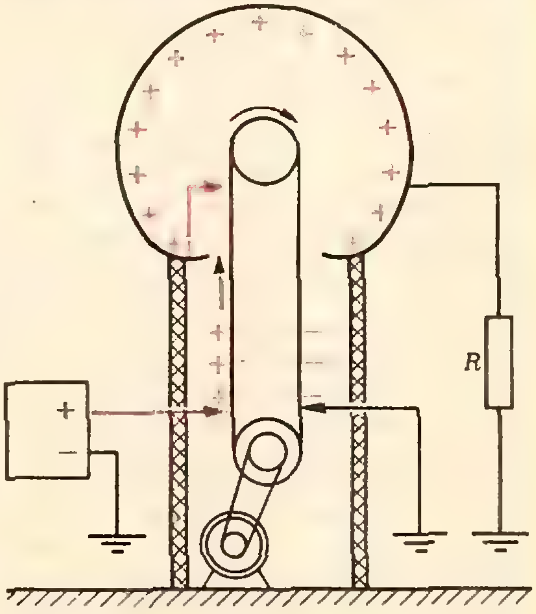


Рис. 4.

представлена схема этого устройства. Генератор состоит из металлического купола, установленного на изолирующей подставке, и «бесконечной» непроводящей ленты, одетой на два шкива. Верхняя часть ленты входит под купол. С помощью двигателя лента приводится в движение. В нижней своей части лента проходит мимо острия, присоединенного к высоковольтному источнику питания, состоящему из высоковольтного трансформатора и выпрямляющего устройства. Второй конец устройства заземлен. У острия создается поле высокой напряженности, и оно «срывает» электроны с той части ленты, которая проходит мимо него. Эта часть ленты получает положительный заряд. Он переносится лентой вверх, под купол. Здесь лента опять проходит мимо острия, присоединенного к куполу. С острия, а значит, и с купола на ленту, несущую положительный заряд, «стекают» электроны. Это равносильно передаче куполу принесенного лентой положительного заряда. А так как заряд этот передается внутренней поверхности купола, то на нее передается весь принесенный заряд. (В передаче заряда именно внутренней поверхности металлической полости и состоит основная идея устройства генератора.)

При непрерывном движении ленты происходит непрерывный же перенос положительного заряда к положительно заряженному куполу. (Отрицательный заряд переносится к Земле.) Заряд, следовательно, переносится против электростатических сил: ведь положительно заряженный купол отталкивает подводимый к нему положительный заряд. А обеспечивает такое «противоестественное» движение заряда сторонняя сила. В данном случае это, в конечном счете, сила трения покоя между лентой и шкивами. Работа этой силы, отнесенная к единице заряда, и есть электродвижущая сила генератора. Между куполом и Землей устанавливается разность потенциалов. И если к Земле и к куполу присоединить внешнюю часть цепи, то в этой замкнутой цепи возникает постоянный электрический ток. Энергия, за счет которой совершается работа, — это энергия источника питания двигателя.

Описанный генератор используется, как правило, для ускорения заряженных частиц в вакууме, так как между куполом и Землей может быть создана очень высокая разность потенциалов — в несколько миллионов вольт. А создать большой ток такой генератор не может из-за ограниченной скорости движения ленты, сравнительно небольшой ее ширины и из-за других причин. Мы привели этот пример потому, что здесь особенно ясны природа и роль сторонних сил.

Гальванический элемент

Другим примером может служить давно и хорошо известный гальванический элемент, который и был первым в истории «электродвижущим аппаратом», придуманным Алессандро Вольта.

Элемент Вольта состоит из медной и цинковой пластины, погруженных в водный раствор серной кислоты (рис. 5). Чтобы понять те сложные процессы, которые в этом элементе происходят, заметим, что твердые медь и цинк состоят не из атомов меди и цинка, а из ионов соответственно меди и цинка и электронов: каждый из атомов меди и цинка в металле теряет два электрона, которые остаются в металле в виде тех самых свободных электронов, о которых упоминалось ранее. А атомы при этом становятся ионами с положительным зарядом.

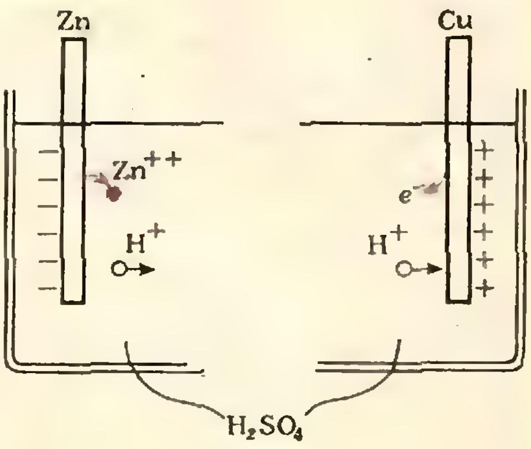


Рис. 5.

Ионы цинка и меди несут по двойному электронному заряду (Zn^{++}, Cu^{++}). Далее, следует иметь в виду, что в растворе серной кислоты значительная часть молекул превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода (H^+) и один ион группы SO_4 с двойным отрицательным зарядом (SO_4^{--}):

$$H_2SO_4 \rightarrow H^+ + H^+ + SO_4^{--}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружаются пластины из цинка и меди. Начнем с цинка.

В присутствии раствора кислоты и содержащихся в нем зарядов силы притяжения между ионами цинка и электронами уменьшаются, и ионы цинка отрываются от пластины и переходят в раствор. На пластине оказывается избыток электронов, так что она оказывается отрицательно заряженной. Но по мере накопления ионов Zn^{++} в растворе некоторая часть этих ионов, притягиваемая отрицательным зарядом пластины, возвращается на пластину. В конце концов наступает равновесие: число ионов, покидающих цинк, становится равным числу ионов, возвращающихся в него. Но пластина остается отрицательно заряженной. Раствор же вблизи пластины получает положительный заряд (за счет имеющихся в нем положительных ионов Zn^{++}).

У медной пластины происходят другие процессы. Медь почти не растворяется в растворе серной кислоты. Присутствующие у цинковой пластины ионы цинка отталкивают положительные ионы водорода в растворе, оттесняя их к медной пластине. Здесь эти ионы, попадая на медь, отнимают у нее электроны, становясь нейтральными атомами водорода. Медь, разумеется, становится положительно заряженной. Таким образом, в элементе Вольта медь — положительный полюс, а цинк—отрицательный. Разность потенциалов между ними и есть электродвижущая сила этого элемента. Она равна 1,1 В.

Если соединить полюсы (электроды) элемента проводом, то в образовавшейся электрической цепи возникнет электрический ток, направленный от меди к цинку. Это значит, что электроны в ней движутся от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где электронов недостаток.

А в самом элементе? Здесь из-за ухода электронов с цинка ионы Zn^{++} будут удерживаться слабее, и они станут переходить в раствор (цинк будет растворяться), поддерживая отрицательный заряд пластины. А из-за прихода электронов к медной пластине она станет в большей степени «привлекать» к себе положительные ионы водорода, к которым эти электроны и перейдут. Так что и положительный заряд медной пластины тоже будет поддерживаться. Таким образом, конечным результатом этих процессов в элементе будет уход электронов с меди и появление их на цинке: электроны как бы движутся от меди к цинку.

В гальваническом элементе сторонними силами являются силы межмолекулярного взаимодействия в металлических пластинах и в растворе. Хотя эти силы по своей природе электрические, но поле этих сил нельзя назвать электростатическим (их обычно называют химическими силами). Работа этих сил по замкнутому пути не равна нулю (вспомним, что сила трения тоже по природе своей электрическая!). Источником же энергии здесь служит энергия, выделяющаяся при нейтрализации ионов в растворе и на пластинах. Ведь для того чтобы превратить атом или молекулу в ионы, нужно совершить работу против сил притяжения между зарядами. Поэтому при обратном превращении ионов в нейтральные атомы выделяется энергия.

Теперь, когда вы прочитали эту статью, чтобы проверить, хорошо ли вы разобрались в том, что же такое э. д. с., попробуйте ответить на такие вопросы.

1. Чем отличаются сторонние силы от электростатических сил?

2. Какова роль сторонних сил и почему они необходимы в цепи электрического тока?

3. Как движутся заряженные частицы в источнике тока и во внешней части электрической цепи?

4. В чем состоит разница между электрическим напряжением и электродвижущей силой?

Н. Розов

Читатели советуют

В редакцию «Кванта» постоянно приходят письма школьников, преподавателей, просто любителей математики, касающиеся тематики раздела «Практикум абитуриента». Многие из них затрагивают частные вопросы, и на такие письма редакция отвечает авторам лично. Но в ряде писем обсуждаются различные теоретические вопросы школьного курса, предлагаются приемы решения отдельных типов задач, сообщаются полезные замечания методического характера и интересные задачи. С содержанием таких писем полезно, на наш взгляд, познакомить читателей «Кванта». Не считая возможным публиковать такие письма целиком, редакция решила подготовить подборку материалов, составленную по идеям и предложениям авторов писем, с необходимыми дополнительными комментариями. Мы надеемся, что затронутые в подборке вопросы окажут помощь поступающим в вузы.

Как всегда, в редакционной почте много писем, где речь идет о различных алгебраических и тригонометрических уравнениях и системах. Наряду со стандартными задачами, не представляющими особого интереса, авторы ряда писем предлагают и такие уравнения, решение которых содержит «изюминку» — необходимо найти нешаблонный путь преобразований и указать удачную замену неизвестного.

Вот уравнение, идею решения которого сообщил редакции наш читатель *М. Левин* (Таллин).

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=5-x. \quad (1)$$

Поступающие часто начинают решение иррационального уравнения с отыскания области допустимых значений неизвестного. Надо иметь в виду, что эта операция (иногда весьма громоздкая) далеко не всегда нужна для решения уравнения. Во многих случаях бывает выгоднее и проще переходить от исходного уравнения к его следствиям, а в конце сделать проверку, или, что еще лучше, переходить к равносильным уравнениям.

Довольно ясно, что стандартный прием решения иррациональных уравнений — возведение в степень — применительно к уравнению (1) приведет к трудоемким вычислениям без видимой надежды на успех. Поэтому попытаемся провести иные преобразования.

Так как значение $x=5$, очевидно, является корнем уравнения (1), то при отыскании других его корней будем считать, что $x\neq5$. Обе части уравнения (1) разделим на $5-x$:

$$\frac{1}{5-x}\sqrt{x^2-9x+24}-\frac{1}{5-x}\sqrt{6x^2-59x+149}=1, \quad (2)$$

и посмотрим, что получится, если множители $\frac{1}{5-x}$ внести под знак корня. Поскольку, как известно из алгебры,

$$a=\sqrt{a^2} \text{ при } a>0;$$

$$a=-\sqrt{a^2} \text{ при } a<0,$$

следует отдельно рассмотреть два случая: $5-x>0$ и $5-x<0$.

Если $5-x>0$, т. е. если искать корни уравнения (1), удовлетворяющие условию $x<5$, то уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{x^2-9x+24}{(5-x)^2}}-\sqrt{\frac{6x^2-59x+149}{(5-x)^2}}=1. \quad (3)$$

Под знаком первого корня выделим целую часть:

$$\frac{x^2-9x+24}{(5-x)^2}=\frac{(x^2-10x+25)+(x-1)}{(5-x)^2}=1+\frac{x-1}{(5-x)^2}.$$

Аналогично преобразуем дробь, стоящую под знаком второго корня; в результате уравнение (3) запишется в форме

$$\sqrt{1+\frac{x-1}{(5-x)^2}}-\sqrt{6+\frac{x-1}{(5-x)^2}}=1.$$

Теперь уже видно, что целесообразно сделать подстановку

$$\frac{x-1}{(5-x)^2}=y, \qquad (4)$$

после чего остается решить уравнение

$$\sqrt{1+y}-\sqrt{6+y}=1.$$

Применяя обычный метод, легко убеждаемся, что это уравнение корней не имеет.

Если $5-x<0$, т. е. если искать корни уравнения (1), удовлетворяющие условию $x>5$, то уравнение (2), как нетрудно проверить, приводится к виду

$$-\sqrt{1+\frac{x-1}{(5-x)^2}}+\sqrt{6+\frac{x-1}{(5-x)^2}}=1. \qquad (5)$$

После подстановки (4) получаем уравнение

$$\sqrt{6+y}=1+\sqrt{1+y},$$

корнем которого является $y=3$. Этому значению y согласно (4) соответствуют $x_1=4$ и $x_2=19/3$. Значение $x=4$ должно быть отброшено как не удовлетворяющее условию $5-x<0$, а значение $x=19/3$ является корнем исходного уравнения (1), так как это уравнение равносильно уравнению (5) на множестве $x>5$. Последнее замечание позволяет нам избежать непосредственной проверки подстановкой указанного значения в исходное уравнение.

Итак, уравнение (1) имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=19/3$.

Следующее уравнение, которое сводится (несложной заменой) к уравнению, аналогичному предыдущему, прислал в редакцию наш читатель *А. Смоляков* (г. Нефтекумск Ставропольского края).

1. Решить уравнение

$$\frac{1}{|\cos x|}+\sqrt{6}\,(\operatorname{tg}x+1)=8\sqrt{\operatorname{tg}x}.$$

* * *

В «Кванте», 1977, № 3, с. 56—57 обсуждался один способ решения уравнения

$$\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2, \qquad (6)$$

использующий возведение обеих частей уравнения в куб. На эту публикацию откликнулся ученик 9 класса *Николай Ким* (колхоз им. Я. М. Свердлова Средне-Чирского р-на Узбекской ССР). Наш читатель предлагает решать уравнение (6) иначе — способом введения вспомогательных неизвестных.

Введем вспомогательные неизвестные u и v следующим образом:

$$\sqrt[3]{8x+4}=u, \quad \sqrt[3]{8x-4}=v.$$

Тогда по определению корня и на основании равенства (6) можно написать систему уравнений

$$u^3=8x+4, \quad v^3=8x-4, \quad u-v=2, \qquad (7)$$

причем неизвестные u и v должны удовлетворять неравенствам

$$u\geqslant 0, \quad v\geqslant 0 \qquad (8)$$

(напомним, что символ $\sqrt[3]{a}$ обозначает неотрицательное число, куб которого равен a; см. «Алгебра 8», п. 24).

Система уравнений (7) легко решается. В самом деле, если вычесть из первого уравнения второе: $u^3-v^3=8$, а затем с помощью третьего уравнения исключить, например, u, то получится квадратное уравнение $v^2+2v=0$, имеющее корни $v_1=0$, $v_2=-2$. По первому корню из второго уравнения системы (7) находим $x=1/2$; второй корень должен быть отброшен как не удовлетворяющий условиям (8). Следовательно, исходное уравнение (6) имеет единственный корень $x=1/2$.

Внимательный читатель без труда заметит, что в основе предложенного способа лежит известная и часто применяемая идея — подыскать для данного уравнения удачную замену неизвестного. Как мы видели, при решении иррациональных уравнений иногда удобно вводить несколько вспомогательных неизвестных.

А теперь попробуйте самостоятельно решить следующее иррациональное уравнение, которое прислал в редакцию наш читатель *А. Алиев* (село Кубра Лакского р-на Дагестанской АССР).

2. Найти корни уравнения

$$\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6.$$

* *

*

Школьники привыкли к тому, что обычно уравнения решаются путем преобразования к «простейшему» виду (например, к квадратному уравнению). Между тем на приемных экзаменах по математике иногда предлагаются задачи, решение которых требует прежде всего проведения логических рассуждений. В этих задачах, как правило, нужно «увидеть» возможность использовать какое-либо свойство известной функции, применить знакомое неравенство и т. д. Именно на таких задачах проверяется не только знание поступающими правил и формул, изучаемых в школе, но и уровень их общего математического развития.

Наш читатель *Н. Белевский* (Харьков) прислал в редакцию две системы уравнений, при решении которых существенную роль играют именно логические заключения.

Пример 2. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} z^2+1=2\sqrt{xy}, \\ x^2-1=2yz\sqrt{1-4xy}. \end{cases} \qquad (9)$$

На первый взгляд эта система выглядит довольно странно: неизвестных три, а уравнений — всего два. Но указанное обстоятельство служит и своего рода «подсказкой» — надо не торопиться преобразовывать уравнения системы, а попытаться сначала изучить их свойства.

Если первое уравнение системы (9) переписать в виде $z^2=2\sqrt{xy}-1$, то, поскольку слева стоит неотрицательное выражение, можно сделать заключение, что $2\sqrt{xy}-1\geqslant 0$, откуда

$$1-4xy\leqslant 0. \qquad (10)$$

С другой стороны, из второго уравнения системы (9) видно, что допустимые значения неизвестных x и y должны удовлетворять неравенству

$$1-4xy\geqslant 0. \qquad (11)$$

Сравнение соотношений (10) и (11) показывает, что решением системы (9) может быть только такая тройка чисел (x, y, z), что $4xy=1$. Но тогда из первого уравнения системы получаем $z=0$, а из второго следует, что $x_1=1$, $x_2=-1$.

Таким образом, получаются две тройки чисел $x_1=1$, $y_1=1/4$, $z_1=0$; $x_2=-1$, $y_2=-1/4$, $z_2=0$, которые только и могут быть решениями системы (9). Подчеркнем, что из проведенных рассуждений не вытекает, что найденные тройки чисел действительно являются решениями системы (9); этот факт необходимо доказать прямой их подстановкой в исходную систему.

Вторую систему предлагаем читателям в качестве упражнения.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xz=y+2, \\ x+z=2\sqrt{y}\,(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}). \end{cases}$$

* *

*

Судя по письмам, большой интерес у читателей вызвал один прием решения уравнений с параметром, о котором рассказывалось в «Кванте» № 6, 1977, с. 71—73. *Н. Чулиев* (г. Чарджоу Туркменской ССР) сообщает редакции модификацию этого приема, использующую идею введения вспомогательного неизвестного.

Пример 3. *Решить уравнение*

$$x=a-b(a-bx^2)^2. \qquad (12)$$

Это уравнение (четвертой степени относительно неизвестной величины x) легко решить, если раскрыть скобки и заметить, что получившееся уравнение можно рассматривать как квадратное относительно a. Однако к цели приводит и несколько иной способ рассуждений.

Введем вспомогательное неизвестное $z=a-bx^2$. Тогда вместо уравнения (12) нужно решать систему уравнений

$$x=a-bz^2, \quad z=a-bx^2.$$

Вычитая из первого уравнения систем второе, получаем равенства $x=z$, $b(x+z)=1$; после исключения вспомогательного неизвестного приходим к двум уравнениям:

$$x=a-bx^2;\quad b(x+a-bx^2)=1.$$

Дальнейшее решение очевидно. Надо только не забывать, что речь идет об уравнениях с параметрами, и внимательно следить за тем, при каких условиях на параметры законны проводимые вычисления. Окончательный ответ должен выглядеть так:

если $ab<-{}^1/_4$, то корней нет;
если $ab=-{}^1/_4$, то корень один: $x=-{}^1/2b$;
если $-{}^1/_4<ab<0$, то корней два:

$$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+4ab}}{2b}\text{ и }x_2=\frac{-1+\sqrt{1+4ab}}{2b};$$

если $b=0$, то корень один: $x=a$;
если $a=0$, но $b\neq 0$, то корней два: $x=0$ и $x=-{}^1/_b$;
если $0<ab<{}^3/_4$, то корней два: x_1 и x_2;
если $ab={}^3/_4$, то корней три: x_1, x_2 и $x={}^1/2b$;
если $ab>{}^3/_4$, то корней четыре: x_1, x_2,

$$x_3=\frac{1-\sqrt{4ab-3}}{2b}\text{ и }x_4=\frac{1+\sqrt{4ab-3}}{2b}.$$

Конечно, приведенные соображения применимы и в том случае, когда рассматриваемое уравнение никакого параметра не содержит.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$x^2+\sqrt{x+5}=5. \qquad (13)$$

Для решения этого уравнения удобно ввести вспомогательное неизвестное $z=\sqrt{x+5}$ и перейти к системе уравнений $x^2+z=5$, $x+5=z^2$. После очевидных преобразований приходим к двум иррациональным уравнениям

$$\sqrt{x+5}+x=0;\quad \sqrt{x+5}=x+1,$$

из которых получаем два корня уравнения (13):

$$x_1=\frac{1-\sqrt{21}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{17}-1}{2}.$$

* *
*

Среди уравнений, присланных нашими читателями, многие решаются разложением на множители. Однако далеко не всегда просто «увидеть» группировку, которая ведет к желаемому результату. Первое из помещенных ниже уравнений предложил *А. Ермилов* (г. Коломна Московской обл.), следующие два — *Л. Слукин* (Липецк), а последнее, самое трудное, — ученик 10 класса *Сеидазим Мириев* (пос. Хиллы Нефтечалинского р-на Азербайджанской ССР).

Решить уравнения:

4. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x.$
5. $x^2+\dfrac{1}{x}-2=0.$
6. $x^4+4x^3+3x^2+2x-1=0.$
7. $x^4-12x-5=0.$

* *
*

Хорошо известно, что геометрическую задачу, в которой к цели ведут длинные и громоздкие вычисления, иногда удается решить буквально в несколько строк. Для этого надо только подобрать к задаче «ключик» — догадаться применить некую теорему, увидеть дополнительное построение, суметь воспользоваться спецификой конфигурации. С таким нешаблонным решением очень поучительно познакомиться, хотя гораздо полезнее сначала самостоятельно поразмыслить и попытаться его отыскать (причем польза будет даже в том случае, если поиск останется безуспешным).

Многие читатели журнала с интересом откликнулись на высказанное в «Практикуме абитуриента» предложение присылать в редакцию короткие и красивые решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах. Несколько подобных задач помещено ниже. Решить их можно и без «геометрической фантазии» (после формулировок задач указано, где такие решения опубликованы). Предлагаем поступающим найти решения этих задач, не требующие громоздких вычислений. Такие решения для первых трех задач нам сообщил *П. Горнштейн* (Киев); решения следующих трех задач указал *Я. Айзенштат* (Киев).

8. В параллелограмме $ABCD$ угол при вершине A равен $\alpha<\pi/2$. Высота, опущенная из вершины B на сторону AD, делит диагональ AC в отношении $m:n$. Найти отношение длин сторон параллелограмма.

(Шахно К. У., Как готовиться к приемным экзаменам в вуз по математике, Минск, «Вышейшая школа», 1970, задача 423.)

9. На двух смежных сторонах квадрата как на диаметрах построены два полукруга, лежащих вне квадрата, и к каждому полукругу проведена касательная, параллельная той стороне квадрата, которая является диаметром этого полукруга. Найти длину радиуса круга, внешним образом касающегося этих полукругов и касающегося построенных касательных. (Шахно К. У. «Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности», Минск, «Вышейшая школа», 1969, задача 932.)

10. Катеты $[AB]$ и $[AC]$ прямоугольного треугольника расположены соответственно в гранях P и Q острого двугранного угла величины φ. Катет $[AB]$ образует с ребром двугранного угла острый угол α. Определить угол между этим ребром и катетом $[AC]$. («Квант», 1976, № 2, с. 58 и № 3, с. 76.)

11. В шар, радиус которого имеет длину R, вписана правильная треугольная пирамида. Плоский угол при вершине пирамиды имеет величину α. Найти длину высоты пирамиды. (Горделадзе Ш. Г., Кухарчук Н. М., Яремчук Ф. П. «Сборник конкурсных задач по математике», Киев, «Вища школа», 1976, задача 2177.)

12. Найти величину объема правильной треугольной пирамиды, у которой величина плоского угла при вершине равна α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противолежащей стороной основания равно d. (Матвеев В. Н. «Сборник задач по математике с методами решений», Казань, Изд-во Казанского университета, 1971, задача 392.)

13. Найти величину двугранного угла между основанием и боковой гранью правильной треугольной пирамиды, если величина двугранного угла между боковыми гранями этой пирамиды равна α. (Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. «Лекции и задачи по элементарной математике», М., «Наука», 1974, задача 13.25.)

(Начало см. с. 21, 38)

(Н. Двор Гродненской обл.) **46**, **51**, **54**, **56**, **60а**); *И. Савенков* (Лысые горы Саратовской обл.) **54**; *В. Сакович* (Поставы) **50**; *М. Севрюк* (Москва) **56**, **58**; *А. Семов* (Челябинск) **54**; *П. Сердорг* (р/п Анна Воронежской обл.) **56**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **47**, **50**, **51**; *В. Сидоренко* (Красноярск) **51**, **54**, **56**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **48**; *О. Славянский* (Ленинград) **47**; *Ю. Смирнов* (Ленинград) **46—48**, **50**, **51**, **53—55**; *А. Старков* (Москва) **46**, **47**; *В. Стовба* (Москва) **46**, **48**, **51**, **52**, **55—57**, **59**, *Ф. Сукачев* (Ташкент) **54**; *К. Татаян* (Ереван) **51**, **53**, **54**; *З. Тлешов* (Алма-Ата) **52**, **54**; *В. Трофимов* (Москва) **46**, **48**, **50—58**; *К. Трутнев* (Казань) **51**, **57**; *Г. Тюрин* (Курск) **46**; *А. Удавихин* (Йошкар-Ола) **46**; *В. Фалько* (Харьков) **46**; *Н. Федин* (Омск) **47**, **52**, **54**, **56**; *Я. Федоров* (Ленинград) **51**, **57**; *Г. Фирсова* (Ленинград) **52**, **54**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **49а**); *М. Хаймов* (Воронеж) **60**; *И. Ханга* (ЧССР) **58**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **54**; *М. Черепинский* (Воронеж) **47**, **48**, **60а**), **б**); *Д. Шафер* (Ленинград) **56**; *В. Шенкарь* (Киев) **54**; *А. Шило* (Киверцы) **54**; *А. Шихахмедов* (Дербент) **54**; *И. Шляхова* (Лобня) **54**; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) **46—48**, **52**, **54**, **57**, **60а**), **б**), **г**); *А. Шулепов* (Каменск Уральский) **51**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф448—Ф462**, справились с задачами **Ф448**, **Ф458** и **Ф459**. Остальные задачи правильно решили: *Ф. Агакишев* (с. Зарат АзССР) **51**; *К. Акопян* (Ереван) **52**; *Е. Александрова* (Глазов) **55**; *М. Алексеев* (Обнинск) **52**; *Э. Алискендеров* (с. Даш Салахли АзССР) **52**; *А. Антонян* (Ереван) **60**; *А. Арбатский* (Благовещенск Амурской обл.) **50**; *А. Бакан* (Киев) **51**; *С. Бавкун* (Черкесск) **51**, **52**, **62**; *Ю. Балашов* (Москва) **60**, **61**; *А. Баргуев* (Улан-Удэ) **53**, **57**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **60 — 62**; *С. Батуев* (Ангарск) **62**; *А. Березин* (Ташкент) **54**, **55**, **57**; *В. Беркут* (Днепропетровск) **61**, **62**; *И. Бикмаев* (Андижан) **49**; *И. Бирюков* (Покров) **51**, **54**; *Н. Богач* (д. Заречье Минской обл.) **52**; *В. Болотников* (Харьков) **61**, **62**; *А. Боричев* (Ленинград) **61**, **62**; *С. Боткин* (Караганда) **49**, **51**, **52**, **55**, **61**, **62**; *А. Бочек* (Шостка) **55**; *В. Бражкин* (Челябинск) **62**; *А. Бродин* (Киев) **61**, **62**; *Л. Брускин* (Иркутск) **51—53**, **56**; *П. Бузинов* (д. Алексеевка Белгородской обл.) **61**, **62**; *Е. Бурлакова* (Асбест) **62**; *М. Быков* (Горький) **52**, **55**, **62**; *И. Вайсбурд* (Томск) **62**; *В. Варлыгин* (Москва) **49**; *Д. Вдовин* (Запорожье) **52**; *Н. Великороссов* (Конаково) **49 — 51**, **60**, **62**; *С. Веселянский* (Харьков) **49—51**, **55**, **57**, **60—62**; *Е. Викторов* (Москва) **50**, **51**, **55**; *А. Владимиров* (Ленинград) **55**; *Л. Водоватов* (Москва) **61**, **62**; *А. Возий* (Белорецк) **56**; *П. Володин* (Кетово) **49**, **50**, **52**; *В. Гаврилов* (Орск) **50—52**, **60—62**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **50**, **53—57**, **62**; *В. Гадон* (Выборг) **52**, **53**; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **60—62**; *Б. Гажиков* (Душанбе) **50**, **60—62**; *В. Гаркавый* (Лида) **49—51**, **60—62**; *М. Глазунов* (Старый Оскол) **51**, **52**; *Э. Гологорский* (Кишинев) **51**, **52**, **60**; *В. Голубенко* (Черкесск) **55**, **62**; *Ю. Горбунов* (Курск) **53**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **51**; *С. Дабагов* (п. Чегем КБАССР) **51**, **61**; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) **60—62**; *Е. Днепровский* (Москва) **50**; *Л. Евельсон* (Брянск) **49**; *Ф. Еникеев* (Уфа) **62**; *В. Ерофеев* (Новосибирск) **62**; *К. Жангозин* (Караганда) **51**; *У. Жоробеков* (Фрунзе) **62**; *А. Заболотских* (Чусовой) **60**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **49—57**, **60—62**; *А. Завидонов* (Казань) **60—62**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **60**; *М. Зяблицев* (Каспийск) **62**; *И. Иванников* (Душанбе) **61**; *Е. Иванов* (Долгопрудный) **49**, **51**, **55—57**.

(Продолжение см. с. 57)

Московский физико-технический институт

Ниже публикуются образцы вариантов вступительных письменных экзаменов по математике и физике в 1977 году.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sin^2 x = 2\sin x - 4\cos x.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4.$$

3. Решить уравнение

$$\lg^2(4-x) + \lg(4-x)\cdot\lg\left(x+\frac{1}{2}\right) = 2\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

4. Дорога проходит через пункты A и B. Одновременно и в одном направлении выехали: из A — мотоциклист (в направлении к B), из B — велосипедист. Мотоциклист догнал велосипедиста на расстоянии a км от B. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали одновременно из A в B, то в момент прибытия мотоциклиста в B велосипедист отставал бы от него на b км. Определить расстояние между пунктами A и B (скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны).

5. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD.

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BD такую, что $DM : DB = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

6. Графики функций $y=\frac{1}{x}$ и $y=5-\frac{3}{2}x$, рассматриваемые в первой четверти координатной плоскости ($x > 0$, $y > 0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника параллельна оси Ox, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найти длины сторон треугольника.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\log_2\frac{x-7}{x-1} + \log_2\frac{x-1}{x+1} = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(x+\frac{5\pi}{4}\right).$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC катет BC имеет длину a и образует с гипотенузой AC угол α. Точка D расположена на катете BC и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка BC сумму квадратов расстояний до прямых AC и AB. Найти длину отрезка BD.

4. Найти четыре числа, обладающих следующими свойствами:

а) сумма первого и четвертого числа равна 14, а сумма второго и третьего равна 12;

б) первое, второе и третье числа образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию;

в) второе, третье и четвертое числа образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию.

5. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеет длину a. Точка D — середина ребра AB, точка E лежит на ребре A_1C_1. Прямая DE образует углы α и β с плоскостями ABC и AA_1C_1C соответственно. Найти:

1) высоту призмы;

2) радиус шара с центром на отрезке DE, касающегося плоскостей ABC и AA_1C_1C.

6. Найти площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2+3y^2-3} \geqslant 2y+1, \\ y+4 \geqslant 2\sqrt{3}\,|x|. \end{cases}$$

Физика

Вариант 1

1. На покоящееся тело массы $m=5$ кг начинает действовать сила $\vec{F}$, величина которой убывает со временем по линейному закону до 0, как показано на рисунке 1. Какую скорость приобретает тело?

2. Аквалангист затратил время $t=10$ мин на осмотр повреждения подводной части корабля. За это время давление в баллоне акваланга, первоначально равное 150 атм, упало на 20%. После этого аквалангист

приступил к ремонтным работам, и расход воздуха возрос в 1,5 раза. Через какое время после погружения аквалангист должен закончить работы, если давление не должно упасть ниже 30 атм?

3. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 расположен во внешнем однородном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}_0$. Силовые линии электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора. Расстояние между пластинами d. Конденсатор емкостью C_2, заряженный до разности потенциалов U_0, подключается к конденсатору C_1 (рис. 2). Определить заряды на конденсаторах C_1 и C_2 после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора C_2 пренебречь.

4. Человек для чтения текста надевает очки с оптической силой $D=-4$ диоптрии. На каком расстоянии ему удобно располагать плоское зеркало при рассматривании своего лица (без очков)?

Вариант 2

1. Брусок массы m, размеры которого показаны на рисунке 3, стоит на наклонной плоскости с углом наклона α. На брусок начинает действовать сила $\vec{F}$, параллельная наклонной плоскости. При каком значении этой силы брусок опрокинется? Известно, что соскальзывать с наклонной плоскости брусок при этом не будет.

2. В цилиндрический сосуд с площадью сечения $S_1=200$ см^2 и высотой $h_1=30$ см налит объем $V=4$ л воды. В сосуд опускают стержень сечения $S_2=100$ см^2, высота которого равна высоте сосуда. Какую минимальную массу должен иметь стержень, чтобы он опустился до дна сосуда?

3. Какая мощность выделяется в цепи, изображенной на рисунке 4? К клеммам 1—2 приложено переменное напряжение $U=220$ В, сопротивление $R_1=R_2=R_3=200$ Ом. Параллельно сопротивлению R_1 включен идеальный диод D. При одном направлении тока его сопротивление бесконечно мало, а при другом — бесконечно велико.

4. С помощью сферического зеркала получено изображение B предмета A (рис. 5). Построением определить положение и фокус зеркала. Вогнутое или выпуклое это зеркало?

Вариант 3

1. С какой максимальной скоростью может проехать мотоцикл по закруглению дороги радиуса $R=80$ м, если коэффициент трения между шинами мотоцикла и асфальтом равен $k=0,5$?

2. Спутник сечения $S=1$ м^2 движется с первой космической скоростью $v=7,8$ км/с по околоземной орбите. Атмосферное давление на высоте орбиты (200 км) равно $p=1,37\cdot10^{-4}$ Н/м^2, температура $T=1226$ К. Определить число соударений спутника с молекулами воздуха за 1 секунду. Число Авогадро $N_0=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$. Газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(моль·К).

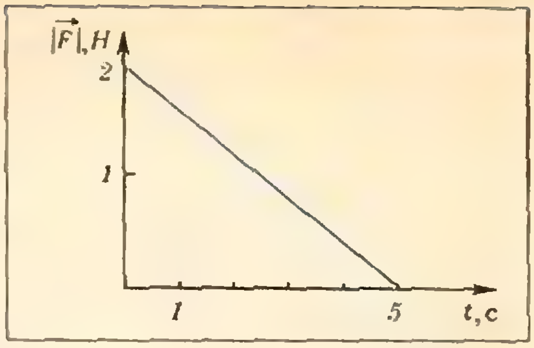


Рис. 1.

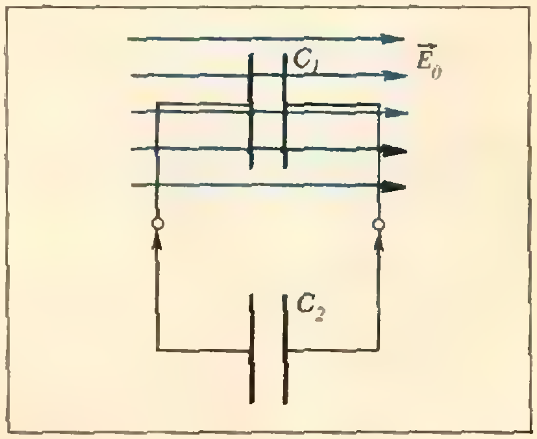


Рис. 2.

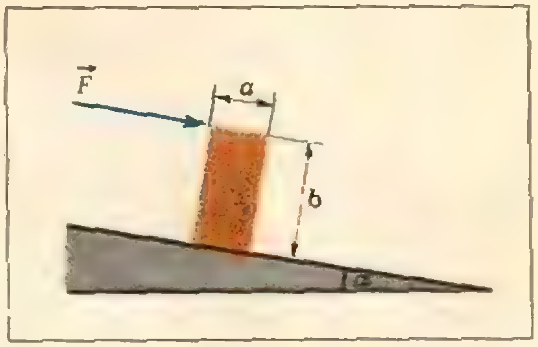


Рис. 3.

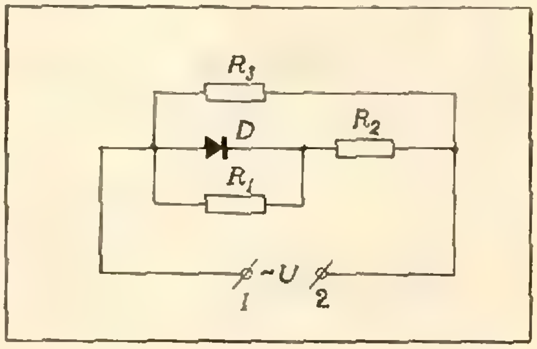


Рис. 4.

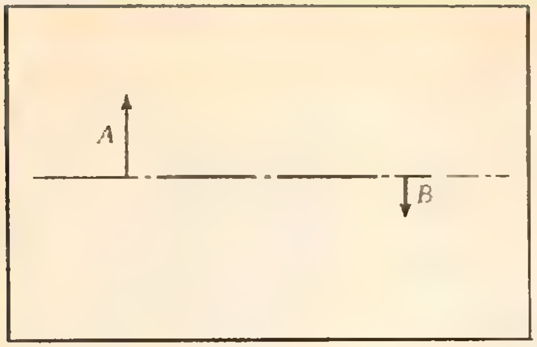


Рис. 5.

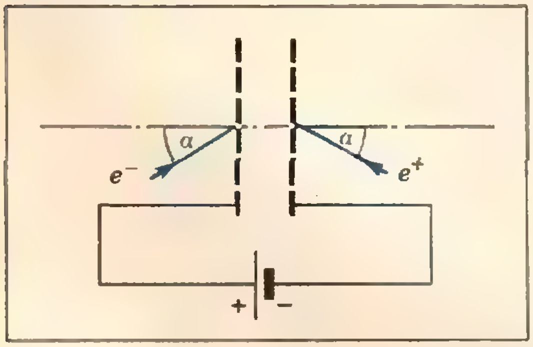


Рис. 6.

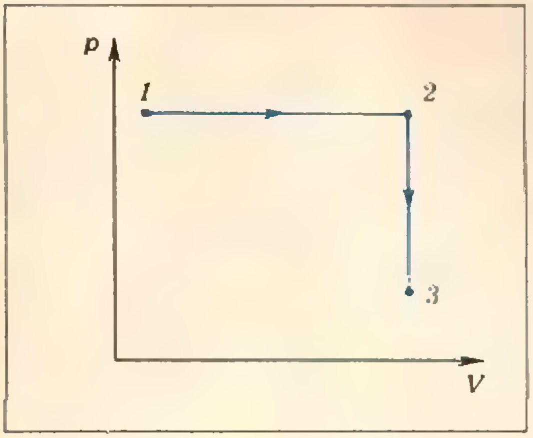


Рис. 7.

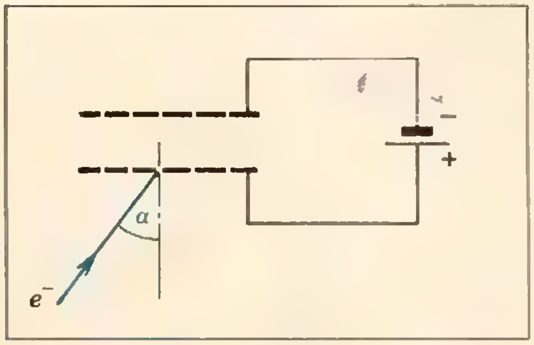


Рис. 8.

3. Две заряженные частицы с равными скоростями $|\vec{v}|=10^9$ см/с одновременно влетают в плоский конденсатор (рис. 6). При каких напряжениях на конденсаторе частицы смогут столкнуться? Удельные заряды частиц равны по величине ($e/m=1{,}76\times10^{11}$ Кл/кг), но противоположны по знаку, угол падения $\alpha=60°$.

4. Точечный светящийся объект был сфотографирован фотоаппаратом с фокусным расстоянием объектива $F=5$ см дважды на один и тот же кадр при двух положениях фотоаппарата. При втором фотографировании аппарат был параллельно перемещен вверх на $h=10$ см. Расстояние на пленке между изображениями объекта оказалось равным $p=2$ мм. Определить расстояние до объекта.

Вариант 4

1. Горизонтальный диск радиуса $R=10$ м вращается вокруг своей оси, делая 2 об/мин. Вдоль края диска навстречу вращению едет мотоциклист со скоростью $|\vec{v}|=30$ км/ч относительно диска. Каким должен быть коэффициент трения между шинами мотоцикла и диском, чтобы мотоцикл не соскальзывал с диска?

2. Состояние одного моля идеального газа изменялось по изобаре *1—2*, а затем по изохоре *2—3* (рис. 7). При этом газом совершена работа A. Отношение давлений в состояниях *2* и *3* задано: $p_2/p_3=k$. Известно, что температура в конечном состоянии *3* равна температуре в состоянии *1*. Определить эту температуру.

3. Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора, где поддерживается постоянная разность потенциалов $U=60$ В (рис. 8). Определить минимальную скорость электрона, при которой он достигает верхней пластины. Удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг, угол падения $\alpha=60°$.

4. Расстояние между предметом и его изображением, даваемым тонкой положительной линзой, равно $0{,}5\,F$, где F — фокусное расстояние линзы. Каким будет это изображение — действительным или мнимым?

С. Козел, Ю. Никольский, Б. Федосов.
В. Чехлов, А. Шелагин

Красивая физика

То, что о физике можно рассказывать живо и увлекательно, доказано многими авторами научно-популярных книг, а вот с красочным изложением этой науки читатель встретится, пожалуй, впервые. Яркий, эффектный переплет (на котором схематически изображена реакция взаимодействия протона и антипротона) не может не привлечь внимания, заставляет взять книгу в руки, раскрыть, полистать ее, и уже тогда нельзя оторвать глаз от радужного многоцветья иллюстраций. На 270 страницах ровно 300 рисунков! Рисунки необычны, оригинальны, порой уникальны, и, главное, каждый рисунок несет большую смысловую нагрузку. Они не просто поясняют текст, а, подобно репродукциям в альбоме, составляют неотъемлемую, органическую часть книги.

Такова первая особенность книги, написанной (лучше сказать мастерски сделанной) ученым из ГДР Гельмутом Линднером и недавно изданной в русском переводе *). Вторая особенность — нетрадиционное построение. Обычно в книге, посвященной «всей физике», сначала излагаются ее классические разделы: механика, теплота, электричество и магнетизм, оптика, а затем — теория относительности, строение атома и атомного ядра, квантовая механика, физика элементарных частиц. Г. Линднер нарушил эту традицию. Уже в первой главе, озаглавленной «Движение и силы», он, едва познакомив читателя с элементами механики, сразу же переносит его в мир оптических явлений — интерференции и дифракции света. А следующая глава («Относительность») целиком посвящена теории относительности. В ней описывается опыт Майкельсона, похоронивший гипотезу о существовании «мирового эфира», вводятся преобразования Галилея и Лоренца, формулируются основные постулаты специальной теории относительности Эйнштейна, разбираются вытекающие из этой теории следствия (сокращение длины, изменение масштаба времени, знаменитый «парадокс близнецов», связь массы и энергии и т. д.). Затем кратко, но вразумительно и потому вполне доступно неподготовленному читателю излагаются основы общей теории относительности, обсуждаются возможности и попытки экспериментальной проверки этой теории.

Глава III посвящена тепловым явлениям, но уже само название ее — «Теплота и вероятность» — предупреждает, что читатель встретится здесь не только с изложением знакомых по школьному курсу вопросов, но и с чем-то более глубоким. И в самом деле, автор, например, заостряет внимание на вопросе об обратимых и необратимых физических процессах. Как утверждал один из основоположников современной физики Макс Планк, «различие между обратимыми и необратимыми процессами лежит гораздо глубже, чем, например, между процессами механическими и электрическими; поэтому именно обратимость с бóльшим основанием, чем любой другой признак, следовало бы выбрать в качестве первейшего принципа при классификации физических явлений».

Чтобы различать обратимые и необратимые процессы, оценивать степень их обратимости, нужна какая-то количественная мера. Такой мерой является энтропия, и автор старается сделать это понятие близким, привычным неискушенному читателю. Понятие энтропии тесно связано с понятием термодинамической вероятности. А отсюда следует естественный переход к рассмотрению вероятностных законов, господствующих в мире атомов и молекул, к обсуждению проблем закономерности и случайности, порядка и беспорядка, наконец, принципа возрастания энтропии и вопроса о тепловой смерти Вселенной.

В этой главе, пожалуй, наиболее полно проявился педагогический талант автора — все сложные вопросы он излагает вполне доходчиво, чему способствуют впечатляющие иллюстрации: последовательные такты цикла Карно и автомобиль-рефрижератор, игральные кости и «демон Максвелла», сортирующий молекулы, и множество других.

В главе IV «Заряды и поля» Г. Линднер основное внимание уделяет развитию представлений об электромагнитном поле. Без единой формулы, что называется, «на пальцах», разъясняется сущность уравнений Максвелла (лежащих в основе электродинамики) и вытекающие из них следствия, в частности, существование электромагнитных волн. Далее рассказывается о четвертом состоянии вещества — плазме и ее техническом использовании (МГД-генераторе), о спектре электромагнитных колебаний, о поляризации и сложении поляризованных волн.

Теперь уже читатель вполне подготовлен к восприятию собственно физики XX столетия, изложение которой начинается с главы V «Кванты и атомы». Как и почему возникла идея квантов? Все началось с невозможности для классической физики разрешить одну из

---

*) Г. Линднер. Картины современной физики. Перевод с немецкого. М., «Мир», 1977.

Картины современной физики
p
π
π
π⁺
π
n
ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

сложнейших проблем, связанную с тепловым излучением и получившую многозначительное название «ультрафиолетовая катастрофа». Но если бы успех новой идеи, говорит автор, сводился только к этому, вряд ли стоило бы придавать ей особое значение. Планковскую гипотезу квантов тоже ожидала бы судьба частной концепции, если бы она не объяснила целую группу экспериментальных фактов и не предсказала новых. Одним из важнейших был фотоэффект, для интерпретации которого Эйнштейну пришлось ввести понятие фотонов. Затем последовали другие многочисленные факты, в которых проявились корпускулярные свойства света и волновые свойства частиц. Возникла проблема дуализма, двуликости материи. Как представить себе материю, которая одновременно обладает взаимоисключающими свойствами: свойствами частицы и свойствами волны? Оказывается, причина этой кажущейся несовместимости в том, что мы, по выражению Макса Борна, «втискиваем этот (реальный) мир в недостаточно адекватные модели, имеющие многие (но далеко не все) общие черты со своим прообразом». Реальный мир куда сложнее механических моделей, используемых для его наглядного изображения!

В главе VI «Структура вещества» дается представление о зонной модели строения твердого тела и с ее помощью интерпретируются свойства металлов, диэлектриков, полупроводников. С квантовых позиций обсуждаются такие явления, как сверхтекучесть, сверхпроводимость, ферромагнетизм, наглядно разъясняется принцип устройства лазеров. Это чуть ли не единственная глава, где автор не ограничивается сугубо физическими проблемами, а затрагивает и некоторые технические приложения.

Две следующие главы («Радиоактивность» и «Ядерные силы и ядерная энергия») посвящены основам ядерной физики. Здесь рассказывается о существовании различных изотопов, приводится красочная таблица стабильных и нестабильных (с разными типами распада) ядер, описываются приборы для регистрации ядерных частиц, а также ускорители заряженных частиц и ядерные реакторы.

Последняя глава «Элементарные частицы» — наибольшая в книге. И это весьма знаменательно, поскольку она посвящена самому злободневному и самому трудному направлению современных исследований — физике элементарных частиц. Вначале рассказывается о космических лучах — естественном источнике частиц высоких энергий, а затем рассматриваются свойства самих так называемых элементарных частиц, которые в действительности не столь уж элементарны. В заключительном параграфе, озаглавленном «Что остается неясным?», автор касается вопросов, пограничных для физики элементарных частиц и космологии. Оказывается, микромир и макрокосмос где-то стыкуются, вернее, не просто стыкуются, а тесно взаимосвязаны, определяют друг друга. Природа едина!

Книга Г. Линднера не лишена недостатков: в ней встречаются неточные, а иногда и противоречивые высказывания, поэтому читать ее надо очень внимательно. Но в целом это прекрасный подарок всем, кто любит физику, в особенности школьникам-старшеклассникам. Она принесет им несомненную пользу в постижении основ физики и доставит истинное эстетическое удовольствие.

И. Зорич

(*Начало см. с. 21, 38, 52*)

60—62; *И. Игнатишин* (Мукачево) 60—62; *В. Изосимов* (Кириши) 55; *С. Исаков* (Пермь) 61, 62; *М. Исиченко* (Москва) 50; *Е. Казарова* (Ереван) 55; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 50, 55, 57; *А. Калинский* (Кишинев) 50; *А. Карнаухов* (Ижевск) 61, 62; *С. Карнаухов* (Ростов-на-Дону) 49—52, 61, 62; *Л. Киневский* (Челябинск) 55, 56, 61; *С. Клейман* (п. Луков Волынской обл.) 61, 62; *В. Кобелев* (Щигры) 61, 62; *С. Кожухарь* (Кишинев) 49, 51, 52, 61; *В. Комов* (Александров) 53—57; *Ю. Кордюков* (Серов) 60—62; *Г. Корионов* (Москва) 50—52, 55, 57, 60, 61; *В. Коробов* (Саратов) 52; *И. Коротков* (Саратов) 50; *Г. Корченский* (Кишинев) 62; *С. Коряк* (Днепропетровск) 62; *В. Костусян* (Запорожье) 51, 53, 55; *А. Кошелев* (Свердловск) 49—52; *А. Краджян* (Ереван) 62; *В. Кузьменко* (Чернигов) 51, 52; *А. Куприн* (Москва) 55, 57, 61, 62; *М. Курбатов* (Москва) 49—51, 53—57, 60—62; *Т. Кухтина* (Киев) 50; *П. Кучерек* (Брно, ЧССР) 61, 62; *Л. Кушнир* (Астрахань) 60—62; *В. Лашкин* (Киев) 49, 50, 55, 61; *А. Левченко* (Свердловск) 49—52, 55, 60—62; *Д. Лепигин* (Димитровград) 61, 62; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 54, 61; *Д. Людмирский* (Киев) 49—53, 55, 56, 61, 62; *А. Магадеев* (д. Карачаево БашкАССР) 51; *В. Макаров* (Челябинск) 49, 52, 55, 60—62; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 52, 54, 55, 57, 62; *Г. Мартиросян* (п. В. Талин АрмССР) 60; *М. Матвеев* (Канаш) 51, 53, 55, 61; *С. Матвеев* (Москва) 51, 61; *А. Мгеладзе* (Тбилиси) 61; *Л. Межуева* (Челябинск) 51; *Г. Мелани* (Ереван) 60—

(*Окончание см. с. 59*)

Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества

С 3 по 9 января 1978 года повсеместно была проведена очередная Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества, посвященная 60-летию Ленинского комсомола. Это одна из самых массовых и эффективных форм работы по пропаганде научно-технических знаний среди школьников, их профессиональной ориентации, расширения кругозора и развития творческих способностей. Ежегодно в мероприятиях Недели участвует около 16 млн. человек.

Торжественное открытие Недели состоялось в г. Москве. На открытие в столицу нашей Родины были приглашены 200 учащихся — победителей научно-технических смотров, соревнований, конкурсов, членов научных обществ, юных рационализаторов и конструкторов из всех союзных республик и их наставники — руководители детских научно-технических объединений. Среди них 21 лауреат смотра НТТМ, 28 участников ВДНХ СССР, 108 победителей республиканских и областных выставок, олимпиад. 74 человека являются членами ВОИР и НОУ.

От имени организаторов Недели — ЦК ВЛКСМ, Министерства просвещения СССР, ЦС ВОИР, ВС НТО и Всесоюзного общества «Знание» участников Недели приветствовали секретарь ЦК ВЛКСМ З. Г. Новожилова, заместитель министра просвещения СССР В. М. Коротов. Своими мыслями о развитии научно-технического творчества учащихся поделились академик, директор Института космических исследований Р. З. Сагдеев; Герой Социалистического Труда, слесарь Московского завода электровакуумных приборов Ю. Н. Дьяков; заслуженный изобретатель РСФСР, профессор МВТУ имени Баумана Л. Н. Решетов; писатель — фантаст Д. А. Биленкин.

Насыщенной и интересной была программа Недели. На пленарных заседаниях и восьми секциях Недели в Москве выступило 87 человек с отчетами о работе в кружках технического творчества, секциях научных обществ учащихся. Выступления сопровождались демонстрацией моделей, приборов, конструкций. Работы, представленные на секциях, говорят о многообразии интересов ребят и выходят за рамки школьной программы. Многие из них выполнены по заданиям НИИ, промышленных и сельскохозяйственных предприятий, используются в народном хозяйстве. На организованной здесь же выставке «Юные техники — Родине» было представлено около 50 моделей, приспособлений, приборов, изготовленных участниками открытия Недели, половина из них нашла применение в народном хозяйстве.

С особым интересом воспринимались выступления Нины Карабановой — учащейся СШ № 54 г. Кишинева, члена Совета республиканского научного общества учащихся «Витоорул»; чемпиона СССР по авиамодельному спорту, пятиклассника из Свердловска Владимира Иванова; кандидата в мастера судомодельного спорта, учащегося 10-го класса из Алма-Аты Сергея Дворникова; секретаря школьной организации ВОИР, дважды медалиста ВДНХ Кирилла Булаева из СШ № 4 г. Ярославля.

На секциях шел заинтересованный разговор о работе научных обществ учащихся, пользующихся большим признанием у старшеклассников. О работе своих НОУ рассказывали Юрий Козлов с Украины, Тимур Данияр — Ходжаев из Узбекистана, москвич Александр Асланов.

Участники Недели встретились с видными учеными, новаторами производства, лауреатами премии Ленинского комсомола в области науки, побывали на промышленных предприятиях, в научно-исследовательских институтах, редакциях научно-популярных журналов, профтехучилищах г. Москвы, доме-музее С. П. Королева, музее ВВС СССР, на ВДНХ СССР. 6 января группа участников Недели, интересующаяся математикой, физикой и астрономией, побывала в редакции журнала «Квант». Ребята встретились с членами редколлегии журнала и сотрудниками редакции, ознакомились с процессом работы над номерами и планами редакции на 1978 год. В заключение встречи был проведен небольшой конкурс по решению занимательных задач, и пять победителей этого конкурса — Саддар Гашимов (г. Сумгаит), Тимур Данияр — Ходжаев (г. Ташкент), Игорь Заливский (г. Новополоцк), Иосиф Свекло (г. Гродно) и Григорий Шапиро (г. Москва) получили призы — номера журнала с памятной надписью и автографами сотрудников редакции.

Подобные мероприятия прошли по всей стране. В союзных республиках состоялись конференции членов НОУ, выставки технического творчества школьников, олимпиады по математике, физике, химии. В школах, внешкольных учреждениях, Домах техники НТО прошли праздники науки и техники, фестивали научно-познавательных фильмов, предметные вечера, показательные выступления юных моделистов и конструкторов. Миллионы ребят стали участниками встреч с молодыми изобретателями и рационализаторами, экскурсий на предприятия, стройки, в колхозы, совхозы, «дней открытых дверей» в высших учебных заведениях, научно-исследовательских институтах.

Организованно и интересно прошла Неделя на Украине, в Грузии, Молдавии, Латвии, Горьковской, Ярославской, Свердловской и многих других областях страны.

Так, в Пермской области открытие Недели науки, техники и производства состоялось в областном Доме техники. В ходе Недели около 20 тыс. школьников побывали на областной выставке достижений народного хозяйства, более 2 тысяч — на экскурсиях в вузах, были проведены олимпиады по математике, физике, химии, 150 членов научно-технических объединений школьников жили в специальном зимнем лагере, обменивались опытом работы, участвовали в различных соревнованиях.

В ходе Недели большое внимание было уделено пропаганде достижений науки, техники и производства за 60 лет Советской власти, знакомству учащихся с ходом выполнения решений XXV съезда КПСС, планов X пятилетки.

Много добрых слов было сказано в адрес старших друзей ребят — учителей, передовых рабочих, колхозников, специалистов народного хозяйства, научных работников, студентов — всех тех, кто вводит школьников в мир современной науки, техники, экономики, технологии производства, кто передает им свои знания, умения и навыки.

Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества способствовала объединению усилий всех заинтересованных организаций в улучшении научно-технического творчества школьников. Она показала, что для нашего времени характерен не только количественный рост армии юных исследователей, техников, опытников сельского хозяйства. Ширится диапазон их творческих интересов, приобретающих все более ярко выраженную общественно полезную направленность. В деятельности школьников все больше места занимают рационализаторство, конструирование приборов и оборудования для нужд народного хозяйства, их творчество нередко направляется теперь заданиями научных учреждений и учебных заведений, предприятий.

Проведение Недели способствовало решению задач, определенных в постановлении ЦК КПСС и Совета Министров СССР «О дальнейшем совершенствовании обучения и воспитания учащихся общеобразовательных школ и подготовке их к труду».

Ю. Иванов
Инструктор Отдела школьной
молодежи ЦК ВЛКСМ

(Начало см. с. 21, 38, 52, 57)

62; *В. Мелихов* (Электрогорск) **62**; *А. Мирлин* (Ленинград) **49—51, 53, 55, 62**; *А. Михеев* (Пермь) **54**; *А. Могильнер* (Свердловск) **61, 62**; *И. Молчанов* (Киев) **53, 55**; *С. Мороз* (Минск) **49—52, 60—62**; *В. Морозов* (Фрунзе) **53, 57, 61, 62**; *И. Муромцев* (Орск) **53**; *В. Муха* (Вольногорск) **61, 62**; *Б. Налибоцкий* (Минск) **49, 51—57**; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) **51, 55, 61, 62**; *В. Нескоромный* (Рубежное) **54**; *Н. Нескоромный* (Симферополь) **54**; *С. Нестер* (Днепропетровск) **56, 61**; *О. Нестеркин* (п. Мятлово Калужской обл.) **51, 52**; *А. Никитенков* (Великие Луки) **49—57, 60—62**; *В. Никитин* (Запорожье) **55, 62**; *Л. Николаев* (Москва) **55**; *А. Оглоблин* (Иркутск) **51**; *А. Опарин* (Горький) **50, 57, 61, 62**; *В. Остапенко* (Алма-Ата) **55, 61**; *П. Павицкий* (д. Брянка Ворошиловградской обл.) **49—52**; *В. Палей* (Харьков) **49—52, 60, 61**; *А. Паршаков* (Свердловск) **62**; *Д. Патарая* (Тбилиси) **57**; *В. Переверзев* (Омск) **62**; *П. Побылица* (Ленинград) **50, 51, 55—57, 60—62**; *В. Полещук* (Барановичи) **49—52**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **49—52, 60—62**; *А. Попов* (Чусовой) **52**; *М. Райнин* (Оренбург) **55, 62**; *А. Родин* (Великие Луки) **52**; *Л. Рожанский* (Москва) **49—53, 60—62**; *С. Розуван* (Киев) **61, 62**; *И. Романов* (Москва) **60, 61**; *В. Рудянко* (Мироновка Киевской обл.) **55, 57, 61**; *И. Савенков* (р/п Лысые Горы Саратовской обл.) **50, 52**; *С. Савков* (Иркутск) **55, 57, 62**; *Н. Савченко* (Киев) **49—52, 60—62**; *П. Саипов* (Ташкент) **61**; *И. Северченко* (Северодонецк) **49**; *Ю. Семенов* (Одесса) **61, 62**; *А. Силенко* (Великие Луки) **50, 52**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **60**; *А. Скипер* (п/о Богородицкое Смоленской обл.) **49, 51, 52, 55, 60**; *О. Славянский* (Ленинград) **51, 52**; *Н. Смоляков* (Тольятти) **49, 52, 55, 57, 62**; *В. Смышляев* (Ленинград) **49, 51, 52, 60, 61**; *А. Солодков* (Конотоп) **49, 52, 61**; *А. Старикова* (Егорьевск) **61**; *А. Сторожев* (Актюбинск) **62**; *В. Субботин* (Тольятти) **62**; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) **52, 53**; *Р. Султанов* (Ташкент) **49, 51, 52, 61**; *А. Суханов* (с. Бутырки Воронежской обл.) **51**; *А. Сухов* (Гагарин Смоленской обл.) **62**; *Р. Тенненбаум* (Киев) **62**; *Г. Ткаченко* (Чирик) **62**; *К. Трутнев* (Казань) **55—57, 60—62**; *В. Трясцин* (с. Орда Пермской обл.) **49**; *С. Туровец* (с. Семигостичи Брестской обл.) **50—52**; *Р. Усманов* (Свердловск) **61**; *Н. Федин* (Новосибирск) **56, 61**; *А. Филатов* (Тюмень) **61**; *А. Фомин* (Новосибирск) **49—53, 55, 57, 61, 62**; *А. Хасанишин* (Чусовой) **57**; *В. Хомов* (Александров) **49—52**; *А. Хугаев* (Цхинвали) **50, 62**; *А. Чеботарев* (п. Кавалерово Приморского кр.) **55**; *А. Чурилов* (Харьков) **52, 54**; *В. Шарафян* (Ереван) **56**; *Г. Шарипов* (с Угали БАССР) **49, 50, 52**; *В. Шведель* (Великие Луки) **61, 62**; *О. Шейнин* (Мозырь) **49, 51, 55, 56**; *А. Шепт[illegible]кий* (Москва) **49—54, 56, 57, 60—62**; *И. Шибут* (Барановичи) **52**; *В. Шлегель* (Ашхабад) **62**; *В. Юркина* (Сыктывкар) **62**; *Ю. Янчук* (п/о Иванополь Житомирской обл.) **55**.

Необычные дроби

Ученые математической лаборатории ВНИИПОЧЕМу с удивлением обнаружили, что в физике существуют необычные размерные дроби — при делении одного ученого на другого часто получается третий. Например, если одного Вольта разделить на одного Ампера, то получится один Ом: 1В/1А=1 Ом. Оказалось, что дробей такого рода существует достаточно много. В приведенном же примере вызывает раздумья и тот факт, что 1 Ом с легкостью переходит в 10 м (десять метров). Исследования в этом направлении продолжаются.

Загадочное совпадение

После многолетних теоретических и экспериментальных исследований сотрудники института ВНИИПОЧЕМу установили замечательный факт — число π и ускорение свободного падения g связаны с большой точностью соотношением $\pi^2=g$. Известно, что ускорение свободного падения зависит от широты. В настоящее время ведутся эксперименты по определению зависимости числа π от того же параметра.

Рекорд побит!

Хорошо известно, что невесомость достигается, если тело находится в свободном полете. Прыгнув, например, со стола, человек во время полета находится в состоянии невесомости. Один из сотрудников ВНИИПОЧЕМу совершил 10^7 прыжков со стола, тем самым превысив время пребывания в состоянии невесомости как Ю. А. Гагарина, так и всех других космонавтов.

До официального утверждения международными организациями установленного рекорда упомянутый сотрудник просил из скромности не называть его имени.

Поиски новых талантов увенчались успехом

В целях выявления юных дарований сотрудники института постоянно ведут большую работу с молодежью разного возраста. Один из сотрудников в этом году решил провести соответствующие мероприятия в детских садах. В силу специфики последних учреждений, на все вопросы анкеты требовалось дать либо положительный («да»), либо отрицательный («нет») ответ. При первом же посещении был обнаружен гениальный ребенок: четырехлетний Толя Костюков при таком опросе с вероятностью 50% правильно отвечал на сколь угодно сложные научные вопросы.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

(см. «Квант» № 3)

Математика

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\left[\frac{1}{2}\log_2 3-1,\ +\infty\right[$. 2. Указание. Доказать, что данный треугольник — прямоугольный. Ответ.

$$\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}.$$

3. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}m,\ y=$

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{5}n\ (m,\ n\in\mathbf{Z}).$$

4. Туристы не могли начать свой путь из A, так как не существует трех различных маршрутов, начинающихся в A, каждый из которых состоит из трех дорог и проходит через все города (рис. 1). По аналогичной причине они не могли начать свой путь из C.

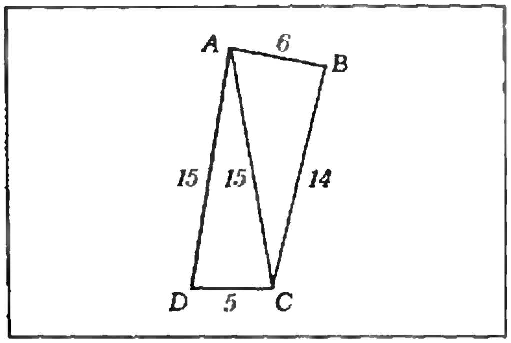


Рис. 1.

Покажем, что они не могли начать путь из B. Допустим противное. Поскольку первый и второй туристы перед прохождением третьих дорог своих маршрутов встретились в каком-то городе, первые две дороги их маршрутов — BAD и BCD. Так как $v_1>v_2$ (обозначения очевидны) и $|BAD|>|BCD|$, маршрут первого — $BADC$, второго — $BCDA$. Для третьего — две возможности: $BACD$ и $BCDA$. В первом случае туристом, закончившим маршрут последним, не может быть ни первый ($v_1>v_3$ и $|BADC|=|BACD|$), ни второй (когда третий, закончив маршрут, пройдет $|BACD|=26$ км, второй, поскольку $v_2<v_3$, пройдет меньше 26 км; так как $v_2<v_1\leqslant 8$ км/час и $|BCDA|=34$ км, за оставшийся час закончить маршрут он не сможет). Во втором случае последним снова не может быть ни первый ($v_1>v_3$ и $|BADC|<|BCAD|$), ни второй $\Big(t_3+1=$

$$=\frac{44}{v_3}+1\geqslant\frac{44}{7{,}5}+1>5{,}8+1=6{,}8=$$

$=\frac{34}{5}\geqslant\frac{34}{v_2}=t_2$; мы здесь использовали

$v_2\geqslant 5$ и $v_3=v_1-\frac{1}{2}\leqslant 7{,}5\Big)$.

Итак, туристы начали путь из D. Рассуждая как и выше, получаем, что маршрут первого — $DABC$, второго — $DCBA$. Маршрут третьего не может быть $DACB$, так как в этом случае снова последним не может быть ни первый, ни второй. Таким образом, маршрут третьего — $DCAB$.

Поскольку первый и второй туристы встретились в B, $\frac{21}{v_1}=\frac{19}{v_2}$. Из этого равенства легко выводится $\frac{14}{v_1}>\frac{6}{v_2}$. Следовательно, $t_2<t_1$. Значит, последним закончил маршрут первый турист. Из условий $\frac{21}{v_1}=\frac{19}{v_2}$, $v_1=v_3+\frac{1}{2}$ и $t_3+1=t_1$ теперь легко находится ответ: $v_1=7$ км/час, $v_2=6\frac{1}{3}$ км/час, $v_3=6\frac{1}{2}$ км/час.

5. Чтобы лучше понять задачу, обозначим через $\rho(\alpha)$ наименьшее значение (в задаче сказано — «минимум») функции f на отрезке $[-\sin\alpha;\ \cos\alpha]$. Итак,

$$\rho(\alpha)=\min_{[-\sin\alpha;\ \cos\alpha]} f(x).$$

Нам надо найти все значения $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, при которых функция ρ принимает значение $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\rho(\alpha)$.

Поскольку $f'(x)=12x(x-\sin\alpha)\times(x+\cos\alpha)$, критическими точками функции f на $\mathbf{R}$ являются 0, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$; кроме того, функция f убывает на промежутках $]-\infty;\ -\cos\alpha]$ и $[0;\ \sin\alpha]$, возрастает — на промежутках $[-\cos\alpha;\ 0]$ и $[\sin\alpha,\ +\infty[$.

При $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ имеем $\sin\alpha<\cos\alpha$. Следовательно, при этих α из трех критических точек функции f на отрезок $[-\sin\alpha;\ \cos\alpha]$ попадают две: 0 и $\sin\alpha$. Учтя равенство $f(0)=0$, заключаем, что при рассматриваемых α $\rho(\alpha)$ равно $f(-\sin\alpha)$ или $f(\sin\alpha)$ (рис. 2). Выражения для $f(\sin\alpha)$ и $f(-\sin\alpha)$ отличаются только одним слагаемым. Поскольку при $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{4}\right[$ имеем $\cos\alpha-\sin\alpha>0$, получаем $f(\sin\alpha)>f(-\sin\alpha)$. Следовательно, при этих α

$$\rho(\alpha)=f(-\sin\alpha)=\sin^3\alpha\ (7\sin\alpha-10\cos\alpha).$$

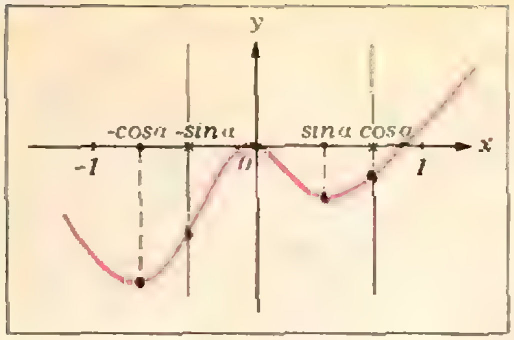


Рис. 2.

Аналогично получаем (рис. 3), что при

$\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$

$$\rho(\alpha) = f(\cos\alpha) = \cos^3\alpha\,(7\cos\alpha - 10\sin\alpha).$$

Кроме того, $\rho(0) = \min\limits_{[0;\,1]} f(x) = \min\limits_{[0;\,1]} x^3 \times (3x+4) = f(0) = f(-\sin 0) = 0$; $\rho\left(\frac{\pi}{4}\right) = \min\limits_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} f(x) = \min\limits_{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]} 3x^2(x^2-1) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3}{4}$;

$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = \min\limits_{[-1;\,0]} f(x) = \min\limits_{[-1;\,0]} x^3(3x-4) = f(0) = f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

Окончательно

$$\rho(\alpha) = \begin{cases} \sin^3\alpha\,(7\sin\alpha - 10\cos\alpha), \\ \text{если } \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \\ \cos^3\alpha\,(7\cos\alpha - 10\sin\alpha), \\ \text{если } \alpha \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Поскольку $\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$, получаем $\rho\left(\frac{\pi}{4} - t\right) = \rho\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$. Значит, график функции ρ симметричен относительно прямой $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Поэтому практически достаточно найти те $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, при которых функция ρ принимает значение $\min\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha)$.

Для $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ имеем $\rho'(\alpha) = 2\sin^3\alpha \times (5\sin^2\alpha - 15\cos^2\alpha + 14\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\,(5\,\mathrm{tg}^2\,\alpha + 14\,\mathrm{tg}\,\alpha - 15) = 10\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\left(\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{-7-\sqrt{124}}{5}\right) \times \left(\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{-7+\sqrt{124}}{5}\right)$. Следовательно, функция ρ убывает на промежутке $\left[0; \mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5}\right]$, в точке $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5}$ имеет минимум и возрастает на промежутке $\left[\mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5}; \frac{\pi}{4}\right]$. Поэтому значение $\min\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha)$ функция ρ принимает в точке α_1 (рис. 4)

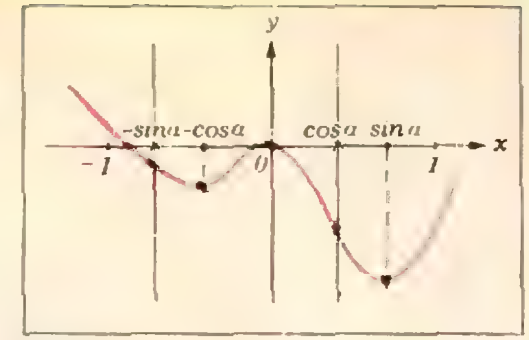


Рис. 3.

На отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ она принимает значение $\min\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha)$ в точке $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5}$, причем $\rho(\alpha_1) = \rho(\alpha_2)$ (рис. 4). Поэтому $\min\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{4}\right]} \rho(\alpha) = \min\limits_{\left[\frac{\pi}{4};\,\frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha) = \min\limits_{\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]} \rho(\alpha)$.

Ответ. $\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5},\ \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{-7+\sqrt{124}}{5}\right\}$.

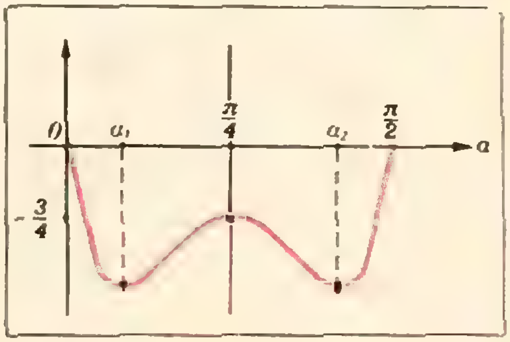


Рис. 4.

Физический факультет

1. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k\ (k\in Z)$. 2. $114\frac{1}{3}$. 3. $x_1 = -15\frac{3}{4}$, $x_2 = -2\frac{7}{8}$. 4. Углы при большем основании равны 45°, при меньшем — 135°.

5. Введем прямоугольную систему координат: за начало координат примем точку A, за ось абсцисс — прямую AD, за ось ординат — AB, за ось аппликат — AA_1 (направление осей — по ребрам). В этой системе интересующие нас точки имеют следующие координаты:

$$E\left(0;\ 0;\ \frac{1}{3}\right),\ F\left(\frac{1}{4};\ 1;\ 0\right),$$

$$I\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right),\ B_1(0;\ 1;\ 1).$$

Дальше надо найти уравнение плоскости α как плоскости, проходящей через три точки с известными координатами, и вычислить расстояние от точки B_1 до α («Квант», 1977, № 3 или задача 28 в «Геометрии 10»). Ответ. $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

Физика

1. $s_3 = \sqrt{s_1^2+s_2^2} = 5$ км.

2. $|\vec{T}| = \frac{Mm|\vec{g}|(1+\cos\alpha)}{M+m} \approx 12{,}4$ Н.

3. $|\vec{F}| = (M+m)|\vec{g}| \approx 130$ Н.

4. $R = \frac{a}{(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}$. 5. $T_{\max} = T_1 \times \frac{(p_1V_2-p_2V_1)^2}{4p_1V_1(p_2-p_1)(V_1-V_2)}$.

6. $x = \sqrt{\frac{Qq(M+m)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{E}|(Qm+qM)}}$.

7. $P_2 = \frac{P_1}{2}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2 \approx 75$ Вт.

8. Второй луч тоже испытает полное внутреннее отражение и не выйдет в воздух.

9. $x \approx F(n-1)\alpha \approx 1$ см.

10. $x \approx 49$ см.

Площади ориентированных фигур

(см. «Квант» № 3)

1. пл $\overline{PA_1A_2}$ = пл. $\overline{PB_1B_2}$. Нужно воспользоваться свойством (III).

2. пл. $\overline{A_1A_2\ldots A_n}$ = пл. $\overline{B_1B_2\ldots B_n}$. Следует из задачи 1 и теоремы 2.

3. $B_1B_2B_3$ можно получить из $A_1A_2A_3$ двумя симметриями — относительно середины отрезка A_1B_1 и относительно точки B_1.

4. а) По (A_1) $S(AB,\ (n+1)MN) = S(AB,\ nMN) + S(AB,\ MN)$.

б) Нужно воспользоваться пунктом а):

$$S\left(AB,\ n\left(\frac{m}{n}MN\right)\right) = nS\left(AB,\ \frac{m}{n}MN\right) = mS(AB,\ MN).$$

в) Воспользоваться пунктом б), (A_2) и (A_2').

5. Воспользуйтесь формулами (A_1) — (A_4).

К разделу IV

«Продолжение» задачи Мёбиуса. Воспользуйтесь равенством $x = a+p+d$ и четырьмя аналогичными равенствами. Общая задача. Воспользуйтесь тем, что $a' = \mu a+\lambda r$, где $\mu = 1-\lambda$, и четырьмя аналогичными равенствами и с помощью равенства вида $x = a+p+d$ выразите p, q, r, s и t через x и a', b', c', d' и e'.

Квант для младших школьников

(см. «Квант», № 3)

1. Булок было 94 731: $\begin{array}{r} 86\,210 \\ +\ 8\,521 \\ \hline 94\,731 \end{array}$

2. 32 года.

3. См. рисунок 5.

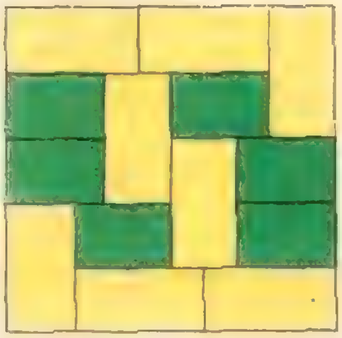


Рис. 5.

4. Поскольку сумма цифр уменьшаемого и вычитаемого одна и та же, разность делится на девять. Следовательно, цифра, обведенная в кружочек, равна дополнению известной отгадчику суммы остальных цифр разности до числа, кратного девяти.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

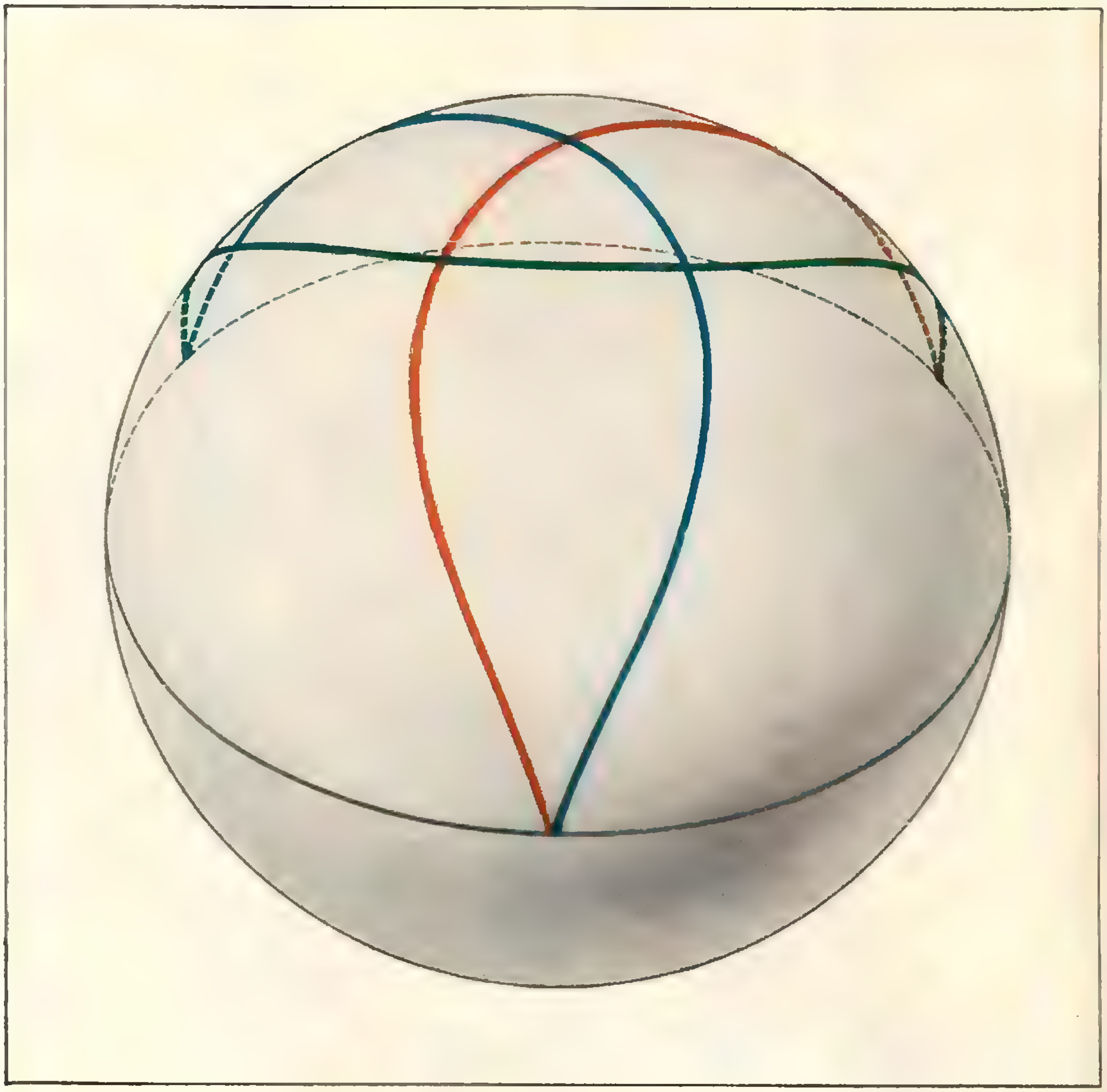
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор *А. Ипатова*

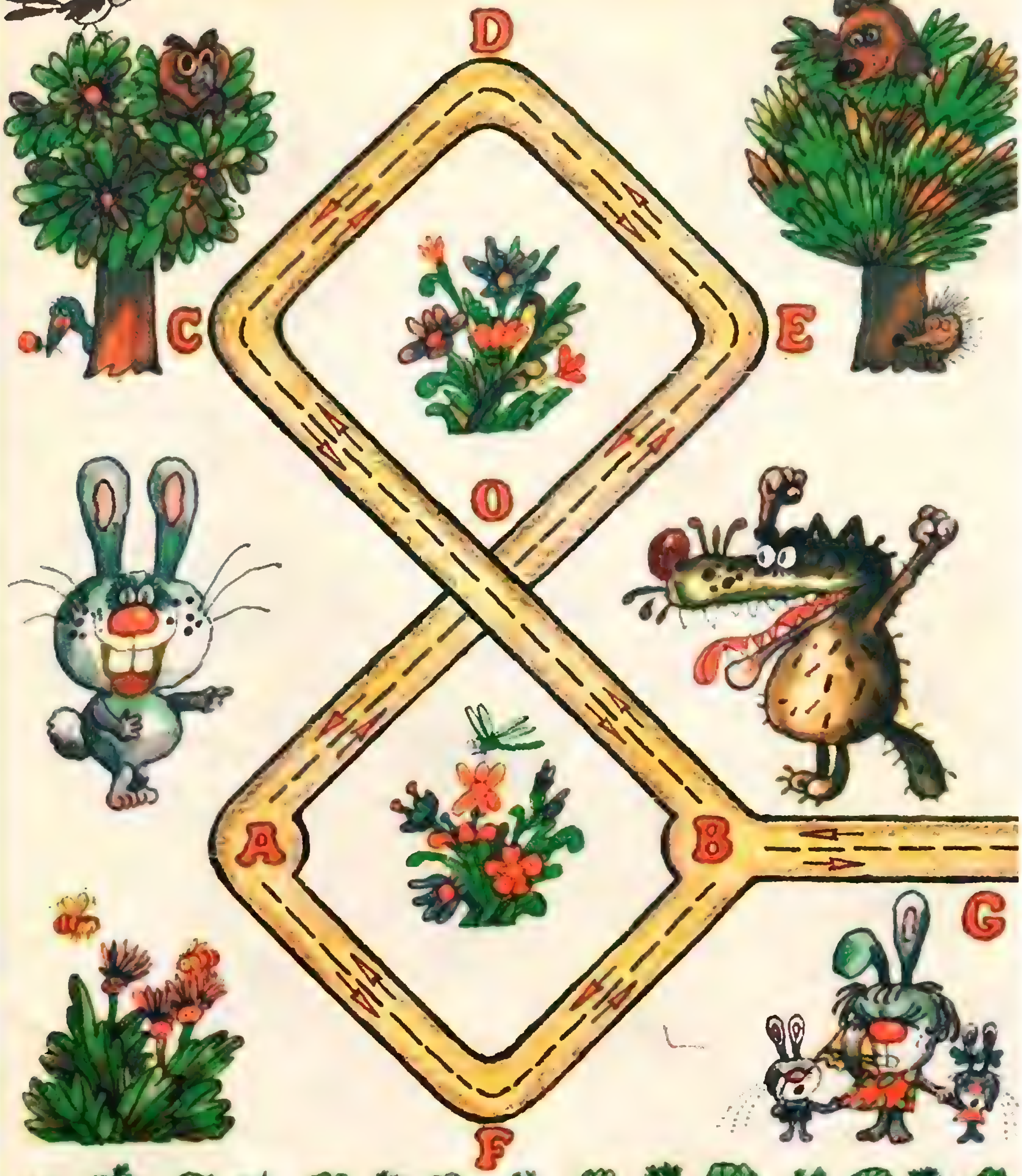
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 26/I-78
Подписано в печать 6/III-78
Бумага $70\times108^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,65 Т-05447
Цена 30 коп. Заказ 44 Тираж 310 058 экз

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



На рисунке изображена сферическая циклоида, для которой $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$. О сферической циклоиде читайте на стр. 13



Пункты A и B связаны двумя дорогами. В пункте A находится заяц, в пункте B — волк. Волк хочет поймать зайца; заяц же может убежать от волка по дороге BG (см. рисунок). Зайцу разрешается двигаться по дорогам только в указанных направлениях, не переходя с одной дороги на другую и поворачивать только в пунктах A и B. Волку же разрешается двигаться в любом направлении, в пункте O — выбрать любое из четырех направлений движения. И заяц, и волк могут останавливаться в любой точке своего пути.

Во сколько раз скорость зайца должна превышать скорость волка, чтобы заяц мог убежать? На протяжении всего движения заяц и волк видят друг друга, двигаются они равномерно и волк начинает движение первым. Отрезки пути OA, OB, OC, OE, CD, DE, AF и BF равны между собой.

Как изменится ответ, если дорога в направлении BG перекрыта?

Е. Зусер

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Великий норвежский математик Нильс Хенрик Абель как-то сказал, что «геометрия — это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах». Действительно, сделать абсолютно правильный чертеж невозможно. Более того, если речь идет, скажем, о произвольном треугольнике, а вы нарисовали его равнобедренным или прямоугольным, то это может натолкнуть вас на решение, годящееся только для частного случая.

Однако если речь идет о фигуре с заранее заданными свойствами, то нужно постараться сделать чертеж поточнее. Четко выполненный чертеж зачастую подсказывает идею решения задачи.

Здесь приведен чертеж к следующей задаче, предлагавшейся на XIX Международной математической олимпиаде.

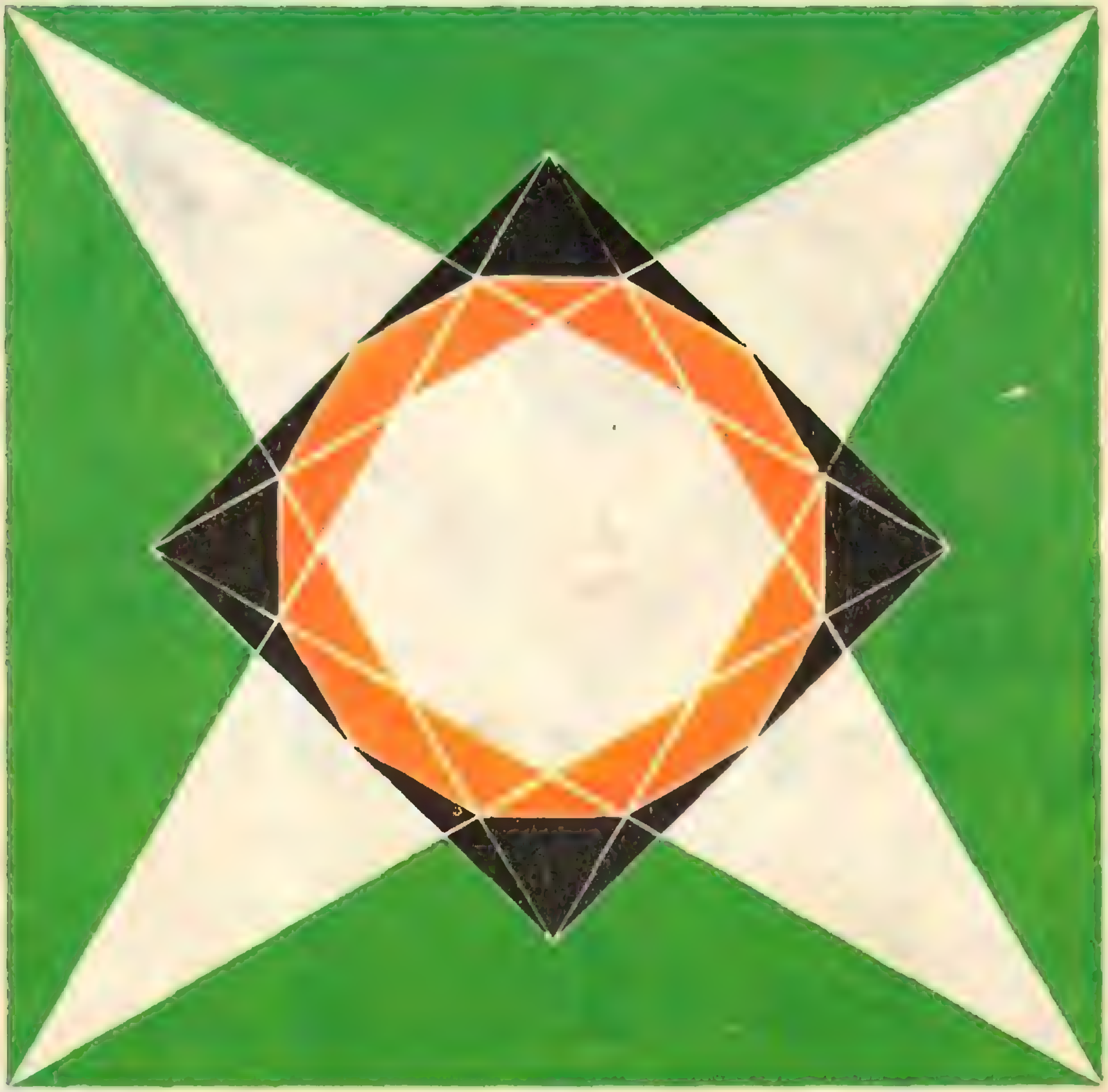
Внутри данного квадрата $ABCD$ построены равносторонние треугольники ABK, BCL, CDM, DAN.

Доказать, что середины четырех отрезков KL, LM, MN и MK вместе с серединами восьми отрезков AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN и NA являются вершинами правильного двенадцатиугольника.

(Одно из ее решений можно прочесть в «Кванте» № 2 за этот год)

Постарайтесь, глядя на чертеж, решить ее в уме.

А. Савин



НОМЕР
5

Основан в 1970 году

Квант

5
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. И. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой странице обложки изображена диаграмма касательных кривой (см. статью «Касательная» на с. 18), имеющей в полярных координатах уравнение $r=1+2\cos\frac{7}{8}\varphi$.

Эскиз рисунка выполнил А. Дорошенко — ученик девятого класса ФМШ при МГУ им. М. В. Ломоносова

В НОМЕРЕ:

2 *В. Болтянский.* Часто ли степени двойки начинаются с единицы?
8 *А. Паташинский, С. Попов.* Ускорители ИЯФ — метод встречных пучков
13 *З. Литовченко.* Лучший вариант

Лаборатория «Кванта»

16 *М. Грабовский.* Плавание воскового шарика

◆

17 *В. Березин.* Локсодромия

Математический кружок

18 *В. Вавилов, И. Мельников.* Касательная

Задачник «Кванта»

22 Задачи М501—М505: Ф513—Ф517
24 Решения задач М450—М454; Ф467—Ф471

По страницам школьных учебников

31 *В. Дубровский.* В поисках определения площади поверхности

«Квант» для младших школьников

35 Задачи
36 *А. Дозоров.* Куда направлена сила трения?

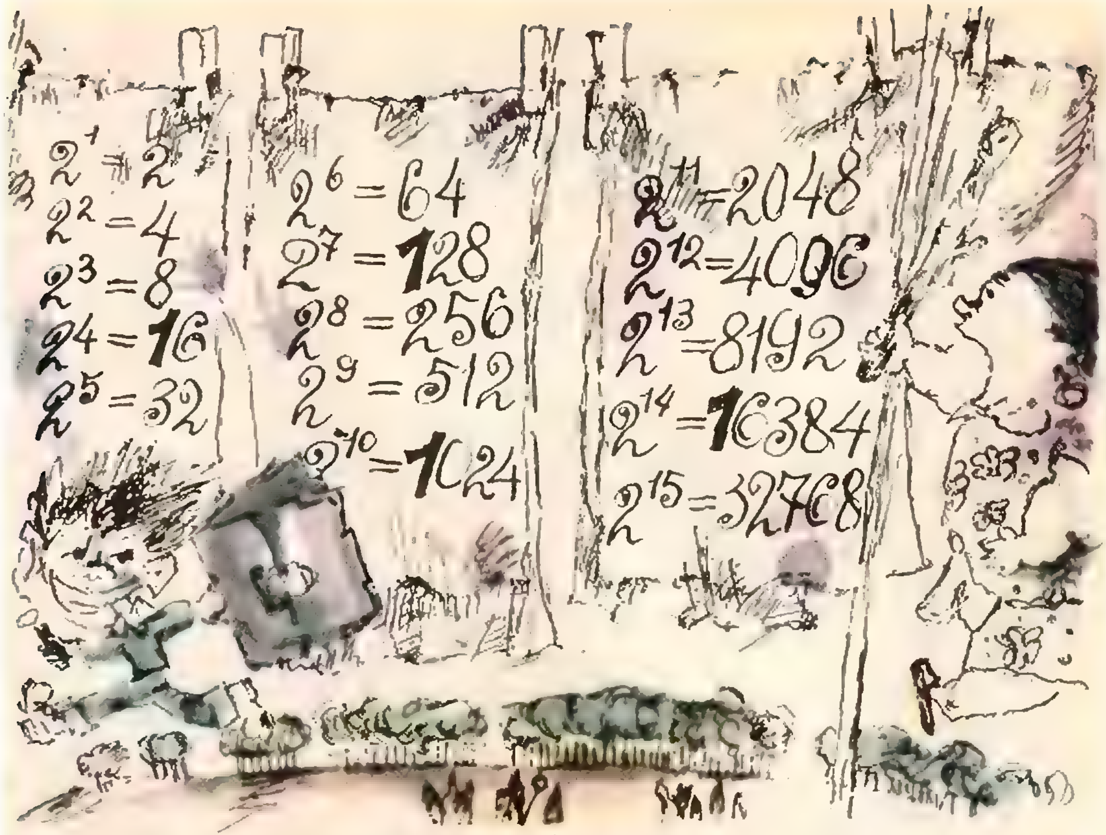
Практикум абитуриента

38 *Л. Асламазов.* Напряженность, напряжение, потенциал
44 *А. Виленкин.* Производная и касательные
48 *П. Зубков, Л. Лукьянчиков, Г. Меледин, В. Харченко.* Новосибирский государственный университет
51 *В. Осипов, В. Матвеев.* Ленинградский университет им. А. А. Жданова
53 *В. Гутенмахер, П. Медведев.* Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ

Рецензии, библиография

56 Новая книга по истории астрономии
57 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 34, 47)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978.



В. Болтянский

Часто ли степени двойки начинаются с единицы?

Постановка задачи

Среди степеней двойки вновь и вновь встречаются числа, начинающиеся с единицы. Как часто они встречаются? Иными словами, *какова вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой 1?*

Уточним постановку задачи. Среди выписанных (см. заставку) пятнадцати чисел четыре начинаются с единицы. Напишем эти числа на пятнадцати карточках, перетасуем их и выберем наудачу одну карточку. Вероятность того, что на ней будет число, начинающееся цифрой 1, равна 4/15 (рис. 1).

Возьмем теперь n первых степеней двойки, т. е. числа $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$; пусть среди них a_n чисел начинаются (в десятичной записи) с единицы. Тогда вероятность того, что число, наудачу выбранное из чисел $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$, начинается цифрой 1, равна a_n/n. Эта вероятность зависит от n, т. е. от того, сколько первых степеней двойки было взято. Предел

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}, \qquad (1)$$

(если он существует) и называется *вероятностью того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой 1.*

Задачи

1. Какова вероятность того, что произвольно взятое натуральное число делится на 3?

2. Какова вероятность того, что произвольно взятая цифра десятичного разложения числа $\frac{161}{222}$ является пятеркой? Двойкой?

3. Какова вероятность того, что произвольно взятое натуральное число является точным квадратом?

Вычисление предела (1)

Среди двузначных чисел, являющихся степенями двойки, ровно одно (а именно, 16) начинается с единицы. Среди трехзначных степеней двойки тоже ровно одно число (а именно, 128) начинается с единицы. То же верно для четырехзначных степеней двойки.

Вообще, при $k > 1$ среди k-значных чисел, являющихся степенями двойки, имеется ровно одно, начинающееся цифрой 1. В самом деле, наименьшее k-значное число, являющееся степенью двойки, обязательно начинается с единицы (иначе, разделив на 2, мы получили бы, что и предыдущая степень двойки является k-значным числом). Другого же числа, начинающегося цифрой 1, среди k-значных степеней двойки нет: следующая степень двойки будет иметь на первом месте цифру 2 или 3, следующая — еще большую цифру, пока мы не получим $(k+1)$-значное число.

Из сказанного следует, что если число 2^n является m-значным, то среди чисел $2^1, 2^2, \ldots, 2^n$ имеется ровно $m-1$ чисел, начинающихся с единицы, т. е. $a_n = m-1$. Но утверждение «число 2^n является m-значным» означает, что

$$10^{m-1} \leqslant 2^n < 10^m,$$

то есть

$$m-1 \leqslant n \lg 2 < m.$$

Вспоминая, что $a_n = m-1$, получаем

Рис. 1.

$$\lg 2 - \frac{1}{n} < \frac{a_n}{n} \leqslant \lg 2,$$

и, следовательно,

$$p_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lg 2 = 0{,}30103\ldots$$

Итак, чуть больше 30% степеней двойки начинаются с единицы.

Задачи

4. Обозначим через p_q вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается цифрой q *). Докажите равенства

$$p_2+p_3=p_1,\ p_4+p_5=p_2,\ p_6+p_7=p_3,$$
$$p_8+p_9=p_4.$$

5. Докажите, что $p_4=1-3\lg 2=0{,}096\ldots$

Как видите, степени двойки начинаются цифрой 4 в три с лишним раза реже, чем цифрой 1 (рис. 2).

1
4
16
128
1024
16384
4096

Рис. 2.

Общая задача

А какова вероятность того, что произвольно взятая степень данного натурального числа l начинается (в десятичной записи) цифрой q?

Пусть число l^n начинается в десятичной записи цифрой q, т. е.

$$q\cdot 10^m \leqslant l^n < (q+1)\cdot 10^m,$$

где m — некоторое натуральное число. Разделив эти неравенства на $q\cdot 10^m$ и прологарифмировав по основанию 10, получим:

$$0 \leqslant (n\lg l - \lg q) - m < \lg\frac{q+1}{q}. \quad (2)$$

Так как число, стоящее справа, меньше единицы $\left(\frac{q+1}{q} = 1+\frac{1}{q} \leqslant 2 < 10\right)$, то неравенства (2) означают, что дробная часть числа $n\lg l - \lg q$ меньше $\lg\frac{q+1}{q}$ (напомним, что *дробной частью* числа x называется разность между числом x и его *целой частью*: $\{x\} = x - [x]$, а *целая часть* x — это наибольшее целое число, которое не превосходит x). Обратно, если дробная часть числа $n \lg l - \lg q$ меньше $\lg \frac{q+1}{q}$, т. е. если при некотором натуральном m выполнены неравенства (2), то l^n начинается в десятичной записи цифрой q. Таким образом, поставленная задача эквивалентна следующей: *какова вероятность того, что для произвольно взятого натурального числа* n

---

*) Существование чисел p_q вытекает из дальнейшего.

$$\{n \lg l - \lg q\} < \lg \frac{q+1}{q}\ ?$$

Решить эту последнюю задачу нам поможет

Теорема о дробных частях. *Пусть α, β — действительные числа, причем число α — иррациональное, и I — некоторый промежуток длины h, содержащийся в отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим бесконечную последовательность $\alpha+\beta$, $2\alpha+\beta$, …, $n\alpha+\beta$, … Вероятность того, что произвольно взятое число этой последовательности имеет дробную часть, принадлежащую промежутку I, равна h.*

Доказательство этой теоремы мы приведем в конце статьи, а сейчас покажем, как она применяется к решению нашей задачи.

Прежде всего заметим, что если l является степенью десяти, то все степени числа l начинаются цифрой 1, т. е. в этом случае задача тривиальна.

Если же l не является степенью десяти, то число $\alpha = \lg l$ иррационально. По теореме о дробных частях вероятность того, что произвольно взятое число из последовательности $n \lg l - \lg q$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет дробную часть, принадлежащую промежутку $\left[0, \lg \frac{q+1}{q}\right[$, равна $\lg \frac{q+1}{q}$. Это и дает решение рассмотренной выше задачи: *вероятность того, что произвольно взятая степень натурального числа l (не являющегося степенью десяти) начинается цифрой q, равна* $\lg \frac{q+1}{q}$.

Обратите внимание на то, что эта вероятность не зависит от l! Например, степени двойки и степени тройки одинаково часто (а именно, с вероятностью $\lg 2$) начинаются цифрой 1.

Задачи

6. Докажите, что если натуральное число l не является степенью десяти, то число $\lg l$ иррационально.

7. Вычислите вероятности p_2, …, p_9, указанные в задаче 4. Дайте новое доказательство содержащихся там равенств.

8. Какова вероятность того, что произвольно взятая степень двойки начинается комбинацией цифр 1000 (рис. 3)?

Рис. 3.

9. Какова вероятность того, что произвольно взятая степень числа l (не являющегося степенью десяти) начинается комбинацией цифр $q_1 q_2 \ldots q_r$ (где $q_1 \neq 0$)? Выведите отсюда, что степени числа l могут начинаться любой комбинацией цифр $q_1 q_2 \ldots q_r$ $(q_1 \neq 0)$.

10. Докажите следующие утверждения:

а) Вероятность того, что у произвольно взятой степени числа l, не являющегося степенью десяти, вторая слева цифра есть 0, равна

$$p_0^{(2)} = \lg(11 \cdot 21 \cdot 31 \cdot \ldots \cdot 91) - \lg(9!) - 9.$$

Указание: $p_0^{(2)}$ есть сумма вероятностей того, что произвольная степень числа l начинается комбинациями 10, 20, … …, 90.

б) Вероятность того, что у произвольно взятой степени числа l, не являющегося степенью десяти, k-я (слева) цифра есть q (где $k > 1$, $q = 0, 1, \ldots, 9$), равна:

$$p_q^{(k)} = \sum_{i=10^{k-2}}^{10^{k-1}-1} \lg\left(1 + \frac{1}{q + 10i}\right).$$

11*. Используя результат задачи 10, б), докажите, что $\lim\limits_{k\to\infty} p_q^{(k)} = 1/10$. Таким образом, при достаточно большом k каждая из вероятностей $p_0^{(k)}$, $p_1^{(k)}$, …, $p_9^{(k)}$ как угодно мало отличается от $1/10$.

Указание: докажите, что $\ln(1+x)<x$ при $x>0$ *); затем воспользуйтесь соотношениями:

$$\lg\left(1+\frac{1}{10i}\right)-\lg\left(1+\frac{1}{10i+q}\right)<$$
$$<\lg\left(1+\frac{q}{100i(i-1)}\right)=$$
$$=\frac{1}{\ln 10}\ln\left(1+\frac{q}{100i(i-1)}\right)<$$
$$<\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{q}{100i(i-1)}=$$
$$=\frac{q}{100\ln 10}\left(\frac{1}{i-1}-\frac{1}{i}\right).$$

12. Обобщите результаты задач 9 и 10 б) на случай, когда степени числа l записываются в системе счисления с основанием $b>1$. В частности, для двоичной системы счисления формулы задачи 10, б) принимают следующий вид:

$$p_0^{(k)}=\log_2\left[\frac{2^{k-1}+1}{2^{k-1}}\cdot\frac{2^{k-1}+3}{2^{k-1}+2}\times\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\times\frac{2^k-1}{2^k-2}\right].$$

$$p_1^{(k)}=\log_2\left[\frac{2^{k-1}+2}{2^{k-1}+1}\cdot\frac{2^{k-1}+4}{2^{k-1}+3}\times\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\times\frac{2^k}{2^k-1}\right].$$

Еще одна задача

В качестве еще одного примера применения теоремы о дробных частях рассмотрим следующую задачу: *число α иррационально; нужно доказать, что существует натуральное n, для которого* $\cos n\alpha\pi>0{,}999$.

Заметим, что неравенство $\cos n\alpha\pi>0{,}999$ равносильно следующим:

$$2m\pi-\arccos 0{,}999<n\alpha\pi<$$
$$<2m\pi+\arccos 0{,}999$$

(при некотором целом m), т. е.

$$m<\frac{\alpha}{2}n+\frac{1}{2\pi}\arccos 0{,}999<$$
$$<m+\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}999.$$

Иными словами, неравенство $\cos n\alpha\pi>0{,}999$ выполняется в том и только в том случае, если число $\left\{\frac{\alpha}{2}n+\frac{1}{2\pi}\arccos 0{,}999\right\}$ принадлежит промежутку $[0,\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}999]$. По теореме о дробных частях произвольно выбранное натуральное n удовлетворяет этому условию с вероятностью $\frac{1}{\pi}\arccos 0{,}999\approx 0{,}014$. Таким образом, если N достаточно велико, то примерно 1,4% чисел 1, 2, ..., N удовлетворяют поставленному требованию.

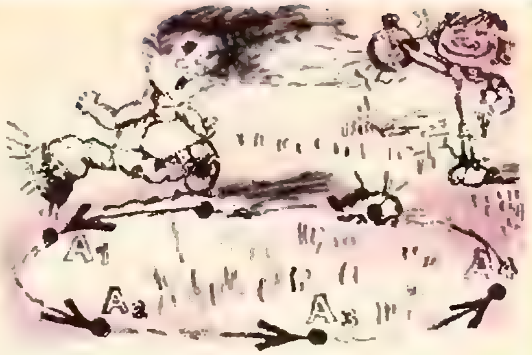


Рис. 4.

Задачи

13. От произвольной точки окружности радиуса 1 откладываются друг за другом дуги длины 1. Обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ последовательные концы откладываемых дуг. *Докажите, что, какова бы ни была дуга Q этой окружности, найдется точка $A_i\in Q$* (рис. 4).

14. Докажите, что если α иррационально, то функция $\cos x+\cos\alpha x$ не является периодической.

15. Даны две бесконечные арифметические прогрессии:

$$a_1+d_1,\ a_1+2d_1,\ a_1+3d_1,\ \ldots;$$
$$a_2+d_2,\ a_2+2d_2,\ a_2+3d_2,\ \ldots,$$

причем числа d_1 и d_2 положительны, и отношение d_1/d_2 иррационально. Найдется ли такой член первой прогрессии и такой

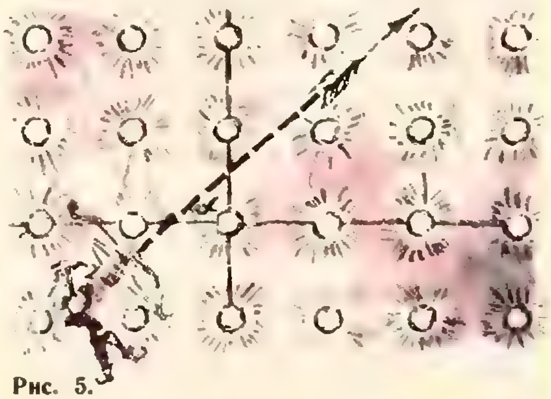


Рис. 5.

---

*) $\ln x$ — это логарифм числа x при некотором специальном основании $e=2{,}71828\ldots$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 109).

член второй прогрессии, что модуль их разности меньше 0,000001?

16. *Лесом радиуса* ε назовем объединение всех кругов радиуса ε, центрами которых служат точки с целочисленными координатами. Докажите, что если прямая образует с осью абсцисс угол φ, тангенс которого иррационален, то она обязательно пересекает лес (как бы ни было мало ε; рис. 5).

Доказательство теоремы

Перейдем теперь к доказательству теоремы о дробных частях.

Возьмем произвольное натуральное число r. Точки $\frac{1}{r}, \frac{2}{r}, \ldots, \frac{r-1}{r}$ разбивают отрезок $[0, 1]$ на r отрезков длины $\frac{1}{r}$. Назовем эти отрезки «клетками», а дробные части чисел $\alpha, 2\alpha, \ldots, (r+1)\alpha$ назовем «зайцами»*). Так как «клеток» r, а «зайцев» $r+1$, то найдутся два «зайца», попавшие в одну клетку, т. е. найдутся такие натуральные p' и p'' $(p' > p'')$, что дробные части чисел $p'\alpha$ и $p''\alpha$ отличаются менее чем на $\frac{1}{r}$. Значит, $|(p'\alpha - p''\alpha) - m| < \frac{1}{r}$ при некотором целом m. Положив $p = p' - p''$, мы можем написать: $|p\alpha - m| = \varepsilon$, где $\varepsilon < \frac{1}{r}$. Заметим, что $\varepsilon \neq 0$, так как α иррационально. Обозначим через s наименьшее натуральное число, превосходящее $\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. $s - 1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < s$.

Рассмотрим s последовательных членов арифметической прогрессии с разностью $p\alpha$:

$$\gamma + p\alpha,\ \gamma + 2p\alpha,\ \ldots,\ \gamma + sp\alpha, \qquad (3)$$

где γ — некоторое действительное число. Обозначим дробные части чисел (3) через $x_1, x_2, \ldots, x_s$. В силу равенства $|p\alpha - m| = \varepsilon$ числа $x_1, x_2, \ldots, x_s$ отстоят друг от друга на ε (рис. 6). В силу неравенств $\frac{1}{s} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{s-1}$ расстояние между точками x_1 и x_s на рисунке 6, б меньше ε. Из сказанного вытекает, что число точек $x_1, x_2, \ldots, x_s$, попадающих на отрезок I длины h, заключено между числами $\frac{h}{\varepsilon} - 1$ и $\frac{h}{\varepsilon} + 2$, т. е. между $sh - 2$ и $sh + 2$ (заметим, что $h < 1$).

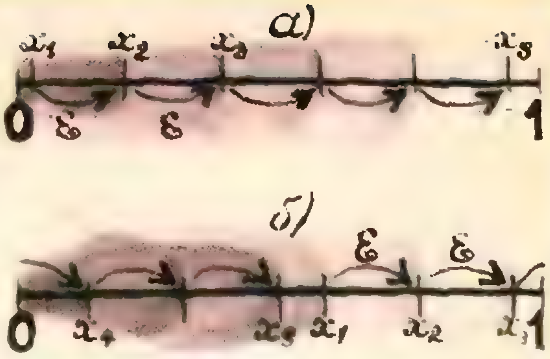


Рис. 6.

Возьмем теперь ps последовательных членов $b_1, b_2, \ldots, b_{ps}$ какой-либо арифметической прогрессии с разностью α (т. е. $b_{i+1} = b_i + \alpha$). Расположим их в виде таблицы, изображенной на рисунке 7. Очевидно, что каждая строка этой таблицы представляет собой прогрессию вида (3). Так как число строк равно p, то количество тех членов рассматриваемой прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_{ps}$, дробные части которых попадают в промежуток I, заключено между числами $p(sh-2)$ и $p(sh+2)$.

Пусть, наконец, n — произвольное натуральное число, большее rps. Разделив n на ps с остатком, получим $n = lps + q$, где $l \geqslant r$, $0 \leqslant q < ps$. Следовательно, из чисел $\alpha + \beta, 2\alpha + \beta, \ldots, n\alpha + \beta$ можно взять l раз по ps последовательных членов арифметической прогрессии с разностью α,

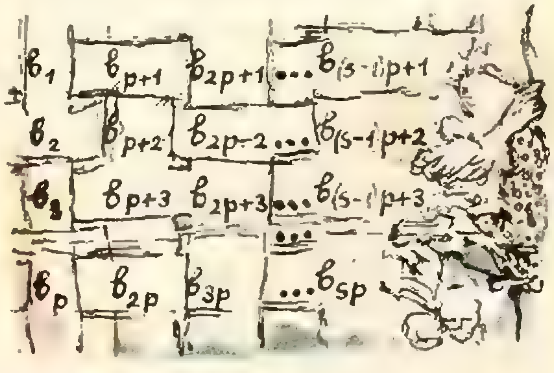


Рис. 7.

---

*) Эта терминология связана с *принципом Дирихле* («Квант», 1977, № 2, с. 17). Теорему о дробных частях можно назвать «принципом Дирихле для бесконечного числа зайцев».

и еще останется q чисел. Поэтому

$$lp\,(sh-2) \leqslant a_n \leqslant lp\,(sh+2)+q,$$

где a_n — количество тех чисел $\alpha+\beta$, $2\alpha+\beta$, …, $n\alpha+\beta$, дробные части которых попадают в промежуток I. Это неравенство можно переписать в виде

$$(n-q)\,h-2lp \leqslant a_n \leqslant (n-q)\,h+ +2lp+q,$$

откуда (в силу соотношений $0 \leqslant h < 1$, $q < ps$) получаем

$$nh-2lp-ps \leqslant a_n \leqslant nh+2lp+ps,$$

т. е.

$$\left|\frac{a_n}{n}-h\right| \leqslant \frac{2lp+ps}{n} \leqslant \frac{2lp+ps}{lps} = = \frac{2}{s}+\frac{1}{l} < \frac{3}{r}$$

(поскольку $l \geqslant r$ и $\left.\frac{1}{s} < \varepsilon < \frac{1}{r}\right)$. Итак, существует такое натуральное N (а именно, $N=rps$), что при $n>N$ выполнено неравенство $\left|\frac{a_n}{n}-h\right| < \frac{3}{r}$. Ввиду произвольности натурального числа r, отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=h.$$

Задачи

17. Докажите следующее «двумерное» обобщение теоремы о дробных частях. Пусть на плоскости фиксирована система координат. *Дробной частью вектора* $\vec{a}$ с координатами x, y будем называть вектор, координатами которого являются дробные части чисел x и y (рис. 8). Пусть **M** — некоторый многоугольник, содержащийся в квадрате с вершинами (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1). Будем говорить, что некоторый вектор $\vec{b}$ *попадает в* **M**, если $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, где O — начало координат, а $B \in$ **M**. Пусть $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ — произвольные векторы на плоскости, причем координаты x_0, y_0 вектора $\vec{\alpha}$ и число $\frac{x_0}{y_0}$ иррациональны. Рассмотрим бесконечную последовательность векторов $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, …, $n\vec{\alpha}+\vec{\beta}$. Вероятность того, что произвольно взятый вектор этой последовательности имеет дробную часть, попадающую в многоугольник **M**, равна площади S (**M**) этого многоугольника *).

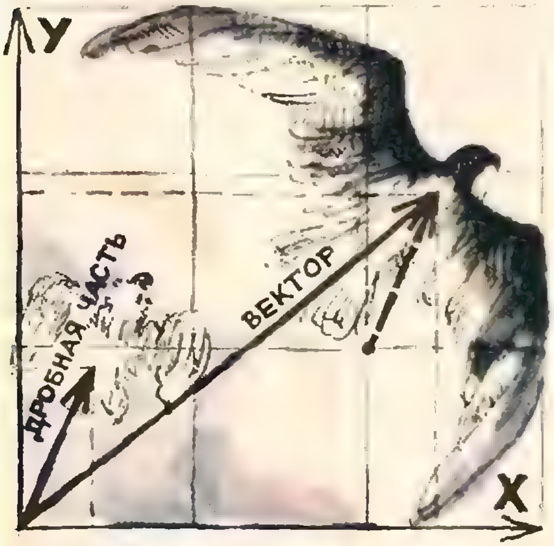


Рис. 8.

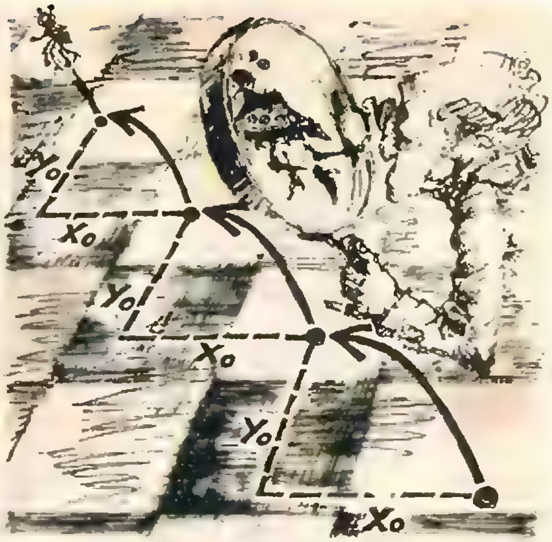


Рис. 9.

18. По бесконечной шахматной доске с полями в виде квадратов со стороной 1 *прыгает блоха, перемещаясь за каждый прыжок на* x_0 влево и на y_0 вверх (рис. 9). Докажите, что если числа x_0, y_0 и $\frac{x_0}{y_0}$ иррациональны, то блоха обязательно попадет когда-нибудь на черное поле.

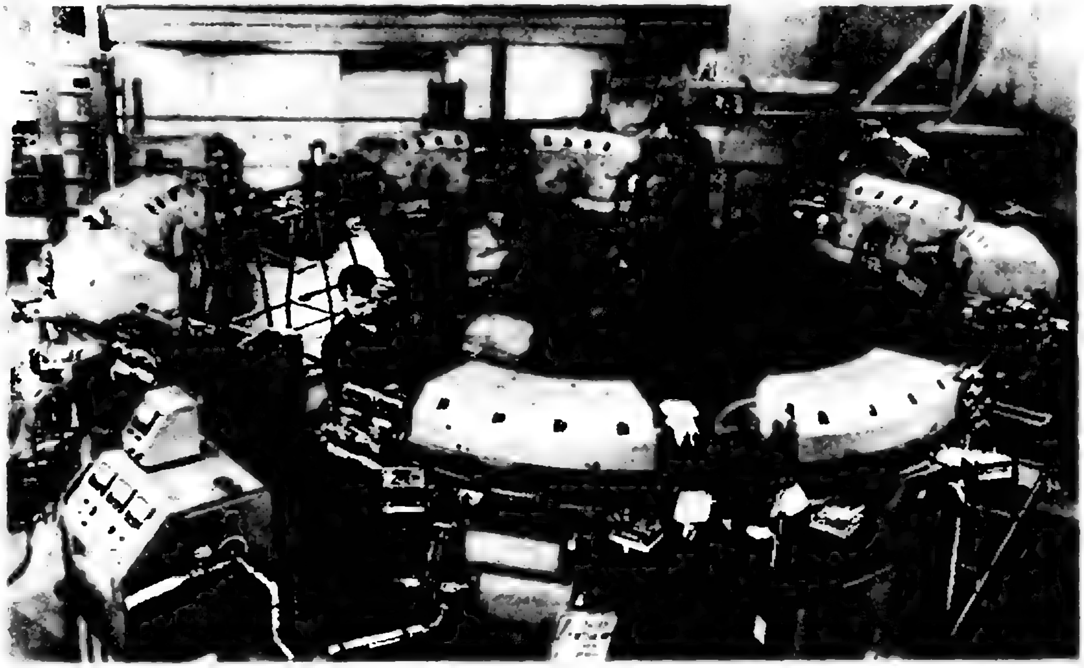
19. Числа $\frac{\lambda_1}{\pi}$, $\frac{\lambda_2}{\pi}$ и $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ иррациональны. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases}\sin n\lambda_1 > 0{,}999999,\\ \sin n\lambda_2 > 0{,}999999\end{cases}$$

имеет натуральное решение n.

---

*) Аналогичное обобщение справедливо также для n-мерного пространства (вектор $\vec{\alpha}$ должен обладать тем свойством, что все его координаты иррациональны и ни одна из них не представляется в виде линейной комбинации остальных координат с рациональными коэффициентами).



А. Паташинский, С. Попов

Ускорители ИЯФ — метод встречных пучков

В 1967 г. академику Г. И. Будкеру и его ближайшим сотрудникам была присуждена Ленинская премия за развитие метода встречных пучков. Этим признанием был подведен итог первому этапу работ, положивших начало использованию в физике высоких энергий этого очень перспективного метода. О преимуществах метода встречных пучков, об истории его создания в Институте ядерной физики Сибирского Отделения АН СССР, основателем и директором которого был выдающийся советский физик и организатор науки академик Г. И. Будкер, рассказывается в этой статье.

О том, зачем нужны ускорители, и об устройстве обычных ускорителей «Квант» уже рассказывал (см. № 4 за 1977 г.). Основным способом исследования микромира в настоящее время является столкновение элементарных частиц. Чем глубже мы хотим проникнуть в микромир, тем больше должна быть энергия соударения. В эксперименте элементарная частица сталкивается с другой элементарной частицей. Регистрируется результат столкновения — скорости отклонившихся или родившихся при соударении частиц, их сорт. Глубина, на которую мы таким образом проникаем в микромир, определяется энергией ускоряемых частиц. Но на пути развития ускорительной техники возникают две существенные трудности. Первая заключается в том, что для сообщения ускоряемым частицам все бо́льших энергий необходимы ускорители огромных размеров, которые стоят очень дорого. Вторая же трудность носит принципиальный характер.

Для того чтобы понять, в чем она заключена, обратимся к хорошо знакомому нам процессу соударения шаров.

Рассмотрим «лобовое» соударение двух шаров одинаковых масс. При столкновении шары начинают деформироваться, и часть первоначальной кинетической энергии системы переходит в потенциальную энергию деформации шаров. Представим себе, что мы изучаем прочность наших шаров, нас интересует, при каких условиях они разбиваются. Ясно, что эти условия определяются именно величиной потенциальной энергии деформации шаров. Какую часть составляет эта энергия от первоначальной кинетической энергии системы?

Рассмотрим сначала случай, когда один из шаров первоначально покоится. Пусть на покоящийся шар налетает шар, кинетическая энергия которого $E = \frac{mv^2}{2}$. Сразу после столкновения шары начинают деформироваться. Очевидно, что деформация шаров растет до тех пор, пока относительная скорость шаров не станет равной нулю. В этот момент шары движутся как одно целое (шар с массой $2m$) с некоторой скоростью $\vec{u}$, и энергия деформации шаров максимальна. Из закона сохранения импульса — $m|\vec{v}| = 2m|\vec{u}|$ — следует, что $|\vec{u}| = |\vec{v}|/2$. Согласно закону сохранения энергии $E = \frac{2mu^2}{2} + E_0$, где E_0 — максимальная энергия деформации шаров. Следовательно,

$$E_0 = E - \frac{2m(v/2)^2}{2} = \frac{1}{2}E.$$

Таким образом, максимальная энергия деформации шаров в случае, когда один из них первоначально покоился, равна половине начальной кинетической энергии системы.

Иное дело, когда два шара движутся навстречу друг другу с одинаковыми по абсолютному значению скоростями $|\vec{v}|$. В этом случае энергия деформации E_0' в процессе соударения максимальна в тот момент, когда скорости шаров равны нулю. Из закона сохранения энергии следует, что

$$E_0' = E',$$

где $E' = 2\frac{mv^2}{2}$ — начальная энергия системы. Итак, при соударении движущихся навстречу друг другу шаров вся первоначальная кинетическая энергия системы переходит в энергию деформации.

Рассмотренный нами случай соударения двух шаров, из которых один первоначально покоился, представляет собой модель ситуации, происходящей в обычном ускорителе, — ускоренная частица налетает на неподвижную мишень. Энергия деформации шаров — это аналог той энергии, которая при соударении ускоренных частиц с атомами мишени определяет происходящие в атомах процессы, возможность рождения новых частиц, их энергию. Именно эта «полезная» энергия и интересует исследователей.

Теперь нам становится ясна та принципиальная трудность, которая возникла перед создателями ускорителей. Когда ускоренная частица сталкивается с атомами неподвижной мишени, часть ее энергии расходуется на сообщение скорости системе «частица+атом» (вернее, «частица+рожденные в соударении частицы») как целому. И эта часть энергии «тратится» без пользы — ведь исследователя интересует энергия рожденных в процессе соударения частиц, а энергия движения системы как целого — это своего рода «энергетические издержки» в процессе. В случае, когда скорость частиц мала по сравнению со скоростью света, эти «издержки» составляют половину первоначальной энергии ускоренных частиц. В релятивистском же случае доля «полезной» энергии сильно уменьшается с ростом энергии частиц. Так, при энергиях ускоряемых частиц порядка 10 ГэВ (1 ГэВ$=10^9$ эВ) эта доля меньше процента — порядка 100 МэВ (1 МэВ$=10^6$ эВ). Для того чтобы получить в процессе соударения «полезную» энергию 2 ГэВ, потребовалось бы ускорять электроны до энергии 4 ТэВ (1 ТэВ$=10^{12}$ эВ). Ускоритель электронов на такие энергии имел бы длину, сравнимую с окружностью Земли по экватору!

А если вместо неподвижной мишени использовать встречный пучок ускоренных частиц? Моделью процессов, происходящих в таком ускорителе, является рассмотренный нами случай соударения двух шаров, движущихся навстречу друг другу. И тогда «полезную» энергию в 2 ГэВ, почти недостижимую для обычного электронного ускорителя, можно получить при соударении частиц встречных пучков, ускоренных до энергии 1 ГэВ на частицу.

На рисунке 1 приведен график, который позволяет наглядно оценить

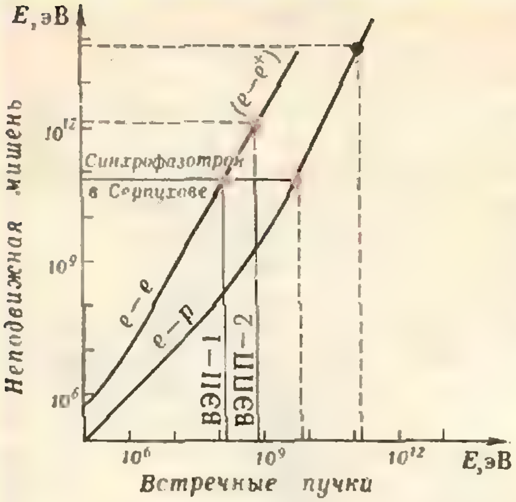


Рис. 1. Соотношение между энергией частиц в установках со встречными пучками и в ускорителях с неподвижной мишенью при одинаковых энергиях соударения.

энергетические преимущества метода встречных пучков. Каждая точка кривой соответствует некоторому значению «полезной» энергии — энергии соударения. Абсцисса точки — это значение энергии ускоряемых частиц в установках со встречными пучками, необходимой для получения данной «полезной» энергии, а ордината точки — значение энергии, до которой нужно ускорять частицы в ускорителях с неподвижной мишенью, чтобы получить эту же «полезную» энергию. Как видно из рисунка, для получения одной и той же энергии соударения в ускорителях с неподвижной мишенью электронам нужно сообщить энергию порядка 10^{11} эВ, а ускоритель на встречных пучках дает тот же «эффект» при энергии электронов порядка 10^{8} эВ.

Идея встречных пучков проста, и преимущества этого метода очень наглядны и неоспоримы. Однако многим физикам казалось, что техническое осуществление ускорителей на встречных пучках невозможно. И главная трудность, как представлялось, заключена в том, что пучки ускоренных частиц, встречаясь, будут проходить друг сквозь друга практически без соударений. Ведь число соударений пропорционально плотности частиц в сталкивающихся пучках и обратно пропорционально площади их поперечного сечения. А именно эти параметры определяют величину тока в ускорителе — заряд, переносимый за единицу времени ускоренными частицами через поперечное сечение пучка. Величина тока в наиболее современных ускорителях достигает 100 мкА. Но даже при таком токе плотность частиц в пучке в 10^{17} раз меньше, чем плотность атомов в мишени. И если сталкивать два подобных пучка, сжав в месте встречи их поперечные сечения до долей миллиметра, то количество соударений будет равно... нескольким единицам в сутки! И создание очень узких направленных пучков — тоже проблема. Для этого, прежде всего, необходим очень высокий вакуум.

Все эти проблемы заставляли очень скептически относиться к идее ускорителя на встречных пучках. И все же...

В 1956 году в Москве в Институте атомной энергии, которым руководил Игорь Васильевич Курчатов, в лаборатории новых методов ускорения начинаются работы по встречным электронным пучкам. Руководит лабораторией молодой физик Герш Ицкович Будкер. Первая задача — получение больших токов ускоряемых частиц. В разрабатываемых лабораторией установках со встречными пучками выбирают метод «накопления» токов. Основной элемент такой установки — накопительные кольца. В накопительное кольцо порциями впрыскивают (как говорят, инжектируют) частицы до тех пор, пока не будет достигнута нужная плотность пучка. Движущиеся в кольце частицы ускоряются до энергии, при которой проводится эксперимент. Если сталкивающиеся частицы несут заряды одного знака, то каждый из пучков накапливается в своем собственном кольце; если же частицы имеют разноименные заряды, то оба пучка могут накапливаться в одном кольце, — ведь магнитное поле «закручивает» частицы с зарядами противоположных знаков в противоположные стороны, так что пучки движутся навстречу друг другу. Столкновения пучков происходят в одном и том же месте через определенные периоды времени.

Чтобы за часы вращения по круговой орбите пучок не был рассеян частицами газа в накопительном кольце, необходим высочайший вакуум — не больше 10^7 частиц газа в 1 см^3. Необходимо, чтобы впуск каждой новой порции частиц не «портил» уже накопленный пучок. Необходимо устранить («подавить») неустойчивости пучка — при отклонении частиц от направления движения пучка возникают силы, выбрасывающие частицы на стенки кольца. Эти и многие другие проблемы требуют сложнейших конструкторских и инженерных разработок.

В 1958 году по предложению И. В. Курчатова лаборатория новых методов ускорения переезжает в Сибирь. Здесь под Новосибирском началось строительство Академгородка Сибирского отделения АН СССР. Лаборатория превращается в Институт ядерной физики (ИЯФ) СО АН СССР. Директором института стал Г. И. Будкер.

Институт возникал со скоростью взрыва. Директор его молод, большинство сотрудников — вчерашние студенты и аспиранты. Будкер предлагает предельно напряженный ритм работ, и коллектив принимает этот ритм. «Средний уровень в науке неустойчив. Если мы не пойдем вперед на пределе возможностей — мы отстанем и скатимся на уровень низкий, — говорил Будкер. — Если мы не сделаем все, чтобы быть первыми, мы станем плохим институтом». Поставленная перед институтом задача была необычайно трудна. Начинается строительство ускорителя и накопительных колец первой установки на встречных электронных пучках — ВЭП-1. Элементы нового ускорителя должны работать в режимах значительно более сложных, чем элементы обычного ускорителя. Каждый узел — новая проблема. Известны многие открытия Г. И. Будкера в физике, но когда говорят о «методе Будкера» — это о работе института. Метод Будкера — это поиск новых, более совершенных решений поставленных задач. И поиск людей, способных находить такие решения. «Каждый талантливый человек должен работать творчески и самостоятельно», — утверждал директор и доверял своим ученикам все более сложные участки работы. Многие элементы установки ВЭП-1 были по существу открытиями в технике создания ускорителей на встречных пучках.

В 1963 году в накопителе ВЭП-1 столкнулись пучки электронов. Есть $e^- e^-$-столкновения на встречных пучках! Кроме подтверждения возможности реализации ускорителя на встречных пучках, эксперимент на ВЭП-1 дал новую физическую информацию — была доказана выполнимость закона Кулона на расстояниях порядка 10^{-14} см. (Напомним, что «классический» радиус электрона $2{,}7 \cdot 10^{-13}$ см.)

Параллельно с экспериментами на ВЭП-1 была смонтирована установка для осуществления столкновения пучков электронов и позитронов ВЭПП-2. В 1965 году на этой установке впервые в мире был осуществлен эксперимент по столкновению электронного и позитронного пучков.

Первые же опыты со встречными пучками принесли интереснейшие результаты, дали в руки физикам-теоретикам огромный фактический материал. Но главную заслугу этих экспериментов Г. И. Будкер видел в том,

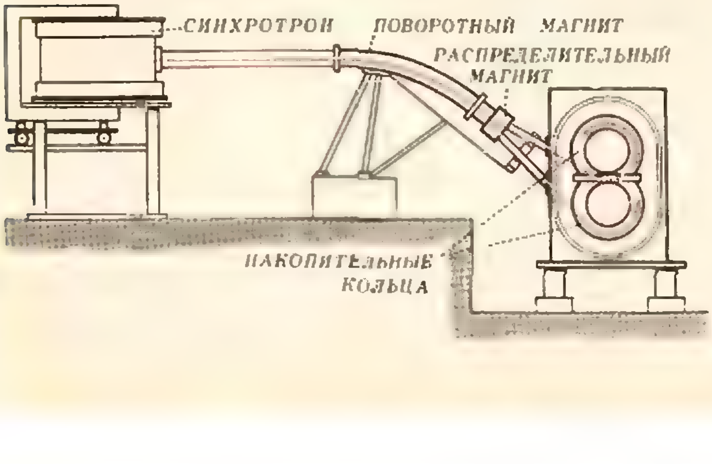


Рис. 2. Общая схема установки ВЭП-1.

Академик Г. И. Будкер беседует с учащимися физико-математической школы-интерната при Новосибирском государственном университете.

что «в результате этих исследований рассеяна атмосфера скрытого, а еще чаще открытого недоверия и скептицизма к методу встречных пучков, применение которого открывает новую область энергий в физике элементарных частиц... Сегодня физикам, как теоретикам, так и экспериментаторам, надо готовиться к освоению этой новой области».

За прошедшие с тех пор 10 лет метод встречных пучков получил всемирное признание. В разных странах построено около 10 и строятся новые накопительные кольца. Растут энергии и токи в пучках. Эксперименты на встречных пучках приводят к потоку новых открытий в области физики высоких энергий, физики элементарных частиц.

История создания и развития этого метода у нас в стране неразрывно связана с Институтом ядерной физики СО АН СССР, с именем его первого директора академика Г. И. Будкера. Институт и сам похож на ускоритель, построенный по методу Будкера. ИЯФ — это тоже своего рода эксперимент. Сейчас этот эксперимент продолжают ученики Будкера. Впереди — труднейшие проблемы, новые поиски, новые результаты. Работа продолжается.

З. Литовченко

Лучший вариант

Представьте себе, что вы — директор школы-интерната, и вам нужно составить меню для столовой на неделю. Детальное составление меню, конечно, дело повара, но вот проследить за тем, что денег будет истрачено не слишком много, нужно вам.

Вам известно, какие продукты можно купить, и их цены. Но, кроме цен, у них есть еще множество качеств, например, калорийность, содержание тех или иных витаминов и т. п. Поэтому, кроме цен, при покупке продуктов вам нужно учитывать довольно много условий. Если к тому же на складе много продуктов, то задача становится весьма запутанной и без вычислительной машины решить ее трудно. Однако, если продуктов и условий мало, справиться с ней несложно.

Рассмотрим такой пример. Пусть меню уже почти полностью составлено, и вам нужно проследить только за тем, чтобы в нем оказалось достаточно витаминов A и C, причем на складе есть вишни и абрикосы. Один килограмм вишен стоит 25 коп., один килограмм абрикосов — 30 коп., а содержание витаминов приведено в таблице 1. Вам нужно, чтобы недельный рацион содержал не меньше 6 кг витамина A и не меньше 75 кг витамина C. Сколько нужно купить вишен и абрикосов, чтобы выполнялись эти условия и затраты были минимальны?

Таблица 1

Витамины Фрукты	A (г в 1 кг)	C (г в 1 кг)
Вишни	3	150
Абрикосы	24	75

Прежде всего задачу нужно сформулировать математически. Итак, пусть в рацион войдут x кг вишен и y кг абрикосов. Их стоимость составит $0{,}25\,x+0{,}3\,y$ рублей, содержание витамина A — $0{,}003\,x+0{,}024\,y$ кг, а витамина C — $0{,}15x+0{,}075y$ кг. Нам нужно найти такие x и y, для которых выполняется система неравенств

$$\begin{cases} 0{,}003x+0{,}024y \geqslant 6, \\ 0{,}15x+0{,}075y \geqslant 75, \\ x\geqslant 0, \quad y\geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

и $z=0{,}25x+0{,}3y$ было бы минимальным. На плоскости xOy легко указать множество точек M, удовлетворяющих системе (рис. 1). Его называют *многоугольником решений* системы. Ясно, что прямые $z=0{,}25x+0{,}3y$ при различных z параллельны одному и тому же направлению, причем при росте z они удаляются от начала координат. Поэтому нам нужно найти ту из прямых этого направления, которая имеет с многоугольником M общую точку и ближе всего к началу координат. Легко сообразить, что такая прямая не должна пересекать M по внутренним точкам — тогда бы она не была самой «низкой» (рис. 2). Следовательно, она должна проходить через одну из вершин многоугольника. Но тогда эта точка — вершина C. Итак, нужно купить 400 кг вишен и 200 кг абрикосов — лучший вариант найден!

Задачи, подобные разобранной, называются *задачами линейного программирования*. В них требуется найти прямую (в трехмерном пространстве — плоскость, в многомерном — так называемую *гиперплоскость*), принадлежащую пучку параллельных прямых (плоскостей, гиперплоскостей), которая пересекается с некоторым многоугольником (многогранником) и находится ближе всего (или дальше всего) от начала координат. Можно дать и чисто алгебраическую фор-

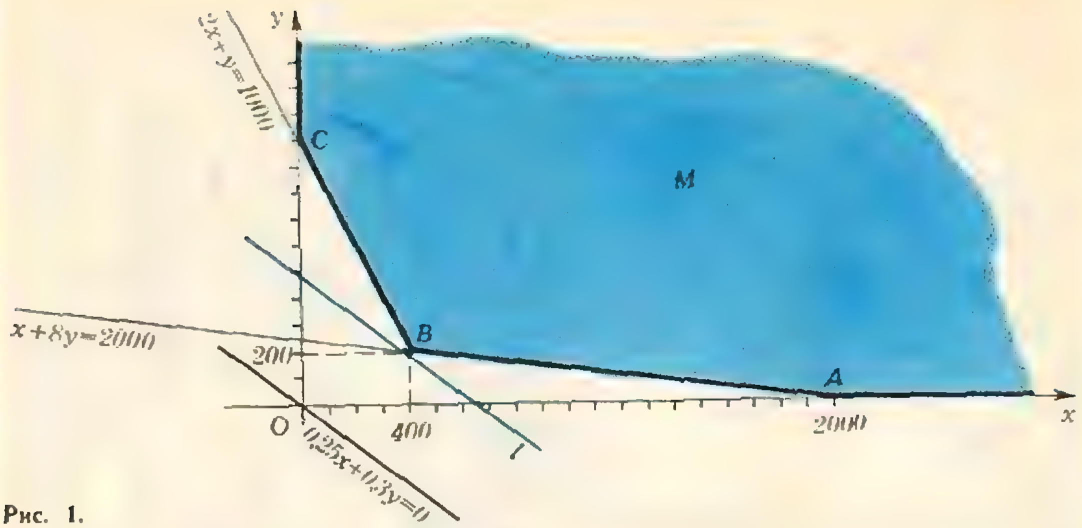


Рис. 1.

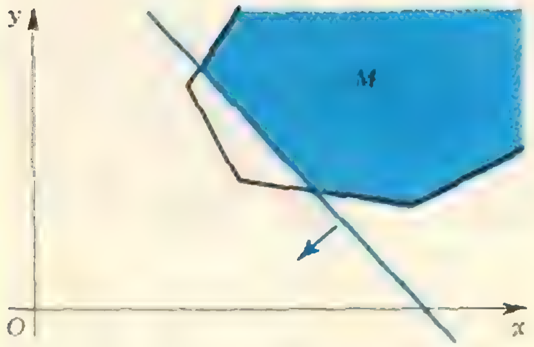


Рис. 2.

мулировку: имеется система линейных неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \geqslant b_k \end{cases}$$

и *линейная* функция $z = c_1x_1 + \dots + c_nx_n$. Нужно найти такое решение этой системы, для которого значение функции z минимально. О линейном программировании в «Кванте» было уже много статей (1971 — № 3, с. 1 и № 4, с. 1, 1974 — № 7, с. 13, 1975 — № 10, с. 17, 1976 — № 7, с. 2, 1977 — № 8, с. 29).

Решим еще одну задачу: зверосовхоз выращивает песцов и лисиц; он имеет 10 000 клеток, причем в одной клетке могут жить две лисицы или один песец; по плану нужно вырастить не менее 3000 лисиц и не менее 6000 песцов; за сутки одной лисице скармливают 4 кормовых единицы, а песцу — 5 единиц; всего за сутки разрешается истратить не больше 80 000 кормовых единиц; сколько нужно вырастить песцов и лисиц, чтобы средняя стоимость одной шкурки была минимальна, если стоимость выращивания одной лисицы — 45 руб., а одного песца — 25 руб.?

Решение. Пусть x — число выращиваемых лисиц, а y — песцов. Тогда

$$\begin{cases} 4x + 5y \leqslant 80\,000 \\ \frac{1}{2}x + y \leqslant 10\,000 \\ x \geqslant 3000 \\ y \geqslant 6000. \end{cases} \qquad (2)$$

Средняя стоимость одной шкурки

$$z = \frac{45x + 25y}{x + y}.$$

Как вы видите, здесь функция, значение которой нам нужно сделать минимальным, не является линейной. Она задается отношением двух линейных функций. Такие функции называются *дробно-линейными*.

Задачи, в которых система ограничений задается линейными неравенствами, а функция, минимум которой мы ищем, является дробно-линейной, называются задачами *дробно-линейного программирования*. Как вы увидите из решения нашей задачи, они довольно похожи на задачи линейного программирования.

На рисунке 3 приведен многоугольник F решений системы (2). Из него видно, что в системе (2) первое неравенство можно отбросить — получится равносильная система. Функция $z = \frac{45x + 25y}{x + y}$ принимает по-

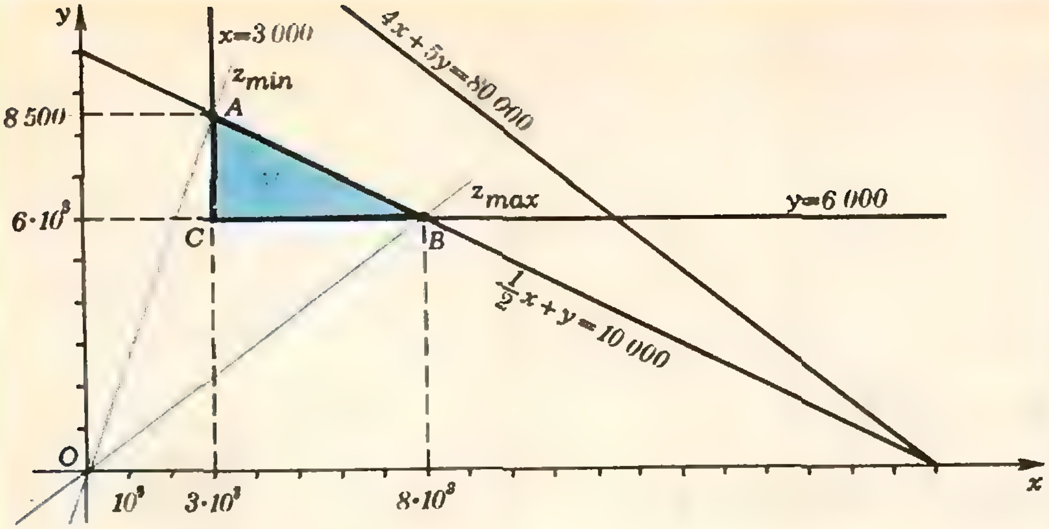


Рис. 3.

стоянные значения на прямых, проходящих через начало координат. Нам нужно найти ту из этих прямых, которая пересекает многоугольник F и на которой значение функции z минимально. Так же, как и выше, ясно, что эта прямая не должна содержать внутренних точек многоугольника F. Поэтому достаточно сравнить между собой прямые OA и OB. Ответ: $x=3000$, а $y=8500$.

Заметим, что при решении этой задачи нам повезло — мы получили целый ответ. Ведь если бы число лисиц или песцов не оказалось целым, мы не смогли бы ответом воспользоваться. Более того, если бы мы получили нецелый ответ, мы ничего не могли бы сказать о правильном ответе. Оказывается, можно так подобрать условия задачи, что эти ответы будут отличаться сколь угодно сильно.

В тех случаях, когда ответ должен даваться целыми числами, мы имеем дело с задачами целочисленного программирования. Решение таких задач значительно сложнее решения задач без этого ограничения.

В заключение — упражнение для читателей:

Два судна должны перевезти грузы в соответствии с таблицей 2.

Таблица 2

Груз	Перевезти не менее (тонн)	Количество груза, перевозимое за один рейс (тонн)	
		1-м судном	2-м судном
А	21000	3000	3000
Б	10000	1000	2000
В	4000	—	4000
Г	4000	2000	—
Эксплуатационные издержки за один рейс в рублях		12000	16000
Прибыль от одного рейса в рублях		7000	9000

Известно, что первое судно может сделать не больше 5 рейсов, а второе — не больше 9. Составить план перевозок, который обеспечивал бы

а) максимальную прибыль;

б) наименьшие затраты на перевозку одной тонны груза.

Поправки

В № 3 «Кванта» за 1978 г. на с. 11 в восьмой строке сверху в левой колонке следует читать «М. П. Бронштейном».

В № 11 «Кванта» за 1977 г. на с. 27 во второй строке снизу в правой колонке следует читать «В 1928 году».

М. Грабовский

Плавание воскового шарика

Слепите из воска шарик и опустите его в воду. Поскольку плотность воска меньше плотности воды, шарик будет плавать на поверхности воды. Теперь вдавите внутрь шарика небольшой кусочек металла так, чтобы средняя плотность получившегося шарика чуть-чуть превышала плотность воды. Если шарик резко опустить или бросить в воду, он утонет. Если же его очень осторожно положить на поверхность воды — он может там удержаться и не опуститься на дно.

Это своеобразное плавание можно объяснить так. Вода не смачивает воск, поэтому свободная поверхность воды искривляется (рис. 1), появляются силы, действующие на шарик со стороны искривленной поверхности воды. Эти силы обусловлены поверхностным натяжением и направлены в нашем случае вертикально вверх (можно считать, что вода абсолютно не смачивает воск). Вместе с силой Архимеда они уравновешивают силу тяжести шарика, не давая ему опуститься на дно.

Можно дать несколько другое объяснение. Искривление поверхности воды обусловливает дополнительный объем вытесненной шариком воды — сила Архимеда возрастает и уравновешивает силу тяжести шарика.

Этот опыт допускает интересный вариант. Опустите утяжеленный металлом восковой шарик на дно большого стеклянного сосуда, наполненного водой. Затем погрузите в сосуд стакан, перевернутый вверх дном, и накройте стаканом шарик так, чтобы он плавал на поверхности воды внутри стакана (рис. 2). Теперь медленно поднимайте стакан — вместе с ним поднимется и плавающий шарик. (Таким образом можно поднять шарик со дна сосуда, не прикасаясь непосредственно к самому шарику.) Когда шарик поднимется до уровня воды в сосуде, осторожно уберите стакан. Для этого медленно приподнимите край стакана с одной стороны, стараясь не вызвать появления пузырей и не взболтать поверхностный слой воды в сосуде.

В заключение несколько конкретных указаний к проведению опыта. Рекомендуемый диаметр воскового шарика — 2—3 см, а диаметр стакана — примерно в два раза больше. Для устойчивости плавания шарика кусочек металла лучше вдавить не в центр шарика, а сместить в сторону. Перед опытом шарик нужно высушить.

Вместо шарика можно использовать кусочек парафиновой свечи диаметром приблизительно 2 см и длиной 4—5 см. Для утяжеления свечи можно воткнуть в нее несколько мелких железных гвоздиков или привязать кусочек медной проволоки. Дальше опыт проводится так же, как с шариком.

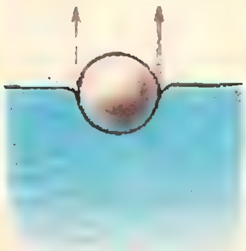


Рис. 1.

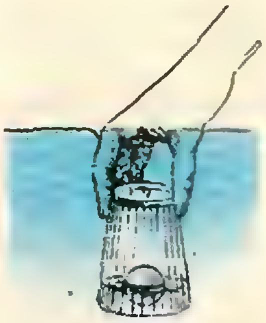


Рис. 2.

Локсодромия

Локсодромия (по-гречески λοξός — «косой», δρόμος — «бег») определяется на глобусе (или сфере) как кривая, пересекающая меридианы под постоянным углом (рис. 1). Если этот угол равен 0°, локсодромия вырождается в меридиан, а если он равен 90° — в параллель. Как видно из рисунка 1, локсодромия общего вида представляет собой кривую, бесконечно приближающуюся по спирали к полюсам и никогда их не достигающую. Локсодромию иногда называют *линией постоянного курса*, поскольку именно по такой траектории движется корабль в океане, когда его скорость составляет постоянный угол со стрелкой компаса.

Впервые локсодромию исследовал португальский математик, географ и изобретатель П. Нунец (1492—1577). Его имя увековечено в латинизированном названии «нониус» для приспособления в измерительных приборах, широко используемого и поныне. Но с локсодромией ему повезло меньше. Он ошибся, полагая, что кратчайшим путем между двумя точками на глобусе является путь по этой кривой. Да и само название «локсодромия» предложил ввести (в 1624 г.) не он, а голландский ученый В. Снеллиус (1581—1626). Снеллиус первым заметил, что ортогональная проекция локсодромии на экваториальную плоскость глобуса представляет собой равноугольную спираль («Квант», 1977, № 4, с. 42). В 1569 г. известный голландский картограф Г. Меркатор (1512—1594) изобрел очень удобный для мореплавателей способ рисования географических карт; при его способе локсодромии на карте изображаются прямыми («Квант», 1970, № 7, с. 17)

Локсодромии можно рассматривать не только на глобусе, но и на любой другой поверхности вращения. Для этого следует провести через ее ось вращения всевозможные плоскости, которые в пересечении с поверхностью образуют «меридианы». «Параллелями» поверхности вращения являются линии ее пересечения с плоскостями, перпендикулярными оси вращения.

Локсодромии на такой поверхности определяются, как и выше, — это кривые, пересекающие меридианы под постоянным углом.

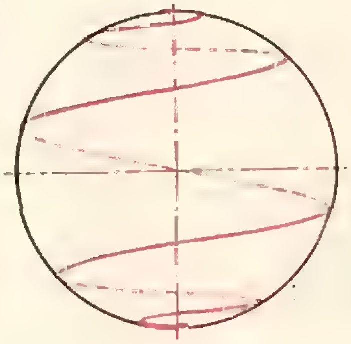


Рис. 1.

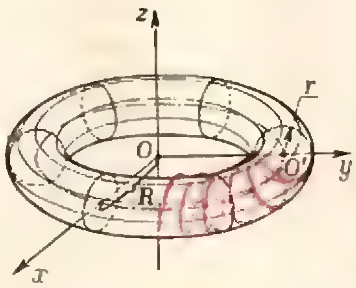


Рис. 2.

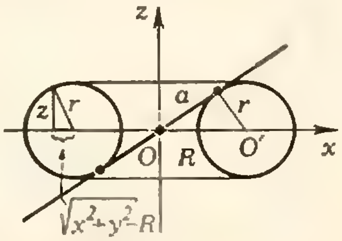


Рис. 3.

На цилиндре локсодромия — винтовая линия, на конусе — спиралеобразная кривая (одна из так называемых клелий, рассмотренных итальянским математиком Г. Гранди в 1701 г.).

Рассмотрим в плоскости прямую z и не пересекающую ее окружность (O', r). При вращении окружности вокруг z получаем поверхность, называющуюся тором (рис. 2). Среди локсодромий тора — его параллели и меридианы. В общем случае его локсодромия — сложная пространственная кривая, похожая на винтовую линию, обвивающуюся вокруг тора. У тора есть еще одно семейство локсодромий. Это пары окружностей, получающихся в пересечении тора с плоскостью, перпендикулярной одной из его меридиональных плоскостей и касающейся в ней двух его меридианов (рис. 3).

Покажем аналитически, что при косом сечении тора плоскостью действительно можно получить окружность. Уравнение тора имеет вид $(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$, где R — расстояние от O' до z (докажите это). Обозначив $a=\sqrt{R^2-r^2}$, это уравнение можно переписать в виде $(x^2+y^2+z^2+a^2)^2=4R^2(x^2+y^2)$, или $(x^2+y^2+z^2-a^2+2ry)\cdot(x^2+y^2+z^2-a^2-2ry)=4(rx-az)\cdot(rx+az)$.

Отсюда видно, что плоскость (касающаяся двух меридианов — рис. 3)

$$rx-az=0$$

пересекает тор по той кривой, по которой она пересекает пару сфер

$$x^2+(y\pm r)^2+z^2=R^2,$$

т. е. по паре окружностей. Описанное сечение тора плоскостью показано на второй странице обложки. То, что каждая из полученных окружностей действительно является локсодромией, мы здесь доказывать не будем.

В. Березин

В. Вавилов, И. Мельников

Касательная

«Я не знаю, кем я представляюсь миру, но самому себе я представляюсь мальчиком, который играет на берегу моря и время от времени находит камень, более гладкий, или раковину, более красивую, чем обычно, в то время как огромный океан истины лежит передо мною непознанный».

Исаак Ньютон

В «Геометрии 7» касательная к окружности определяется как прямая, имеющая с кривой лишь одну общую точку. Это определение имеет частный характер и не вскрывает существа дела. Если попытаться применить его к параболе $y=x^2$, то в начале координат обе координатные оси подошли бы под это определение; между тем интуитивно ясно, что на самом деле касательной должна быть названа лишь ось абсцисс.

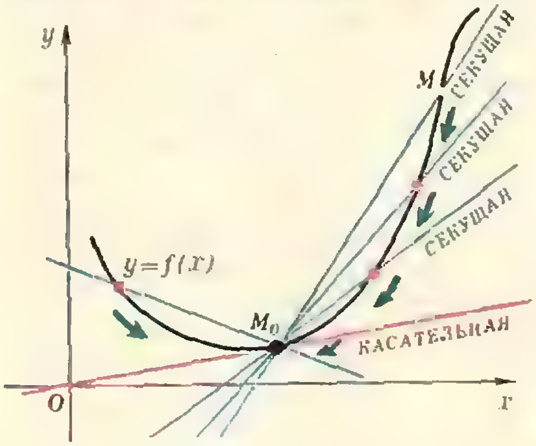
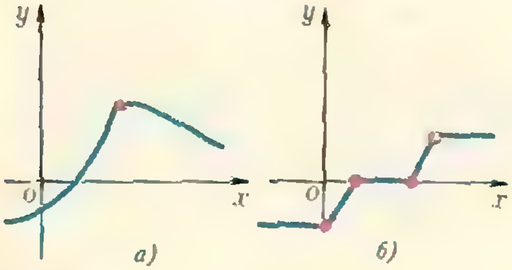


Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

Мы дадим сейчас определение касательной к графику функции. Координаты точки касания $M_0=(x_0;\ y_0)$ считаются заданными: $x=x_0$, $y=y_0=f(x_0)$. Рассмотрим, кроме точки M_0, еще одну точку $M=(x;\ y)$ на нашей кривой и проведем прямую (M_0M) — *секущую*. Когда точка M будет перемещаться по кривой, секущая, естественно, будет менять свое положение. Если точка M стремится к точке M_0, может случиться так, что секущая будет стремиться занять некоторое предельное положение, не зависящее от того, как точка M приближается к точке M_0 (рис. 1). Это предельное положение секущей (если, конечно, оно существует) и есть касательная. Итак, *касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0=(x_0;\ f(x_0))$* называется предельное положение*) секущей (M_0M), когда точка M стремится по кривой к M_0.

Подчеркнем еще раз: в нашем определении касательной содержится допущение о том, что предельное положение секущей существует; не каждая функция $y=f(x)$ обладает касательной в любой точке своего графика. На рисунке 2,*а*,*б* показаны графики функций, которые не имеют касательной в отмеченных точках, так как, если уж предельное положение секущей существует, оно должно не зависеть от того, «слева» или «справа» точка M стремится к точке M_0. Отметим, что данное нами определение касательной не требует того, чтобы касательная и кривая имели только одну общую точку.

---

*) Под предельным положением секущей (ее уравнение будет $y-f(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)$) следует понимать прямую $y-f(x_0)=\left(\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)(x-x_0)$.

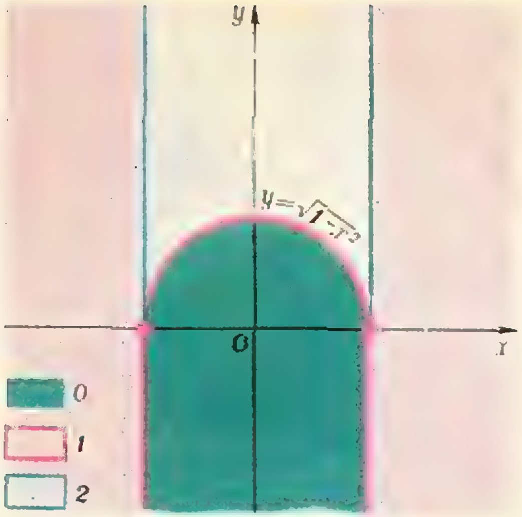


Рис. 3.

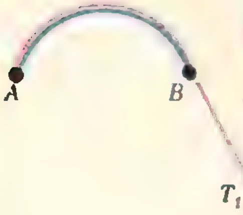


Рис. 5.

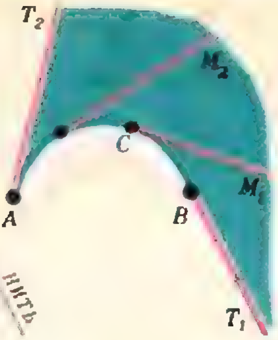


Рис. 6.

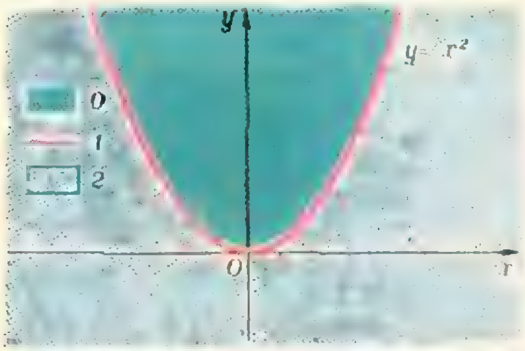


Рис. 4.

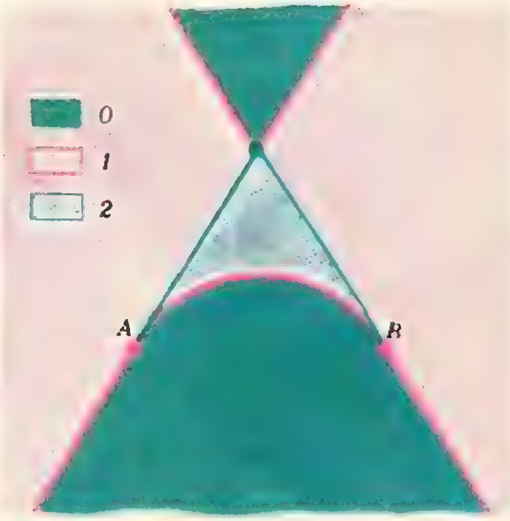


Рис. 7.

Диаграмма касательных заданной кривой строится по следующему правилу: точки плоскости (*с нарисованной на ней кривой*) *закрашиваются* одним цветом, если из них можно провести одинаковое число касательных к данной кривой. На рисунках 3 и 4 построены диаграммы касательных, соответствующие графикам функций $y=\sqrt{1-x^2}$ и $y=x^2$. (Докажите это!)

Существует достаточно общий прием для построения диаграмм касательных. Состоит он в следующем. Рассмотрим выпуклую дугу *) AB и представим себе, что к ней в точке A прикреплена гибкая нерастяжимая «бесконечная» нить; пусть эта нить «навернута» на нашу кривую и плотно к ней прилегает так, что ее конец натянут по касательной, проведенной к дуге AB в точке B (рис. 5) **). Будем «развертывать» — распрямлять нить (рис. 6), — держа ее натянутой, так что свободная часть нити CM_1 будет все время направлена по касательной к дуге AB в соответствующей точке. При этом касательная CM_1 «заметет» некоторую область (она закрашена на рисунке 6 зеленым цветом), каждая точка которой обладает тем свойством, что из нее можно провести касательную к заданной дуге AB. Проведя аналогич-

---

*) Дуга AB называется выпуклой, если в каждой ее внутренней точке существует касательная, а сама дуга всегда лежит по одну сторону от нее.

**) Под касательной в концевой точке B дуги мы понимаем предельное положение секущей (BM), когда точка M стремится к точке B с одной стороны — по дуге AB.

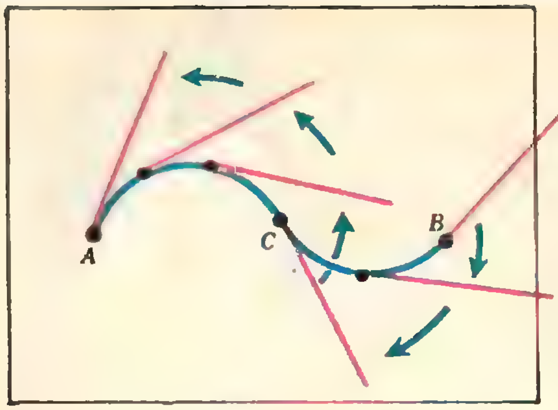


Рис. 8.

N	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{x-1}$	$\frac{1}{(x-1)^2}$	$\frac{x}{x-1}$	$x+\frac{1}{x}$	$x-$

ное рассуждение с нитью для левого конца дуги AB и объединяя вместе полученные результаты, мы построим диаграмму касательных, соответствующую дуге AB (рис. 7).

Если дуга кривой не всюду выпукла в одну сторону, если она, подобно кривой AB на рисунке 8, имеет точку, в которой касательная к кривой переходит с одной ее стороны на другую (такая точка называется *точкой перегиба*), то в этом случае ее можно разбить этой точкой на две выпуклые дуги. Если теперь для каждой из этих дуг построить соответствующие им диаграммы касательных, а затем «наложить» одну картинку на другую (см. рисунки 7, 9 и итоговый рисунок 10), то мы получим диаграмму касательных для всей дуги.

Задание:

Для функции $y=f(x)$ постройте диаграмму касательных ее графика.

Функцию f для выполнения данного задания математического практикума можно взять из приведенной таблицы.

Построив диаграммы для всех функций этой таблицы (всем классом или силами участников кружка), вы получите полный *атлас диаграмм касательных* для функций вида $y=\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}$*).

Образец выполнения работы дан на рисунке 11. Для обоснования построенной на рисунке 11 диаграммы касательных нам, конечно, нужно доказать, что касательная к графику функции f в точке A (точке перегиба) не пересекает участок графика функции f при $x\in]1,3[$.

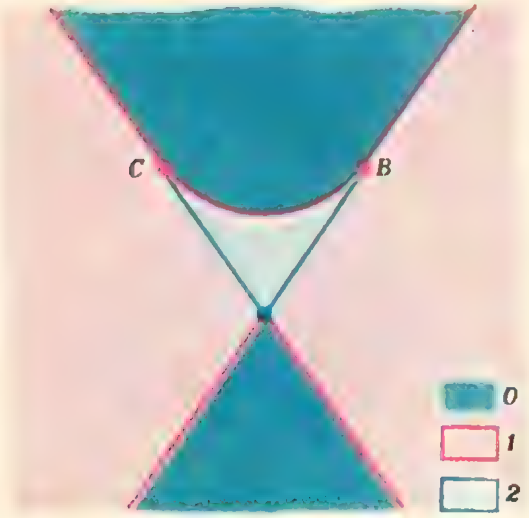


Рис. 9.

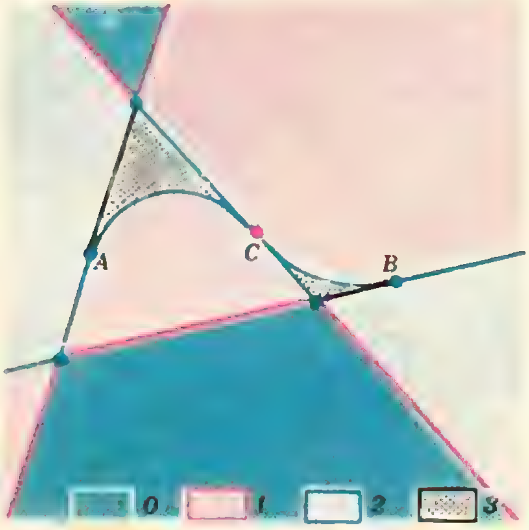


Рис. 10.

---

*) Пример диаграммы касательных для функции другого типа изображен на первой странице обложки и на рисунке 12, эскиз которого предложила ученица 9 класса ФМШ при МГУ Конченко Ларнса.

6	7	8	9	10	11	12	13
$\frac{1}{x^2-1}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\frac{3x-2}{5x^2}$	$\frac{x-2{,}5}{(x-2)(x-3)}$	$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2$	$\frac{x^2-4}{(x+1)(x-3)}$	$\frac{x^2-5x+6}{x^2+1}$	$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-3)}$

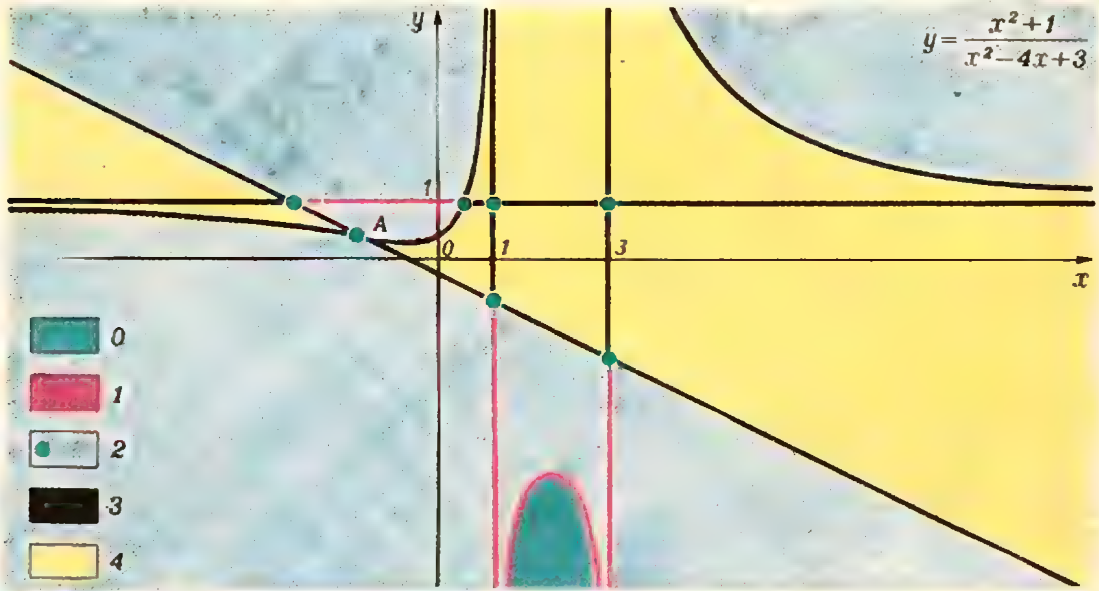


Рис. 11.

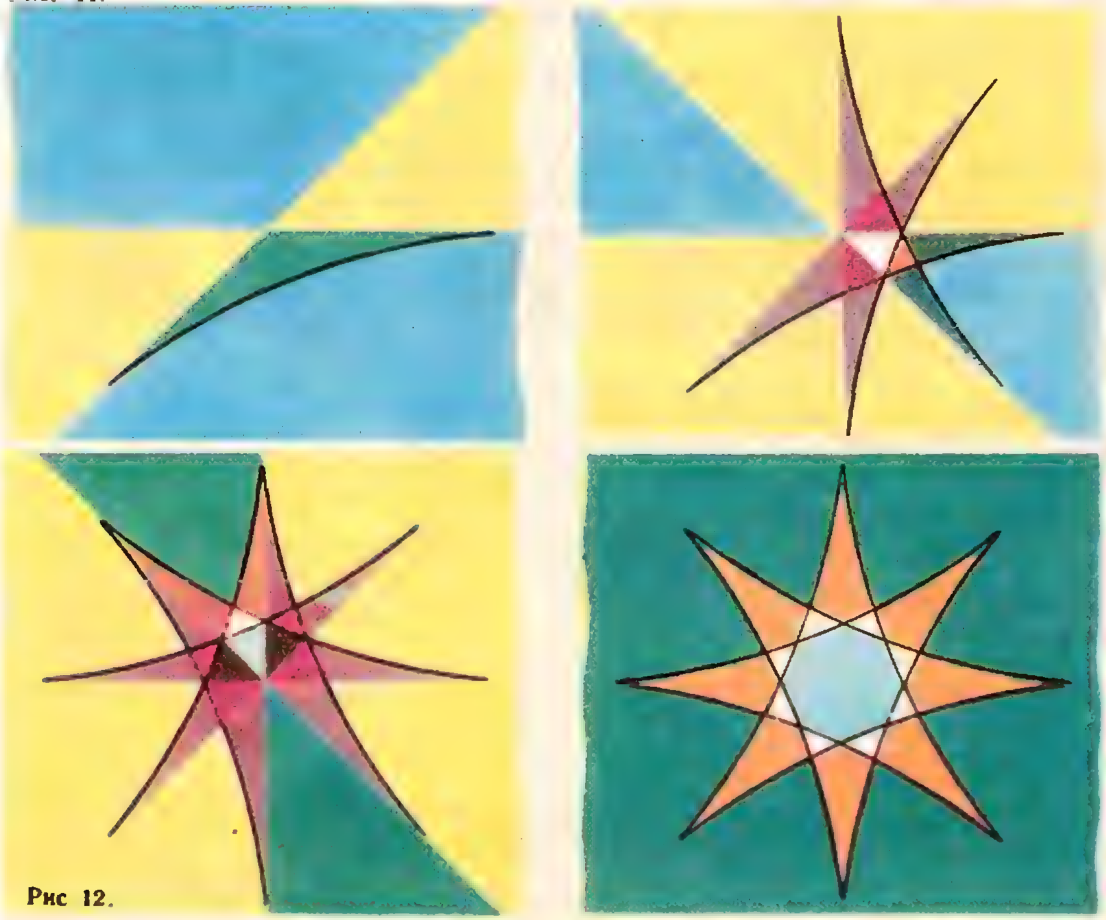


Рис 12.

задачник Кванта

Задачи

М501—М505; Ф513—Ф517

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 июля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М501, М502» или «Ф513». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике «или» ... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М501. Выберем из последовательности степеней тройки:

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ 2187,\ 6561,\ \ldots$$

все числа, начинающиеся с цифры 9; пусть эти числа (по порядку) $3^{f(1)}$, $3^{f(2)}$, $3^{f(3)}$, ... (в частности, $f(1)=2$, так как первое из таких чисел $3^2=9$).
а) Найдите $f(2)$ и $f(3)$ — номера второго и третьего такого числа.
б) Докажите, что таких чисел бесконечно много.
в)* Докажите, что $f(n)$ при $n>1$ удовлетворяет условиям: (1) $f(n)-n$ нечетно,

$$(2)\quad \left| f(n)-\frac{n-\lg 9}{1-\lg 9} \right| < 1,$$

и определяется этими условиями однозначно.

Э. Туркевич

М502. Даны три параллельных отрезка AA_1, BB_1, CC_1, не лежащих в одной плоскости. Пусть M — точка пересечения плоскостей ABC_1, BCA_1 и CAB_1, а M_1 — точка пересечения плоскостей A_1B_1C, B_1C_1A и C_1A_1B. Докажите, что отрезок MM_1 параллелен трем первоначальным.

З. Скопец

М503. Набор из $2n+1$ чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ таков, что $a_k \geqslant \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ для всех $k=1, 2, \ldots$ ..., $2n-1$. Докажите неравенство

$$\frac{a_1+a_3+a_5+\ldots+a_{2n-1}}{n} \geqslant \frac{a_0+a_2+a_4+\ldots+a_{2n}}{n+1}$$

и выясните, для каких наборов оно превращается в равенство.

В. Липкин

М504*. На шахматную доску $n\times n$ клеток уложено k плиток размером 2×1, причем так, что положить $(k+1)$-ю плитку, не перемещая уже имеющихся плиток, нельзя. Докажите, что свободных плиток

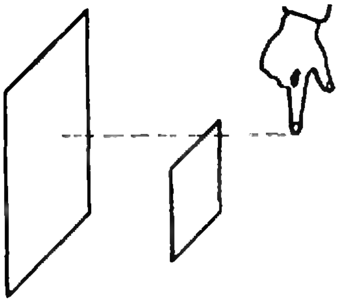


Рис. 1.

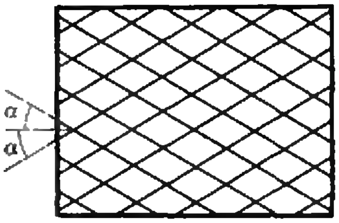


Рис. 2.

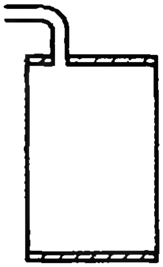


Рис. 3.

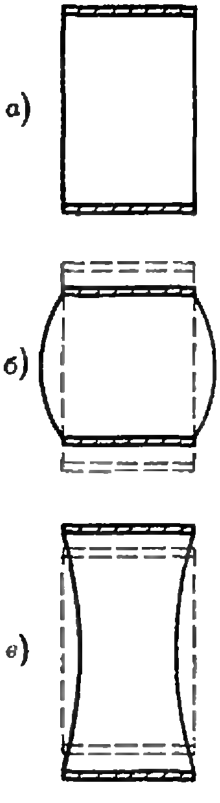


Рис. 4.

осталось не более чем
а) $(n^2+n+1)/3$;
б) $(n^2+2)/3$;
в) $n^2/3$.
Можно ли получить для некоторых n еще более точную оценку?

В. Гроссман

М505*. а) Пусть на прямой помещены n материальных точек одинаковой массы. Рассмотрим произвольный отрезок длины $2r$, содержащий хотя бы одну из этих точек, и найдем центр тяжести O_1 всех попавших в него точек. Рассморим отрезок длины $2r$ с серединой O_1 и найдем центр тяжести O_2 всех тех точек, которые попали в этот отрезок. Затем найдем центр тяжести O_3 всех точек, попавших в отрезок длины $2r$ с серединой O_2, и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого номера, все точки последовательности O_1, O_2, O_3, ... совпадают.

б) Пусть на плоскости помещены n материальных точек. Рассмотрим произвольный круг радиуса r, содержащий хотя бы одну из этих точек; обозначим через O_1 центр тяжести попавших в него точек и построим последовательность O_1, O_2, O_3, ... , где O_{n+1} — центр тяжести точек, попавших в круг радиуса r с центром O_n. Верно ли, что, начиная с некоторого номера, все точки этой последовательности совпадают?

П. Блехер, Г. Гальперин, М. Кельберт

Ф513. В ясный солнечный день, когда Солнце находится высоко над горизонтом, получите на гладком экране, например, на белой стене, тень от ровного края куска картона. Если теперь поднести к листу картона палец так, как это показано на рисунке 1, то на экране навстречу тени пальца из тени , отбрасываемой листом картона, высунется тень второго пальца. Проведите такой опыт и объясните его результат.

Г. Соловьянюк

Ф514. Резино-кордное полотно изготовлено из прочных упругих нитей (корда), залитых мягкой эластичной резиной. Нити корда образуют угол 2α друг с другом (рис. 2). Из такого полотна сделан круговой цилиндр, к торцам которого прикреплены металлические крышки (рис. 3). Внутрь цилиндра нагнетается воздух. В опытах было замечено, что при нагнетании воздуха цилиндр принимает одну из трех форм, показанных на рисунке 4. Форма зависит от величины угла 2α между нитями. Каким значениям угла соответствует каждая из форм?

Ф515. Легкий стержень длины l закреплен в вертикальной плоскости на оси, проходящей через точку O, которая делит стержень в отношении 1:3.

К одному из концов стержня прикреплен тяжелый шарик массы m, другой конец стержня прикреплен к горизонтальной пружине жесткости k (рис. 5). Пружина не растянута, когда стержень вертикален. Определить период малых колебаний стержня.

Ю. Левчук

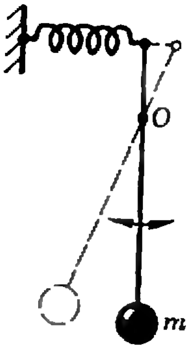


Рис. 5.

Ф516. Тяжелый диск радиуса R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены (рис. 6). Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?

А. Матвеев

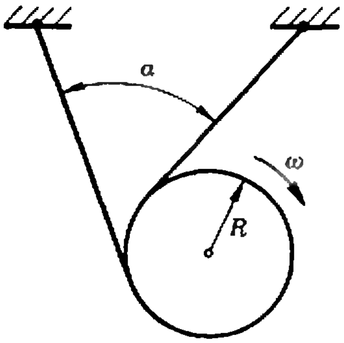


Рис. 6.

Ф517. Пучок электронов с энергией $E=1{,}0$ кэВ проходит через два небольших конденсатора, отстоящих друг от друга на расстоянии $l=20$ см. Оба конденсатора подключены параллельно к одному генератору. Изменением частоты генератора добиваются того, что пучок электронов проходит эту систему без отклонения. Определить отношение e/m для электрона, если два последовательных значения частоты, при которых выполняется это условие, равны 141 МГц и 188 МГц.

Решения задач

М450—М454; Ф467—Ф471

***М450.** Система прямоугольников из n этажей (рис. 1) построена следующим образом. Начиная с нижнего прямоугольника, образующего первый этаж, верхняя сторона каждого прямоугольника делится в отношении $1:2:3$; на трех полученных отрезках как на основаниях строятся прямоугольники той же высоты, что и первоначальный, и так — до самого верхнего этажа. Из полученного множества прямоугольников выбрано некоторое подмножество, состоящее из попарно неконгруэнтных прямоугольников (одно такое подмножество на рисунке — красное). Докажите, что найдется вертикальная прямая, пересекающая не более двух из выбранных прямоугольников.*

Оценим общую площадь системы попарно неконгруэнтных прямоугольников. Площадь каждого из них равна $S/3^k2^m$, где S — площадь нижнего прямоугольника, k и m — целые, $k\geqslant0$, $m\geqslant0$, $k+m\leqslant n$. Сумма различных чисел вида $1/3^k2^m$ не превосходит

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3^2}+\ldots+\frac{1}{2\cdot3^n}+$$
$$+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2\cdot3}+\frac{1}{2^2\cdot3^2}+\ldots+\frac{1}{2^2\cdot3^n}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n\cdot3}+\frac{1}{2^n\cdot3^2}+\ldots+\frac{1}{2^n\cdot3^n}.$$

Сумма чисел в столбцах меньше соответственно $2, 2\cdot\frac{1}{3}, 2\cdot\frac{1}{3^2}, \ldots$ $\ldots, 2\cdot\frac{1}{3^n}$, а $2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right)<2\cdot\frac{3}{2}=3$.

Но если бы каждая вертикальная прямая пересекала три

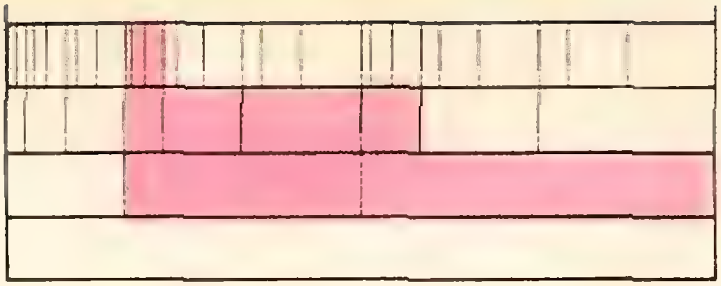


Рис. 1

или больше красных прямоугольников, то сумма их площадей была бы не меньше $3S$. Следовательно, найдется прямая, которая пересекает не больше двух прямоугольников.

А. Клепцын

◆

М451. *На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.*

Обозначим для отмеченной точки x через a_x написанное около нее число, а через n_x — количество попарно различных прямых, соединяющих точку x со всеми другими отмеченными точками. Пусть S — сумма чисел, написанных около всех отмеченных точек. По условию, сумма чисел в отмеченных точках каждой из n_x прямых, проходящих через x, равна нулю. Поэтому и сумма чисел по всем этим n_x прямым равна нулю. С другой стороны, эта сумма равна $(n_x-1)a_x+S$, так что

$$(n_x-1)a_x+S=0. \qquad (1)$$

Предположим, что для некоторой точки x число $a_x>0$. Тогда найдется отмеченная точка y, около которой написано число $a_y<0$ (докажите!). Воспользовавшись (1), получим равенство

$$(n_y-1)a_y=(n_x-1)a_x. \qquad (2)$$

По условию все отмеченные точки не лежат на одной прямой. Поэтому $n_x>1$ и $n_y>1$. Мы пришли к противоречию, так как в равенстве (2) справа и слева стоят числа разных знаков.

Ф. Вайнштейн

◆

М452. *В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2, причем вершины треугольника T_2 являются серединами дуг, на которые окружность разбивается вершинами треугольника T_1. Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.*

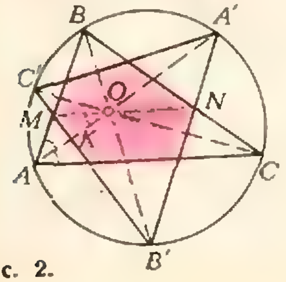


Рис. 2.

Пусть A, B и C — вершины треугольника T_1, а A', B' и C' — вершины треугольника T_2 (причем A' — середина дуги BC, B' — середина дуги AC и C' — середина дуги AB, рис. 2). Прямые AA', BB' и CC', являющиеся биссектрисами углов треугольника T_1, пересекаются в центре O вписанной в треугольник T_1 окружности. Пусть MN — диагональ, соединяющая противоположные вершины M и N шестиугольника $T_1 \cap T_2$ ($M=[AB]\cap[B'C']$, $N=[BC]\cap[A'B']$). Докажем, что (MN) параллельна (AC) и проходит через точку O (из этого будет следовать утверждение задачи). Для этого мы докажем, что отрезки OM и ON параллельны AC. Тогда $[OM]\parallel[ON]\parallel(AC)$, откуда следует, что точки M, O и N лежат на одной прямой, параллельной (AC). Итак, нужно доказать, что $[OM]\parallel(AC)$ (доказательство параллельности $[ON]$ и (AC) аналогично). Пусть $K=[OA]\cap\cap[B'C']$. Заметим, что угол $C'KA'$ опирается на дуги, величины которых в сумме составляют 180° (почему?), и, следовательно, прямой. Таким образом, $[B'K]$ в треугольнике $OB'A$ является одновременно биссектрисой и высотой. Следовательно, $[B'C']$ — серединный перпендикуляр к отрезку AO; поэтому $|AM|=|OM|$ и $\widehat{OAM}=\widehat{AOM}$. Но $\widehat{OAM}==\widehat{OAC}$ и, значит, $\widehat{AOM}=\widehat{OAC}$. А это и означает, что отрезок OM параллелен стороне AC, что и требовалось доказать.

Н. Нецветаев

М453. *Дано множество положительных чисел $\{a_1;\ a_2;\ \ldots,\ a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, …, n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.*

Достаточно указать n отрезков вида $[b_i,\ 2b_i]$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, объединение которых содержит все суммы некоторых из данных n чисел: тогда суммы, принадлежащие каждому отрезку, образуют группу чисел, удовлетворяющих нужному условию.

Эти отрезки можно строить по-разному. Приведем самый красивый способ (его указал *Д. Бернштейн*).

Занумеруем данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$, положим $b_i = (a_1 + a_2 + \ldots + a_i)/2$ и докажем, что каждая сумма некоторых из чисел a_i попадает в один из отрезков $[b_i,\ 2b_i]$.

Ясно, что наименьшая «сумма» $a_1 \in [b_1,\ 2b_1]$, так как $2b_1 = a_1$, а наибольшая — $(a_1 + \ldots + a_n) \in [b_n,\ 2b_n]$, так как $2b_n = a_1 + \ldots + a_n$. Осталось доказать, что невозможен случай, когда некоторая сумма s лежит между $2b_k$ и b_{k+1}. Пусть

$$s > 2b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k. \qquad (1)$$

Тогда s содержит некоторое $a_i \geqslant a_{k+1}$, то есть

$$s \geqslant a_{k+1}. \qquad (2)$$

Сложив (1) и (2), получим $2s \geqslant a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1}$, то есть $s \geqslant b_{k+1}$. Значит, s не может лежать между $2b_k$ и b_{k+1}.

◆

М454. *За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того как последний, седьмой, гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?*

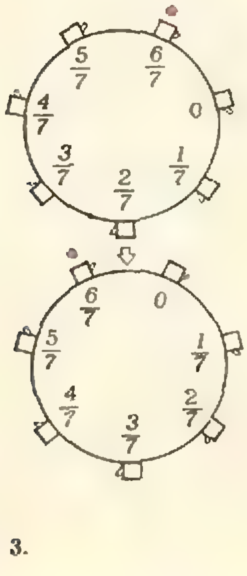


Рис. 3.

Ответ изображен на рисунке 3. Проверим его. После того как гном, помеченный красной точкой, разольет свое молоко поровну остальным (по 1/7 л), вновь получится (со сдвигом на одного гнома) точно такое же распределение молока; при этом 6/7 л молока будет у того гнома, чья очередь разливать молоко. Ясно, что после семи переливаний мы вернемся к первоначальному распределению.

Покажем теперь, как можно было догадаться до ответа, и докажем его единственность. Заметим, что в условиях задачи процесс переливаний по кругу можно считать периодически продолженным; поэтому все гномы совершенно равноправны.

Естественно сначала искать такое распределение молока, которое повторится (со сдвигом на одного гнома) уже после одного переливания. При этом каждый следующий гном будет разливать то же самое количество молока, что и предыдущий, — скажем, $6x$ литров (каждому гному наливается по x литров). Тогда после очередного переливания у разливавшего будет 0 литров молока, у его соседа (разливавшего перед ним) — x, у следующего (у него до этого было x) станет $2x$, …, у последнего, седьмого, гнома — $6x$ литров. Из уравнения $x + 2x + \ldots + 6x = 3$ найдем $x = 1/7$ и получим указанный выше ответ.

Нужно, однако, еще выяснить, не может ли быть так, что гномы разливают разное количество молока (и исходное распределение восстанавливается лишь через семь переливаний). Пусть k-й гном разливает $6x_k$ литров молока (каждому по x_k литров). Поскольку гномы равноправны, можно считать, что $x_1 \geqslant x_k$ для всех $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ 7$. После семи переливаний у 1-го гнома, разлившего $6x_1$ литров молока, снова должно набраться $6x_1$ литров, поэтому $6x_1 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$. Это возможно лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_7$. Таким образом, мы приходим к уже разобранному случаю, когда все гномы разливают одинаковое количество молока. Значит, других ответов нет.

Заметим, что из общих теорем линейной алгебры, которые лежат в основе *теории марковских цепей*, следует не только единственность ответа в этой задаче, но и такой любопытный факт: как бы не были первоначально налиты 3 литра молока, его распределение будет стремиться (с ростом количества переливаний) к указанному в ответе распределению (0, 1/7, 2/7, …, 5/7, у разливающего — 6/7 литра). Об этих теоремах мы постараемся рассказать в одном из следующих номеров «Кванта».

Н. Васильев

Ф467. *Луна одновременно фотографируется с одной и той же стороны с Земли и со спутника Луны. Орбита спутника круговая. Диаметр изображения Луны на фотографии, полученной на Земле, равен 4 мм, а на спутнике Луны — 250 мм. Найти период обращения спутника Луны по его орбите, если оба снимка сделаны с помощью одинаковых объективов с фокусным расстоянием 500 мм. Принять, что ускорение свободного падения на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле, и расстояние от Земли до Луны равно 380 000 км.*

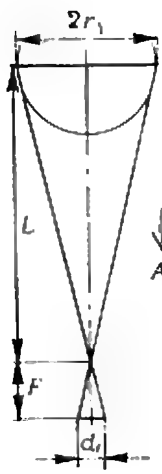


Рис. 4.

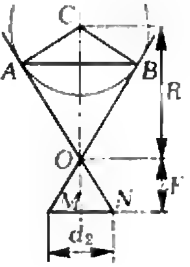


Рис. 5.

На спутник Луны, движущийся по круговой орбите радиуса R, действует со стороны Луны сила притяжения, равная $F = \gamma \frac{M_{\text{Л}} m}{R^2}$ (m — масса спутника, $M_{\text{Л}}$ — масса Луны). Учитывая, что ускорение свободного падения на Луне $g_{\text{Л}} = \gamma \frac{M_{\text{Л}}}{r_{\text{Л}}^2}$ ($r_{\text{Л}}$ — радиус Луны), можем записать

$$F = m g_{\text{Л}} \left(\frac{r_{\text{Л}}}{R}\right)^2.$$

Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение $|\vec{a}| = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$, где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ — угловая скорость вращения спутника, T — период обращения его по орбите. Итак, $|\vec{F}| = m|\vec{a}|$, то есть

$$m g_{\text{Л}} \left(\frac{r_{\text{Л}}}{R}\right)^2 = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Отсюда

$$T = 2\pi \frac{R}{r_{\text{Л}}} \sqrt{\frac{R}{g_{\text{Л}}}}. \qquad (\bullet)$$

В эту формулу входят две неизвестные величины — R и $r_{\text{Л}}$. Найдем их, «воспользовавшись» фотографиями Луны, полученными с Земли и со спутника. Изображение Луны получается в фокальной плоскости объектива. Луна находится от Земли на расстоянии, много большем ее диаметра. Поэтому можно считать, что при фотографировании с Земли (рис. 4)

$$\frac{d_1}{2r_{\text{Л}}} = \frac{F}{L}, \quad r_{\text{Л}} = \frac{d_1 L}{2F}$$

(d_1 — диаметр изображения, L — расстояние Земля — Луна, F — фокусное расстояние линзы).

При фотографировании со спутника (рис. 5) на пленке получается изображение части поверхности Луны, ограниченной касательными OA и OB. Из подобия треугольников OMN и OCB имеем

$$\frac{BC}{MN} = \frac{R}{ON} \Rightarrow \frac{2r_{\text{Л}}}{d_2} = \frac{R}{a},$$

где $a = \sqrt{F^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$. Отсюда

$$R = \frac{2r_{\text{Л}}}{d_2} a = \frac{d_1 L}{d_2 F} a.$$

Подставив найденные выражения для $r_{\text{Л}}$ и R в $(\bullet)$, получим

$$T = 4\pi \frac{a}{d_2} \sqrt{\frac{d_1 L}{g_{\text{Л}} d_2 F} a} \approx 6{,}23 \cdot 10^4 \text{ с}$$

И. Слободецкий

◆

Ф468. *Действующая модель подъемного крана способна поднять 10 бетонных плит без обрыва троса. Сколько плит поднимает реальный кран, изготовленный из тех*

Максимальная нагрузка, которую выдерживает трос крана, определяется пределом прочности материала троса — максимальным напряжением, при котором материал еще не разрушается.

Предположим, что вес модельной плиты — q, площадь поперечного сечения троса — s. Напряжение, возникающее *же материалов, если линейные размеры крана, троса и плит в 12 раз больше, чем в модели?*

при нагрузке в одну плиту, равно $\sigma = \frac{q}{s}$. Согласно данным задачи предел прочности материала троса определяется условием

$$\frac{10q}{s} < \sigma_0 < \frac{11q}{s} \qquad (1)$$

(условие того, что кран-модель поднимает 10 плит, а нагрузку в 11 плит трос не выдерживает).

При переходе к реальным крану и плитам все линейные размеры увеличиваются в $n = 12$ раз. Значит, вес плиты увеличивается в n^3 раз, поперечное сечение троса увеличивается в n^2 раз:

$$Q = n^3 q, \quad S = n^2 s \qquad (2)$$

(так как плотность соответствующих материалов не меняется). Максимальное число плит, которые может поднять реальный кран, определяется условием

$$\sigma_0 > N\frac{Q}{S} = N\frac{n^3 q}{n^2 s} = Nn\frac{q}{s}, \qquad (3)$$

откуда

$$N < \frac{\sigma_0}{12\frac{q}{s}}.$$

Но из соотношения (1) следует, что

$$\frac{\sigma_0}{11\frac{q}{s}} < 1.$$

Следовательно,

$$N < \frac{\sigma_0}{12\frac{q}{s}} < \frac{\sigma_0}{11\frac{q}{s}} < 1,$$

то есть реальный кран не сможет поднять ни одной плиты.

С. Кротов

◆

Ф469. *Рисунок 6 сделан со стробоскопической фотографии кубика, движущегося вдоль наклонной плоскости. Промежутки времени между последовательными вспышками лампы равны 0,1 с. Определить коэффициент трения кубика о плоскость.*

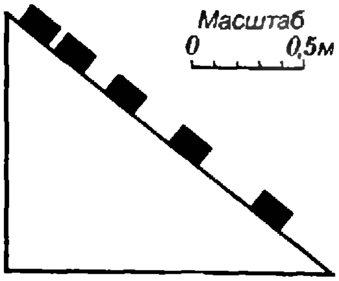


Рис. 6.

Прежде всего определим значение ускорения, с которым движется кубик. Как известно, разность расстояний l_1 и l_2, проходимых телом за последовательные равные промежутки времени τ, равна $l_2 - l_1 = |\vec{a}|\tau^2$, где $\vec{a}$ — ускорение, с которым движется тело. Определив по рисунку с помощью мерной линейки и заданного масштаба $l_2 - l_1$, найдем

$$|\vec{a}| = \frac{l_2 - l_1}{\tau^2} \approx \frac{0,07}{(0,1)^2}\ \text{м/с}^2 = 7\ \text{м/с}^2.$$

Определим теперь, в каком направлении (вверх или вниз по наклонной плоскости) движется кубик. Максимальное ускорение, с которым может свободно соскальзывать кубик, — это ускорение, сообщаемое ему силой тяжести в направлении оси X (рис. 7) в отсутствии силы трения: $|\vec{a}_{\max}| = |\vec{g}|\sin\alpha$. Из рисунка находим $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, так что

$$|\vec{a}_{\max}| = |\vec{g}|\frac{3}{5} \approx 6\ \text{м/с}^2.$$

Мы же нашли, что $|\vec{a}| = 7$ м/с². Значит, кубик движется вверх по наклонной плоскости, а ускорение вдоль оси X ему сообщают сила тяжести (ее проекция на ось X) и сила трения, направленная вниз вдоль наклонной плоскости.

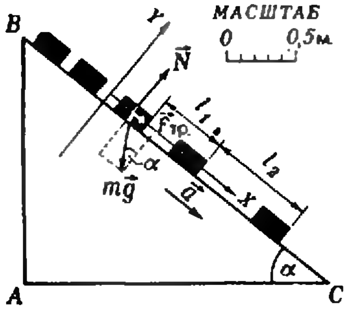


Рис. 7.

Запишем уравнение движения кубика в проекции на ось X

$$ma_x = m|\vec{a}| = m|\vec{g}|\sin\alpha + f_x.$$

Здесь $f_x = |\vec{F}_{тр}| = k|\vec{N}| = km|\vec{g}|\cos\alpha$ — сила трения. Так что

$$|\vec{a}| = |\vec{g}|\sin\alpha + k|\vec{g}|\cos\alpha,$$

откуда

$$k = \frac{|\vec{a}| - |\vec{g}|\sin\alpha}{|\vec{g}|\cos\alpha}.$$

Воспользовавшись рисунком, найдем $\sin\alpha = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{3}{5}$,

$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{4}{5}$; так что

$$k = \frac{7-6}{9{,}8\cdot\frac{4}{5}} \approx 0{,}13.$$

И. Слободецкий

◆

Ф470. *При подключении гальванического элемента напряжением 1,5 В к зажимам А и В амперметр показал ток 1 А (рис. 8). Когда полярность элемента изменили на противоположную, ток упал в два раза. Какая электрическая цепь находится внутри коробки?*

Рассмотрим два возможных случая: первый — ток упал в два раза, направление тока осталось прежним; второй — ток упал в два раза, и направление тока изменилось на противоположное.

В первом случае ясно, что в коробке должна быть батарейка (без этого направление тока при переключении должно стать противоположным). Простейшая возможная схема в этом случае — батарейка с э. д. с. $\mathcal{E}_x$ и последовательно с ней сопротивление R_x (рис. 9). Тогда имеем:

$$\frac{\mathcal{E}_x + 1{,}5}{R_x} = 1\,(\text{А});\quad \frac{\mathcal{E}_x - 1{,}5}{R_x} = 0{,}5\,(\text{А}).$$

Отсюда

$$\mathcal{E}_x = 4{,}5\ \text{В},\quad R_x = 6\ \text{Ом}.$$

В R_x может входить и внутреннее сопротивление батарейки.

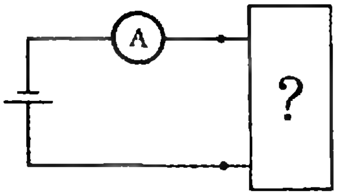


Рис. 8.

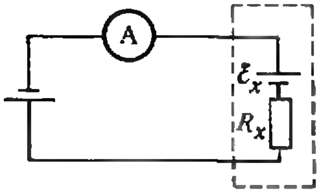


Рис. 9.

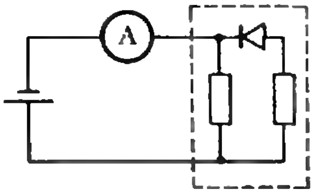


Рис. 10.

Второй случай существенно «богаче» возможными схемами. Кроме батарейки с резистором (в этом случае $\mathcal{E}_x = 0{,}5$ В, $R_x = 2$ Ом), возможны схемы с нелинейными устройствами — диодами, транзисторами, реле и т. д.

Одна из простейших схем приведена на рисунке 10. При одной полярности приложенного ко входу напряжения диод открыт; сопротивление коробки составляет 1,5 Ом. При изменении полярности диод закрыт, и сопротивление коробки равно 3 Ом.

А. Зильберман

Ф471. *Теплоизолированная полость небольшими одинаковыми отверстиями соединена с двумя объемами, содержащими газообразный гелий (рис. 11). Давление гелия в этих объемах поддерживается постоянным и равным p, а температуры поддерживаются равными T в одном из объемов и $2T$ в другом. Найти установившиеся давление и температуру внутри полости.*

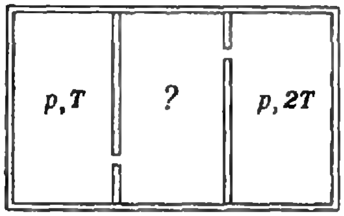


Рис. 11.

В состоянии равновесия число частиц, находящихся в полости, должно, очевидно, оставаться постоянным. Это означает, что число частиц, попадающих в полость из объемов I и II, должно быть равно числу частиц, выходящих из полости.

Число частиц, попадающих в полость из объема I за единицу времени, прямо пропорционально плотности n_I частиц в объеме I и средней квадратичной скорости $\bar{v}_{\text{кв}I}$ частиц в этом объеме (поскольку проекция скорости на любое заданное направление пропорциональна средней квадратичной скорости): $N_I \sim n_I \bar{v}_{\text{кв}I}$. Величина n_I прямо пропорциональна давлению p в объеме I и обратно пропорциональна значению $\overline{v^2}$: $n_I \sim \dfrac{p}{v_I^2}$. В свою очередь $\overline{v_I^2} \sim T$, $\bar{v}_{\text{кв}\,I} \sim T^{1/2}$. Таким образом,

$$N_I = \alpha p T^{-1/2},$$

где α — коэффициент пропорциональности. Аналогично для числа частиц, попадающих в полость за единицу времени из объема II, можем записать

$$N_{II} = \alpha p (2T)^{-1/2}.$$

Число частиц, покидающих полость за единицу времени через два отверстия, равно

$$N = 2\alpha p_п T_п^{-1/2},$$

где $p_п$, $T_п$ — соответственно давление и температура в полости. В состоянии равновесия выполняется условие $N_I + N_{II} = N$, то есть

$$\alpha p T^{-1/2} + \alpha p (2T)^{-1/2} = 2\alpha p_п T_п^{-1/2},$$

или

$$p T^{-1/2} + p (2T)^{-1/2} = 2 p_п T_п^{-1/2}. \qquad (1)$$

В состоянии равновесия не меняется со временем и полная энергия частиц в полости. Это означает, что энергия, приносимая в полость за единицу времени N_I и N_{II} частицами, равна энергии, уносимой N частицами, покидающими полость: $E_I + E_{II} = E$. Поскольку средняя энергия $E_{\text{ср}}$, приходящаяся на одну частицу, прямо пропорциональна температуре, то $E_I = N E_{\text{ср}I} \sim p T^{-1/2} T = \beta p T^{1/2}$, $E_{II} = \beta p (2T)^{1/2}$, $E = 2\beta p_п T_п^{1/2}$, где β — коэффициент пропорциональности. Таким образом,

$$\beta p T^{1/2} + \beta p (2T)^{1/2} = 2\beta p_п T_п^{1/2},$$

или

$$p T^{1/2} + p (2T)^{1/2} = 2 p_п T_п^{1/2}. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$T_п = T\sqrt{2}, \quad p_п = p\,\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt[4]{2}}.$$

И. Слободецкий

В. Дубровский

В поисках определения площади поверхности

Определение площади поверхности является одной из традиционно сложных тем школьной геометрии. Связано это с отсутствием достаточно простого общего определения, которое охватывало бы по крайней мере все поверхности, изучаемые в школе: цилиндр, конус и сферу. В заметке рассматриваются два подхода к такому определению и обсуждаются трудности, возникающие при этих подходах.

Все ли можно развернуть?

Проще всего определить и вычислить площади поверхностей цилиндра и конуса — достаточно рассмотреть развертки этих поверхностей (см. «Геометрию 8», п. 127, 128). Однако определение площади поверхности как площади ее развертки не годится в качестве общего определения просто потому, что поверхностей, которые можно было бы «развернуть», слишком мало. Мы объясним, почему нельзя «развернуть» сферу; аналогичные рассуждения применимы и ко многим другим поверхностям вращения.

Давать точное определение развертки — дело довольно хлопотливое. Ясно, однако, что если бы удалось «развернуть» сферу, то, в частности, мы получили бы отображение f какой-то достаточно маленькой «сферической шапочки» на часть плоскости (рис. 1), при котором длина любой кривой L, лежащей на этой «шапочке», равнялась бы длине соответствующей ей кривой $f(L)$ на плоскости. В частности, длина $d(A, B)$ кратчайшей кривой, соединяющей точки A и B на сфере, должна равняться длине кратчайшей кривой, соединяющей точки $A'=f(A)$ и $B'=f(B)$ на плоскости, то есть длине отрезка $A'B'$:

$$d(A, B) = |A'B'|.$$

Можно доказать, что $d(A, B)$ есть длина меньшей из двух дуг большой окружности, проходящей через точки A и B, определяемых этими точками, однако нам это не потребуется.

Рассмотрим множество C точек M сферы, для которых «сферическое расстояние» $d(M, P)$ от некоторой фиксированной точки P равно фиксированному числу $R>0$. Очевидно, что если точка M_1 получается из точки M поворотом около диаметра сферы, проходящего через P, то $d(M_1, P)=d(M, P)$. Отсюда легко вывести (выведите!), что множество C есть окружность. Ее центр O совпадает с основанием перпендикуляра, опу-

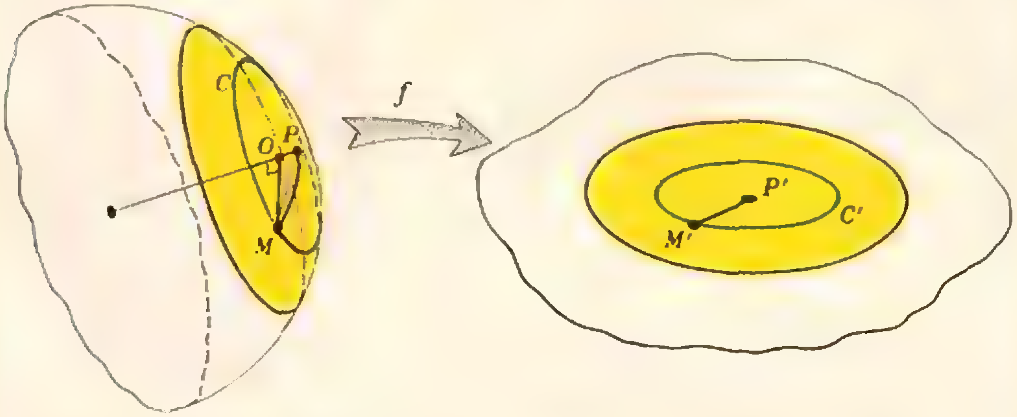


Рис. 1. Невозможность развертки сферы.

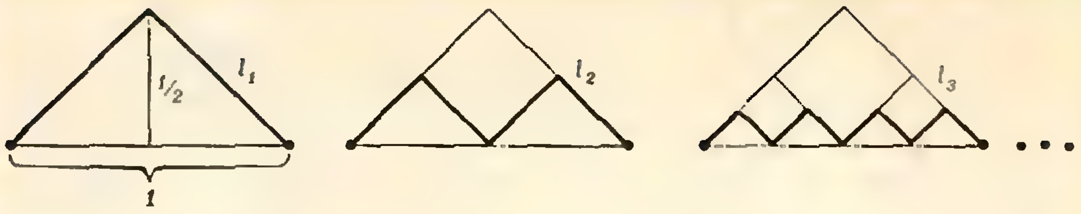


Рис. 2. Последовательность ломаных l_n, сходящихся к отрезку единичной длины (но не вписанных в него), длина каждой из которых равна $\sqrt{2}$.

щенного из любой точки $M \in C$ на радиус сферы, проходящей через точку P (рис. 1); поэтому радиус этой окружности $r = |OM| < |MP|$. С другой стороны, $d(M,P)$ есть длина некоторой кривой, соединяющей M и P, а отрезок MP является кратчайшей из таких кривых; поэтому $|MP| \leqslant d(M,P) = R$. Следовательно, $r < R$. При развертке окружность C перейдет в множество $C' = f(C)$ точек, удаленных от точки $f(P)$ на расстояние R, то есть в окружность радиуса R. Длина окружности C равна $2\pi r$, а окружности C' — $2\pi R > 2\pi r$. Это противоречит сформулированному выше свойству сохранения длин, и, таким образом, развертка сферы невозможна.

Сапог Шварца

Итак, развернуть поверхность, вообще говоря, невозможно; попытаемся поступить по-другому. Рассмотрим последовательность многогранных поверхностей Π_n, «сходящуюся» к данной поверхности Π. Допустим, что последовательность их площадей S_n имеет предел S; тогда кажется естественным принять число S за площадь поверхности Π *). Конечно, при этом нужно проявить осторожность, — ведь даже при определении длины кривой рассматривают не произвольные, а *вписанные* ломаные (они соответствуют многогранным поверхностям), сходящиеся к кривой, иначе предел их длин будет зависеть от выбора последовательности ломаных (см. рисунок 2 и задачу 3). Попробуем найти площадь поверхности цилиндра как предел площадей вписанных в него многогранных поверхностей. Поверхности эти определим следующим образом.

Впишем в основание цилиндра правильный n-угольник; рассмотрим далее такой же n-угольник, расположенный над основанием на высоте $\frac{H}{k}$, где H — высота цилиндра, k — фиксированное натуральное число, и повернутый относительно первого n-угольника на угол $\frac{\pi}{n}$. Продолжая такое построение, получим $(k+1)\cdot n$ точек — вершин n-угольников: соединим эти вершины ребрами, как показано на рисунке 3. В итоге образуется вписанная в цилиндр многогранная поверхность $\Pi(n, k)$, имеющая nk конгруэнтных треугольных граней. Задавая различные по-

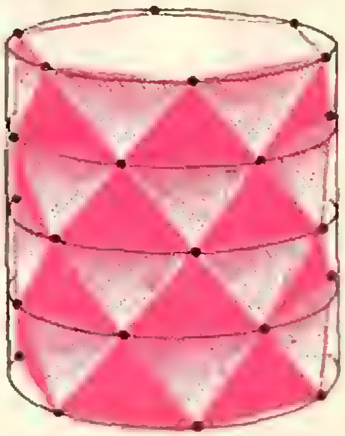


Рис. 3. «Сапог Шварца» ($\Pi(6, 4)$).

---

*) Именно такой подход применялся в старом учебнике геометрии А. П. Киселева при определении площадей поверхности цилиндра и конуса.

следовательности $\{k_n\}$, например,

$$k_n \equiv 1,\ k_n = n,\ k_n = n^{10}$$

и т. д., мы будем получать различные последовательности поверхностей $\Pi(n, k_n)$, причем все они «сходятся» к поверхности цилиндра (очевидно, что зазор между исходным цилиндром и цилиндром, касающимся «горизонтальных» ребер поверхности $\Pi(n, k_n)$, с ростом n делается сколь угодно малым; в то же время $\Pi(n, k_n)$ находится в этом зазоре). Найдем предел площадей $S(n, k_n)$ поверхностей $\Pi(n, k_n)$. Пусть $s(n, k)$ — площадь одной грани поверхности $\Pi(n, k)$, тогда (см. рис. 4) $s(n, k) = |AH| \cdot |CH|$. Если радиус основания цилиндра R, то $|AH| = |OA| \sin\frac{\pi}{n} = R\sin\frac{\pi}{n}$; далее, $|CH| =$

$$= \sqrt{|HD|^2 + |CD|^2},$$

$$|HD| = R\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right),\ |CD| = \frac{H}{k}.$$

Таким образом,

$$s(n, k) =$$

$$= R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{H^2}{k^2} + R^2\left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^2} =$$

$$= RH\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{1}{k^2} + 4\frac{R^2}{H^2}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\right)^4}.$$

Поэтому

$$S(n, k) = 2\pi RH\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \times$$

$$\times \sqrt{1 + \frac{R^2\pi^4}{4H^2}\,\frac{k^2}{n^4}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\right)^4}.$$

Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, *можно* легко найти $S = \lim\limits_{n \to \infty} S(n, k_n)$ для различных последовательностей k_n. В частности, при $k_n \equiv 1$ (и вообще, при $k_n = \text{const}$) $S = 2\pi RH$ (правильный ответ!). Такой же ответ получается и при $k_n = n$. Но дальше нас ждет разочарование: при $k_n = n^2$ предел будет уже другим, а при $k_n = n^3$ последовательность $S(n, k_n)$ и вовсе неограничена (см. также задачу 4).

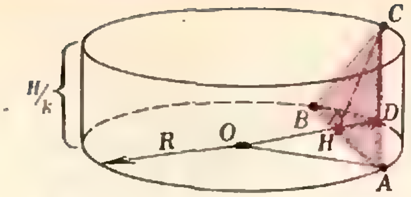


Рис. 4. Одна грань «сапога Шварца».

Причина в том, что при слишком быстром росте k_n грани поверхностей $\Pi(n, k_n)$ располагаются под большим углом к поверхности цилиндра, $\Pi(n, k_n)$ «собирается в гармошку»; ясно, что за счет таких складок площадь поверхности сильно увеличивается.

Описанная конструкция была предложена в 1890 году известным немецким математиком Г. А. Шварцем; ее называют *«сапогом Шварца»*. Из этой конструкции видно, что понятие «сходимости» последовательности Π_n к Π в нашем определении площади поверхности следует уточнить — так, чтобы учитывались не только расстояния между точками поверхностей Π_n и Π, но и углы между гранями поверхностей Π_n и поверхностью Π. С этими уточнениями определение становится сложным, громоздким и, конечно, неуместным в школьном курсе.

Как же быть?

И все-таки можно дать общее определение площади поверхности, гораздо более простое, чем определение через вписанные многогранники. С его вариантами (для сферы, цилиндра, конуса) можно познакомиться в «Геометрии 10» (с. 63, 127). Подробнее об этом определении (его предложил один из крупнейших немецких математиков Г. Минковский) мы расскажем в другой раз.

Задачи

1. Докажите, что, хотя и не существует развертки сферы, можно построить

а) отображение полусферы на плоскость, переводящее кратчайшие линии на сфере в кратчайшие линии на плоскости;

б) отображение сферы на плоскость, сохраняющее площадь.

2. Объясните, почему приведенное в тексте доказательство невозможности разверт-

ки сферы не проходит для конуса. Докажите, что нельзя развернуть параболоид — поверхность, полученную при вращении параболы около ее оси. (*Обратите внимание*: прежде, чем поверхность разворачивать, ее можно разрезать.)

3. Приведите примеры последовательностей функций $f_n(x)$ $(x \in [0, 1])$, графиками которых являлись бы ломаные длин l_n, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in [0, 1]$, и в то же время

а) $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = c$, где c — любое заданное число, не меньшее 1;

б) последовательность $\{l_n\}$ неограничена;

в) последовательность $\{l_n\}$ ограничена, но не имеет предела.

4. Докажите, что в примере Шварца можно так подобрать последовательность $\{k_n\}$, что последовательность площадей $\{S(n, k_n)\}$

а) сходится к любому заданному числу из промежутка $[2\pi RH, \infty[$;

б) ограничена, но не имеет предела.

5. Предлагается следующий способ вычисления площади поверхности сферы. Разобьем сферу «экватором» на две полусферы и рассмотрим одну из них. Поделим экватор на n конгруэнтных частей точками A_1, A_2, …, A_n и соединим их с «полюсом» P «меридианами». Теперь представим себе, что правильный n-угольник $A_1 \ldots A_n$ поднимается над экваториальной плоскостью, оставаясь ей параллельным и сжимаясь к точке P так, что его вершины все время лежат на дугах A_iP. Его контур при этом заметает некоторую куполообразную поверхность Π_n (рис. 5). Ясно, что поверхность Π_n при больших n очень близка к полусфере; более того, нетрудно доказать (попробуйте), что ее площадь при $n\to\infty$ стремится к площади полусферы. Разогнув дольки $A_iA_{i+1}P$, мы получим n треугольников с одинаковыми основаниями, сумма длин которых равна периметру p_n n-угольника $A_1 \ldots A_n$, и высотами h_n. Поскольку, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 2\pi R$, где R — радиус сферы, а $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = \frac{1}{2}\pi R$, то предел площадей поверхностей Π_n равен $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2} p_n h_n = \frac{1}{2}\pi^2R^2$. Следовательно, площадь сферы равна π^2R^2. Где ошибка?

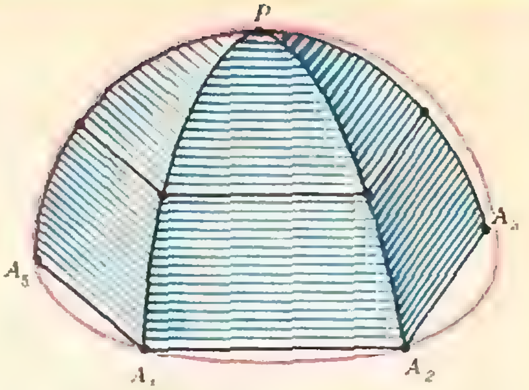


Рис. 5. Поверхность Π_5.

Задачи наших читателей

1. Куб с ребром 1 м разбит на конечное число (большее трех) выпуклых многогранников. Каждый многогранник отмечен одной из цифр: 1, 2, 3. Докажите, что найдутся две точки различных многогранников, помеченных одной цифрой, расстояние между которыми не менее $\sqrt{2\frac{1}{64}}$ м. Можно ли усилить эту оценку?

В. Макеев
(ученик 10 кл.)

2. Докажите, что уравнение $x^2 - 2xy = 1978$ не имеет решений в целых числах.

С. Майзус

3. Из картона вырезали равнобочную трапецию, у которой угол между диагоналями равен φ. К каким вершинам ближе ее центр тяжести — к вершинам меньшего основания или большего?

С. Берколайко

4. Король находится на нижнем крайнем левом черном поле шахматной доски. Он может перемещаться только по диагонали. Какое наибольшее число черных полей он может обойти, если на каждом поле он может побывать не более одного раза? Рассмотрите случаи, когда размеры шахматного поля 1) 9×9; 2) $(2n-1)\times(2n-1)$; 3) 8×8; 4) $2n\times2n$.

Ф. Бартенев

5. Вычислите

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{2^n}{a^{2^{n-1}}}.$$

С. Мацукян

6. Две точки A и B движутся так, что их скорости все время сонаправлены и скорость точки B меньше скорости точки A. Может ли расстояние AB между точками оставаться постоянным?

7. Когда два разных аккумулятора соединили параллельно и замкнули на лампочку, лампочка горела слабо. Когда в ту же цепь последовательно с каждым аккумулятором включили некоторое сопротивление, лампочка стала гореть ярче. Почему?

Б. Коган

8. Бревно длиной l и массой m поднимают из горизонтального положения в вертикальное один раз за толстый конец, а другой раз — за тонкий. Разница в совершаемых работах составляет A. Определите положение центра тяжести бревна.

В. Никитин

«Квант» для младших школьников

Задачи

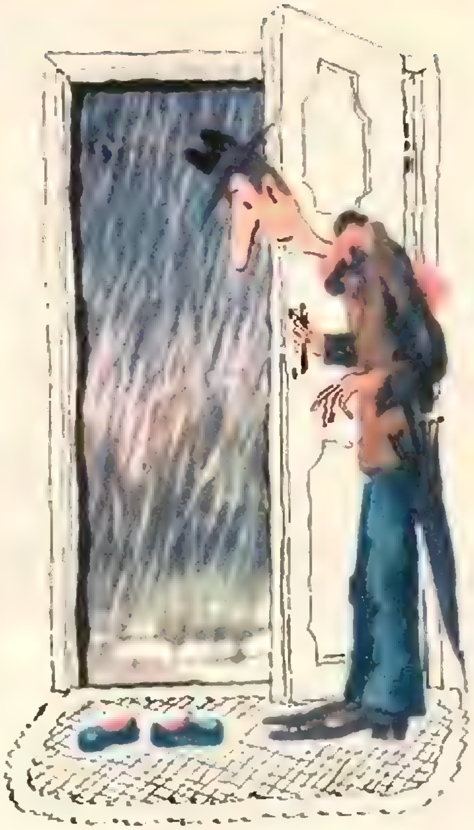
1. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

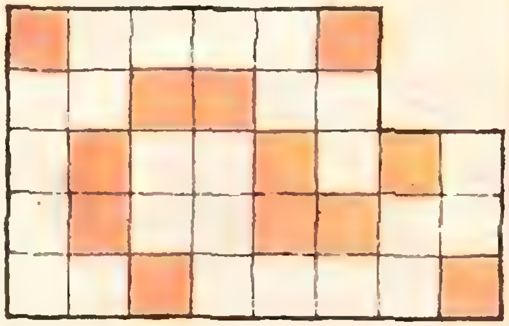
2. Разрезав фигуру, изображенную на рисунке, на две части, сложите из них квадрат так, чтобы цветные квадратики были симметричны относительно всех осей симметрии квадрата.

3. У четырех людей, родившихся в разные годы XX века, суммы цифр возрастов одинаковы, а сумма всех четырех возрастов — точный куб. Сколько лет старшему из этих людей?

4. Докажите, что если в параллелограмме $ABCD$ сумма углов ABD и BCA равна 90°, то этот параллелограмм — либо ромб, либо прямоугольник.

5. Какое трехзначное число равно кубу числа, записываемого последней цифрой, и одновременно квадрату числа, записываемого второй и первой цифрой?





А. Дозоров

Куда направлена сила трения?

Если вы утверждаете, что сила трения направлена против движения, то в этом утверждении все правильно. Например, на соскальзывающие с горы санки действует сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная в сторону, противоположную скорости санок (рис. 1). Но очень часто сила трения преподносит неожиданные сюрпризы. Вот несколько примеров.

Человек идет по ровному месту, скорость человека направлена вправо. Куда направлена сила трения? Правильный ответ — тоже вправо, то есть в сторону движения человека, а не в противоположную (рис. 2). Впрочем, разберем подробнее этот случай. Когда человек, делая шаг, отталкивается ногой от земли, подошва ботинка «стремится» двигаться назад, в сторону, противоположную движению человека. А сила трения, действующая со стороны земли на подошву, направлена против движения подошвы, то есть вправо, как и показано на рисунке 2. Движение подошвы относительно земли играет главную роль — против него и действует сила трения.

Если трение достаточно для того, чтобы человек шел без проскальзывания, то во время толчка нога перемещаться не будет. В этом случае сила трения — это сила трения покоя. Если же человек толкается достаточно сильно или трение мало, начинается проскальзывание: подошва движется назад, голова остается на месте, равновесие нарушается, человек падает. Попробуйте быстро идти по гладкому льду!

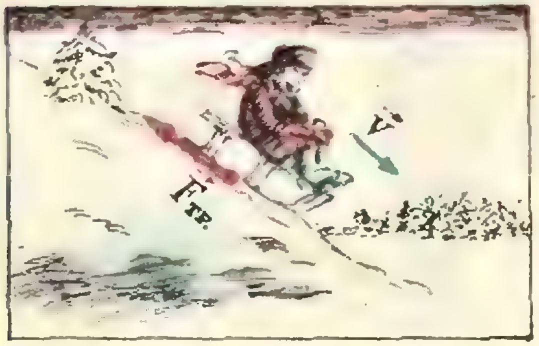


Рис. 1.

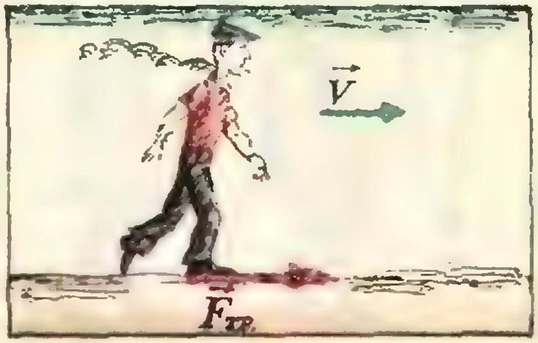


Рис. 2.

Однако процесс ходьбы состоит не только из одних толчков. Толчок — это первый этап, кроме него есть и другое характерное движение: «отставшая» нога выносится вперед и становится на землю. В этом случае сила трения направлена уже против движения человека.

Таким образом, при ходьбе направление силы трения все время изменяется.

То же самое бывает и при беге на лыжах: когда лыжник толкается палками и лыжами (рис. 3, *а*), направление силы трения одно, а при дальнейшем движении по инерции (рис. 3, *б*) — другое. Очевидно, для бега на лыжах выгодно, чтобы при свободном скольжении сила трения была минимальна, а при толчке не должно быть проскальзывания, то есть сила трения должна быть как можно большей.

Этого можно достигнуть, например, приклеив на лыжи мех таким образом, чтобы ворс был направлен от носка лыжи к ее концу. Такими лыжами действительно пользуются на Севере.

Посмотрим теперь, как направлена сила трения, когда человек ходит по горам. Если спуск достаточно крутой, то человек «тормозит» ногами, пытаясь предотвратить скатывание (рис. 4, *а*): сила трения направлена против скорости человека.

При пологом спуске и при подъеме на гору (рис. 4, *б*) тормозить не требуется, все происходит аналогично случаю ходьбы по ровной поверхности.

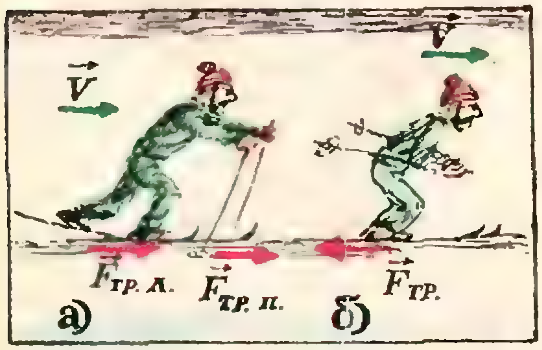


Рис. 3.

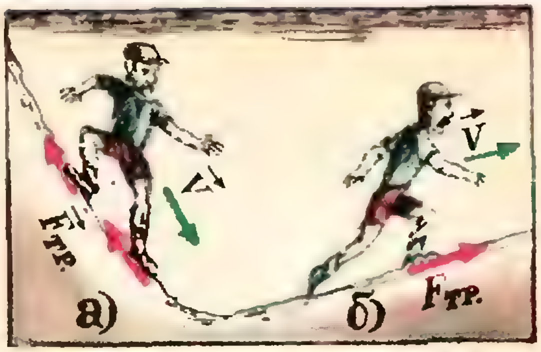


Рис. 4.

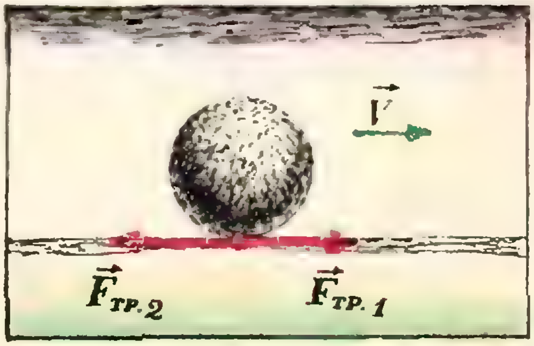


Рис. 5.

Еще больше неожиданностей таит в себе сила трения при рассмотрении катящегося шара (рис. 5). С одной стороны, если проскальзывания нет, то это означает, что трение достаточно, чтобы шар мог «отталкиваться» от земли (на шар действует сила трения $\vec{F}_{тр1}$), причем для шара это «отталкивание» происходит непрерывно.

С другой стороны, катящийся шар замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Значит, на шар действует — и тоже непрерывно — еще и сила трения $\vec{F}_{тр2}$. Для шара два этапа движения, изображенные на рисунке 3, сливаются в один.

То же самое можно сказать и о колесах движущегося автомобиля, поезда и т. п.

Подумайте, о каких еще неожиданностях в поведении силы трения можно было бы рассказать?

Л. Асламазов

Напряженность, напряжение, потенциал

Каждая точка электрического поля характеризуется векторной величиной — напряженностью поля. *Напряженность* $\vec{E}$ поля в данной точке равна силе, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в эту точку, и отнесенной к единице заряда. Это — силовая характеристика электрического поля.

При перемещении электрического заряда в поле совершается работа. Электростатическое поле обладает очень важным свойством — потенциальностью: работа по перемещению заряда из одной точки поля в другую не зависит от формы траектории. Это позволяет ввести понятие напряжения (или разности потенциалов). *Напряжение* U между двумя точками поля *) равно работе, совершаемой электрическим полем по перемещению единицы положительного заряда из одной точки в другую.

В отличие от напряженности, определенной в отдельно взятой точке, напряжение характеризует две точки поля. Если зафиксировать одну точку, выбрав ее за начало отсчета, то любая точка поля будет иметь определенное напряжение по отношению к выбранной точке. Это напряжение называют *потенциалом* φ. Очевидно, что началу отсчета соответствует нулевой потенциал. Чаще всего нулевой потенциал приписывается точке, бесконечно удаленной от заряда, создающего поле. В этом случае потенциал φ некоторой точки поля равен работе, совершаемой электрическим полем по перемещению единицы положительного заряда из этой точки в бесконечность. Это — энергетическая характеристика электрического поля.

Иногда задавать в каждой точке скалярную величину — потенциал φ — удобнее, чем векторную величину — напряженность $\vec{E}$. Естественно, что эти две величины должны быть связаны друг с другом.

Рассмотрим вначале однородное электрическое поле. Его напряженность $\vec{E}$ одинакова во всех точках; силовые линии такого поля — параллельные прямые (рис. 1). Найдем разность потенциалов между точками B и D. Потенциал φ_B точки B равен работе по перемещению единицы заряда из этой точки в бесконечность. Форма траектории при подсчете работы не имеет значения, поэтому будем перемещать заряд сначала по отрезку BC, потом по отрезку CD, а затем из точки D в бесконечность. Сила, действующая на единицу заряда со стороны электрического поля, равна напряженности. На отрезке BC работа этой силы равна El, где E — проекция вектора напряженности на силовую линию, а l — длина отрезка BC. На отрезке CD сила работы не совершает, так как она перпендикулярна перемещению. Наконец, работа по перемещению единицы заряда из точки D в бесконечность равна потенциалу φ_D. Поэтому: $\varphi_B = El + \varphi_D$, или для разности потенциалов:

$$\varphi_B - \varphi_D = El. \qquad (1)$$

Для того чтобы формула (1) давала правильный знак разности потенциалов, величине l надо приписывать определенный знак в зависимости от расположения точек B и C на силовой линии. Будем считать, что l — это проекция вектора $\overrightarrow{BD}$ на направление силовой линии. Тогда знак положителен, если точка C лежит «ниже» по силовой линии, чем точка B, и отрицателен в противоположном случае. Для случая, изображенного на рисунке 1, $l > 0$, и разность потенциалов $\varphi_B - \varphi_D > 0$, что соответствует убыванию потенциала вдоль силовой линии ($\varphi_D < \varphi_B$).

---

*) Под словами «поле», «электрическое поле» здесь и в дальнейшем мы будем понимать электростатическое поле, то есть поле, созданное неподвижными зарядами.

Итак, в однородном электрическом поле между напряженностью и разностью потенциалов имеется простая связь, даваемая формулой (1).

Какова связь между потенциалом и напряженностью в случае неоднородного электрического поля? В таком поле напряженность $\vec{E}$ меняется от точки к точке. Пусть, для простоты рассуждений, изменение напряженности происходит только в одном направлении, которое примем за ось OX (рис. 2). Тогда напряженность поля $\vec{E}$ зависит только от координаты x: $\vec{E} = \vec{E}(x)$. Ясно, что в небольших участках пространства напряженность меняется мало, и электрическое поле там можно приближенно считать однородным. Возьмем близкие точки B и D и найдем разность потенциалов между ними. Воспользуемся формулой (1). Потенциал так же, как и напряженность, зависит только от координаты x *): $\varphi_B - \varphi_D = \varphi(x_B) - \varphi(x_D)$. Проекция вектора $\overrightarrow{BD}$ на ось OX равна разности координат точек D и B: $l = x_D - x_B$. Таким образом, для близких точек B и D получаем:

$$\varphi(x_B) - \varphi(x_D) \approx E(x_B) \times (x_D - x_B),$$

или

$$E(x_B) \approx -\frac{\varphi(x_D) - \varphi(x_B)}{x_D - x_B}. \quad (2)$$

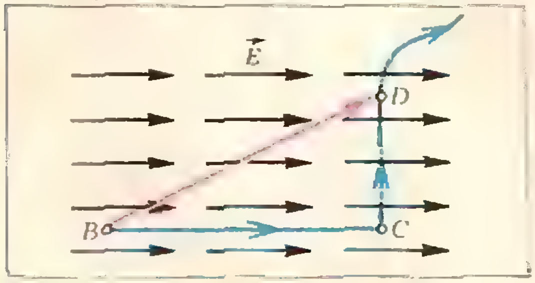


Рис. 1.

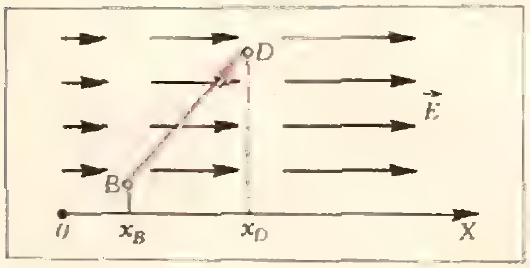


Рис. 2.

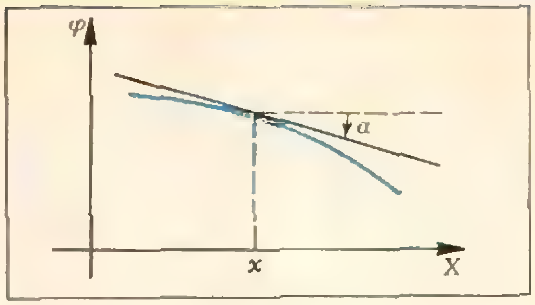


Рис. 3.

Чтобы формула (2) стала точной, надо устремить точку B к точке D и найти предел, к которому стремится правая часть при неограниченном сближении точек:

$$E(x_B) = -\lim_{x_D \to x_B} \frac{\varphi(x_D) - \varphi(x_B)}{x_D - x_B}. \quad (3)$$

Легко увидеть, что правая часть формулы (3) — это производная потенциала, взятая с обратным знаком. Таким образом, в неоднородном электрическом поле связь между потенциалом и напряженностью в каждой точке следующая:

$$E(x) = -\varphi'(x). \quad (4)$$

Знак минус в формуле (4) означает, что потенциал убывает вдоль силовой линии: поскольку проекция напряженности на силовую линию $E(x) > 0$, $\varphi'(x) < 0$, что и означает убывание потенциала.

Если нарисовать график зависимости φ от x, то тангенс угла наклона α касательной к графику в каждой его точке равен производной $\varphi'(x)$ в этой точке (рис. 3). Поэтому можно сказать, что напряженность электрического поля определяет наклон касательной к графику потенциала.

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *Сфера радиуса R имеет заряд Q. Найти зависимость*

---

*) Плоскость $x = \text{const}$ эквипотенциальна, так как при перемещении единицы заряда в этой плоскости электрическое поле работы не совершает.

напряженности и потенциала от расстояния r от центра сферы. Нарисовать графики.

Найдем вначале напряженность поля. Внутри сферы электрического поля нет: при $r<R$ $E=0$. Вне сферы напряженность поля такая же, как у точечного заряда Q, помещенного в центр сферы: при $r>R$ проекция напряженности на выбранное направление от центра $E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, где ε_0 — электрическая постоянная. На поверхности сферы, при $r=R$, электрическое поле испытывает скачок $\Delta E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$. Зависимость E от r графически показана на рисунке 4,*а*.

Величину скачка ΔE можно выразить через поверхностную плотность заряда $\sigma=\frac{Q}{4\pi R^2}$ (равную заряду, приходящемуся на единицу площади поверхности сферы):

$$\Delta E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Заметим, что это общее свойство электростатического поля: на заряженной поверхности его проекция на направление нормали всегда испытывает скачок $\Delta E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, независимо от формы поверхности.

Выясним теперь, как меняется потенциал φ в зависимости от r. Мы уже знаем, что в любой точке тангенс угла наклона касательной к графику потенциала должен совпадать со значением проекции напряженности (взятой с противоположным знаком). При $0<r<R$ $E=0$, и, следовательно, во всех этих точках касательная к графику потенциала должна быть горизонтальной. Это означает, что на участке $0<r<R$ потенциал не меняется: $\varphi=\mathrm{const}$.

Вне сферы, при $r>R$, производная $\varphi'(r)=-E(r)$ отрицательна и величина ее убывает с расстоянием r. Поэтому и потенциал должен убывать с расстоянием, стремясь к нулю при $r\to\infty$. Действительно, чем дальше расположена точка, в которой мы ищем потенциал, тем меньшую работу надо совершать при перемещении единицы заряда из этой точки в бесконечность. Величина потенциала φ при $r>R$ такая же, как у точечного заряда, помещенного в центр сферы:

$$\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}.$$

Может ли потенциал испытать скачок на поверхности сферы, то есть при $r=R$? Очевидно, что нет. Скачок потенциала означал бы, что при перемещении единичного заряда между двумя очень близкими точками *1* и *2* электрическое поле совершало бы конечную работу: $\varphi_1-\varphi_2=E(R)\times(r_2-r_1)$ должно оставаться конечным при $(r_2-r_1)\to 0$, что невозможно. Таким образом, потенциал не испытывает скачков.

График зависимости φ от r изображен на рисунке 4, *б*.

Задача 2. *Шар радиуса R равномерно заряжен по всему объему. Полный заряд шара Q. Нарисуйте графики зависимости напряженности и потенциала от расстояния r от центра шара.*

Такой шар можно представить себе состоящим из большого числа тонких заряженных сфер, вложенных одна в другую. Каждая сфера внутри себя поля не создает, а вне создает поле такое же, как точечный заряд, помещенный в ее центр. Поэтому вне шара, при $r>R$, напряженность такая же, как напряженность поля точечного заряда Q, помещенного в центр шара:

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

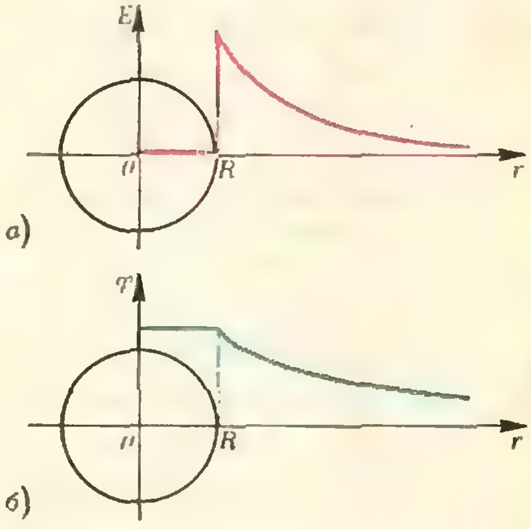


Рис. 4.

Внутри шара, на расстоянии $r < R$, поле создают только сферы с радиусами от 0 до r (для сфер большего радиуса рассматриваемая точка находится внутри них). Следовательно, напряженность на расстоянии r от центра шара такая же, как напряженность поля точечного заряда Q_r, помещенного в центр шара, где Q_r — суммарный заряд всех сфер с радиусами от 0 до r, то есть заряд шара радиуса r. Если на шар радиуса R приходится заряд Q, то на шар радиуса r будет приходиться заряд $Q_r = Q\frac{r^3}{R^3}$. Таким образом, внутри шара напряженность поля $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r$ — она линейно растет с расстоянием.

На поверхности шара, в точке $r = R$, напряженность скачка не испытывает. Это находится в соответствии с общим правилом, так как поверхностная плотность заряда в данном случае равна нулю: шар заряжен однородно, и на бесконечно тонкий поверхностный слой приходится бесконечно малый заряд.

График зависимости E от r показан на рисунке 5, *а*.

Нарисуем теперь график потенциала. Производная от потенциала $\varphi'(r) = -E(r)$ всегда отрицательна ($E \geqslant 0$). Поэтому с увеличением r потенциал должен монотонно убывать. В точке $r = 0$ производная потенциала равна нулю. Следовательно, касательная к графику в этой точке горизонтальна: в точке $r = 0$ потенциал имеет максимум. В точке $r = R$ ни потенциал, ни его производная скачков не испытывают. Первое следует из общего правила для потенциала, о втором мы уже говорили выше. Поэтому кривые, изображающие зависимость потенциала от расстояния при $r < R$ и $r > R$, в точке $r = R$ должны сопрягаться — гладко без излома переходить одна в другую. При $r \to \infty$ потенциал $\varphi \to 0$. График зависимости φ от r представлен на рисунке 5, *б*.

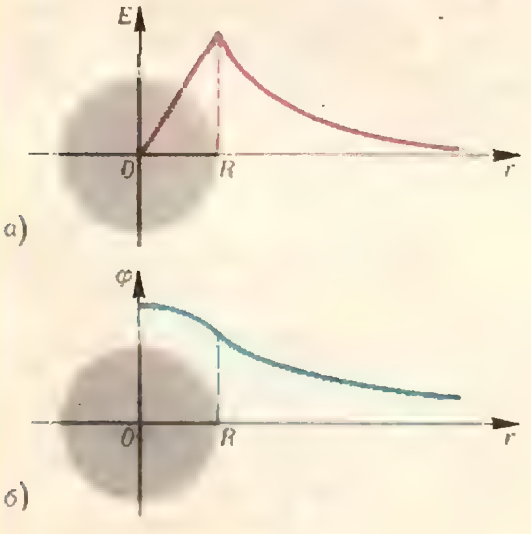


Рис. 5.

З а д а ч а 3. *Две плоскости расположены параллельно друг другу на расстоянии d и заряжены с поверхностной плотностью заряда σ_1 и σ_2 соответственно. Нарисовать графики зависимости напряженности поля и потенциала от координаты x (ось OX перпендикулярна пластинам). Рассмотреть случаи одноименных (рис. 6, а) и разноименных (рис. 7, а) зарядов на пластинах.*

Каждая плоскость создает по обе стороны от себя однородное электрическое поле, напряженность которого $\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Воспользовавшись принципом суперпозиции, для случая одноименных зарядов приходим к графику, показанному на рисунке 6, *б*, а для разноименных — к графику на рисунке 7, *б*. Скачки напряженности опять соответствуют общему правилу:

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Соответствующие графики для потенциалов показаны на рисунках 6, *в* и 7, *в*. На отдельных участках зависимость потенциала от координаты — линейная, так как напряженность поля постоянна. Изломы происходят в тех местах, где напряженность поля испытывает скачок.

Заметим, что в данной задаче потенциал не стремится к нулю при $x \to \infty$. Это, очевидно, связано с тем, что плоскость бесконечна. В действительности размеры реальных пластин всегда ограничены; это приводит к тому, что потенциал падает с увеличением расстояния от пластин.

З а д а ч а 4. *Две одинаковые параллельные пластины имеют заряды $+q$ и $-q$. Как меняется разность*

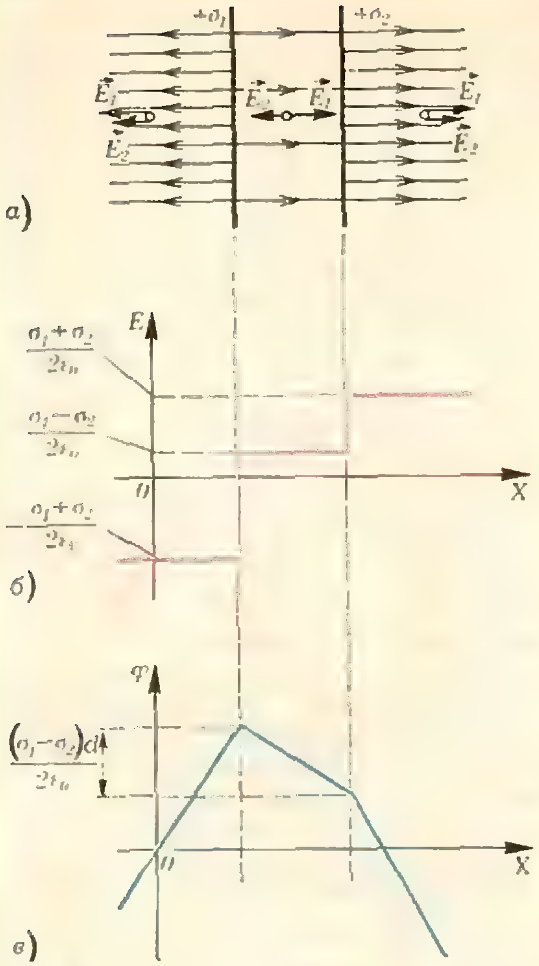

$+\sigma_1$
$+\sigma_2$
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$
а)
E
$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
$-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
0
X
б)
φ
$\frac{(\sigma_1-\sigma_2)d}{2\varepsilon_0}$
0
X
в)

Рис. 6.

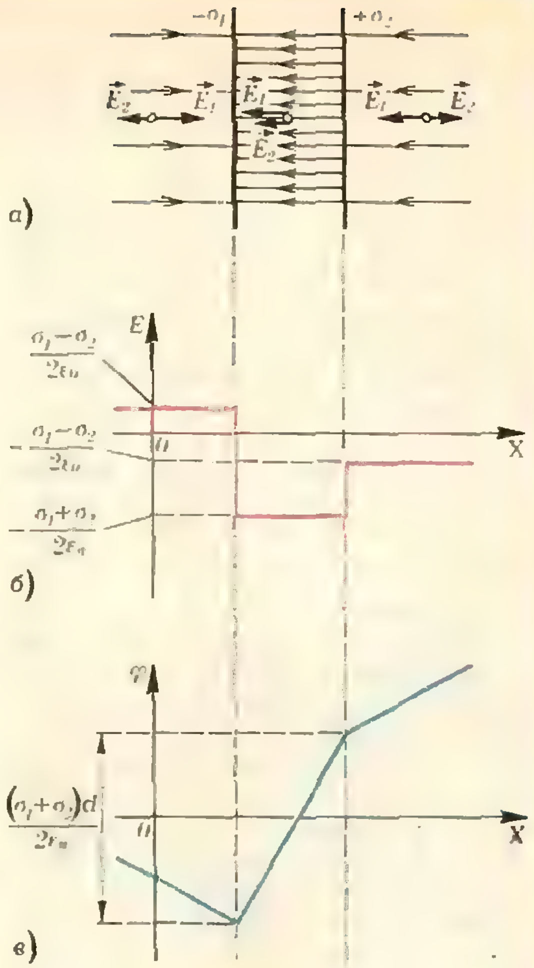

$-\sigma_1$
$+\sigma_2$
$\vec{E}_1$
$\vec{E}_2$
а)
E
$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
$-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
$-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2\varepsilon_0}$
0
X
б)
φ
$\frac{(\sigma_1+\sigma_2)d}{2\varepsilon_0}$
0
X
в)

Рис. 7.

потенциалов U между пластинами при увеличении расстояния d между ними? Нарисуйте график зависимости U от d.

Пока расстояние между пластинами значительно меньше их размеров, такую систему можно считать плоским конденсатором. Тогда $U = \frac{q}{C} = \frac{q}{\varepsilon_0 S} d$ — напряжение линейно растет с расстоянием (начальный участок на рисунке 8). Это соответствует тому, что напряженность поля $E = \frac{U}{d} = \text{const}$.

Как только расстояние между пластинами становится сравнимым с размерами пластин, электрическое поле появляется и вне пространства между пластинами. Тогда становятся существенными так называемые краевые эффекты, и зависимость потенциала от расстояния — довольно сложная. Однако качественно ясно, что, вследствие ослабления поля в области между пластинами, напряжение будет расти медленнее, чем по линейному закону (средний участок на рисунке 8). При дальнейшем увеличении расстояния между пластинами оно станет много больше их размеров. Тогда каждую пластину уже можно считать изолированным телом, и ее потенциал $\varphi = \frac{q}{C_0}$, где C_0 — емкость уединенной пластины. Таким образом, при очень больших расстояниях разность потенциалов перестает зависеть от расстояния между пластинами (график зависимости U от d на рисунке 8 имеет горизонтальную асимптоту).

Краевые эффекты часто оказываются существенными при решении электростатических задач, связанных с законом сохранения энергии. Рассмотрим, например, такой вариант ускорителя электронов:

Задача 5. *В пластинах плоского конденсатора, заряженного до*

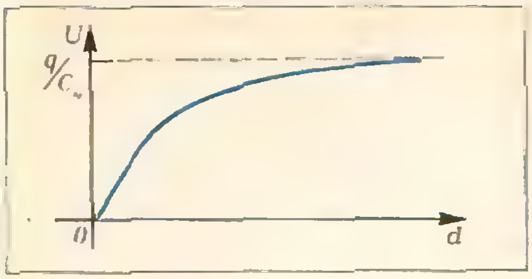


Рис. 8.

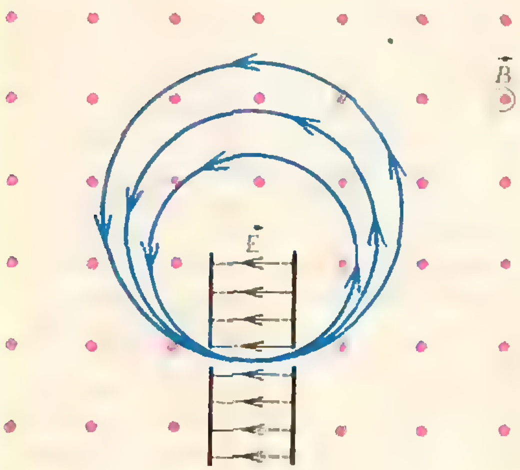


Рис. 9.

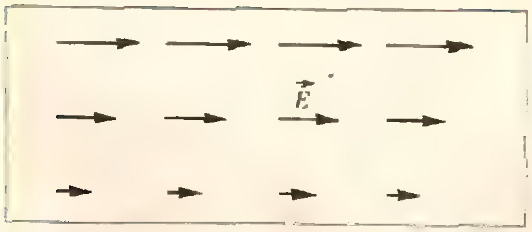


Рис. 10.

разности потенциалов U, сделано сквозное отверстие. Конденсатор помещен в постоянное магнитное поле, направленное перпендикулярно электрическому полю в конденсаторе (рис. 9). Электрон влетает в пространство между пластинами конденсатора, ускоряется, приобретая энергию eU, вылетает через отверстие и, двигаясь в магнитном поле по окружности, возвращается в конденсатор. Затем он снова ускоряется, движется по окружности большего радиуса, опять входит в конденсатор и т. д. На первый взгляд кажется, что таким образом можно разогнать электрон до больших энергий, то есть создать ускоритель. Так ли это?

Оказывается, такой ускоритель работать не будет — не учтен краевой эффект. Вне конденсатора всегда существует слабое электрическое поле, которое тормозит электрон при его движении по окружности. Отрицательная работа поля при этом в точности равна положительной работе при разгоне электрона в конденсаторе: работа в электростатическом поле не зависит от формы траектории. Магнитное поле работы не совершает (сила Лоренца перпендикулярна скорости движения электрона). Поэтому полная работа всех сил, действующих на электрон, при его возвращении в начальную точку будет равна нулю, и кинетическая энергия электрона не изменится. Ускоритель работать не будет.

Упражнения

1. Может ли существовать электростатическое поле, у которого силовые линии — параллельные прямые, а абсолютная величина напряженности меняется только в направлении, перпендикулярном силовым линиям (рис. 10)?

2. Две концентрические металлические сферы радиусов R_1 и R_2 имеют заряды Q_1 и Q_2 соответственно. Найдите напряженность и потенциал электрического поля на произвольном расстоянии r от центра сфер. Нарисуйте графики зависимости E от r и φ от r. Рассмотрите случаи одноименных и разноименных зарядов. Как выглядят графики для случая $Q_1 = -Q_2$ (сферический конденсатор)?

3. Точечный заряд q окружен металлической сферой радиуса R с зарядом Q. Найдите напряженность поля и потенциал на произвольном расстоянии r от заряда q, если он находится в центре сферы; нарисуйте графики зависимости E от r и φ от r. Как изменятся графики, если заряд сместить из центра сферы? Решите ту же задачу для случая, когда металлическая сфера заземлена.

4. Электрон влетает в пространство между пластинами плоского конденсатора так, что его скорость составляет острый угол с направлением силовых линий. Тогда при движении в конденсаторе он будет тормозиться и вылетит с меньшей скоростью; его кинетическая энергия уменьшится. Увеличится ли при этом энергия конденсатора?

5. Два одинаковых конденсатора емкостью C каждый, один из которых заряжен до напряжения U, а второй — не заряжен, соединяют параллельно. Найти энергию системы до и после соединения конденсаторов. Почему эти энергии не равны?

6. Точечный заряд q находится вне незаряженной металлической сферы радиуса R на расстоянии d от ее центра. Найти потенциал сферы.

А. Виленкин

Производная и касательные

Хотя в школьном курсе математики касательной к графику функции посвящен только один пункт (см. «Алгебра и начала анализа», 9 класс, п. 52), в 1977 году на вступительных экзаменах в вузы (по программе «А») предлагалось много задач, связанных с этой темой. Решение большинства из них основано на прямом использовании уравнения

$$y = f'(x_0)\cdot x + (f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0)$$

касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 (рис. 1). Более интересные задачи основаны на том, что угловой коэффициент k касательной равен, с одной стороны, тангенсу угла φ между касательной и осью абсцисс, а с другой — значению производной $f'(x_0)$. Рассмотрим некоторые типы таких задач *).

Нахождение уравнения касательной

Пример 1 (МЭИС, 1977). *Напишите уравнения касательных к графику функции $f(x) = 4 - x^2$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.*

Здесь нам дана функция f, а x_0 не дано. Но точки пересечения графика функции f с осью абсцисс — это точки, в которых $f = 0$, поэтому для нахождения x_0 надо решить уравнение $4 - x_0^2 = 0$. Затем для каждого значения x_0 можно стандартным образом написать уравнение касательной. Сделаем это, учитывая, что $f'(x) = -2x$.

а) $x_0 = 2$; $f(2) = 0$, $f'(2) = -4$, уравнение касательной $y = -4x + 8$;

б) $x_0 = -2$; $f(-2) = 0$; $f'(-2) = 4$, уравнение касательной $y = 4x + 8$.

Нахождение k и углов

Пример 2 (МИСИ, 1977). *Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 4x - 17$, проведенная в точке с абсциссой $x_0 = 2{,}5$?*

Здесь под *углом прямой с осью Ox* подразумевается величина названного угла, отсчитываемая от оси Ox к данной прямой против часовой стрелки (см. «Алгебра 6», п. 52, «Геометрия 8», п. 98 и «Алгебра и начала анализа», 10 класс, материал для повторения, п. 8). Поскольку нам заданы f и x_0, можно найти $k = f'(x_0)$, а по нему и искомый угол φ, так как тангенс угла, образуемого прямой с осью Ox, равен угловому коэффициенту этой прямой: $\operatorname{tg}\varphi = k$, причем $\varphi = \operatorname{arctg} k$ при $k \geqslant 0$ и $\varphi = \pi + \operatorname{arctg} k$ при $k < 0$ (рис. 2).

В данном примере $f'(x) = 2x - 4$, $k = f'(2{,}5) = 1$, $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = \pi/4$.

Пример 3. *Найти угол между касательными к графику функции $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, проведенными в точках с абсциссами* 0 *и* 1.

Здесь речь идет не об угле прямой с осью Ox, а об угле между двумя прямыми. Поэтому напомним, что *углом между двумя пересекающимися прямыми называют величину меньшего из углов, определяемых этими прямыми* (см. «Геометрия 9», § 24), то есть угол α между двумя прямыми всегда лежит в пределах $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$.

В данном примере $f'(x) = 3x^2 - 8x + 3$ и для первой касательной имеем $x_0 = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 3$, $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1 = 3$, $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 3$, уравнение касательной $y = 3x + 1$, а для второй $x_0 = 1$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -2$, $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 = -2$, $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} 2$, уравнение касательной $y = -2x + 3$. Затем, сделав примерный рисунок (рис. 3), легко найти угол α.

$$\alpha = \pi - \operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3.$$

---

*) О геометрическом смысле производной см. также «Квант», 1977, № 2, с. 35.

Но является ли этот угол искомым, то есть верно ли, что $\alpha \leqslant \pi/2$, или надо брать угол $\pi - \alpha$? Можно показать, что угол α — искомый (так как $\operatorname{arctg} 2 > \pi/4$ и $\operatorname{arctg} 3 > \pi/4$), но мы сейчас поступим иначе.

Выведем общую формулу для угла между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Прежде всего заметим, что при параллельных переносах углы не меняются, поэтому искомый угол α равен углу между прямыми $y = k_1x$ и $y = k_2x$ (они получаются из данных переносом $\overrightarrow{CO}$). Пусть углы между этими прямыми и осью Ox равны φ_1 и φ_2 (рис. 4). Тогда легко найти величину одного из углов со сторонами на данных прямых: $|\varphi_2 - \varphi_1|$ (знаки модуля пришлось поставить, так как мы не знаем, какой из углов φ_2, φ_1 больше). Искомым является тот из углов $|\varphi_2 - \varphi_1|$, $\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|$, который не превосходит $\pi/2$.

Оказывается, удобно взять тангенсы этих углов, потому что по формулам приведения

$$\operatorname{tg}(\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|) = -\operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1|$$

(если $|\varphi_2 - \varphi_1| \neq \pi/2$) и

если $|\varphi_2 - \varphi_1| > \pi/2$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - |\varphi_2 - \varphi_1|) = -\operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1| = |\operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1|| = |\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$$

(так как tg — нечетная функция);

если $|\varphi_2 - \varphi_1| < \pi/2$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}|\varphi_2 - \varphi_1|,$$

что также равно $|\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$.

Таким образом, формула $\operatorname{tg}\alpha = |\operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1)|$ верна во всех случаях. Вспомнив формулу тангенса разности двух углов, мы получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}\right|.$$

Заметим, что перпендикулярность двух прямых также легко обнаружить по их угловым коэффициентам: если $|\varphi_2 - \varphi_1| = \pi/2$, то $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$ или $\varphi_2 = \varphi_1 - \pi/2$, и в обоих случаях $\operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_1 = -\dfrac{1}{\operatorname{tg}\varphi_1}$ (если эти выражения определены), то есть $\operatorname{tg}\varphi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 = -1$, а в угловых коэффициентах

$$k_2k_1 = -1.$$

Это согласуется с тем, что в формуле для

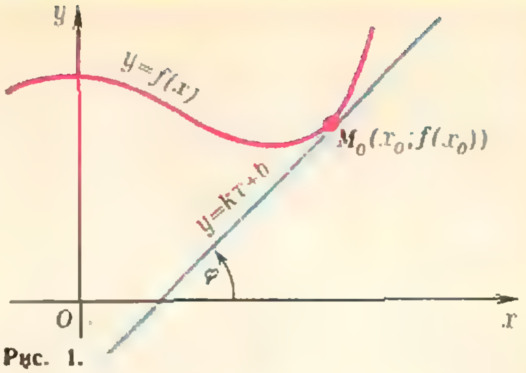


Рис. 1.

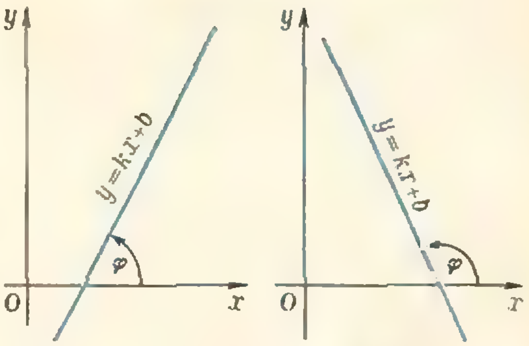


Рис. 2. $k>0$, $\varphi=\operatorname{arctg} k$; $k<0$, $\varphi=\pi+\operatorname{arctg} k$.

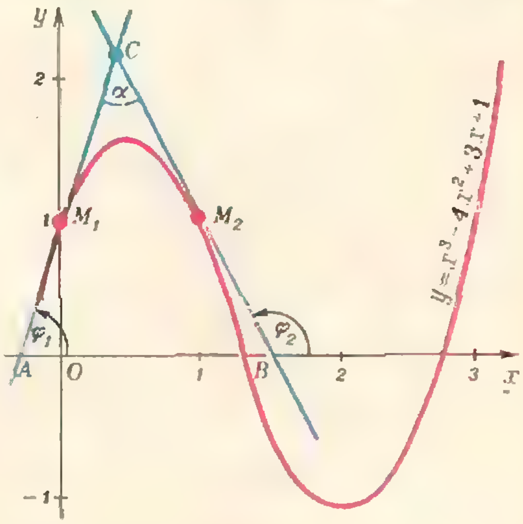


Рис. 3.

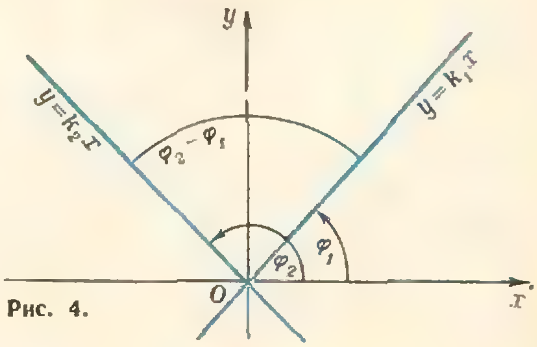


Рис. 4.

tg α правая часть не определена, если $k_1 k_2 + 1 = 0$.

Есть еще один случай, когда две прямые перпендикулярны — если уравнения этих прямых имеют вид $y = b$, $x = a$. В этом случае $k_1 = 0$, а k_2 не существует, так как прямая $x = a$ параллельна оси ординат.

В примере 3 мы получаем:

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{-2-3}{1-6}\right| = 1, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Сравните этот ответ с приведенным выше!

Определение точки графика по касательной

В некоторых задачах в той или иной форме даются какие-либо условия на касательную, и предлагается найти точки касания.

Пример 4. *Найти на графике функции* $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 1$ *точку, касательная в которой образует с осью Ox угол* $\pi/4$.

Чтобы угол касательной с осью Ox был равен $\pi/4$, необходимо и достаточно, чтобы угловой коэффициент касательной был равен 1. Но $k = f'(x_0)$, значит, нам надо решить уравнение $f'(x_0) = 1$, то есть $9x_0^2 - 8x_0 = 1$. Из него по формуле корней квадратного уравнения $x_0 = 1$ или $x_0 = -1/9$. В этих точках $f(1) = 0$, $f(-1/9) = 230/243$. Значит, искомых точек две: $M_1(-1/9;\ 230/243)$ и $M_2(1;\ 0)$, что хорошо видно на графике данной функции (рис. 5).

Пример 5. *В какой точке касательная к графику функции* $f(x) = x^2$

а) *параллельна прямой* $2x - y + 1 = 0$;

б) *перпендикулярна этой же прямой?*

а) Как известно (см. «Алгебра 6», п. 52), две прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны. Уравнение данной прямой можно записать в виде $y = 2x + 1$, откуда видно, что $k = 2$. Для касательной $k = f'(x_0)$, поэтому нам надо решить уравнение $f'(x_0) = 2$, то есть $2x_0 = 2$, откуда $x_0 = 1$. Значит, касательную надо проводить в точке $M_1(1;\ 1)$ (рис. 6). Проверка показывает, что уравнение этой касательной имеет вид $y = 2x - 1$.

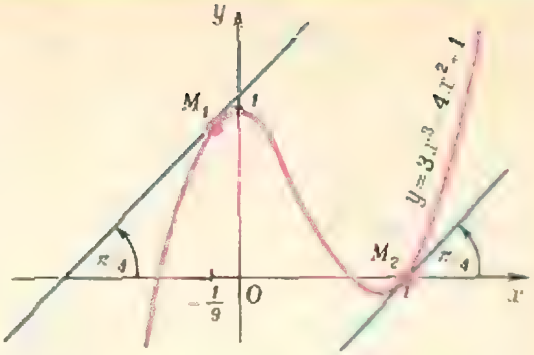


Рис. 5.

б) Воспользуемся тем, что прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны, если $k_1 k_2 = -1$. В данном примере $k_1 = 2$, поэтому $k_2 = -1/k_1 = -1/2$, и из уравнения $2x_0 = -1/2$ находим $x_0 = -1/4$. Это соответствует точке $M_2(-1/4;\ 1/16)$, и уравнение касательной имеет вид $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$. «Геометрия» этого примера хорошо видна на рисунке 6.

Пример 6 (МГУ, ф-т психологии, 1977). *На графике функции* $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 22x - 28$ *найти все точки такие, что касательные к графику в этих точках пересекают положительные полуоси, отсекая от них отрезки равной длины.*

Пусть касательная проводится в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$. Тогда ее уравнение имеет вид

$$y = (x_0^2 - 4x_0 - 22)\cdot x - \frac{2}{3}x_0^3 + 2x_0^2 - 28.$$

Но прямая $y = kx + b$ пересекает положительные полуоси, отсекая отрезки равной длины, лишь при $k = -1$ и $b > 0$ ($b \neq 0$, поскольку

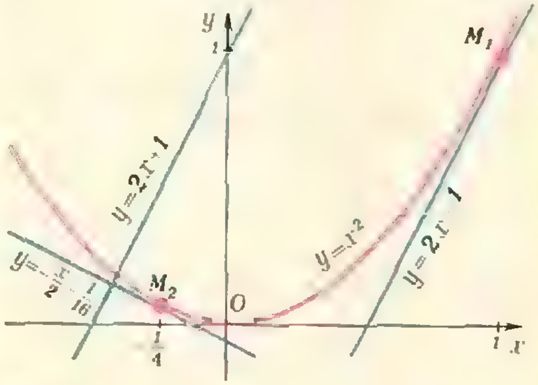


Рис. 6.

точка — не отрезок). Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_0^3+2x_0^2-28>0, \\ x_0^2-4x_0-22=-1. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что $x_0=7$ или $x_0=-3$. Неравенство выполняется лишь при $x_0=-3$, что соответствует точке M_0 (—3; 11).

Нахождение функции

В некоторых задачах предлагается найти даже не точку графика, а саму функцию. Вот типичная такая задача.

Пример 7 (МЭИС, 1977). *Найти уравнение параболы* $y=x^2+bx+c$, *касающейся прямой* $y=x$ *в точке* M (1; 1).

Задачу полезно переформулировать так: *уравнение касательной к графику функции* $f(x)=x^2+bx+c$ *в точке* M (1; 1) *имеет вид* $y=x$; *найти* b *и* c. Такая формулировка уже более явно содержит два условия:

1) *точка* M (1; 1) *лежит на графике функции* $f(x)=x^2+bx+c$;

2) $f'(1)=1$ (поскольку для прямой $y=x$ будет $k=1$).

Отсюда с учетом формулы $f'(x)=2x+b$ получаем систему

$$\begin{cases} 1+b+c=1, \\ 2+b=1, \end{cases}$$

из которой $b=-1$, $c=1$. (Решив подобную задачу, полезно проверить, что уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2-x+1$ в точке M (1; 1), лежащей на графике этой функции, имеет вид $y=x$.)

Упражнения

1 (МИИГАиК, 1977). Написать уравнения касательных к графику функции

а) $f(x)=\cos x$ в точках с абсциссами $x_1=\pi/2$ и $x_2=\pi$;

б) $f(x)=\sin x$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

2 (МЭИС, 1977). Под каким углом касательная к графику функции $\operatorname{tg} x$, проведенная в начале координат, пересекает ось абсцисс?

3 Под каким углом пересекаются касательные к кривым $y=\sqrt{2x}$ и $y=x^2/2$, проведенные в точке пересечения этих кривых?

4 (МИНХ, 1977). В какой точке касательная к графику функции $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox?

5 (МИСИ, 1977). Напишите уравнение касательной к линии $y=x^2-4x+5$ в точке пересечения этой линии с осью ординат.

6 В каких точках касательная к кривой $y=x^3-4x+3$

а) параллельна оси Ox;

б) образует с осью Ox угол 45°?

7 (МЭИС, 1977). В какой точке касательная к параболе $y=x^2-7x+3$ параллельна прямой $5x+y-3=0$?

8 (МЭИС, 1977). В какой точке кривой $y^2=2x^3$ касательная перпендикулярна прямой $4x-3y+2=0$?

9 (МИСиС, 1977). Найти площадь фигуры, ограниченной

а) кривой $y=x^2+1$ и касательной к кривой $y=2-\ln x$ в точке с абсциссой $x=1$;

б) кривой $y=x^2-x+2$ и касательной к кривой $y=\ln x+3$ в точке с абсциссой $x=1$.

10 (МИСИ, 1977). Определить b и c в уравнении параболы $y=x^2+bx+c$, если прямая $y=2x+2b$ касается параболы в точке M (2; 0).

11 (МИСИ, 1977). В какой точке касательная к графику функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-9x+8$ будет параллельна биссектрисе I и III координатных углов?

12 (МИСиС, 1977). Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{x^4}+2$ в точке с абсциссой $x=1$.

Задача для исследования

Ниже приводится задача известных ленинградских геометров *В. Залгаллера* и *А. Иванова*. Авторы, так же как и редакция журнала «Квант», знают только аналитическое решение, использующее производную. Должно же существовать элементарно-геометрическое решение,... но оно нам неизвестно.

Задача. Два треугольника на плоскости имеют общее основание, а их вершины A, A' различны и лежат по одну сторону от основания. Пусть C и C' — центры кругов, вписанных в эти треугольники. Докажите, что расстояние между вершинами больше, чем расстояние между центрами вписанных кругов: $|AA'|>|CC'|$.

Новосибирский государственный университет

Главной задачей НГУ является подготовка высококвалифицированных специалистов — исследователей в области математики, механики, физики, химии, биологии, геологии, экономической кибернетики, истории и языкознания, в основном—для Сибири и Дальнего Востока.

В университете обучается около четырех тысяч студентов, аспирантов и стажеров. В его составе факультеты: механико-математический, физический, естественных наук, геолого-геофизический, экономический и гуманитарный.

Приемные экзамены проходят с 11 по 25 июля (прием документов с 20 июня по 10 июля), зачисление в университет производится до 28 июля.

Все студенты (кроме живущих в Академгородке) обеспечиваются общежитием.

Выпускники НГУ направляются на работу в академические и отраслевые научно-исследовательские институты, вычислительные центры, исследовательские лаборатории, а также на преподавательскую работу в вузы.

Подготовка специалистов в НГУ основана на использовании научного и педагогического потенциала Новосибирского научного центра Сибирского отделения АН СССР. Этот центр имеет в своем составе 22 научных института. Поблизости от него строятся научные центры Сибирского отделения ВАСХНИЛ и Сибирского отделения Академии медицинских наук.

Новосибирский научный центр и университет представляют собой, по существу, единый научно-учебный комплекс. Основную часть педагогической работы в университете выполняют ученые из институтов СО АН СССР — академики, члены-корреспонденты АН СССР, доктора и кандидаты наук. Это обеспечивает высокий теоретический уровень преподавания и постоянное совершенствование учебных программ в соответствии с новейшими достижения науки.

Другой принципиальной особенностью обучения в НГУ является обязательная длительная исследовательская практика студентов в институтах СО АН СССР. Благодаря территориальной близости НГУ к научно-исследовательским институтам СО АН СССР студенты имеют возможность участвовать в проводимых там семинарах, научных совещаниях и конференциях, знакомиться с последними научными достижениями и нерешенными проблемами науки, встречаться с крупными учеными, приезжающими из других городов страны и из-за рубежа, непосредственно участвовать в научном поиске. К научному руководству студентами привлекаются только сотрудники, имеющие ученые степени и звания. Курсовые и дипломные работы проводятся по актуальной тематике, разрабатываемой в СО АН СССР; они органически вливаются в научную продукцию его институтов. Студенты НГУ выезжают на практику в социалистические страны.

Навыки самостоятельной исследовательской работы студенты получают также в научно-исследовательском секторе НГУ. Выработке полезных навыков способствует широкое участие студентов в ежегодной научной студенческой конференции, которая по охвату творческой студенческой молодежи вышла за рамки НГУ, став всесоюзной.

Университет расположен в 30 км от центра Новосибирска, на территории Академгородка, в живописном лесу на берегу Обского моря. Рядом с учебными корпусами — общежития, столовая, спортивный комплекс.

Богата и разнообразна жизнь студентов в университете. Активно работают клубы по интересам, широко развита художественная самодеятельность, весело проводятся Дни физиков, математиков, химиков, геологов, посвящение в студенты. Энергично работают строительные студенческие отряды. Много лет действует Интерклуб, проводится Неделя интернациональной дружбы, завершающаяся традиционной политической маевкой. В НГУ прекрасные возможности заниматься спортом, чему в немалой степени способствует и великолепная сибирская природа.

Математика

Ниже публикуются образцы вариантов вступительного экзамена, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году.

Вариант 1

(механико-математический, физический, экономический факультеты)

1. По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек A и $Б$ выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через t секунд в a метрах от $Б$, вторая встреча — в $2a$ метрах от A ($a>0$). Найти скорости спортсменов, если под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке.

2. Решить уравнение

$$\cos 6x + \operatorname{tg}^2 x + \cos 6x \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1.$$

3. Окружности O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом в точке A, отрезок AB — диаметр O_1. Длины отрезков, отсекаемых окружностями на некоторой прямой, проходящей через точку B, равны 2 см, 3 см, 4 см, считая от точки B. Найти радиусы окружностей.

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение $\log_{2x}(ax+1)=\frac{1}{2}$ имеет единственное решение.

5. В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA', BB', CC' образуют с плоскостью основания угол в 60°, а диагональ BC' боковой грани $CBB'C'$ перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC' равна $a\sqrt{6}$.

Вариант 2

(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)

1. Из пункта A был отправлен вниз по реке плот. Одновременно из пункта $Б$, расположенного в 100 км от A вниз по реке, вышел навстречу катер, который дошел до A, повернул вниз по течению и догнал плот в 80 км от A через 10 часов после отправки плота. Найти скорость катера в стоячей воде.

2. Решить уравнение

$$1+\operatorname{tg} x=2\sqrt{2}\sin x.$$

3. Окружность радиуса R касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках K и M соответственно. Известно, что центр окружности лежит на стороне AC, M — середина стороны BC, длина отрезка BK в два раза больше длины отрезка AK. Найти площадь треугольника.

4. Решить уравнение

$$3\cdot 2^{\log_x(3x-2)}+2\cdot 3^{\log_x(3x-2)}-5\cdot 6^{\log_{x^2}(3x-2)}=0.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Через вершину B и середины ребер CC' и $A'D'$ проведена плоскость. Найти величину двугранного угла, образованного этой плоскостью с плоскостью основания.

Физика

В 1977 году на физическом факультете НГУ на письменном экзамене по физике каждому абитуриенту предлагалось 6 задач. На решение всех задач отводилось 5 часов. В каждом варианте задачи были трех типов. Первые четыре — это общепринятые расчетные задачи различной трудности: от почти стандартных школьных до сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

В последней — шестой — надо было объяснить физическое явление, показанное экзаменатором на демонстрационном столе. Здесь было важно понять суть эффекта и среди различных возможных физических факторов выделить главный.

Наконец, пятая задача — это задача-оценка. В тексте варианта указывалось, что описываемое в этой задаче явление хорошо знакомо абитуриенту; он может сам выбрать необходимые для решения значения физических величин и получить численный ответ. Для решения этой задачи надо понять, уяснить физическое явление, сформулировать простую (так как нужна лишь оценка) физическую модель этого явления, взять разумные значения физических параметров и, наконец, правильно пользуясь системой единиц, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. Заметим, что грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный начальный этап постановки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки.

Ниже приводятся два варианта письменного экзамена по физике 1977 года и задачи-оценки двух последних лет.

По поводу задач-оценок рекомендуется дополнительно прочитать статью Ю. Брука и А. Стасенко «Как физики делают оценки — метод размерностей и порядки физических величин» из сборника «О современной физике — учителю» (М., «Знание», 1975).

Вариант 1

1. С наклонной плоскости (рис. 1) соскальзывают два кубика с массами m_1 и m_2, связанные невесомой нерастяжимой нитью. Коэффициенты трения между кубиками и плоскостью равны соответственно k_1 и k_2, причем $k_2>k_1$. Плоскость наклонена к горизонту под углом α. Найти натяжение нити.

2. В вертикально стоящем цилиндрическом сосуде, заполненном воздухом, находятся в равновесии два тонких тяжелых поршня массы m каждый. Расстояние между поршнями равно расстоянию от нижнего поршня до дна сосуда и равно l. Сечение со-

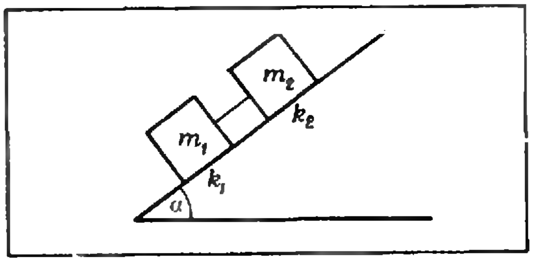


Рис. 1.

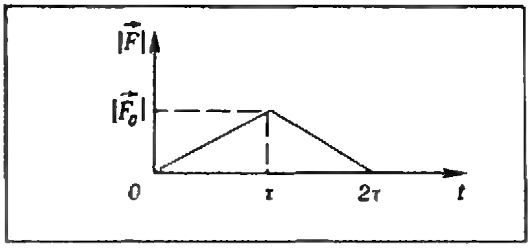


Рис. 2.

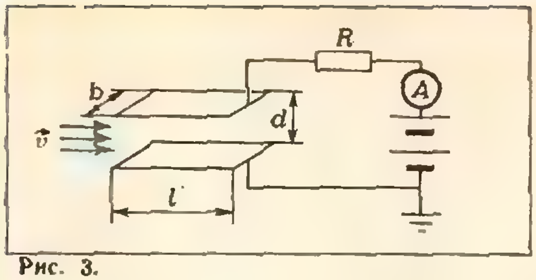


Рис. 3.

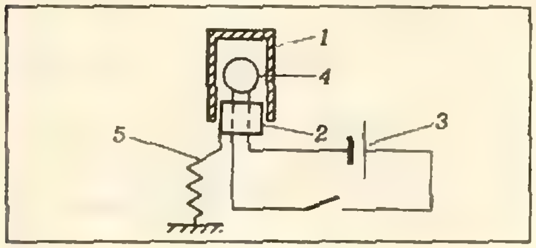


Рис. 4.

суда S, наружное давление p_0. На верхний поршень давят таким образом, что он перемещается на место нижнего. На каком расстоянии от дна будет находиться нижний поршень? Трения нет, температура постоянна.

3. На покоящееся тело массы M налетает со скоростью $\vec{v}$, направленной по линии центров, тело массы m. Сила, возникающая при взаимодействии тел, линейно растет в течение времени τ от нуля до значения $\left|\vec{F}_0\right|$, а затем линейно убывает до нуля за то же время τ (рис. 2). Определить скорости тел после взаимодействия и количество выделившегося тепла.

4. В плоский конденсатор направлен поток электронов, летящих со скоростью $\vec{v}$ параллельно пластинам (рис. 3). Концентрация электронов в потоке (число частиц в единице объема) равна n. Длина пластин l, ширина b, расстояние между ними d. К верхней пластине через сопротивление R и амперметр подключен положительный полюс батареи с э. д. с. $\mathscr{E}$ (внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь). Нижняя пластина и другой полюс батареи соединены. Найти показание амперметра. Масса электрона m, заряд e.

5. Пятью ударами молотка гвоздь забили в деревянную стенку. Оценить, какую силу нужно приложить к шляпке гвоздя, чтобы выдернуть его.

6. Пустотелая гильза *1* (рис. 4) надевается на пластмассовую затычку *2*, сквозь которую проведены проволочки электрической цепи *3* для поджигания горючей смеси *4*. Сначала затычка закрепляется на легкой проволочке-пружинке *5*. Смесь поджигается, гильза взлетает. Во втором случае затычка прикрепляется не к пружинке, а к массивному штативу. После зажигания гильза взлетает значительно выше. Объяснить эффект увеличения высоты.

Вариант 2

1. Два одинаковых плоских конденсатора соединены параллельно и заряжены до напряжения U. Пластины одного из конденсаторов разводят на большое расстояние. Найти напряжение и энергию второго конденсатора. Емкость каждого конденсатора C.

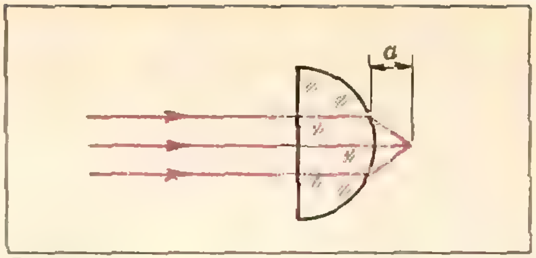


Рис. 5.

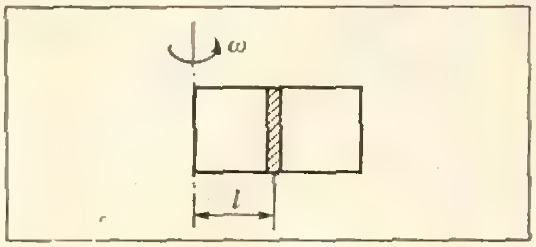


Рис. 6.

2. С какой силой давит на стенку цилиндрического стакана палочка массы m, наполовину погруженная в воду? Угол наклона палочки к горизонту α, трения нет.

3. Узкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления n, собирается на расстоянии a от выпуклой поверхности (рис. 5). На каком расстоянии b от плоской поверхности соберутся лучи, если пустить пучок с обратной стороны? Считать, что для малых углов $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \alpha$.

4. В запаянной с одного конца трубке сечения S находится поршень массы m на расстоянии l от запаянного конца (рис. 6). Другой конец трубки открыт, по обе стороны поршня — воздух с давлением p_0. Трубку начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через запаянный конец трубки. На каком расстоянии от дна трубки будет находиться поршень? Температура постоянна, трения нет.

5. Оценить, какая часть атмосферного кислорода Земли израсходуется при сжигании двух миллиардов тонн угля. (Эта цифра близка к мировой добыче угля за год.)

6. Скатившись с горки, шарик *1* налетает на два рядом стоящих таких же шарика *2* и *3*. Крайний справа шарик *3* после этого откатывается, а *2* стоит. Опыт видоизменяется так, что теперь шарик *1* бьет не прямо по шарику *2*, а через довольно толстую резиновую прокладку. При ударе через прокладку откатываются, причем вместе, оба шарика *2* и *3*. Объяснить различие в поведении шариков при наличии прокладки и без нее.

Задачи-оценки

1976 год

1. Оценить минимальное давление газов в стволе, возникающее при выстреле

из ружья. Ружейная пуля при вылете из ствола имеет скорость около 800 м/с.

2. Осветительная лампочка, имеющая тонкостенный непрочный баллон, заполняется инертным газом. Из каких соображений выбирается давление газа? Оцените его величину.

3. Оценить заряд, протекающий при ударе молнии в землю, если разряд начинается при напряженности поля на границе облака $|\vec{E}|=30$ кВ/см.

4. Оценить, с какой наименьшей скоростью можно ехать на водных лыжах.

5. За сколько ходов велосипедного насоса можно накачать футбольный мяч?

6. Оценить размеры (диаметр и длину) плавкого предохранителя, установленного в штепсельной розетке, обеспечивающего отключение электроутюга за время не более 0,1 с при десятикратной перегрузке по току. (Для расплавления 1 см^3 металла проволоки необходима энергия 6000 Дж. Удельное сопротивление проволоки равно $1{,}7\times10^{-8}$ Ом.м.)

7. Оценить скорость пара на выходе из носика чайника, кипящего на плитке мощностью 1 кВт.

1977 год

1. Оценить скорость пуль, вылетающих из патронов, брошенных в костер. При стрельбе из ружья скорость пули около 800 м/с.

2. Оценить, каким станет давление атмосферы, если вся жидкость в океанах испарится.

3. Оценить, на сколько и в какую сторону отклонится в высшей точке полета артиллерийский снаряд, запущенный на экваторе в вертикальном направлении.

4. Оценить давление воздуха в шахте глубиной 10 км.

П. Зубков,
Л. Лукьянчиков,
Г. Меледин,
В. Харченко

Ленинградский государственный университет им А. А. Жданова

Ниже приводятся образцы вариантов экзамена по математике, предлагавшихся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году. На факультетах математико-механическом, прикладной математики — процессов управления и физическом экзамены проходили в июле.

Математико-механический факультет

1. В зависимости от p указать те a, для которых уравнение

$$x^3+2px^2+p=a$$

имеет три различных корня.

2. Найти все решения уравнения

$$8\cos 6x\cdot\cos^3 x-\cos 9x-\cos 3x=0,$$

лежащие в интервале $\left]-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Сколькими способами можно 10 одинаковых подарков распределить между 6 детьми так, чтобы каждый ребенок получил хотя бы один подарок?

4. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь полной поверхности.

5. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=(1;\ 1;\ 1)$ и $\vec{b}=(1;\ -1;\ 3)$, образует с осью Oz тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $|\vec{c}|=3$.

Факультет прикладной математики — процессов управления

1. Для каких значений параметра p наименьшее на промежутке $[0;\ 1]$ значение кубического трехчлена x^3-2px^2+1 достигается на правом конце промежутка?

2. Найти все решения уравнения

$$5\left(\sin x+\frac{\cos 3x+\sin 3x}{1+2\sin 2x}\right)=\cos 2x+3,$$

лежащие в интервале $]0;\ 2\pi[$.

3. В 10 урнах распределены 6 белых и 6 черных одинаковых по размеру шаров, причем в каждой урне имеется хотя бы один шар.

Сколько существует различных вариантов распределения шаров?

4. При каком значении k касательная к графику функции $y=kx^2$ образует с осью Ox угол, равный $\dfrac{\pi}{3}$, и отсекает от 4-й четверти треугольник с площадью, равной $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$?

5. Вектор $\vec{a}$, у которого первая координата больше второй, перпендикулярен вектору $\vec{b}=(1;\ -3;\ -1)$ и образует с осью Oz угол, равный 135°. Найти его координаты, если известно, что $\left|\vec{a}\right|=5\sqrt{2}$.

Физический факультет

1. К обкладкам плоского конденсатора, расположенным вертикально, прикладывается переменное напряжение, создающее электрическое поле напряженностью $E = A \cos \omega t$. Найти закон движения и построить график кривой, по которой будет двигаться электрон, находящийся между обкладками конденсатора, с учетом силы тяжести. В начальный момент электрон покоится и находится на расстоянии l от ближайшей обкладки. Масса электрона равна m, заряд равен e, а l настолько большое, что в любой момент времени электрон не достигает обкладок конденсатора.

2. Найти три положительных числа, таких, чтобы их произведение было наибольшим, при условии, что сумма первого и второго чисел равна a, а сумма первого и третьего чисел равна $2a$.

3. Найти те решения уравнения

$$6 \operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} 3x} = \operatorname{tg} 2x,$$

которые принадлежат интервалу

$$\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[.$$

4. Сколькими способами можно разместить n одинаковых шаров по k ящикам?

5. Три шара касаются плоскости треугольника со сторонами a, b и c в его вершинах и попарно касаются друг друга. Найти радиусы шаров.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. В интервале $]0;\ 1[$ найти подмножество тех x, для которых справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{8+\log_a x} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_a^2 x}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$8 \cos x + 6 \sin x - \cos 2x - 7 = 0,$$

лежащие в промежутке $[0;\ 2\pi]$.

3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших чем 10^4, в записи которых в десятичной системе все цифры различные?

4. Дана криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = 0$, $x = a$ $(a > 0)$ и $y = x^3$. Какую часть площади трапеции составляет площадь треугольника, отсекаемого от данной трапеции касательной к линии $y = x^3$ в точке $x = \frac{2a}{3}$?

5. Определить высоту конуса, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности. Чему равна наибольшая площадь боковой поверхности?

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\frac{3(1 - \sin 3x)}{\sin x - \cos 2x} = 2 \cos 2x - 7,$$

лежащие в интервале $]-\pi;\ \pi[$.

3. Сколько существует целых положительных чисел, меньших чем 10^4 и делящихся на 4, в десятичной записи которых встречаются только цифры 0, 1, 2, 3, 5, причем так, чтобы одна и та же цифра не повторялась?

4. К графику функции $y = (x + 1)\sqrt{x}$ проведена касательная в той точке, где угловой коэффициент равен 2, причем касательная не проходит через начало координат. Найти точки пересечения этой касательной с координатными осями.

5. Каков должен быть радиус основания конуса с заданной площадью боковой поверхности S, чтобы объем конуса был наибольшим?

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + x} > 1 - 2x.$$

2. Найти все решения уравнения

$$\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x,$$

лежащие в интервале $\left]-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right[$.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{2 - \log_x 9} = -\frac{\sqrt{12}}{\log_3 x}.$$

4. Вычислить площадь криволинейного треугольника, лежащего в 1-й четверти и ограниченного линиями $xy = 4$, $x = y$, $y = 2x$.

5. Вектор $\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{b} = (12;\ -16;\ -15)$, образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{a}| = 100$, найти его координаты.

В. Осипов, В. Матвеев

В. Гутенмахер, П. Медведев

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ

У меня есть немало знакомых школьников, которые одновременно интересуются и социальными проблемами, и точными науками, прежде всего математикой. Они жалуются, что им трудно сделать выбор жизненного пути и отказаться от одной возможности приложения своих сил в пользу другой. Я думаю, что, поступив на отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ, они снимают проблему «отказа» от одного из интересующих их предметов.

Математические методы в экономической науке—одна из тех удивительно увлекательных областей, работая в которой, человек удовлетворяет и стремление активно участвовать в жизни общества, и потребность в познании глубинных законов природы.

Декан экономического факультета МГУ
профессор Г. Х. Попов

Экономико-математическая наука — быстро развивающаяся молодая дисциплина. Наверное, большинство читателей «Кванта» имеет о ней лишь смутное представление. Поэтому мы начнем не с перечисления сведений об отделении планирования и экономической кибернетики, а с более общего рассказа.

Об экономике и математике

В экономической жизни страны, тем более такой большой, как СССР, протекают весьма сложные процессы. Для того чтобы лучше в них разобраться и решать практические задачи, делаются попытки найти более или менее адекватные математические схемы этих процессов. Такие схемы называются *математическими моделями*.

Приведем пример сложного экономического процесса и соответствующую модель — модель *межпродуктового баланса* (в сильно упрощенном виде). Рассмотрим страну, хозяйство которой производит большой набор различных продуктов: сталь, газ, картофель, кинотеатры, костюмы, журнал «Кварк» и др.

Хозяйство в рассматриваемой стране плановое. Значит, нужно заранее понять, чего и сколько должно быть произведено, скажем, в течение предстоящего года. Планирование производства естественно начать с определения количества всевозможных продуктов, которые должны пойти на так называемое «конечное потребление» в течение года. Конечно потребленной считается та продукция (называемая *конечным продуктом*), которая приносит непосредственную пользу гражданину страны или коллективу граждан. Например, на конечное потребление каждый год идет определенное количество газа *), картофеля, костюмов, экземпляров журнала «Кварк», кинотеатров **).

Пусть нам известно, сколько каждого продукта должно пойти на конечное потребление (это отдельная трудная задача, здесь не обсуждаемая). Тогда нужно высчитать, какое количество разных продуктов необходимо произвести, чтобы получить конечный продукт в заданном объеме.

Сначала для простоты рассмотрим такую нелепую экономику, в которой производится и потребляется только газ ***). Попробуем составить для нее план производства, если известно, что на конечное потребление в плановый период должно пойти y единиц газа. На производство y ед. газа идет ay ед. газа *).

---

*) На конечное потребление идет, например, газ, сожженный в плите школьной столовой при варке супа.

**) Понять, как «потребляются» кинотеатры, можно так. Каждый кинотеатр рассчитан на определенный срок существования в k лет. Значит, каждый год он разрушается на $\frac{1}{k}$. «Просуммировав» разрушения, получим количество условных кинотеатров, «потребленных» за год.

***) Интересно, что по существу такую модель изучал министр финансов Людовика XVI А.-Н. Тюрго (1727—1781), правда, его интересовал не газ, а деньги, данные взаймы.

Естественно, нужно произвести по крайней мере $y + ay$ ед. газа. Но чтобы получить ay ед. газа, нужно еще $a \cdot ay$ ед. газа и т. д. Окончательно, чтобы потребить y ед. газа, нужно произвести

$$y + ay + a^2y + a^3y + \ldots + a^ny + \\ + \ldots \quad (*)$$

ед. газа. Если $a < 1$, то сумма (*) равна $y\,(1 - a)^{-1}$ (сумма бесконечной геометрической прогрессии). При $a \geqslant 1$ выражение (*) не имеет смысла; не может существовать и соответствующая экономика: на производство единицы продукта в ней идет не менее единицы этого же продукта.

В реальной экономике положение, естественно, значительно сложнее. Очевидно, для того чтобы иметь заданный конечный продукт, нужно произвести не только его, но и целый ряд других продуктов. Для того чтобы произвести газ, нужно иметь не только газ; нужно, например, иметь еще бурильную установку. В свою очередь, для производства бурильной установки требуются станки, сталь и т. п. Многое необходимо и для производства станков, стали и т. д. Некоторые из этих продуктов могут частично идти на конечное потребление, а некоторые совсем нет; например, бурильная установка не приносит непосредственной пользы при потреблении. Для исследования модели такой многопродуктовой экономики средств школьной математики уже недостаточно, однако такие задачи все же решаются (методами линейной алгебры). Необходимые при этом громоздкие вычисления производятся на ЭВМ.

Мы описали только одну экономическую проблему, в изучении которой существенно помогает математика. Таких проблем очень много. Например, задача рационального распределения ограниченных ресурсов, создание экономной схемы перевозок массовых грузов и т. д. *). Методы решения этих задач возникли очень недавно. Первая фундаментальная работа в этой области появилась менее 40 лет назад **) и принадлежит выдающемуся советскому математику, лауреату Ленинской и Нобелевской премий академику Л. В. Канторовичу.

Синтез экономики и математики создал новое направление в науке. Цель этого направления — с помощью математических методов и вычислительной техники глубже проникнуть в сущность сложных экономических явлений, научиться лучше видеть их причины, точнее предсказывать последствия, усовершенствовать методы планирования и управления народным хозяйством.

Экономико-математическая наука уже добилась немалых успехов, но решение самых интересных, самых трудных, самых важных задач еще впереди. Участие в их решении — задача студентов и выпускников нашего отделения.

Сведения об отделении планирования и экономической кибернетики

Студенты отделения могут выбрать одну из двух специальностей: «планирование народного хозяйства» или «экономическая кибернетика». В первом случае по окончании университета им присваивается квалификация «экономист, плановик-синтетик», во втором «экономист-математик». И те, и другие в процессе обучения могут на соответствующей кафедре отделения более углубленно заниматься вопросами управления народным хозяйством.

Студенты получают хорошую математическую подготовку. Они прослушивают основательные курсы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, математической статистики, математического программирования. Наряду с этим студенты получают глубокие знания по экономике.

---

*) В ay входит, например, газ, сжигаемый в турбинах компрессорных станций при перекачке газа по газопроводам.

*) Прочесть об этих и других смежных проблемах можно в «Кванте» № 2 за этот год в статье С. Семенова «Рукопись, найденная в Сарагосе», а также в старых номерах: 1970 г., № 4, с. 14; 1971 г., № 3, с. 1, № 4, с. 1; 1972 г., № 3, с. 6; 1973 г., № 6, с. 20; 1974 г., № 7, с. 13; 1975 г., № 7, с. 17; 1976 г., № 1, с. 28, № 7, с. 2.

**) Для сравнения напомним, что важнейшим достижениям высшей математики — интегральному и дифференциальному исчислениям — триста лет.

Традиции отделения таковы, что студенты, иногда даже младших курсов, могут принять участие в решении настоящих экономических проблем, работая вместе со своими преподавателями в специально созданных для этого группах. Многие из этих проблем решаются по заказам народнохозяйственных предприятий и учреждений, управляющих экономикой (например, вычислительного центра Госплана СССР, Госснаба СССР); это дает возможность исследователям непосредственно видеть свой успех или (к сожалению, в серьезной работе это бывает нередко) неудачу.

Обучение и научная работа студентов отделения происходят под руководством ведущих специалистов страны, таких как декан экономического факультета профессор Г. Х. Попов, заведующий кафедрой планирования народного хозяйства, член-корреспондент АН СССР А. И. Анчишкин, заведующий кафедрой математических методов анализа экономики, член-корреспондент АН СССР, лауреат Государственной премии С. С. Шаталин и др.

В распоряжении студентов — вычислительный центр с машиной ЕС-1020. Скоро вступит в строй машина ЕС-1022 и вычислительный кабинет, оборудованный новейшей техникой, предназначенной для удобного и быстрого общения с компьютером.

Студенты отделения проходят практику в научно-исследовательских институтах Госплана СССР, Госснаба СССР, в Центральном экономико-математическом институте, Всесоюзном научно-исследовательском институте системных исследований, в экономических учреждениях стран народной демократии, в Институте системного анализа в Вене и во многих других интересных для экономиста местах.

Лучшие выпускники направляются для дальнейшего повышения квалификации в аспирантуру. Остальные выпускники работают, как правило, в плановых и статистических органах, научно-исследовательских институтах, преподают в вузах.

Чтобы читатель мог составить себе представление о требованиях вступительного экзамена по математике, ниже публикуется экзаменационный вариант, предлагавшийся тем, кто окончил среднюю школу в 1977 году.

1. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{(x+3/2)^2} = |\cos x|.$$

2. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

3. Определить, при каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения.

4. В круг радиуса R вписана трапеция так, что центр круга лежит внутри трапеции. Одно из оснований трапеции равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону трапеции так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

5. В треугольной пирамиде $SA_1A_2A_3$ на сторонах основания A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 выбраны, соответственно, точки K_1, K_2, K_3 так, что

$$|A_1K_1|:|K_1A_2| = |A_2K_2|:|K_2A_3| = |A_3K_3|:|K_3A_1| = 2.$$

Через середину ребра SA_1 параллельно основанию пирамиды проведена плоскость π, которая пересекает отрезки SK_1, SK_2, SK_3 в точках L_1, L_2, L_3 соответственно. Треугольник $L_1L_2L_3$ принят за верхнее основание призмы, нижнее основание которой лежит в плоскости основания пирамиды. Найти объем призмы, если объем пирамиды $SA_1A_2A_3$ равен V.

Новая книга по истории астрономии

И. А. Климишин

АСТРОНОМИЯ ВЧЕРА И СЕГОДНЯ

«Астрономия вчера и сегодня» — так называется книга И. А. Климишина, вышедшая в свет в 1977 году*). Как видно из названия, книга посвящена истории астрономии. И хотя ограниченный объем книги не позволил автору рассказать о развитии всех отделов астрономии, но перед читателем отчетливо предстает история формирования современных представлений о строении окружающего нас мира.

Книга состоит из трех частей. Первая из них — «Рассвет науки» — посвящена зарождению астрономии, астрономическим представлениям народов Вавилона, Древнего Египта и Древнего Китая. В ней рассказывается о космологии античного мира, астрономии у арабов и народов Средней Азии; подробно рассказывается об идеях Аристотеля и Аристарха Самосского, работах Гиппарха и Птолемея. Описываются и некоторые астрономические инструменты древности. Эта часть книги прослеживает развитие астрономической науки в Европе вплоть до XV века.

Вторая часть — «Эпоха титанов» — охватывает период с XVI по XIX век, когда трудами Коперника, Бруно, Галилея, Тихо Браге, Кеплера, Ньютона, Ломоносова, Вильяма и Джона Гершелей, Струве и многих других ученых закладывались основы современной астрономии, обрисовывалась структура Солнечной системы, а затем и мира звезд. Попутно рассказывается о новых инструментах, об изобретении телескопов.

Часть третья — «Горизонты XX века» — начинается с описания методов и инструментов астрономии нашего времени. В этой части читатель найдет увлекательный рассказ о гигантских оптических и радиотелескопах, о том, что удалось узнать с помощью этих инструментов о многообразном мире звезд, туманностей, галактик, о недавно открытых чрезвычайно интересных объектах — пульсарах и квазарах. В разделах, посвященных космологии и космогонии, излагаются представления о структуре и эволюции Вселенной и отдельных ее объектов. Эти разделы написаны весьма сжато и, наверное, они представят определенную трудность для читателя.

Завершается книга кратким изложением современных представлений о возможности существования жизни (в том числе и разумной) за пределами Земли и о проблеме связи с внеземными цивилизациями.

Приложенный к книге небольшой, но хорошо подобранный список литературы поможет читателю наметить дальнейший круг чтения для расширения знаний в области астрономии.

За последние годы вышло несколько научно-популярных книг по астрономии, написанных И. А. Климишиным. Все эти книги отличает тщательный подбор материала, продуманное изложение и стремление как можно глубже проникнуть в физическую сущность описываемых явлений. И в этом смысле книгу «Астрономия вчера и сегодня» с полным правом можно отнести к числу лучших научно-популярных изданий по истории науки. Она дает достаточно полное и глубокое представление об астрономических картинах мира, соответствующих различным этапам развития астрономии, о трудах выдающихся деятелей науки о Вселенной. Автор приводит отрывки из их работ, что, несомненно, является еще одним достоинством книги. И дело не только в том, что цитируемые «источники в большинстве своем труднодоступны даже для тех любителей астрономии, которые имеют возможность в любое время посетить большую городскую библиотеку», как пишет автор в предисловии. Главное, эти отрывки позволяют читателю проникнуть в ход рассуждений ученого и, таким образом, глубже понять существо описываемой проблемы.

Читателям «Кванта», несомненно, эта книга принесет много пользы и доставит истинное удовольствие.

Книга привлечет внимание всех интересующихся историей астрономии и вообще историей науки. Она, несомненно, заслуживает переиздания. При этом представляется целесообразным расширение третьей части книги — рассказа о современной астрономии.

И. Р.

---

*) И. А. Климишин. Астрономия вчера и сегодня. «Наукова думка», 1977, 255 с., ц. 62 к.

Напряженность, напряжение, потенциал

1. Не может, иначе работа по перемещению заряда по замкнутому контуру была бы отлична от нуля.

2. При $R_1 > r > 0$ $E = 0$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$; при $R_2 > r > R_1$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$; при $r > R_2$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r^2}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2}{r}$ (рис. 1).

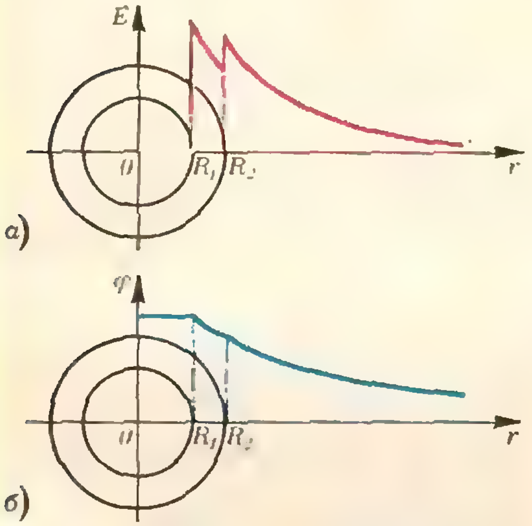


Рис. 1.

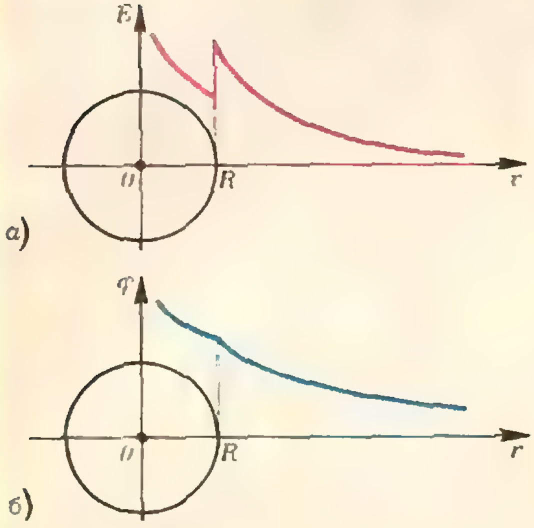


Рис. 2.

3. При $R > r > 0$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R}\right)$; при $r > R$ $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{q + Q}{r^2}$ и $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q + Q}{r}$ (рис. 2).

4. Энергия конденсатора не изменяется; изменяется энергия взаимодействия электрона и конденсатора (работа по перемещению электрона в бесконечность из начальной и конечной точек не одна и та же).

5. $W_1 = CU^2/2$, $W_2 = CU^2/4$; ровно половина энергии перешла в тепло (независимо от сопротивления подводящих проводов).

6. $\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{d}$ (потенциал сферы такой же, как в ее центре, а там суммарный потенциал поля индуцированных на сфере зарядов равен нулю).

Производная и касательные

1. а) $y = -x + \pi/2$, $y = -1$; б) $y = x$. 2. $\pi/4$. 3. $\beta = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Указание. Кривые пересекаются в точках M_0 (2; 2) и M_1 (0; 0), но во втором случае нет касательной к первой кривой, так как функция $\sqrt{2x}$ не определена при $x < 0$. 4. M_0 (0; —1) и M_1 (4; 3). 5. $y = -4x + 5$. 6. а) M_0 (2; — 1); б) M_1 (2,5; —0,75). 7. M_0 (1; —3). 8. M_0 ($^1/_8$; $-^1/_{16}$). Указание. Для прямой $k = {}^4/_3$, для касательной должно быть $k_1 = -{}^3/_4$. Кривая является объединением графиков функций $\sqrt{2}x^{3/2}$ и $-\sqrt{2}x^{3/2}$. 9. а) 4,5. Указание. Уравнение касательной имеет вид $y = -x + 3$, она пересекает данную кривую в точках с абсциссами $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. б) $^4/_3$. Указание. Здесь касательная $y = x + 2$, она пересекает параболу в точках с абсциссами $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 10. $b = -2$, $c = 0$. Указание. $y = 0$ при $x = 2$, отсюда из уравнения прямой $b = -2$; из уравнения параболы получаем $c = 0$. Заметим, что касательная здесь ни при чем (хотя задачу можно решать и используя уравнение касательной, ответ будет тот же, прямая $y = 2x - 4$ «случайно» оказывается касательной к параболе $y = x^2 - 2x$). 11. $x_1 = -2$, $x_2 = 5$. 12. $y = -4x + 7$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математико-механический факультет

1. Если $p > 0$, то $a \in \left]p; \frac{32}{27}p^3 + p\right[$.

Если $p = 0$, таких a нет. Если $p < 0$, то

$a \in \left]\frac{32}{27}p^3 + p;\ p\right[$. 2. $\left\{-\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}\right\}$. 3. $C_9^5 = 126$ способов. 4. $\frac{23-\sqrt{17}}{16}R$.

5. $\left(\sqrt{6};\ -\frac{\sqrt{6}}{2};\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Факультет прикладной математики — процессов управления

1. $\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right[$. 2. $\left\{\frac{\pi}{3};\ \frac{5\pi}{3}\right\}$.

3. Указание. Либо в какой-то урне 3 шара и в 9 урнах — по 1 шару, либо в каких-то двух урнах — по 2 шара и в 8 урнах — по 1 шару. Ответ. 26 250 вариантов.

4. $\frac{3}{16}$. 5. (4; 3; —5).

Физический факультет

1. Если за начало координат принять начальное положение электрона, ось абсцисс направить перпендикулярно обкладкам конденсатора в сторону начального смещения электрона и ось ординат направить перпендикулярно вниз, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{Ae}{m\omega^2} - \dfrac{Ae}{m\omega^2}\cos\omega t, \\ y = \dfrac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

2. $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a,\ \frac{\sqrt{3}}{3}a,\ \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)a$.

3. $\left\{\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right),\ -\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$.

4. Легко установить взаимно однозначное соответствие между способами размещения n одинаковых шаров по k (различным) ящикам и способами размещения $n+k$ одинаковых шаров по k ящикам, при которых в каждом ящике лежит хотя бы по одному шару. Число этих последних способов равно числу способов размещения $k-1$ перегородок между положенными в ряд $n+k$ шарами. Между $n+k$ шарами $n+k-1$ мест. Ответ. C_{n+k-1}^{k-1}.

5. $\frac{bc}{2a},\ \frac{ac}{2b},\ \frac{ab}{2c}$.

Отделение экономической кибернетики и отделение планирования народного хозяйства экономического факультета, химический факультет и факультет психологии

1. Если $0<a<1$, то $x \in]0;\ a^8[$. Если $a>1$, то $x \in \left]0;\ \frac{1}{a^4}\right[$. 2. $\left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ 2\pi\right\}$.

3. Указание. Такие числа могут быть однозначными, двузначными, трехзначными и четырехзначными. Ответ. 5274 числа.

4. $\frac{200}{243}$. 5. $\frac{4}{3}R$, $\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi R^2$.

Биолого-почвенный и географический факультеты

1. $\left[1;\ \frac{3}{2}\right[$. 2. $\left\{-\frac{\pi}{6},\ -\frac{5\pi}{6}\right\}$.

3. 31. 4. $\left(0;\ \frac{4}{27}\right)$ и $\left(-\frac{2}{27};\ 0\right)$.

5. $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$.

Геологический факультет и отделение политэкономии экономического факультета

1. $\left]\frac{5-\sqrt{13}}{6};\ +\infty\right[$. 2. $\left\{-\frac{\pi}{8},\ -\frac{\pi}{18},\ \frac{\pi}{8}\right\}$. 3. $\frac{1}{9}$. 4. $2\ln 2$.

5. $(-48;\ 64;\ 60)$.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова

1. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ \cos x \cdot \left[\dfrac{1}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2} - 1\right] = 0. \end{cases}$$

При $x_0 = -\frac{5}{2}$ имеем $\cos x_0 < 0$. Ответ. $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. В 4 раза.

3. Первое уравнение данной системы — это уравнение окружности с центром в начале координат и длиной радиуса $\sqrt{2(1+a)}$. Второе уравнение можно преобразовать так: $(x+y-\sqrt{14})(x+y+\sqrt{14}) = 0$, откуда видно, что оно задает на координатной плоскости пару параллельных прямых: $y = -x+\sqrt{14}$ и $y = -x-\sqrt{14}$. Условие задачи выполняется тогда и только тогда, когда указанная окружность касается этих прямых (рис. 3). Ответ. $\frac{5}{2}$.

4. Пусть $ABCD$ — данная трапеция $(AB) \parallel (CD)$, $|AB| = R\sqrt{3}$, O — центр данного круга (нам не важно, является отрезок AB большим или меньшим основанием трапеции). Легко видеть, что $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$ и площадь треугольника AOB не меняется при изменении боковых сторон трапеции, поэтому будем искать боковую сторону

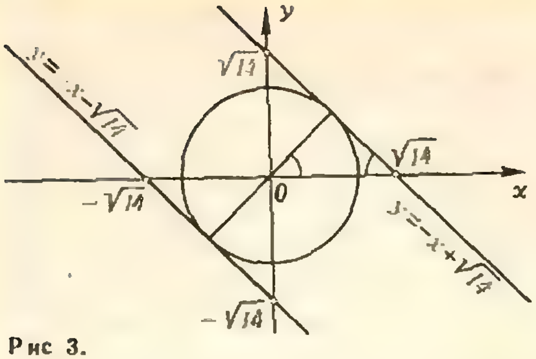


Рис 3.

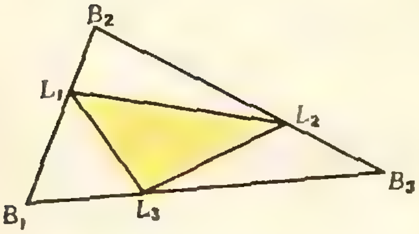


Рис. 4.

трапеции так, чтобы сумма площадей треугольников BOC, DOC и AOD была наибольшей. Пусть $\widehat{BOC} = \widehat{DOA} = \alpha$. Очевидно, $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$. Указанная сумма площадей равна $R^2\left[\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi}{3} - 2\alpha\right)\right]$. При помощи производной находим, что она будет наибольшей при $\alpha = \frac{4\pi}{9}$. Поскольку $|BC| = 2R \cdot \sin \widehat{BAC}$ («Геометрия 8», п. 112) и $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$, получаем **ответ**:

$$|AD| = |BC| = 2R \cdot \sin\frac{2\pi}{9}.$$

5. Рассмотрим сечение $B_1B_2B_3$ пирамиды плоскостью π (рис. 4). Выразим площадь $S_{L_1L_2L_3}$ основания призмы через площадь S основания пирамиды. Поскольку треугольник $B_1B_2B_3$ гомотетичен треугольнику $A_1A_2A_3$ с коэффициентом гомотетии $\frac{1}{2}$, получаем $S_{B_1B_2B_3} = \frac{1}{4}S$. Из

$$\frac{S_{L_1B_2L_2}}{S_{B_1B_2B_3}} = \frac{\frac{1}{2}|L_1B_2|\cdot|B_2L_2|\cdot\sin \widehat{L_1B_2L_2}}{\frac{1}{2}|B_1B_2|\cdot|B_2B_3|\cdot\sin\widehat{B_1B_2B_3}} = \frac{|L_1B_2|}{|B_1B_2|}\cdot\frac{|B_2L_2|}{|B_2B_3|}$$

получаем $S_{L_1B_2L_2} = \frac{2}{9}S_{B_1B_2B_3} = \frac{1}{18}S$.

Аналогично, $S_{L_2B_3L_3} = S_{L_3B_1L_1} = \frac{1}{18}S$.

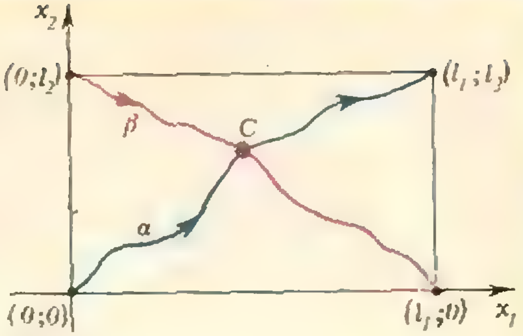


Рис. 5.

Следовательно, $S_{L_1L_2L_3} = \frac{1}{12}S$. **Ответ**: $\frac{1}{8}V$.

Арифметика и геометрия столкновений

(см. «Квант» № 4)

1. Если x_1, x_2 — координаты шаров, то конфигурационным пространством будет треугольник $\{(x_1, x_2)\,|\,0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant a\}$ на плоскости Ox_1x_2. Чтобы точка $M(x_1; x_2)$ отражалась от гипотенузы по закону «угол падения равен углу отражения», нужно вместо x_1, x_2 ввести координаты $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1}\,x_1$, $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2}\,x_2$; тем самым система сведется к биллиарду в прямоугольном треугольнике с отношением катетов $\sqrt{m_1} : \sqrt{m_2}$.

2. Введем вдоль обеих дорог координаты x_1 и x_2, отсчитываемые от пункта A. Одновременное расположение двух движущихся по дорогам объектов в точках x_1 и x_2 будем обозначать точкой $M = M(x_1; x_2)$ на плоскости Ox_1x_2. При одновременном движении объектов точка M будет перемещаться по конфигурационному пространству, которое представляет собой прямоугольник

$$\Pi = \{(x_1; x_2)\,|\,0 \leqslant x_1 \leqslant l_1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant l_2\}$$

(l_1 и l_2 — длины дорог). Движению машин отвечает движение точки M по некоторой кривой α, идущей из точки (0; 0), соответствующей одновременному положению машин в пункте A, в точку (l_1; l_2), соответствующую прибытию обеих машин в пункт B (см. рисунок). Встречному движению возов отвечает движение точки M по кривой β, соединяющей две другие вершины прямоугольника Π (объясните). Кривые α и β обязаны пересечься в некоторой точке C, и в соответствующий момент времени возы радиусов r окажутся ровно в тех же положениях, в каких были машины, связанные веревкой длины меньше $2r$. Следовательно, возы разъехаться не смогут.

Читатели советуют

(см. «Квант» № 4)

1. $x_{1,2} = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3}) + \pi n$;

$x_{3,4} = \operatorname{arctg}\frac{338 \pm \sqrt{113\,519}}{25} + \pi k$ ($n, k \in \mathbb{Z}$).

Указание. Воспользоваться формулой

$$\frac{1}{|\cos x|} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

и после подстановки $\operatorname{tg} x = y$ прийти к уравнению

$$\sqrt{1+y^2} + \sqrt{6}\,(1+y) = 8\sqrt{y}.$$

Для решения последнего уравнения удобно сделать замену неизвестного $\frac{y+1}{\sqrt{y}} = z$.

2. $x_1 = -24$, $x_2 = 3$. Указание. Ввести вспомогательные неизвестные $u = \sqrt[3]{24+x}$, $v = \sqrt{12-x}$, прийти к системе

$$u + v = 6,\ u^3 + v^2 = 36$$

и исключить из нее v.

3. $x = y = z = 2$. Указание. Заметить, что второе уравнение системы можно переписать в виде

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = 0,$$

откуда следует, что $x = y = z$.

4. $x = 1$.

5. $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

Указание.

$$x^3 - 2x + 1 = (x^3 - x^2) + (x^2 - 2x + 1).$$

6. $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13}$.

Указание.

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 =$$
$$= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) - (x^2 - 2x + 1).$$

7. $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Указание. Левую часть данного уравнения приравнять произведению двух квадратных трехчленов

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

с неопределенными коэффициентами и подобрать эти коэффициенты.

8. $m:n \cos\alpha$. Указание. Пусть высота BE, проведенная к стороне AD, пересекает диагональ AC в точке K. Заметить, что $\triangle AKE \backsim \triangle CKB$; величину $|AE|$ найти из треугольника AEB.

9. $2(2-\sqrt{3})a$. Указание. Пусть L — центр одного из полукругов, а O — цент искомого круга. Обозначим через T точку пересечения прямой, проходящей через точку O параллельно стороне квадрата, на которой лежит точка L, с радиусом полукруга, перпендикулярным упомянутой стороне квадрата. К треугольнику LTO применить теорему Пифагора.

10. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\varphi)$. Указание. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного в плоскости P из точки B на ребро двугранного угла, а N — основание перпендикуляра, опущенного в плоскости Q из точки C на это ребро. Тогда

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB},\ \vec{AC} = \vec{AN} + \vec{NC}.$$

Вычислить скалярное произведение $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ и воспользоваться тем, что $[AB] \perp [AC]$.

11. $^2/_3 R(1+2\cos\alpha)$. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида; $[SH]$ — ее высота, опущенная на грань ABC; точка O — центр описанного шара; точка M — середина бокового ребра $[SA]$. Доказать, что точка O лежит на высоте $[SH]$ и что $[OM] \perp [SA]$. Провести апофему $[SD]$ грани SAB и построить прямоугольный треугольник HDA. Введем вспомогательный угол $\widehat{ASH} = x$; тогда из треугольников SHA, HDA и SDA

$$\sin x = \frac{\sin \alpha/2}{\cos 30^\circ}.$$

Далее, из треугольника SMO выразить $|SM|$, а из треугольника SHA найти $|SH|$.

12. $\frac{d^3}{3\sin\frac{3\alpha}{2}}$. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида, а $[SH]$ — ее высота, опущенная на грань ABC. Провести апофему $[SD]$ грани ASB и доказать, что длина перпендикуляра $[DM]$, опущенного из точки D на ребро $[SC]$, равна d. Введем вспомогательный угол $\widehat{SAH} = x$; тогда из треугольников SHA, SDA и HDA

$$\cos x = \frac{\sin \alpha/2}{\cos 30^\circ}.$$

Далее заметить, что $\widehat{SCD} = x$, и выразить $|CD|$, $|AD|$ и $|SH|$ из треугольников CMD, HDA и SHC соответственно, используя вспомогательный угол.

13. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида. Построим линейные углы $\angle AMC$ и $\angle SNC$ двугранных углов; доказать, что прямая (CD) пересечения плоскостей AMC и SNC перпендикулярна плоскости ASB. Показать, что $\widehat{DCA} = \alpha/2$, и обозначить $\widehat{SNC} = x$. Тогда из треугольников ADC, NDC и ANC

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{|CD|}{|CA|} = \frac{\frac{|CD|}{|CN|}}{\frac{|CA|}{|CN|}} = \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos 30^\circ}}.$$

Московский физико-технический институт

(см. «Квант» № 4)

Математика

Вариант I

1. $\operatorname{arctg} 2 + \pi k\ (k \in Z)$. 2. $]-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{2}[\,\cup\,]-1; \frac{\sqrt{7}}{2}[\,\cup\,]\frac{4}{3}; +\infty[$.

3. Указание. Перенести все в левую часть и разложить на множители или разделить обе части на $\lg^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$ и решить получившееся вспомогательное квадратное уравнение. Ответ. $\left\{0, \frac{7}{4}, \frac{3+2\sqrt{6}}{2}\right\}$.

4. $\frac{b+\sqrt{b^2+4ab}}{2}$ км.

5. Пусть $[KN] \parallel (SAD)$, $K \in [BD]$, $N \in [SC]$ (рис. 6). Обозначим $|DK|:|DB|$ через x. Тогда $0 \leqslant x \leqslant 1$. Проведем отрезок $[KP]$ параллельно $[AD]$ $(P \in [DC])$. Поскольку $(KNP) \parallel (ASD)$, имеем $(PN) \parallel (SD)$. Из подобия треугольников DKP и DBC получаем $|PK| = xa$, $|DP| = xa$. Поскольку $|PC| = (1-x)a$, из подобия треугольников PCN и DCS находим $|PN| = 2(1-x)a$. Из $\triangle ASD$ $\cos \widehat{SDA} = \frac{1}{4}$. Поскольку $\widehat{NPK} = \widehat{SDA}$, получаем $\cos \widehat{NPK} = \frac{1}{4}$. Из $\triangle KNP$ по теореме косинусов находим

$$|KN|^2 = (6x^2 - 9x + 4)a^2. \qquad (1)$$

Легко видеть, что верно и обратное: для любого $x \in [0, 1]$ найдется такой отрезок $[KN]$, параллельный плоскости (SAD), что $K \in [BD]$, $N \in [SC]$ и $|DK| : |DB| = x$. Таким образом, равенство (1) задает квадрат длины отрезка KN как функцию, определенную на $[0;1]$. Найдя при помощи производной наименьшее значение этой функции на отрезке $[0;1]$, получим $\min |KN|^2 = \frac{5}{8}a^2$. Впрочем, поскольку исследуемая функция является квадратичной, ее наименьшее значение можно найти и без производной, если воспользоаться тем, что функция $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, у которой $\alpha > 0$, принимает наименьшее значение при $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Ответ. 1) $|MN| = \sqrt{\frac{5}{3}}a$; 2) $\min |KM| = \sqrt{\frac{5}{8}}a$.

6. Пусть $\triangle MNP$ удовлетворяет условиям задачи, и пусть $Q(x_0; y_0)$ — середина гипотенузы MN (рис. 7.) Обозначим $|MQ|$ через a. Координаты вершин треугольника MNP легко выражаются через x_0, y_0 и a: $M(x_0 - a;\ y_0)$, $N(x_0 + a;\ y_0)$, $P(x_0;\ y_0 - a)$. Учитывая, что точки M и P лежат на графике функции $y = \frac{1}{x}$, а точка N — на графике функции $y = 5 - \frac{3}{2}x$, получаем систему 3 уравнений с 3 неизвестными. Ответ. $\frac{5}{3}$, $\frac{5\sqrt{2}}{6}$, $\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

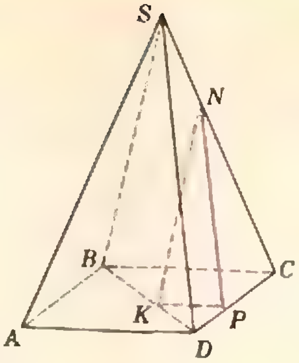


Рис. 6

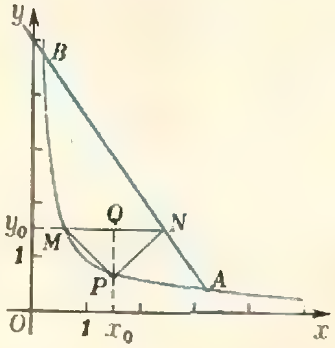


Рис. 7.

Вариант 2

1. -17. 2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = (-1)^{l+1} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{a \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$. 4. 2, 4, 8, 12 и $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. 5. 1) $\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin\beta}$;

2) $\frac{a\sqrt{3}\sin\alpha}{4(\sin\alpha + \sin\beta)}$.

6. Заметим, что если точка $M(x;\ y)$ удовлетворяет данной системе неравенств, то точка $M'(-x;\ y)$, симметричная M относительно оси Oy, также будет удовлетворять этой системе. Следовательно, фигура, задаваемая системой, симметрична относительно оси Oy, и ее площадь равна удвоенной площади части этой фигуры, выделяемой условием $x \geqslant 0$. Поэтому рассмотрим систему неравенств при дополнительном условии $x \geqslant 0$.

Второе неравенство системы при $x \geqslant 0$ можно записать в виде $y \geqslant 2\sqrt{3}x - 4$. Обратимся теперь к первому неравенству

$$\sqrt{3x^2+3y^2-3} \geqslant 2y+1. \qquad (2)$$

Областью определения левой части является множество точек на координатной плоскости, удовлетворяющих условию

$$x^2+y^2 \geqslant 1. \qquad (3)$$

Рассмотрим два случая: а) $2y+1<0$ и б) $2y+1 \geqslant 0$. В случае а) неравенства (2) и (3) равносильны, поскольку при условии (3) очевидным образом выполняется и (2).

В случае б) обе части неравенства (2) неотрицательны, поэтому, возведя обе части в квадрат, получим неравенство

$$3x^2+3y^2-3 \geqslant (2y+1)^2, \qquad (4)$$

которое можно привести к виду

$$(y+2-\sqrt{3}x)(y+2+\sqrt{3}x) \leqslant 0.$$

Поскольку $x \geqslant 0$ и $2y+1 \geqslant 0$, выражение $y+2+\sqrt{3}x$ всегда положительно; сокращая на него, получим

$$y+2-\sqrt{3}x \leqslant 0.$$

Заметим, что в случае б) из (4) вытекает неравенство (3).

Окончательно получаем, что исходная система при условии $x \geqslant 0$ в соответствии с разобранными выше случаями а) и б) равносильна совокупности двух систем

$$\text{а)} \begin{cases} y < -\dfrac{1}{2}, \\ x^2+y^2 \geqslant 1, \\ y \geqslant 2\sqrt{3}x-4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} y \geqslant -\dfrac{1}{2}, \\ y \leqslant \sqrt{3}x-2, \\ y \geqslant 2\sqrt{3}x-4. \end{cases}$$

Построим теперь на координатной плоскости фигуру, которая задается совокупностью систем а) и б) при условии $x \geqslant 0$. Для этого исследуем взаимное расположение прямых с уравнениями $y=-\frac{1}{2}$, $y=\sqrt{3}x-2$, $y=2\sqrt{3}x-4$ и окружности $x^2+y^2=1$. Прямые $y=\sqrt{3}x-2$ и $y=2\sqrt{3}x-4$ пересекают ось Oy в точках $A\ (0;\ -2)$ и $E\ (0;\ -4)$ соответственно, а ось Ox в одной и той же точке $B\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\ 0\right)$ (рис. 8). Докажем, что прямая (AB) касается окружности $x^2+y^2=1$. Из точки O опустим перпендикуляр $[OC]$ на (AB), а из точки C — перпендикуляр $[CF]$ на (OA). Заметим, что $\widehat{OAB}=30^\circ$. Тогда из прямоугольных треугольников ACO и CFO получим $|OC|=1$, $|OF|=\frac{1}{2}$, $|CF|=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что прямая (AB) касается окружности в точке $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$, а прямая $y=-\frac{1}{2}$, проходит через точку касания.

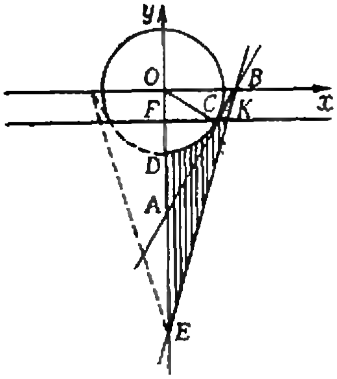


Рис. 8.

Система а) при условии $x \geqslant 0$ задает пересечение четырех множеств: первое множество состоит из точек, расположенных ниже прямой (CF), второе — из точек, расположенных вне окружности $x^2+y^2=1$ и на самой окружности, третье — из точек, расположенных выше прямой (BE) и на самой прямой, четвертое — из точек, расположенных правее оси Oy и на самой оси. Это пересечение дает фигуру $DCKE$ (на рис. 3 она указана вертикальной штриховкой). Аналогично получаем, что система б) задает треугольник BCK, включая его стороны (на рис. 8 он указан горизонтальной штриховкой). Таким образом, исходная система неравенств при условии $x \geqslant 0$ задает фигуру $CBED$, ограниченную отрезками $[CB]$, $[BE]$, $[ED]$ и дугой окружности DC. Ее площадь можно вычислить по формуле

$$S=S_{\Delta ABE}+S_{\Delta AOC}-S_C,$$

где S_C — площадь сектора COD с центральным углом, равным по величине 60°. Таким образом,

$$S=\frac{1}{2}|AE|\cdot|OB|+\frac{1}{2}|AO|\cdot|CF|-\frac{\pi}{6}=\frac{7\sqrt{3}-\pi}{6}.$$

Пунктирная линия вместе с отрезком $[DE]$ на рис. 8 ограничивает часть фигуры, задаваемой исходной системой при условии $x<0$.

Ответ: $\dfrac{7\sqrt{3}-\pi}{3}$.

Физика

Вариант 1

1. $|\vec{v}|=|\vec{F}_{\max}|\,\Delta t/2m=1$ м/с.
2. $\tau=30$ мин.
3. $q_1=\dfrac{C_1C_2(U_0+|\vec{E}_0|\,d)}{C_1+C_2}$;

$q_2=\dfrac{C_1C_2(U_0C_2/C_1-|\vec{E}_0|\,d)}{C_1+C_2}$. **Указание.** Записать закон сохранения заряда: $q_1+q_2=C_2U_0$ и закон сохранения энергии (работа по перемещению заряда по замкнутому контуру в электростатическом поле равна нулю): $q_1/C_1 - |\vec{E}_0|\,d - q_2/C_2 = 0$.

4. $l = \dfrac{d_0}{2(1 - d_0 D)} = 6{,}25$ см (здесь $d_0 = 25$ см — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза).

Вариант 2

1. $|\vec{F}| = \dfrac{m\,|\vec{g}|}{2}\left(\dfrac{a}{b}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$.

2. $m_{\min} = \rho_в h_1 S_2 = 3$ кг (здесь $\rho_в = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).

3. $P = \dfrac{U^2}{2}\left(\dfrac{1}{R'} + \dfrac{1}{R''}\right) = 423{,}5$ Вт

(здесь $R' = \dfrac{R_2 R_1}{R_2 + R_3}$ — сопротивление цепи при протекании тока слева направо, а $R'' = \dfrac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$ — при протекании тока справа налево).

4. Зеркало вогнутое (см. рис. 9).

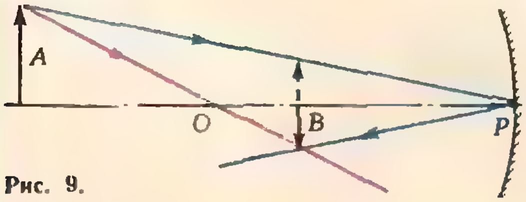


Рис. 9.

Вариант 3

1. $|\vec{v}_{\max}| = \sqrt{k\,|\vec{g}|\,R} = 20$ м/с $= 72$ км/ч.

2. $N = N_0 \dfrac{pSv}{RT} \approx 6\cdot 10^{19}\,с^{-1}$. Примечание. При решении задачи предполагалось, что молекулы воздуха неподвижны. Это предположение справедливо, так как средняя квадратичная скорость молекул воздуха много меньше скорости спутника.

3. $U \leqslant \dfrac{v^2\cos^2\alpha}{e/m} = 142$ В.

4. $d = F(1 + h/p) = 225$ см.

Вариант 4

1. $k \geqslant \dfrac{(|\vec{v}| - 2\pi n R)^2}{R\,|\vec{g}|} \approx 0{,}4$.

2. $T_1 = \dfrac{A}{R(k-1)}$.

3. $|\vec{v}_{\min}| = \dfrac{\sqrt{2\,e/mU}}{\cos\alpha} \approx 9\cdot 10^6$ м/с.

4. Изображение мнимое.

Куйбышевский государственный университет

(см. «Квант» № 3)

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. Пусть $SABC$ — данная пирамида (см. рис. 10). Из точки A опустим перпендикуляр AH на SC ($H \in [SC]$). Тогда $SH \perp HB$. Следовательно $\widehat{AHB} = \alpha$. Из точки C опустим перпендикуляр CM на AB ($M \in [AB]$). Из $|AM| = |MB|$ и $|AH| = |HB|$ вытекает $HM \perp AB$. Поскольку пирамида $SABC$ правильная, основание L ее высоты лежит на CM. Обозначим $|MB|$ через a, $|SL|$ через h, $\widehat{LSC}$ через β. Из $SH \perp HA$ и $SH \perp HB$ следует $SH \perp HM$. Из $SH \perp HM$ и $SL \perp MC$ вытекает $\widehat{HMC} = \widehat{LSC} = \beta$. Учитывая $|CM| = a\sqrt{3}$, из $\triangle SLC$ находим $h = \dfrac{2a}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\beta}$. Из $\triangle HMB$ получаем $|MH| = \dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. Тогда из $\triangle MHC$ имеем $\cos\beta = \dfrac{|MH|}{|MC|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}}$. Из $\triangle MHC$ находим $|HC| = a\sqrt{3}\sin\beta$. Обозначим $\widehat{HBC}$ через γ. Из $\triangle HBC$ получаем $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$. Из точки S опустим перпендикуляр SN на BC ($N \in [BC]$). Из $SN \perp BC$ и $SC \perp BH$ следует $\widehat{CSN} = \widehat{HBC} = \gamma$. Тогда $\widehat{BSC} = 2\gamma$. Поскольку $|BC| = 2R\cdot\sin\widehat{BSC}$ («Геометрия 8», п. 112), $a = R\sin 2\gamma$. Таким образом, мы выразили фактически a и h через R и α. Теперь находим

$$V = \frac{1}{3}(\sqrt{3}a^2)\,h = \frac{R^3}{12}\cdot\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^6\dfrac{\alpha}{2}}\times\left(3\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

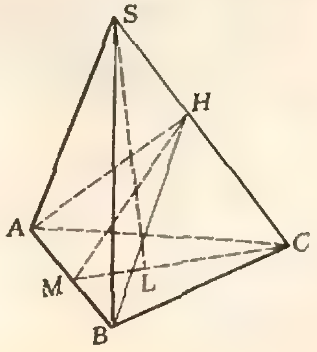


Рис. 10.

2. Уравнение $\sin\alpha x\cdot\sin\beta x=1$ равносильно уравнению $\cos(\alpha+\beta)x-\cos(\alpha-\beta)x=2$; это последнее, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta)x=1,\\ \cos(\alpha-\beta)x=-1.\end{cases}$$

Следовательно, $x=\dfrac{2\pi k}{\alpha+\beta}=\dfrac{\pi(2l+1)}{\alpha-\beta}$, где $k, l\in Z$. Отсюда $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2k+2l+1}{2k-2l-1}$, что противоречит иррациональности $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

3. Чтобы исследовать знак производной в окрестности каждой критической точки, удобно первоначальное выражение для производной преобразовать:

$$y'=-\sin x-\sin 2x+\sin 3x=$$
$$=4\sin x\,(\cos x-1)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right).$$

Искомая разность равна $2\frac{1}{4}$.

4. $S=\int\limits_0^1\sin\pi x\,dx+\int\limits_0^1[-4(x^2-x)]\,dx=$
$=\dfrac{2}{\pi}+\dfrac{2}{3}$. **5.** $]-5;8[\cup]8;9[$.

Физический факультет

1. Введем систему координат с началом A и базисом $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}\right)$. В этом базисе $\overrightarrow{A_1C}=(1;1;-1)$, $\overrightarrow{AB_1}=(0;1;1)$, $\overrightarrow{B_1D_1}=(1;-1;0)$. Поскольку $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$ и $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=0$, $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{B_1D_1}$. Значит, прямая A_1C перпендикулярна к параллельным плоскостям AB_1D_1 и BC_1D. Следовательно, длины трех отрезков, на которые диагональ A_1C делится этими плоскостями, равны, соответственно, расстояниям от точки A_1 до плоскости AB_1D_1, между плоскостями AB_1D_1 и BC_1D и от точки C до плоскости BC_1D. Расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости AB_1D_1, уравнение которой $x+y-z=0$, равно $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Расстояние от C до плоскости BC_1D тоже равно, очевидно, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Но $|A_1C|=\sqrt{3}$. Следовательно, на долю расстояния между плоскостями остается $\dfrac{1}{3}|A_1C|$.

2. $8\sqrt{2}$. **3.** $\left[\dfrac{-7-2\sqrt{11}}{5};\ \dfrac{-7+2\sqrt{11}}{5}\right]$.

4. $\left]-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{\pi}{3}\right]\cup\left[\dfrac{5\pi}{3};\ 6\right[$.

Химико—биологический факультет

1. $\dfrac{a^3}{12}\cdot\dfrac{\sin^3\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$.

2. $S=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}(x^2-8x-\sqrt{3}x+1)\,dx-$
$-\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0}(2x^2-8x+1)\,dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** $[1;4]$.

4. Последовательность (x_n) убывает $(x_{n+1}<x_n)$ и ограничена $(x_n>0)$.

Из билетов устного экзамена

4. $x=5$, $y=7$. **5.** $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{17}-1}{20}+2\pi k\ (k\in Z)$ **6.** $x_1=-2$, $x_2=3$.
7. $x\in\left]\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \dfrac{5\pi}{2}+2\pi k\right[\ (k\in Z)$.

Физика

1. Нет. Когда величина угла падения стремится к $\pi/2$, величина смещения стремится к толщине пластины. **2.** $I=\dfrac{3\mathcal{E}}{R+3r}$, $Q=\dfrac{C\mathcal{E}R}{R+3r}$. **3.** $|\vec{v}_0|>s\sqrt{2|\vec{g}|/H}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

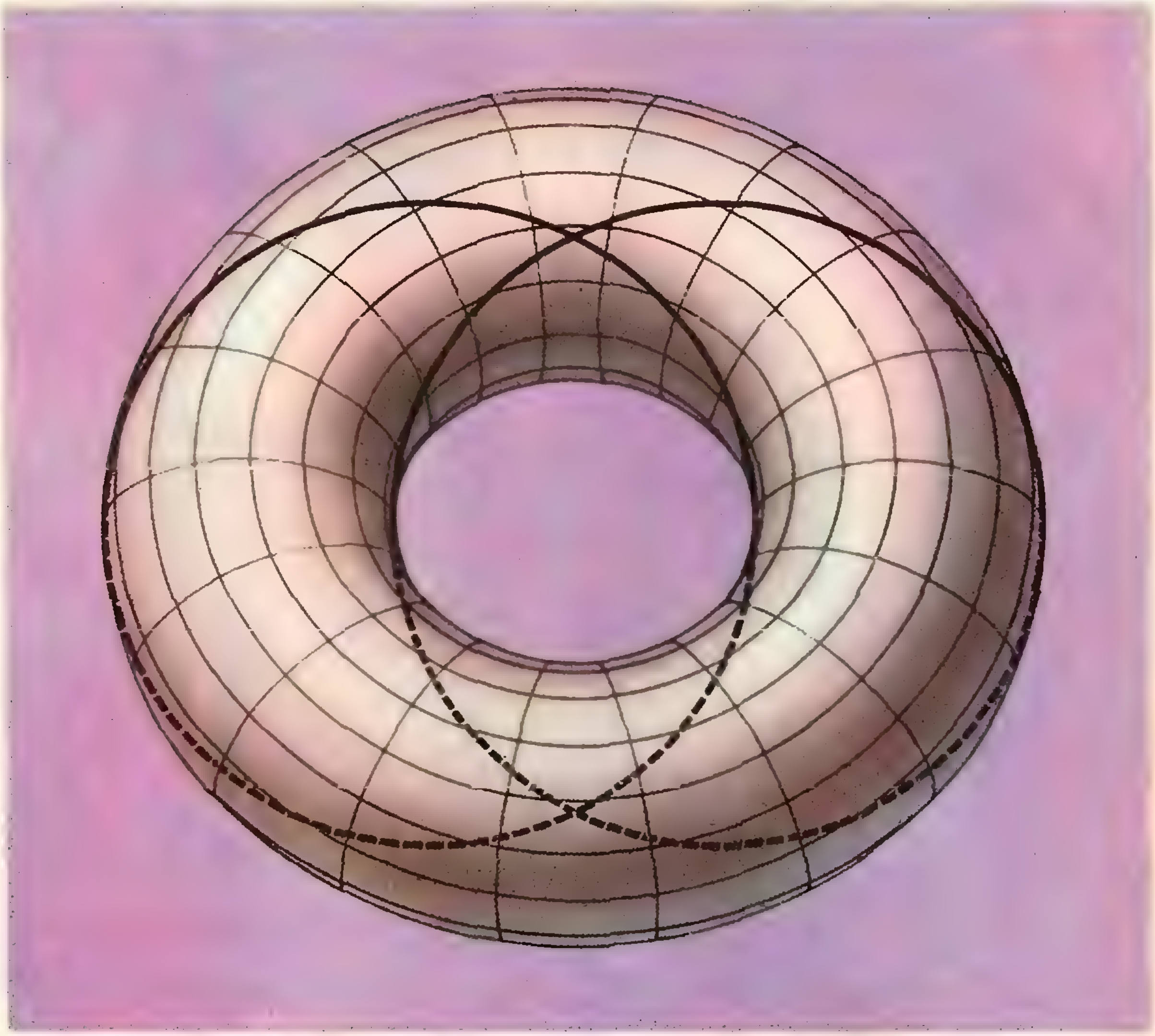
Художественный редактор Т. Макарова

Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 25/II-78
Подписано в печать 4/IV-78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,58 Т-08204
Цена 30 коп. Заказ 306 Тираж 310651

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

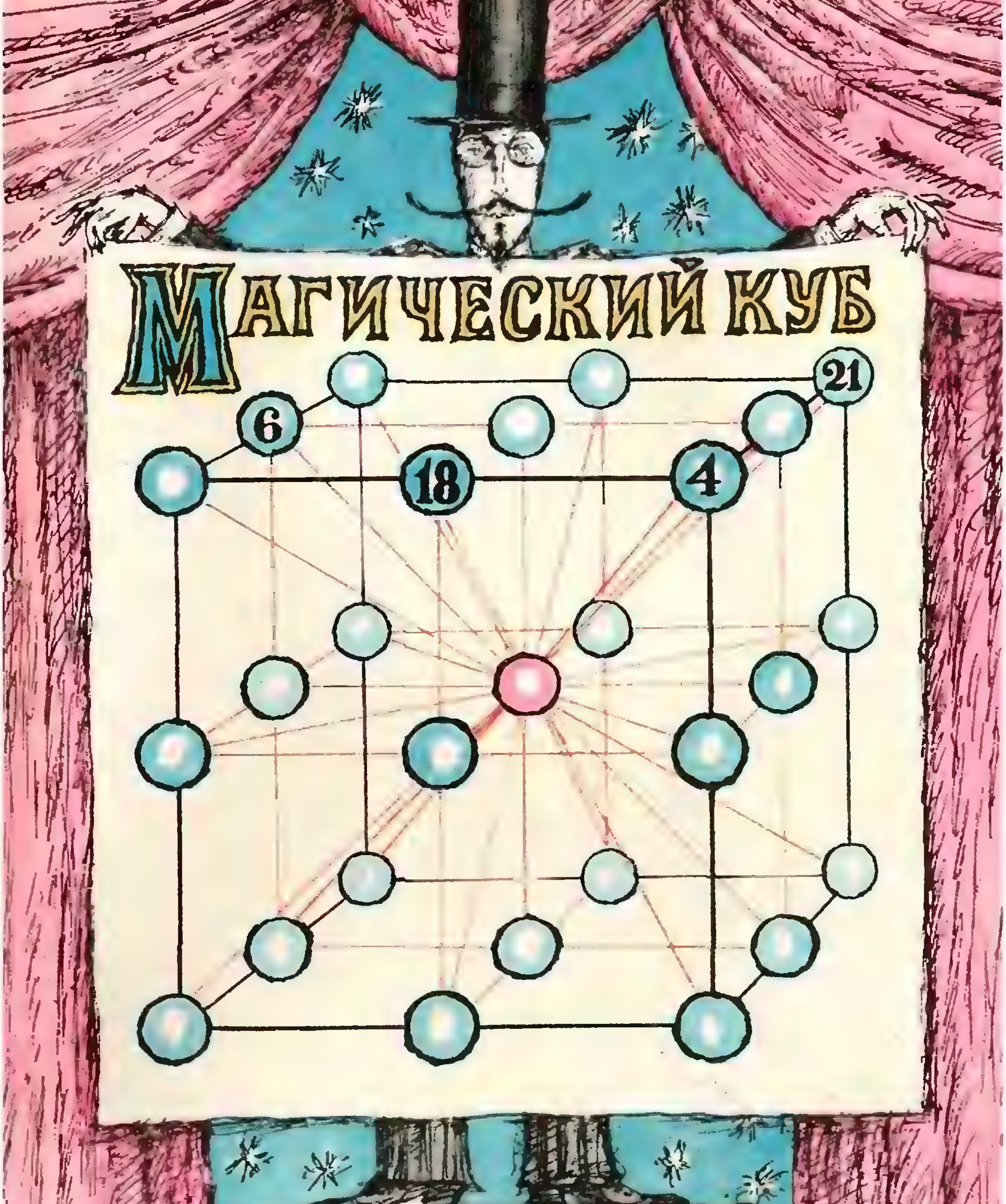


На этом рисунке изображен тор — поверхность, напоминающая бублик, — и две окружности. Поверхность покрыта сетью «параллелей» и «меридианов». Обе выделенные окружности лежат, как это ни кажется странным на первый взгляд, в одной секущей плоскости (которая совпадает с плоскостью чертежа).

Эти окружности интересны не только тем, как они получены: они являются «линиями постоянного курса» на торе, т. е. пересекают все его меридианы под одним и тем же углом. Такие линии называются локсодромиями; подробнее об этом математико-географическом термине вы можете прочитать на с. 17. Там же доказывается, что при рассмотренном плоском сечении тора действительно получаются две окружности, а не только похожие на них замкнутые линии.

Взгляните внимательней на чертеж — на сколько частей наши две окружности разделяют тор?

МАГИЧЕСКИЙ КУБ



На рисунке изображен куб 3×3×3. Числа от 1 до 27 нужно расставить в клетках так, чтобы сумма трех чисел по любому из указанных 37 направлений равнялась 42.

После того, как вы это сделаете, попытайтесь решить задачу без подсказки — придумать другую расстановку чисел.

П. Эрдниев

Индекс 70465
Цена 30 коп.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта»» публикуются задачи по физике и по математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант», и получают право участвовать в Республиканских олимпиадах по математике и физике наравне с победителями районных и городских олимпиад.

Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Авторы — школьники лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале.

Ждем ваших писем.

К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).

2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).

3) Если текст Вашей статьи занимает не больше 12 машинописных страниц, то положите его вместе с эскизами в конверт и пришлите нам.

4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.

Имейте в виду, что рукописи мы не возвращаем.

НОМЕР
6

Основан в 1970 году

Квант

6
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *В. Фабрикант.* Что происходит в гелий-неоновом лазере
11 *Е. Габович.* Задача коммивояжера
21 *В. Лишевский.* Иоганн Кеплер
28 *А. Таллер.* Сюрпризы листа Мёбиуса
32 *И. Яглом.* Поговорим об определениях

Лаборатория «Кванта»

36 *В. Майер, Н. Назаров.* Автогенератор из угольного микрофона

Математический кружок

38 *В. Гальперин, В. Калинников.* Многоугольники на клетчатой бумаге

Задачник «Кванта»

42 Задачи М506—М510; Ф518—Ф522
44 Решения задач М456—М460; Ф472—Ф477

По страницам школьных учебников

53 *А. Звонкин.* Анализ помогает алгебре

«Квант» для младших школьников

57 Задачи
58 *А. Дозоров.* Знакомы ли вы с линзой?

Практикум абитуриента

60 *А. Виленкин.* Производная и задачи на экстремумы
65 *Л. Тарасов.* Симметрия в задачах по физике

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

70 Уральский государственный университет им. А. М. Горького
72 Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко
73 Ярославский государственный университет
74 Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова
75 Московский автомеханический институт
76 Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (физический факультет)
77 Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии
78 Московский институт электронного машиностроения
79 Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева
80 Витебский технологический институт легкой промышленности

Рецензии, библиография

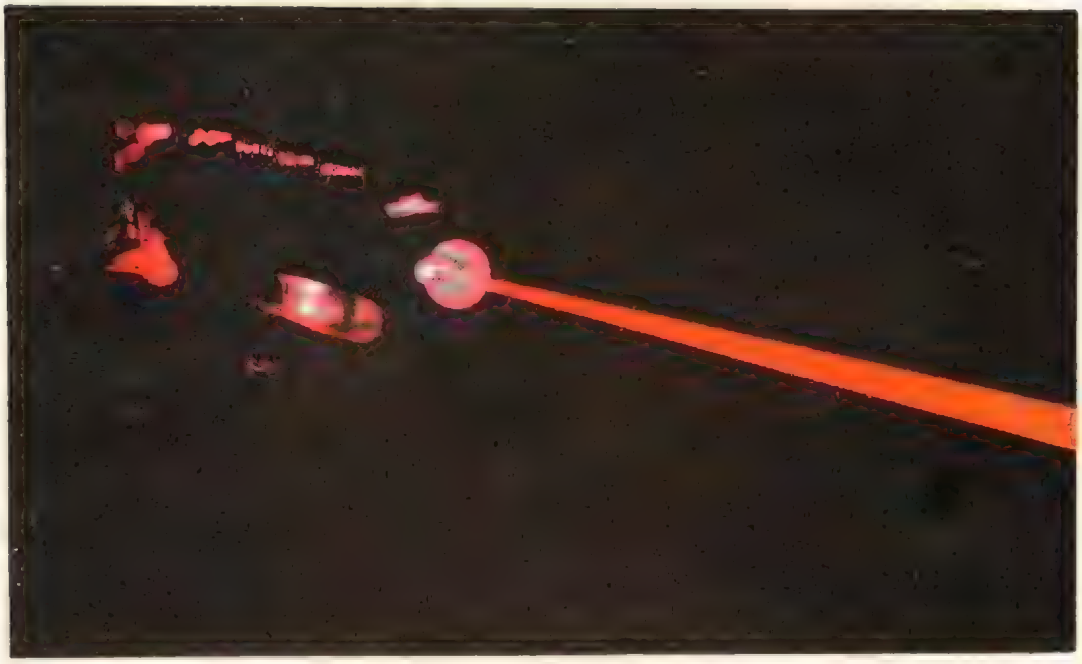
82 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

Информация

84 Задачи физической олимпиады в Финляндии
85 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(27)*

На первой
странице обложки
изображена
поверхность
Мебиуса.
О том,
как ее построить,
и о ее свойствах
см. на с. 28

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1978



В. Фабрикант

Что происходит в гелий-неоновом лазере

Гелий-неоновый лазер становится распространенным прибором, широко применяемым в самых различных областях техники и науки. Во многих школах появились такие лазеры, и с их помощью изучаются свойства когерентного света.

Сердцем каждого лазера служит слой так называемой активной среды, усиливающей проходящий сквозь нее световой луч. В гелий-неоновом лазере такой средой является плазма, образующаяся при прохождении электрического тока сквозь смесь гелия с неоном в газоразрядной трубке.

> *Что такое лазер или мазер,*
> *На какой они возникли базе?*
> Л. Мартынов

Обычно при прохождении через среду световой луч испытывает ослабление — часть энергии луча поглощается средой. Однако можно создать среду, при прохождении через которую свет будет не ослабляться, а усиливаться. Впервые возможность создания такой среды была указана в 1939 году. Конечно, в процессе усиления света закон сохранения энергии не нарушается. Дополнительную энергию световой луч черпает из внутренней энергии атомов среды.

Эйнштейн анализирует взаимодействие света с атомом

> *Переходы, переходы...*
> Из песни

Для того чтобы понять, как «работает» усиливающая свет среда, надо рассмотреть более подробно взаимодействие света с атомами. Впервые такое рассмотрение провел создатель теории относительности Альберт Эйнштейн. Поразительно, сколько фундаментальных результатов в самых различных областях современной физики связано с именем Эйнштейна!

В 1916 году Эйнштейн, развивая идеи Макса Планка о квантовом характере взаимодействия света с атомами, впервые четко сформулировал существование трех элементарных оптических процессов, в которых участвуют атомы.

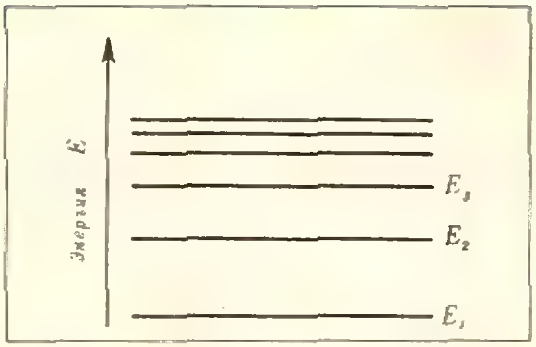


Рис. 1. Схема энергетических уровней атома.

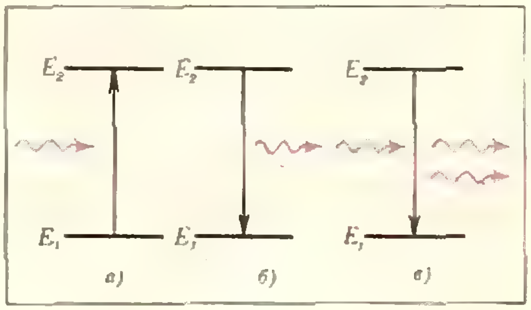


Рис. 2. *а*) — поглощение, *б*) — спонтанное испускание, *в*) — вынужденное испускание.

Как известно, согласно квантовым представлениям внутренняя энергия атомов может изменяться только скачками. Атом, как мы говорим, может находиться в стационарном состоянии на одном из энергетических уровней (рис. 1), соответствующих вполне определенным запасам внутренней энергии. Оптические переходы атома с одного уровня на другой сопровождаются испусканием или поглощением атомом фотонов. Согласно закону сохранения энергии должно выполняться равенство

$$h\nu = E_2 - E_1, \qquad (1)$$

где $h\nu$ — энергия фотона (h — постоянная Планка, ν — частота света), E_1 и E_2 — энергии стационарных состояний атома, между которыми происходит переход. Ясно, что для перехода с одного энергетического уровня на более высокий атом должен поглощать фотоны. Энергия поглощенных фотонов идет на увеличение внутренней энергии атома. Наоборот, при переходах на более низкий уровень атом должен испускать фотоны, уносящие избыток внутренней энергии атома.

Эйнштейн указал, что существует один тип процессов поглощения фотонов и два типа процессов испускания фотонов (рис. 2). В процессе поглощения атом как бы глотает подлетевший к нему фотон и переходит на более высокий энергетический уровень (рис. 2, *а*). Процесс испускания атомом фотона может происходить спонтанно — самопроизвольно, без всякого внешнего воздействия (рис. 2, *б*). Конечно, для того чтобы могло возникнуть спонтанное испускание фотона, необходимо атом предварительно возбудить. Спонтанное испускание происходит из-за неустойчивости возбужденного состояния атома. Продолжительность жизни изолированных возбужденных атомов различна для разных сортов атомов и для разных состояний. (Наиболее короткие продолжительности жизни возбужденных атомов довольно малы — порядка 10^{-8} с.)

Наиболее важным для лазеров было открытие Эйнштейном существования второго типа процессов испускания фотонов — так называемого вынужденного, или стимулированного, испускания. (Мы намеренно несколько отклонились от систематики оптических процессов, данной самим Эйнштейном. Он называл вынужденное испускание отрицательным поглощением, объединяя тем самым этот процесс с процессом поглощения. Ниже мы увидим, что для этого есть основания, но в современной литературе установилась терминология, используемая нами.)

Вынужденное испускание возникает при столкновении фотона с возбужденным атомом. Как показал Эйнштейн, вынужденный переход атома с уровня E_2 на более низкий уровень E_1 может стимулировать только фотон с энергией, удовлетворяющей равенству (1). Фотон как бы толкает и без того неустойчивый возбужденный атом, и тот «падает» на более низкий энергетический уровень, испуская новый фотон (рис. 2, *в*). При этом фотон, стимулировавший переход, не меняет своей энергии и направления своего полета. Важно подчеркнуть, что вновь рожденный фо-

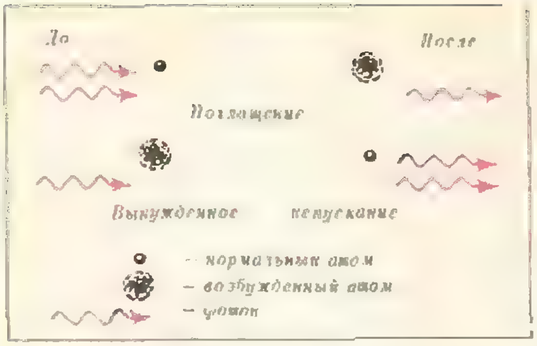


Рис. 3.

тон является «близнецом» фотона, стимулировавшего его рождение, — он несет такую же энергию и летит по тому же направлению.

Итак, после встречи первого фотона с возбужденным атомом дальше летят уже два совершенно одинаковых фотона, а атом переходит на более низкий энергетический уровень. Абсолютная одинаковость этих двух фотонов проявляется не только в равенстве энергий и в совпадении направления их полета, но и в свойстве, называемом когерентностью. Существует квантовая теория когерентности, особенно развившаяся после появления лазеров; однако более наглядно это свойство описывается на основе классических, волновых представлений о свете.

На волновом языке процесс стимулированного испускания описывается так: световая волна, встретившая на своем пути возбужденный атом, «высасывает» из него энергию и, увеличив за счет этой энергии амплитуду, продолжает распространяться без всякого скачка фазы и изменения направления.

Теперь нам понятно, почему процесс вынужденного испускания Эйнштейн назвал отрицательным поглощением. Ведь поглощение и вынужденное испускание — это два «взаимно обратных» процесса. Начальное состояние в первом процессе совпадает с конечным состоянием второго и наоборот (рис. 3). Кроме того, при поглощении уменьшается интенсивность падающего света, но его когерентность не нарушается; в результате вынужденного испускания интенсивность падающего света увеличивается за счет стимулированного излучения, которое когерентно с падающим светом.

Таким образом, если в среде имеются возбужденные атомы, способные к вынужденному испусканию, то проходящий через такую среду световой поток увеличивает свою интенсивность, оставаясь когерентным, и этот процесс прямо противоположен процессу поглощения.

Именно когерентное усиление света при вынужденном испускании лежит в основе создания оптических квантовых генераторов — лазеров. Само слово «лазер» образовано из начальных букв английских слов light amplification by stimulated emission of radiation (усиление света стимулированным испусканием излучения).

Инверсная населенность и как ее получают

Все вверх дном
Название английской сказки

Теперь уже можно объяснить, почему различные среды обычно ослабляют, а не усиливают свет. Все дело в том, что в обычных условиях всегда больше атомов на нижних уровнях энергии, чем на более высоких (рис. 4). Поэтому в среде больше атомов, способных «глотать», а не испускать фотоны, и число актов поглощения превышает число актов вынужденного испускания.

Для получения усиливающей среды необходимо создать инверсию населенностей атомами энергетических уровней — создать ситуацию, когда на верхних уровнях находится больше атомов, чем на нижних (рис. 5). Тогда акты вынужденного испускания будут преобладать над актами поглощения, и за счет вынужденного испускания будет происходить усиление света. Посмотрим, как инверсия

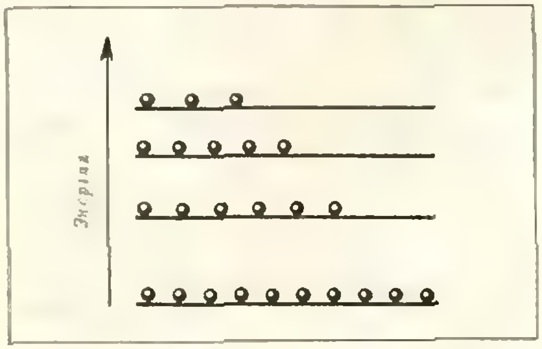


Рис. 4. Нормальное распределение атомов по энергетическим уровням.

населенностей получается в гелий-неоновом лазере.

Конструкция гелий-неонового лазера очень проста (рис. 6). Основные его элементы — газоразрядная трубка, наполненная смесью гелия и неона, и два зеркала, одно — сплошное, другое — частично прозрачное. Процессы, происходящие в лазере, далеко не так просты, как его конструкция. Попытаемся в них разобраться

При прохождении электрического тока сквозь смесь гелия и неона в газоразрядной трубке возникает плазма, состоящая из атомов, ионов и свободных электронов. В плазме идет своеобразная «потасовка» между электронами и атомами, во время которой то атомы отнимают у электронов энергию, то, наоборот, электроны отнимают энергию у атомов.

Если электрон обладает энергией, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant E_2 - E_1, \qquad (2)$$

то при столкновении с атомом он может возбудить атом, т. е. перевести его с уровня с энергией E_1 на более высокий уровень с энергией E_2. Такие неупругие столкновения электронов с атомами называются ударами первого рода. При ударе первого рода электрон теряет всю (знак « » в (2)) или часть (знак «>» в (2)) своей энергии, и условие (2) выражает закон сохранения энергии при этом процессе. Сказывается «квантовая гордость» атома, не принимающего подачек в виде порций энергии, меньших чем $E_2 - E_1$.

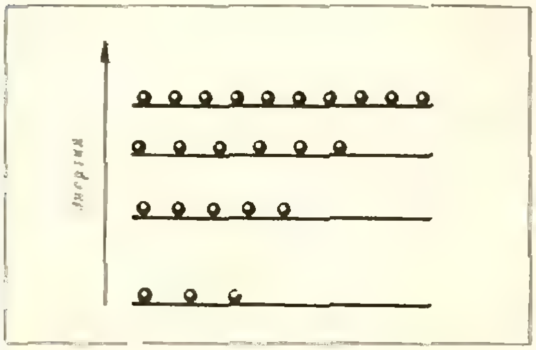


Рис. 5. Инверсное распределение атомов по энергетическим уровням.

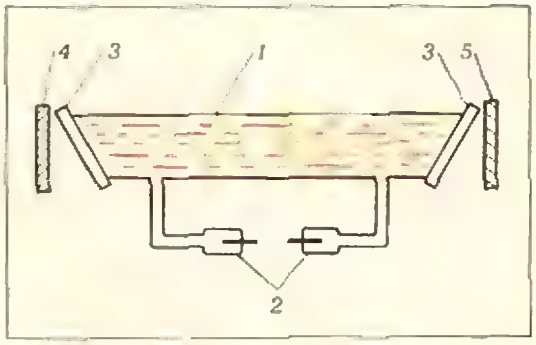


Рис. 6. Схема гелий-неонового лазера. *1* — **газоразрядная трубка.** *2* — **электроды.** *3* — **выходные окна.** *4* — **сплошное зеркало.** *5* — **частично прозрачное зеркало.**

Казалось бы, при помощи электронных ударов первого рода нетрудно получить инверсию населенностей. Надо только создать условия, при которых в плазме будет много быстрых электронов с энергией, удовлетворяющей условию (2). Тогда за счет ударов первого рода атомы перейдут на верхний уровень, и возникнет инверсия населенностей.

Однако надо учесть два важных обстоятельства, которые препятствуют созданию инверсной населенности. Наряду с ударами первого рода существуют удары второго рода, при которых возбужденные атомы отдают энергию электронам и переходят с верхних уровней вниз. В столкновениях второго рода могут участвовать, очевидно, электроны, обладающие любой кинетической энергией. Для таких столкновений нет ограничения (2). Поэтому в плазме всегда больше электронов, способных совершать удары второго рода, мешающие установлению инверсии населенностей, чем электронов, способных возбуждать атомы.

И еще одно обстоятельство. Несмотря на очень высокую электронную температуру в плазме (порядка десятков тысяч градусов) *), средняя энергия электронов обычно ниже порогового значения $E_2 - E_1$. Если бы

---

*) Электроны в плазме подогреваются электрическим полем, поддерживающим электрический ток. Из-за огромного различия в массах теплообмен между электронами и атомами затруднен. Поэтому температура электронного газа в десятки и сотни раз выше температуры газа из нейтральных атомов.

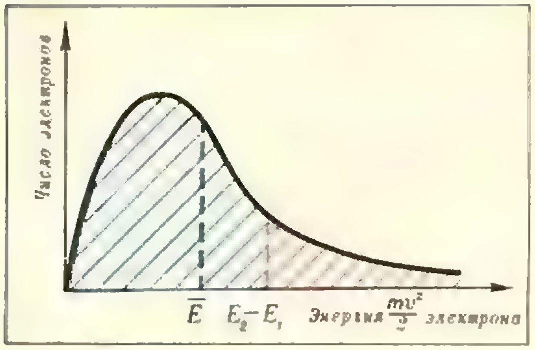


Рис. 7. Распределение электронов по энергиям.

все электроны обладали одной и той же энергией, равной средней энергии $\overline{E}$ их теплового движения, то ни один из них не смог бы возбудить атом. При данной температуре (при данном значении $\overline{E}$) энергии $\frac{mv^2}{2}$ теплового движения отдельных электронов отличаются от значения $\overline{E}=\frac{m\overline{v^2}}{2}$ — существует, как говорят, разброс электронов по энергиям. На рисунке 7 приведен график распределения электронов по энергиям при данной температуре. Видно, что лишь малая часть электронов обладает энергией выше порога возбуждения атома.

Населенность уровня зависит не только от числа возбуждающих столкновений, но и от продолжительности жизни атома на данном энергетическом уровне. Ясно, что чем больше продолжительность жизни на данном уровне, тем больше атомов накапливается на нем. Поэтому для получения инверсии населенностей выгодно иметь верхний уровень с большей продолжительностью жизни, а нижний — с меньшей. Для лазера, работающего в непрерывном режиме, это условие является жестким.

На рисунке 8а изображена упрощенная схема интересующих нас уровней атома неона. Переходы между уровнями E_3 и E_2 сопровождаются испусканием красной линии с длиной волны 0,6328 мкм. Продолжительность жизни атомов на уровне E_3 равна примерно $2\cdot10^{-7}$ с, а на уровне E_2 — 10^{-8}с, т. е. примерно в пять раз меньше, что благоприятствует получению инверсии. Однако до уровня E_3 атомы могут возбуждаться только электронами с энергиями, превышающими E_3-E_1, а до нижнего уровня E_2 — электронами с энергиями, превышающими E_2-E_1 *). Так как $E_3-E_1 > E_2-E_1$, то данная ситуация не благоприятствует инверсии. Чем выше уровень, тем труднее электронам возбуждать атомы до этого уровня. В результате игры этих двух факторов очень трудно получить инверсию в чистом неоне. Это и заставляет применять смесь гелия с неоном, причем гелия в этой смеси примерно в десять раз больше неона.

---

*) Возможна и такая ситуация: атом, столкнувшийся с электроном и перешедший на возбужденный уровень, успевает за время жизни столкнуться со вторым электроном и перейти на более высокий уровень (такое возбуждение называется ступенчатым). Однако концентрация возбужденных атомов мала (из-за очень малой продолжительности жизни атомов в возбужденном состоянии), и поэтому при обычных условиях вероятность такого события ничтожна.

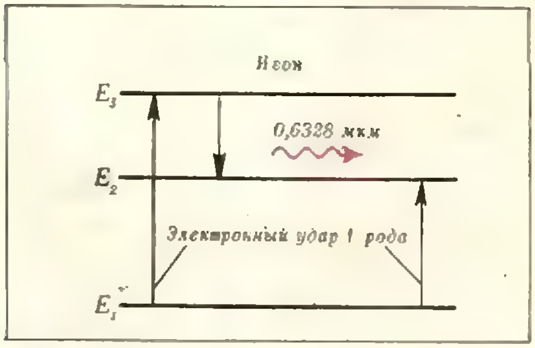


Рис. 8а.

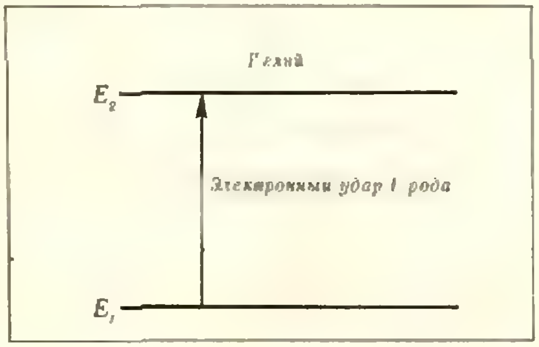


Рис. 8б.

Роль гелия весьма своеобразна. Гелий действует как бы за сценой, но при этом играет весьма важную роль в получении инверсии населенностей атомов неона. На рисунке 8б изображены два уровня атома гелия: самый низкий E_1 и уровень E_2, соответствующий возбужденному состоянию с колоссальным временем жизни (конечно, в атомных масштабах) порядка 10^{-3} с. Такие уровни называют метастабильными. Очень важно, что уровень гелия E_2 находится почти на той же высоте, что и уровень E_3 неона. В гелий-неоновой смеси за счет электронных ударов первого рода накапливается большое число метастабильных атомов гелия (сказывается их огромное время жизни). Метастабильные атомы гелия сталкиваются с нормальными (невозбужденными) атомами неона и отдают им свою энергию, переходя без излучения на уровень E_1 и переводя атомы неона на уровень E_3. Упрощенно схему этих переходов можно представить так, как на рисунке 9. Передача энергии происходит очень эффективно благодаря близости «по высоте» соответствующих уровней гелия и неона (такие явления называют квантовым резонансом). Таким образом, происходит избирательное возбуждение атомов неона до уровня E_3 и возникает инверсия населенностей на уровнях E_3 и E_2. Этот изящный метод получения инверсии надежно работает в гелий-неоновом лазере.

Интересно отметить, что для создания первых квантовых генераторов — мазеров (генераторов микроволнового излучения) советские физики Н. Г. Басов и А. М. Прохоров и американский физик Ч. Таунс использовали способ получения инверсии, как бы обратный описанному выше и заключающийся не в избирательном возбуждении до верхнего уровня, а в избирательном удалении молекул, находящихся на нижнем уровне. Такой же прием предлагался для лазеров, но не получил пока широкого применения.

Нарастание фотонной лавины

> *Отселе я вижу потоков рожденье*
> *И первое грозных обвалов движенье.*
> А. С. Пушкин

Как же происходит усиление света в гелий-неоновом лазере?

Представим себе, что какой-либо из возбужденных до уровня E_3 атомов неона спонтанно испустил фотон, летящий параллельно оси разрядной трубки и соответствующий красной линии неона. Когда этот фотон встретит на своем пути возбужденный атом неона, произойдет акт вынужденного испускания, и дальше уже полетят два фотона-близнеца. Каждый из этих фотонов, встретив возбужденный атом неона, стимулирует рождение нового фотона. Дальше будут лететь уже четыре фотона (рис. 10) и так далее. В результате нарастает лавина одинаковых фотонов, летящих в одном и том же направлении. На волновом языке это означает усиление световой волны, причем, напоминаем, — усиление когерентное.

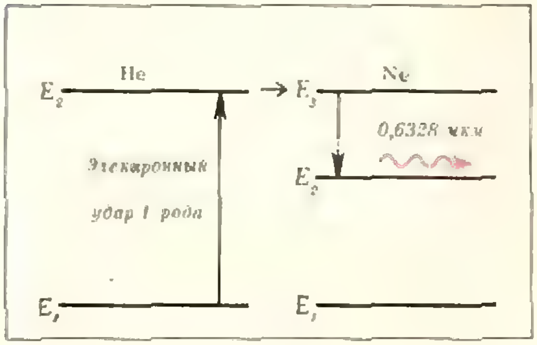


Рис. 9.

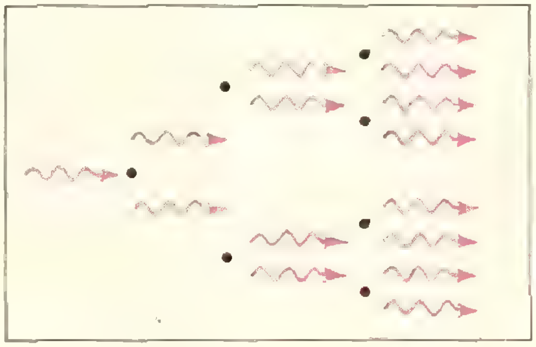


Рис. 10. Нарастание фотонной лавины.

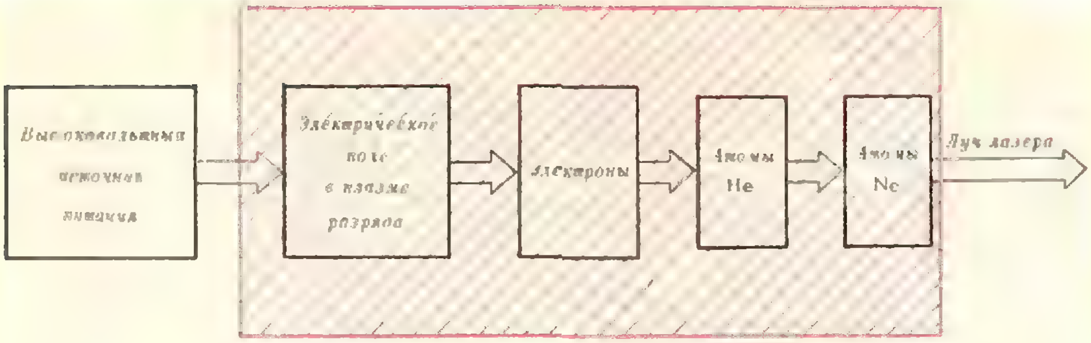

Высоковольтный источник питания
Электрическое поле в плазме разряда
Электроны
Атомы He
Атомы Ne
Луч лазера

Рис. 11.

Образовавшаяся лавина фотонов *натыкается на одно из зеркал лазера* и, отразившись, идет обратно сквозь активную среду, что сопровождается нарастанием лавины. Затем происходит отражение от второго зеркала и опять нарастание лавины и так далее. Мы с помощью зеркал как бы удлиняем активную среду. Однако не следует думать, что даже при идеальных зеркалах, отражающих все падающие на них фотоны, лавина будет безгранично нарастать. Лавина сама себе портит условия нарастания. При достаточно высокой плотности потока фотонов они настолько быстро будут «сбивать» возбужденные атомы на более низкий энергетический уровень, что исчезнет инверсия населенностей. А ведь наряду с вынужденным испусканием происходят процессы поглощения и спонтанного излучения. В процессе спонтанного излучения рождающиеся фотоны распространяются в пространстве равномерно по всем направлениям, и их вклад в фотонную лавину очень мал и представляет собой некогерентный свет. Спонтанное излучение атомов создает в лазере небольшой так называемый «шум». Когда в результате исчезновения инверсии населенностей наступит равновесие между числом актов поглощения и числом актов спонтанного и вынужденного испускания, дальнейшее усиление света прекратится. (Согласно закону сохранения энергии при этом мощность, выделяемая в процессах испускания, станет равна мощности, подводимой для возбуждения атомов Ne.)

От усиления к генерации

Точное определение «обратной связи» не имеет никакой важности.
У. Р. Эшби. «Введение в кибернетику»

Теперь выясним роль реальных зеркал с коэффициентом отражения меньше единицы. Без зеркал газоразрядная трубка с гелий-неоновой смесью работала бы как усилитель света. Зеркала превращают прибор в генератор света. Применяя радиотехническую терминологию, можно сказать, что зеркала обеспечивают положительную обратную связь.

Когда описанная выше световая волна достигнет одного из зеркал, она частично отразится, пойдет в обратном направлении сквозь активную среду, опять усиливаясь, и достигнет второго зеркала, где повторится все то же. Волна будет «метаться» между зеркалами, как тигр в клетке.

Напомним, что одно из зеркал чуть-чуть прозрачное. При каждом отражении от этого зеркала наружу выйдет небольшая часть световой волны. Луч лазера представляет сумму этих частей световой волны, мечущейся в зеркальной клетке. И если потери света в зеркалах (а зеркал без потерь не бывает) будут компенсироваться усилением света в активной среде, установится стационарный режим генерации. Активная среда гелий-неонового лазера обладает очень слабым усиливающим действием (интенсивность светового потока увеличивается примерно на 10% на одном метре пути в активной среде). Поэтому зеркала в таком лазере должны иметь очень высокие коэффициенты отражения, превышающие 90 %.

Итак, мы разобрались в том, какие явления происходят в газоразрядной трубке гелий-неонового лазера. По существу, в лазере происходит процесс преобразования энергии. Основные этапы этого процесса можно представить схемой, приведенной на рисунке 11.

Луч лазера

Молниевидный брызнет луч.
Ф. Тютчев

Свечение активной среды принципиально отличается от свечения таких источников света, как лампа накаливания или люминесцентная лампа. В обычных источниках света царит полный хаос — то здесь, то там возникают отдельные световые вспышки, сливающиеся в общее свечение. Эти световые вспышки представляют собой отдельные группы волн, испускаемых различными источниками (различными возбужденными атомами), и начальные фазы этих волн совершенно случайны, никоим образом не согласованы. Свечение обычных источников света напоминает гул неорганизованной, чем-то возбужденной толпы. Совсем иная картина в лазере. Благодаря актам вынужденного испускания световая волна упорядочивает излучение отдельных атомов. Здесь все напоминает стройный хор — сначала вступают одни хористы, затем другие, сила звучания нарастает. Дирижирует хором сама порождаемая им световая волна. Фазы отдельных групп волн, испускаемых различными атомами, согласованы между собой. Вот это и приводит к когерентности излучаемого лазером света.

Итак, луч лазера представляет собой сумму частей световой волны, выходящих через полупрозрачное зеркало. А так как все эти части когерентны между собой, то в результате их сложения происходит интерференция. Как известно, максимальная амплитуда результирующей волны получится, если разности хода складываемых волн равны целому числу длин волн. Длина пути, проходимого волной лазера между двумя отражениями от одного и того же зеркала, равна $2L$, где L — расстояние между зеркалами. Следовательно, для получения яркого выходящего луча должно выполняться следующее условие:

$$2L = n\lambda, \qquad (3)$$

где n — целое число, λ — длина световой волны. Условие (3) имеет простой смысл: на длине лазерной трубки (резонатора) должно укладываться целое число полуволн. При колебаниях струны с закрепленными концами на длине струны также укладывается целое число полуволн. Это — условие установления стоячих волн. И внутри лазера устанавливается стоячая световая волна (точнее, почти стоячая — из-за прозрачности одного из зеркал).

Условие (3) можно переписать в таком виде:

$$\nu = n\frac{c}{2L}, \qquad (4)$$

где c — скорость света, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — частота.

Но частота света, излучаемого атомами неона при переходе с уровня E_3 на уровень E_2, равна

$$\nu = \frac{E_3 - E_2}{h} \qquad (5)$$

Таким образом, частота света, генерируемого лазером, должна одновременно удовлетворять и уравнению (4), и уравнению (5). Первое уравнение определяет условие резонанса между светом и резонатором и носит классический характер. Поскольку зеркальный резонатор имеет макроскопические размеры, свет взаимодействует с ним как световая волна. Уравнение (4) имеет квантовый характер и определяет условие резонанса между светом и атомами активной среды, представляющими квантовые микрорезонаторы. Свет взаимодействует с квантовыми микрорезонаторами как поток фотонов.

Таким образом, в лазере одновременно проявляются и волновые, и квантовые свойства света.

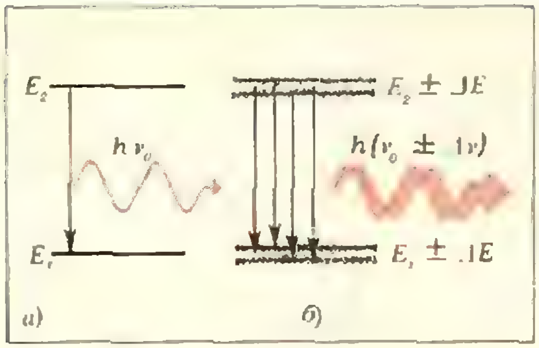


Рис. 12.

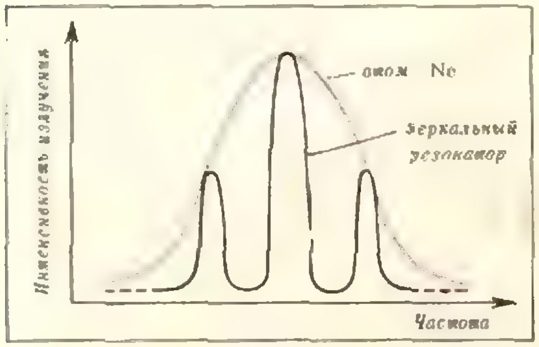


Рис. 13. «Острота настройки» атомов неона и зеркального резонатора.

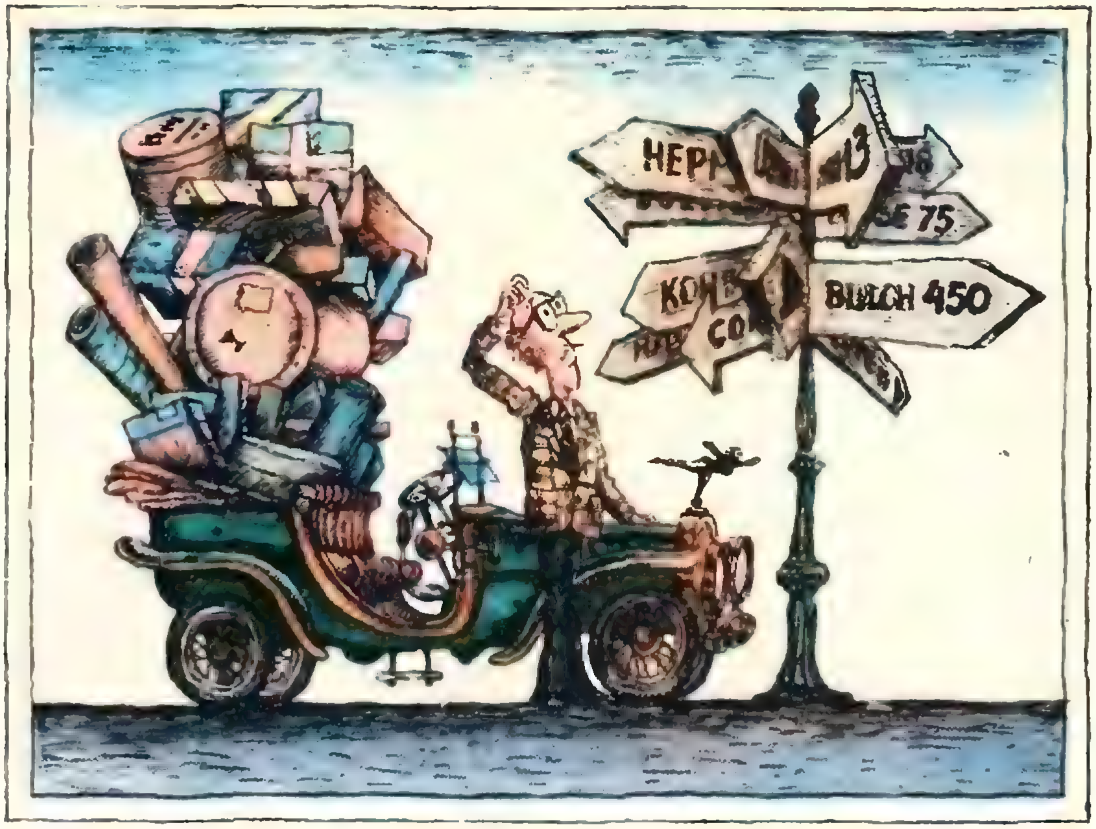
Посмотрим теперь, что практически означает соблюдение условий (3) и (5).

Если бы атом взаимодействовал только *с излучением, обладающим* строго определенной частотой ν_0 (рис. 12, *а*), мы должны были бы подобрать размер резонатора — расстояние l между зеркалами — *таким*, чтобы собственная частота резонатора (определяемая условием образования стоячих волн) была как раз равна частоте ν_0. И поддерживать это расстояние надо было бы с точностью до малых долей длины волны излучения. Практически удовлетворить этому требованию очень трудно. К счастью, эта задача облегчается тем, что на самом деле частота излучения атома не в точности равна ν_0, а лежит в некотором интервале значений $\nu_0 \pm \Delta\nu$. Одной из причин, по которым это происходит, является тепловое движение атомов. Поскольку скорости отдельных атомов могут быть больше или меньше средней скорости теплового движения, энергия атомов на данном энергетическом уровне не в точности равна E_n, а лежит в некотором интервале значений $E_n \pm \Delta E$ (рис. 12, *б*). В интервал частот $[(\nu - \Delta\nu), (\nu + \Delta\nu)]$ попадают несколько значений собственных частот резонатора (рис. 13). Поэтому для данной частоты излучения *мощный луч лазера* получается при настройке резонатора на некоторый набор частот (соответствующих различным значениям целых чисел n в условии (4)). *Если не принять* специальных мер, гелий-неоновый лазер излучает весь этот набор частот, правда, сосредоточенный в довольно узкой области (ширина спектральной линии атома неона).

Есть и одночастотные лазеры, но в них *имеется специальное* устройство, выделяющее один из узких резонансов.

Мощность луча гелий-неонового лазера *невелика — порядка одной* десятой ватта. Несмотря на это, попадание луча в глаз может повредить зрение. Разрядная трубка лазера потребляет для возбуждения активной среды мощность от 20 до 100 Вт. Таким образом, гелий-неоновый лазер преобразует электроэнергию в энергию светового луча с к. п. д. не выше долей процента.

Вместе с тем луч лазера обладает рядом весьма ценных свойств, с лихвой компенсирующих низкий к. п. д. Прежде всего, это — направленность луча. Когда мы рассказывали о зарождении фотонной лавины, мы указывали на то, что первый фотон должен вылетать параллельно оси разрядной трубки. «Косо» вылетающий фотон и порожденные им фотоны быстро уйдут в «аут» *через боковую стенку* трубки, не испытав значительного усиления. Отражение от зеркал только усугубит эффект. Так что внутри трубки сохраняется направленный луч, угловая расходимость которого всего порядка 10^{-3} радиана. Высокая направленность луча гелий-неонового лазера делает его незаменимым для точного установления направлений при строительстве различных сооружений и при прокладке туннелей. Высокая монохроматичность излучения гелий-неонового лазера, даже не одночастотного, делает этот лазер весьма удобным источником для изучения и практического применения различных интерференционных явлений. Кроме гелий-неонового лазера, есть большое число других типов газовых лазеров, использующих в качестве активных сред различные атомарные и молекулярные газы. Среди них есть и весьма мощные. Есть и лазеры с довольно высоким к. п. д. Но это, как говорится, уже другая история.



Е. Габович

Задача коммивояжера

«Пользуйтесь услугами Аэрофлота!»

Два автомобилиста, инженер А. Невский и экономист Б. Литейный, решили съездить в Закавказье, посетить Баку и Тбилиси, заехать в Москву, Киев и Горький, а затем вернуться в родной Ленинград. Начали обсуждать маршрут путешествия. Невский посмотрел на карту и предложил такую последовательность посещения городов:

$$Л \to М \to Г \to Б \to Т \to К \to Л$$

Литейный же, достав атлас автомобильных дорог, выписал расстояния между нужными им городами в табличку (см. таблицу 1) и подсчитал длину предложенного маршрута: $696+410+2937+579+1863+1207=$ $=7692$ км. «Длинновато! — сказал он. — Расстояние аэрофлотское! А нельзя ли короче? Уверен ли ты, что этот маршрут является кратчайшим?»

Уверенности такой у Невского не было. Более того, объяснить, почему он решил ехать именно так, Невский не мог. Просто интуиция подсказывала ему, что такой маршрут, если и

Таблица 1

Город	Л	М	К	Б	Т	Г
Ленинград	—	696	1207	3223	2797	1106
Москва	696	—	858	2527	2101	410
Киев	1207	858	—	2283	1863	1268
Баку	3223	2527	2283	—	579	2937
Тбилиси	2797	2101	1863	579	—	2511
Горький	1106	410	1286	2937	2511	—

не короче всех других, то близок к кратчайшему.

«А не просмотреть ли нам все вообще маршруты? — предложил Литейный. — Много ли их?» Стали подсчитывать. «Из Ленинграда можно поехать в любой из пяти городов. Если мы поедем, скажем, в Москву, то из нее можно направиться в любой из отличных от Ленинграда и Москвы городов. Итак, имеется 20 поездок вида $Л \to X \to Y$, где $Л \neq X \neq Y \neq Л$. Поездок вида $Л \to X \to Y \to Z$ уже 60, ибо из Y можно поехать в любой из оставшихся трех городов. Если мы выберем Z, то можем считать следующим за Z городом любой из последующих двух городов. Итак, 120 маршрутов, ибо завершается путешествие однозначно: по пути домой посещается последний из шести городов. Многовато! Так что это не метод, — перебирать все маршруты! Ведь если бы мы хотели посетить шесть городов, у нас было бы 720, а если семь, то уже 5040 маршрутов!»

«Тогда давай поступим так — предложил Невский, — поедем из Ленинграда в ближайший город, из него — в ближайший, еще не посещенный, и т. д. Это дает нам маршрут

$$Л \to М \to Г \to К \to Т \to Б \to Л.$$

Его длина, — сейчас подсчитаю, — 8057 км. На 365 км длиннее!»

Задача коммивояжера

Задача, которую решают Невский и Литейный, известна в математике под названием *задачи коммивояжера* *) (бродячего торговца).

Сформулируем ее в общем виде: имеются k городов, расстояния между которыми известны; коммивояжеру нужно выйти из одного из этих городов, посетить остальные $k-1$ городов, побывав в каждом из них ровно по одному разу, и вернуться в исходный город; как найти кратчайший маршрут?

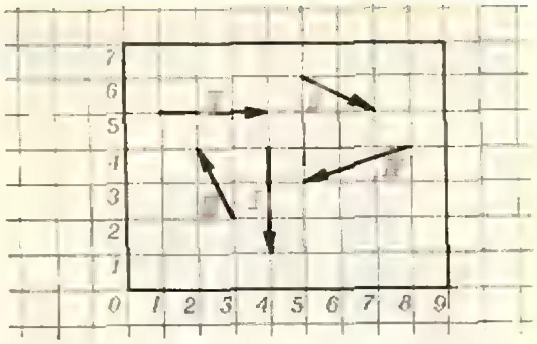


Рис. 1.

Очевидно, выбор начального пункта маршрута несуществен — задачу коммивояжера можно сформулировать и так: найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий ровно по разу через каждый из k городов.

Упражнение 1. Докажите, что общее число маршрутов коммивояжера равно $(k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)$.

Заметим, что таблица расстояний, составленная Б. Литейным (математики называют такие таблицы *матрицами*), оказалась симметричной относительно диагонали, на которой стоят прочерки. В задаче коммивояжера допускаются и несимметричные таблицы. Несимметричная таблица расстояний может возникнуть, например, в следующей задаче (*о кольцевом автобусном маршруте*). В городе, на некоторых улицах которого разрешено только одностороннее движение, фиксированы k точек (мест будущих остановок). Через них должна пройти замкнутая автобусная линия. Требуется найти такую циклическую последовательность прохождения точек-остановок, при которой каждая остановка посещается один и только один раз, а весь маршрут имеет минимальную протяженность.

Упражнение 2. В пластинке размером 7×9 луч лазера должен прорезать пять щелей в направлениях, указанных на рисунке 1 стрелками, и вернуться в исходное положение. Задача минимизации холостого пробега лазерной головки есть задача коммивояжера. Выпишите матрицу расстояний для нее. (Обратите внимание на то, что она получается несимметричной.)

---

*) Вероятно, впервые сформулировал задачу коммивояжера известный математик Карл Менгер. Произошло это 5 февраля 1930 года на математическом коллоквиуме в Вене. Менгер пользовался названием «Задача о посыльном».

Из упражнения 2 мы видим, что «городами» в задаче коммивояжера могут быть вовсе не города, а «расстояниями» — вовсе не расстояния. Например, под «расстоянием» между двумя городами можно понимать стоимость или продолжительность путешествия между ними. В этом случае минимизируется, соответственно, суммарная стоимость путешествия или его продолжительность.

Рассмотрим еще для примера *задачу о станке*. Деталь в процессе обработки на станке подвергается k операциям. При переходе от одной операции к другой станок должен заново настраиваться, что приводит к потери времени. Требуется найти такой порядок проведения всех операций (с возвращением станка в исходное состояние), при котором суммарные потери были бы наименьшими. Ясно, что здесь мы имеем дело с задачей коммивояжера — с таблицей потерь времени на перестройку станка в качестве матрицы расстояний. «Городами» являются состояния станка после различных операций.

К задаче коммивояжера приводят задачи планирования производства и проектирования линий связи (скажем, телефонной сети), задачи составления маршрута для почтальона (врача, контролера телефонов-автоматов и т. п.) и даже некоторые задачи проектирования ЭВМ.

Полный перебор

Итак, в каждой конкретной задаче коммивояжера требуется найти кратчайший тур при заданной матрице расстояний. Может случиться, что сделать это окажется крайне просто. Например, если потери на переналадку в задаче о станке заданы таблицей 2, то очевидно, что оптимальной является такая последовательность операций: I → II → III → IV → → V → I (с нулевым суммарным временем переналадки).

Таблица 2

Номер операции	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
I	—	*0*	*11*	*5*	*20*
II	*31*	—	*0*	*52*	*8*
III	*9*	*16*	—	*0*	*41*
IV	*64*	*31*	*61*	—	*0*
V	*0*	*93*	*19*	*7*	—

Упражнение 3 Решите задачу коммивояжера из упражнения 2, если известно, что во время холостого хода лазерная головка может передвигаться только параллельно краям пластинки.

Однако чаще всего для конкретных таблиц расстояний бросающихся в глаза решений нет. И если даже кто-нибудь подскажет нам, какой маршрут является кратчайшим, возникнут большие трудности, когда мы захотим проверить, так ли это на самом деле.

Математиков же интересуют не столько решения конкретных задач коммивояжера, сколько *общие методы* решения всех таких задач (или хотя бы всех задач коммивояжера при $k \leqslant m$, где m — некоторое фиксированное число).

Заметим, что в каждой конкретной задаче коммивояжера множество всех маршрутов конечно. Поэтому можно организовать *полный перебор* всех маршрутов, вычислить их длины и выбрать кратчайший маршрут. Такой полный перебор в принципе является общим методом решения задачи коммивояжера.

Однако вспомним Невского и Литейного. Хотя им предстояло провести замкнутый маршрут всего лишь через шесть городов, они не захотели перебирать все 120 туров (правда, автомобилисты не заметили того, что из-за симметричности таблицы 1 только 60 туров могут иметь различную длину). В общем же случае коммивояжеру приходится выбирать кратчайший из $(k-1)!$ возможных маршрутов. Это число с ростом k растет очень быстро, а потому указанный способ решения при больших значениях k практически не применим. Так, автору известен пример, когда для осуществления перебора в задаче коммивояжера с десятью городами ($k=10$) на ЭВМ М-220А было израсходовано 4 часа 45 минут! Быстродействие этой ЭВМ — около 25 000 операций в секунду. При $k>10$ решение задачи коммивояжера методом полного перебора даже на самых совершенных ЭВМ практически неосуществимо.

На помощь приходит целочисленное программирование

Первый метод решения задачи коммивояжера, отличный от полного перебора, был предложен в 1954 году американскими специалистами по дискретной математике Данцигом, Фалкерсоном и Джонсоном. Они показали, что задача коммивояжера на обычной плоскости может быть сведена к некоторой задаче *целочисленного линейного программирования* — ныне одного из наиболее известных разделов теоретической кибернетики. Авторы применили свой метод (в сочетании с соображениями географического характера и комбинаторными рассуждениями) к решению задачи о нахождении кратчайшего замкнутого маршрута, проходящего через 48 крупных городов США.

С общей задачей линейного программирования читатель может познакомиться по статье Б. Алейникова, П. Бузыцкого и М. Дубсона «Симплекс-метод» («Квант», 1976, № 7). Задача целочисленного линейного программирования отличается от общей задачи линейного программирования дополнительным требованием о целочисленности искомых значений переменных. Это дополнительное ограничение значительно усложняет задачу, и для задачи целочисленного линейного программирования не удалось разработать метод, близкий по эффективности к симплекс-методу решения общей задачи линейного программирования. Тем не менее, для задачи целочисленного линейного программирования, имеющей многочисленные практические приложения, предложено несколько неплохих методов решения, так что в настоящее время задача целочисленного линейного программирования изучена лучше, чем ее частный случай — задача коммивояжера.

Обозначим расстояние от города a до города b через c_{ab} (a, b — натуральные числа, соответствующие номерам городов). Для случая четырех городов задача целочисленного линейного программирования, к которой сводится задача коммивояжера, имеет вид: *найти числа* x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, *равные нулю или единице, минимизирующие сумму*

$$c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+\ldots+c_{34}x_{34} \qquad (1)$$

и удовлетворяющие неравенствам:

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}\geqslant 2, \qquad (2)$$
$$x_{12}+x_{23}+x_{24}\geqslant 2, \qquad (3)$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (4)$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (5)$$
$$x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}\geqslant 2, \qquad (6)$$
$$x_{12}+x_{14}+x_{23}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (7)$$
$$x_{12}+x_{13}+x_{24}+x_{34}\geqslant 2. \qquad (8)$$

Легко понять, как задача коммивояжера связана с задачей (1) — (8): равенство $x_{ab}=1$ эквивалентно утверждению о вхождении поездки $a\to b$ или $b\to a$ в маршрут; при этом выражение (1) оказывается равным длине маршрута.

Пусть, например, решением задачи коммивояжера является тур $1\to a\to b\to c\to 1$. Покажем, что неравенства (2) — (8) справедливы.

Действительно, если $b=2$, то $x_{13}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=1$. При $b=3$ получаем $x_{12}=x_{14}=x_{23}=x_{34}=1$. Наконец, $x_{12}=x_{13}=x_{24}=x_{34}=1$, если $b=4$. Непосредственная проверка показывает, что во всех трех случаях левые части неравенств (2)—(5) равны двум Каждая из левых частей неравенств (6) — (8) в одном из трех случаев равна четырем, а в двух других — двум. Итак, неравенства (2) — (8) справедливы.

Неравенства (6) — (8) на самом деле могут быть опущены (некоторая избыточность системы неравенств была нужна Данцигу и его соавторам для упрощения рассуждений).

Упражнение 4. Покажите, что для случая четырех городов задача целочисленного линейного программирования (1) — (8) эквивалентна задаче коммивояжера. Для этого достаточно показать, что (0-1)-решение задачи (1) — (5) приводит к решению задачи коммивояжера.

После статьи Данцига и его соавторов появился целый ряд работ, излагавших различные способы сведения как симметрической, так и произвольной задачи коммивояжера к задачам целочисленного линейного программирования. Эти результаты имели важное принципиальное значение. Что же касается их практической значимости, то многочисленные

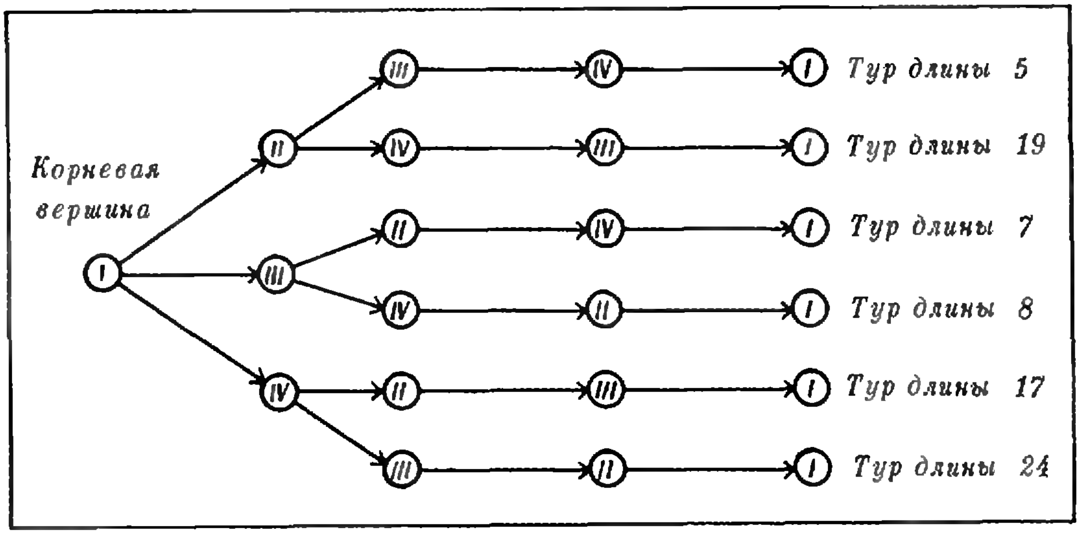


Рис. 2.

эксперименты показали, что без использования специфических свойств каждой конкретной задачи коммивояжера существующие ЭВМ и методы решения задач целочисленного линейного программирования позволяют справляться с задачами коммивояжера лишь при небольшом числе городов (не превосходящем десяти). В то же время самые последние работы в этой области показывают, что сведение к задаче целочисленного линейного программирования может быть эффективно использовано в сочетании с другим методом решения задачи коммивояжера — методом ветвей и границ.

Метод ветвей и границ

Наилучшим методом решения задачи коммивояжера в настоящее время является *метод ограниченного перебора*, или *метод ветвей и границ*. Он применяется в нескольких модификациях, имеющих различную эффективность.

Осуществляя полный перебор, мы можем, конечно, выписать все туры друг за другом. Можно поступить иначе: нарисовать *дерево возможных поездок*. Для случая четырех городов оно изображено на рисунке 2. В кружках — номера городов; стрелками изображены поездки. Ясно, что при переходе к дереву поездок количество стрелок уменьшается по сравнению с их количеством в записи всех маршрутов (при $k>3$). Например, при выписывании всех маршрутов подряд стрелку I → II пришлось бы нарисовать дважды. Но еще большей экономии мы достигнем, если будем строить не все дерево поездок, а только некоторую его часть. Именно такое *усеченное дерево*, отличающееся от дерева всех поездок отсутствием тех ветвей, которые не могут дать кратчайшего маршрута, и конструируется в излагаемом ниже варианте метода ветвей и границ.

Опишем последовательность этапов такого метода решения задачи коммивояжера (блок-схема излагаемого алгоритма приведена на рисунке 3). Выполнив этап, переходим к следующему, если нам не предписано иное.

1. Рисуем корневую вершину дерева (для определенности будем считать, что она соответствует городу I). Присваиваем ей оценку 0.

2. Производим ветвление из любой вершины с минимальной оценкой (первоначально из корневой). Это значит, что мы проводим от выбранной вершины все те стрелки, которые исходили бы из нее в дереве возможных поездок, и рисуем соответствующие вершины дерева.

3. Каждой новой вершине присваиваем оценку, равную длине той части маршрута, которая описывается стрелками, ведущими из корневой вершины в данную.

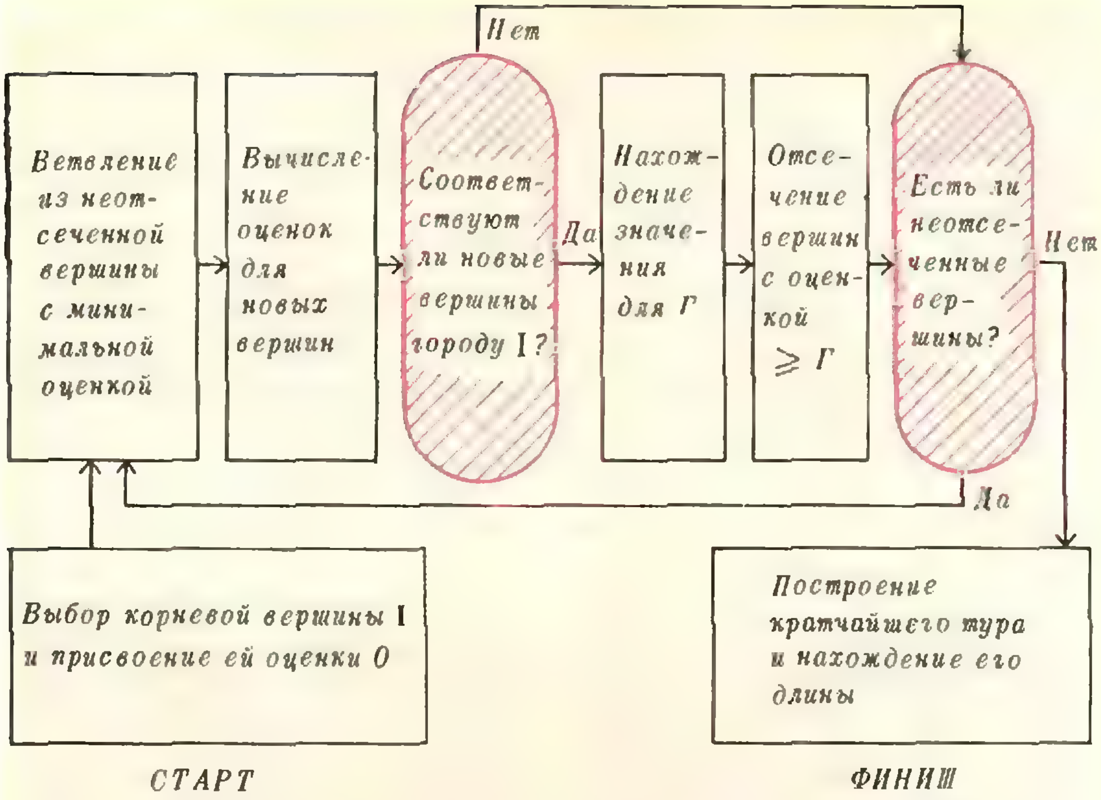

Нет
Ветвление из неотсеченной вершины с минимальной оценкой
Вычисление оценок для новых вершин
Соответствуют ли новые вершины городу I?
Да
Нахождение значения для Г
Отсечение вершин с оценкой ≥ Г
Есть ли неотсеченные вершины?
Нет
Да
Выбор корневой вершины I и присвоение ей оценки 0
Построение кратчайшего тура и нахождение его длины
СТАРТ
ФИНИШ

Рис. 3.

4. Если получена вершина, соответствующая городу I, то находим длину Γ кратчайшего из полученных к этому моменту туров. Если нет, переходим к этапу 2.

5. Отсекаем все вершины, из которых еще не производилось ветвление (*концевые вершины*) и оценка которых не меньше Γ. Это означает, что из таких вершин ветвление впредь не производится. Если не все концевые вершины отсечены, переходим к этапу 2. Если все, то задача решена: оптимальный тур имеет длину Γ и восстанавливается по той концевой вершине, с помощью которой было получено последнее значение Γ (см. этап 4).

Этап 2 описывает правило ветвления, этап 3 — процедуру вычисления оценок, этап 4 — нахождение границ и этап 5 — процесс отсечения.

Решим методом ветвей и границ задачу коммивояжера с расстояниями, заданными таблицей 3.

Решение приведено на рисунке 4. Первые четыре ветвления изображены с помощью зеленых стрелок. Присваиваем Γ значение $\Gamma=8$ и отсекаем две вершины. Пятое ветвление соответствует синей стрелке. Мы выбрали из двух концевых вершин с минимальной оценкой 4 ту, которая дальше от корня (в надежде на более быстрое получение еще одного тура и уменьшение значения Γ). Три следующих ветвления отмечены красными стрелками. Теперь $\Gamma = 5$, и мы отсекаем все остальные концевые вершины. Решением является тур I→II→III→IV→I длины 5.

Описанный вариант метода ветвей и границ позволяет решать на ЭВМ задачу коммивояжера с $k \leqslant 20$. Ясно, что он действительно всегда приводит к кратчайшему туру, ибо в нем используется дерево возможных

Таблица 3

λ	I	II	III	IV
I	—	4	0	9
II	5	—	0	3
III	6	4	—	1
IV	0	2	6	—

поездок, а отбрасываются лишь те ветви, которые заведомо не могут давать более коротких туров, чем уже найденные.

Можно справиться и с сотней городов!

В 1963 году был опубликован очень удачный вариант метода ветвей и границ, в котором при вычислении оценок к длине уже пройденной части маршрута добавлялось число, оценивающее длину его остальной части. Правило ветвления в этом методе (его автор — Катта Мурти — американский математик индийского происхождения) таково, что при каждом ветвлении образуются две новые ветви *). Метод Мурти позволил за сравнительно короткое время решать на ЭВМ задачу коммивояжера для $k \leqslant 40$.

Позднее был разработан еще один вариант метода ветвей и границ (*метод Истмена — Шапиро*). С помощью этого метода удалось решить несколько задач коммивояжера при $k \leqslant 70$. Дальнейшая разработка метода Истмена — Шапиро позволила довести размер решаемых на ЭВМ задач до 100—120 городов.

В методе Истмена — Шапиро для вычисления оценок используется то обстоятельство, что существуют весьма эффективные машинные методы решения так называемой *задачи о назначениях* *), тесно связанной с задачей коммивояжера. Содержательно задача о назначениях формулируется следующим образом: *имеются k человек и k должностей, и известна матрица баллов несоответствия людей должностям. Требуется найти такое назначение работников на должности, которое минимизирует сумму баллов несоответствия.* Здесь матрица баллов играет ту же роль, что и матрица расстояний в задаче коммивояжера. А назначения, как и поездки, можно записывать в виде $x \to y$. Разница лишь в том, что из назначений не обязательно складывается замкнутый маршрут (тур). Возможно, например, такое назначение I → V → → I, II → II, III → IV → VI → III (это значит, что первый человек назначается на пятую должность, пятый — на первую, второй — на вторую, третий — на четвертую и т. д.).

Итак, каждый тур можно считать назначением (но назначение k лиц

---

*) Описание метода Мурти см., например, в брошюре В. И. Мудрова «Задача коммивояжера», М., «Знание», 1969.

*) Про задачу о назначениях было рассказано в статье М. И. Рейтмана «Транспортная задача» («Квант», 1974, № 7).

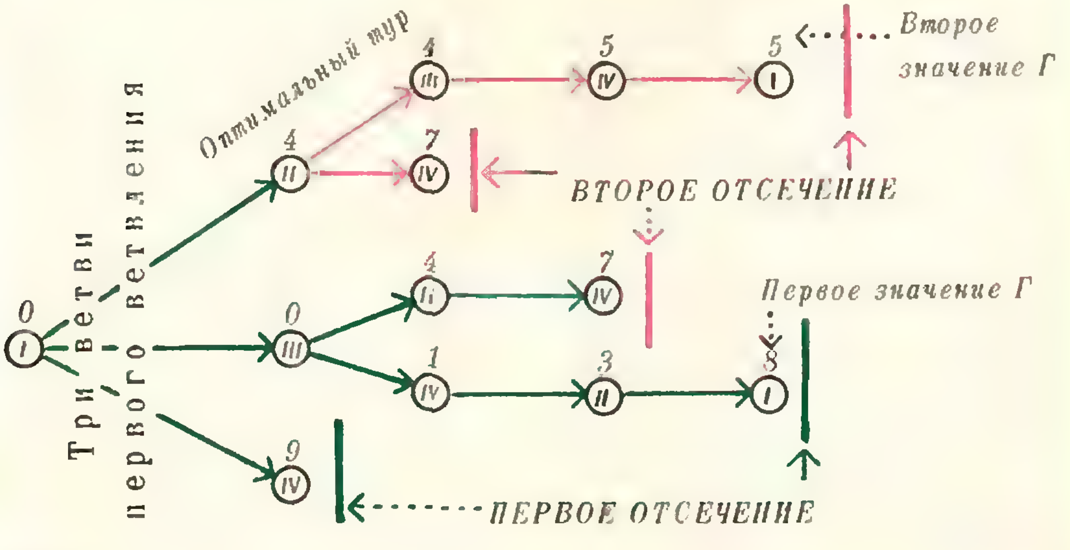


Рис. 4.

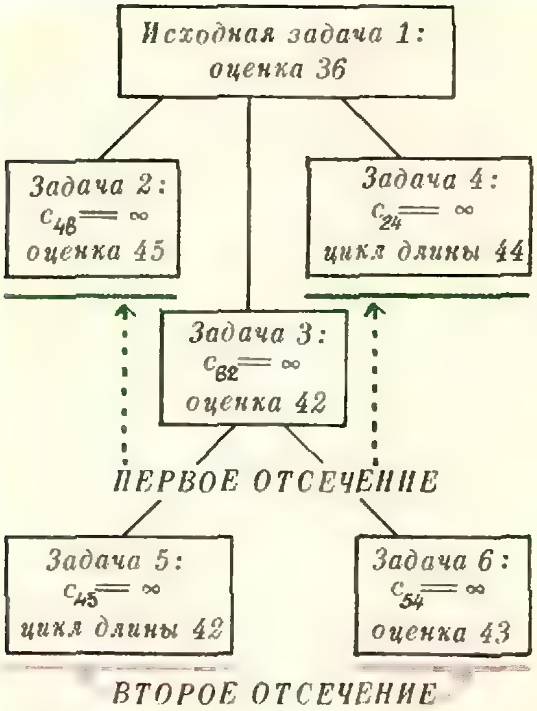


Рис. 5.

оказывается туром в среднем лишь в одном из k случаев: ведь существует $(k-1)!$ туров, а общее число k-назначений равно $k!$). Поэтому сумма баллов для оптимального k-назначения не превосходит длины оптимального тура. А эту сумму баллов, как мы уже отмечали, ЭВМ находит сравнительно быстро. Ее-то и используют в качестве оценки в методе Истмена — Шапиро, в котором строится не дерево поездок, а совсем другое дерево, вершинами которого являются вспомогательные задачи о назначениях (пример такого дерева изображен на рисунке 5).

По этому методу сначала решается задача о назначениях с *матрицей расстояний* задачи коммивояжера в качестве *матрицы баллов*. Ей соответствует корневая вершина дерева. Сумма баллов для оптимального назначения считается оценкой корневой вершины (и исходной задачи коммивояжера). Если решением является тур, то задача коммивояжера решена: найденный тур является оптимальным. Если же k-назначение состоит из нескольких циклических последовательностей, например, I → III → VII → V → I, IV → VI → II → IV, то поскольку в оптимальном туре не может быть «подтуров», все эти циклические последовательности нужно разорвать. В методе Истмена — Шапиро это осуществляется в ходе ветвления, причем всегда рвется одна — наиболее короткая — последовательность назначений, с тем чтобы в дальнейшем решать меньшее число новых задач о назначениях.

В нашем примере — это вторая; в нее входят три города: II, IV и VI. Накладываем запреты на поездки IV → VI, VI → II и II → IV, после чего решаем три новые задачи о назначениях с тремя новыми матрицами баллов, получающимися из матрицы, соответствующей корневой вершине: в первой из них элемент c_{46}, во второй — элемент c_{62}, а в третьей — элемент c_{24} заменены символом ∞, содержательно означающим запрет соответствующей поездки (через c_{ab} мы снова обозначили расстояние между городами a и b). Если среди решений есть туры, то Γ полагается равным длине кратчайшего из них. Задачи с оценкой, не меньшей чем Γ, «отсекаются». Очередное ветвление осуществляется для той из этих задач, у которой k-назначение не является туром, а оценка (сумма баллов несоответствия) оказалась наименьшей.

Прокомментируем процесс решения, схема которого приведена на рисунке 5.

Были сделаны два ветвления и решены шесть задач о назначениях. Решением задачи 4 оказался цикл. С этого момента $\Gamma = 44$, и задачи с оценкой 45 и 44 отсекаются.

В решение задачи 3 входило назначение IV → V → IV. Второе ветвление привело к двум новым задачам: 5 и 6. Решение задачи 5 — цикл длины 42. Это новое значение Γ позволило отсечь задачу 6 с оценкой 43. Цикл длины 42 оптимален.

Эвристические методы

Если задачу коммивояжера не удается решить точно, ее пытаются решить хотя бы приближенно. При этом ищется маршрут, сравнительно немного отличающийся от кратчайшего. Методы отыскания таких маршрутов называются *приближенными*, *субоптимальными* или *эвристическими*.

Субоптимальным является, например, метод «*иди в ближний*», т. е. в ближайший из непройденных го-

Таблица 4

	I	II	III
I	—	1	0
II	5	—	1
III	6	5	—

родов. В том, что этот метод не является точным, легко убедиться на примере следующей простой матрицы расстояний (см. таблицу 4).

Для нее процедура «иди в ближний» дает маршрут I → III → II → I длины 10, в то время как нелепая процедура «иди в дальний» приводит к туру I → II → III → I длины 8. Так как других маршрутов у коммивояжера сейчас нет, этот пример означает, что наш эвристический метод может иногда давать даже самый плохой из туров.

Тем не менее, принцип «иди в ближний» (и другие эвристические методы) нередко используется на практике — особенно при решении задачи коммивояжера с очень большим числом городов. Делается это по нескольким причинам. Во-первых, этот метод довольно быстро работает. Во-вторых, практика показывает, что с ростом k метод «иди в ближний» все чаще дает туры, длина которых незначительно отличается от длины кратчайшего тура (а, порой, и совпадает с ним). И, наконец, общее для всех эвристических методов обстоятельство: во многих практических задачах нас интересует не наилучшее решение, а лишь достаточно хорошее приближение к нему (ведь порой и расстояния между городами определяются не совсем точно). К тому же точность алгоритма «иди в ближний» увеличивается (но зато увеличивается и трудоемкость), если в ходе его работы строятся k туров, первый из которых начинают конструировать с первого города, второй — со второго и т. д.; некоторые из этих туров могут оказаться разными, и в заключение выбирается кратчайший из них.

Для задачи коммивояжера создано немало весьма эффективных эвристических методов. В частности, неплохо себя зарекомендовали методы ветвей и границ, работа которых обрывается на одном из найденных туров (не обязательно — оптимальном). Так, в 1976 г. два японских математика решили на ЭВМ HITAC-8800 задачу коммивояжера для 300 городов. При этом за 2 минуты было найдено решение, отличающееся от оптимального на 0,2 процента.

Удивительная страна

Представим себе, что уже знакомые нам А. Невский и Б. Литейный решили попутешествовать по небольшой стране (назовем ее Констанцией). Прибыв в ее столицу и найдя в путеводителе семь самых интересных городов Констанции, они планируют маршрут своей поездки. На этот раз расстояния между городами оказались не столь большими (см. таблицу 5). Поэтому друзья решили не гнаться за минимальностью, а вычислить длины нескольких случайно взятых туров и выбрать кратчайший из них (такая процедура тоже представляет собой субоптимальный метод, известный под названием *метода Монте-Карло*). Выбор пал на следующие туры:

I → II → III → IV → V → VI →
→ VII → VIII → I;
I → III → VII → II → IV → VI →
→ V → VIII → I;
I → IV → VII → II → V → VIII →
→ III → VI → I.

Подсчитали их протяженности; оказалось, что все три тура имеют длину 794 км! Заинтересовавшись, наши

Таблица 5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I	—	103	114	86	109	90	98	85
II	103	—	121	93	116	97	105	92
III	114	121	—	104	127	108	116	103
IV	86	93	104	—	99	80	88	75
V	109	116	127	99	—	103	111	98
VI	90	97	108	80	103	—	92	79
VII	98	105	116	88	111	92	—	87
VIII	85	92	103	75	98	79	87	—

герои проанализировали еще десять маршрутов. Каждый из них имел длину 794 км! Можете себе представить, как смутились наши герои. Но удивление их было бы еще большим, если бы они узнали, что при данной матрице расстояний все вообще туры имеют одинаковую длину.

Почему? Ларчик открывается просто: все числа в таблице 5 получены путем сложения друг с другом чисел 48, 55, 66, 38, 61, 42, 50 и 37. Например, в третьей строке стоят суммы 66+48=114, 66+55=121, 0, 66+38=104 и т. д. А так как при вычислении протяженности маршрута мы берем по одному и только одному числу из каждой строки и из каждого столбца таблицы 5, то в результате длина любого тура оказывается равной удвоенной сумме задуманных чисел (сумма восьми задуманных чисел равна 397, а 794=397×2).

Возникает вопрос: а нельзя ли описать все вообще матрицы расстояний, при которых любые два тура имеют одинаковую длину? Оказывается, можно: для любой такой матрицы обязательно найдутся числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, такие, что расстояние c_{xy} от города x до города y $(x \neq y)$ будет равно сумме $a_x + b_y$.

Докажем эту теорему для случая трех городов.

Пусть c — длина каждого из двух туров:

$$c = c_{12} + c_{23} + c_{31} = c_{13} + c_{21} + c_{32}.$$

Выразим из этих соотношений c_{31} и c_{32}:

$$c_{31} = c - c_{12} - c_{23},$$
$$c_{32} = c - c_{13} - c_{21}.$$

Нам нужно решить систему уравнений

$$x_1 + y_2 = c_{12},\quad x_1 + y_3 = c_{13},$$
$$x_2 + y_1 = c_{21},\quad x_2 + y_3 = c_{23},$$
$$x_3 + y_1 = c - c_{12} - c_{23},$$
$$x_3 + y_2 = c - c_{13} - c_{21}.$$

Присвоим неизвестному y_3 произвольное значение d. Тогда из первых пяти уравнений находим, что $x_1 = c_{13} - d$, $x_2 = c_{23} - d$, $y_2 = c_{12} - c_{13} + d$, $y_1 = c_{21} - c_{23} + d$,

$$x_3 = c - c_{12} - c_{23} - c_{21} + c_{23} - d = c - d - c_{12} - c_{21}.$$

При этом оказывается удовлетворенным и шестое уравнение. Положив $d = 0$, получим набор $a_1 = c_{13}$, $a_2 = c_{23}$, $a_3 = c - c_{12} - c_{21}$, $b_1 = c_{21} - c_{23}$, $b_2 = c_{12} - c_{13}$, $b_3 = 0$ чисел с нужным нам свойством.

Сформулированная выше теорема является довольно типичной для теоретических исследований по задаче коммивояжера. В них важную роль играют различные специальные случаи. (Совпадение длины всех туров — это тоже специальный случай. Впрочем, весьма узкий.) Для специальных случаев порой удается не только построить быстро работающий метод (при этом говорят о *разрешимом* случае), но и выяснить, какие протяженности может иметь оптимальный тур.

Читатель может продолжить знакомство с разрешимыми случаями задачи коммивояжера, решив предлагаемые ниже задачи. В части из них речь идет о путешествии по шахматной доске, где в роли коммивояжера выступают шахматные фигуры. При этом будем говорить не о туре коммивояжера, а о туре коня, ладьи и т. д. Тур шахматной фигуры проходит ровно один раз по всем полям шахматной доски и заканчивается возвращением на начальное поле.

Задачи

1. Города расположены в вершинах выпуклого многоугольника. Докажите, что длина оптимального тура равна периметру многоугольника.

2. Сводится ли к задаче коммивояжера задача о кратчайшем маршруте туриста, который выезжает из пункта 1, посещает пункты 2, 3, ..., $k-1$ и покидает страну из пункта k? Тот же вопрос для задачи о минимизации пути посыльного, который направляется из пункта 1 в пункты 2, 3, ..., k. Возможно ли это сведение для задачи о диверсантах, которые, чтобы взорвать объекты, расположенные в пунктах 1, 2, ..., k, планируют место десантирования и кратчайший маршрут через все пункты?

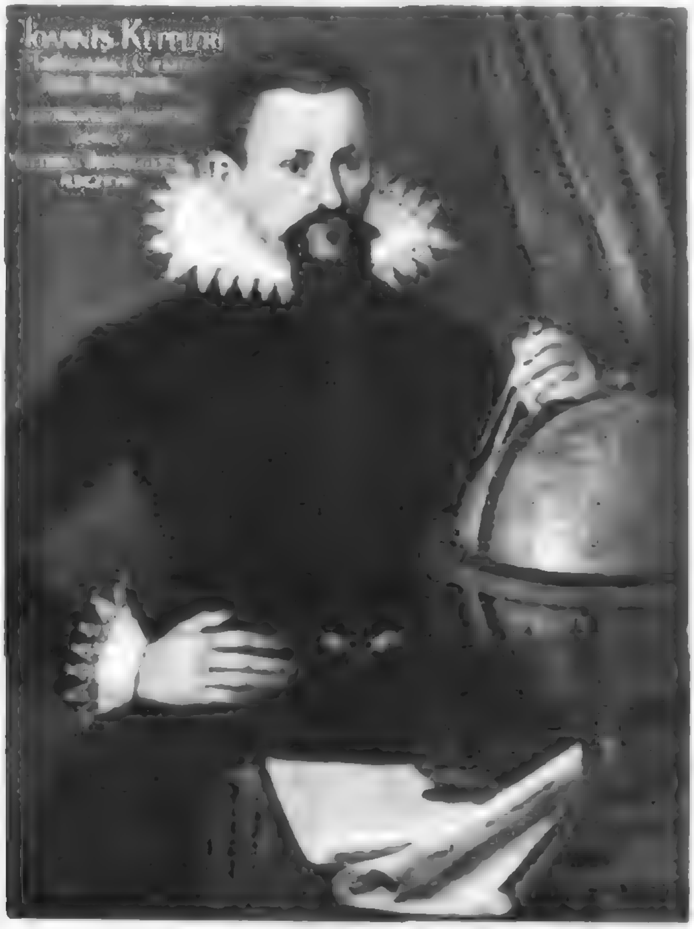
3. На плоскости расположены 30 городов. Их координаты: $y=0, 1, 2$ при $x=0$; $y=0, 1, 2, 4, 5, 6$ при $x=1$; $y=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ при $x=2$; $y=0, 1, 3, 4, 6, 7, 8$ при $x=3$; $y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ при $x=4$. Решите задачу коммивояжера. Докажите, что полученный тур оптимален.

4. При каких размерах шахматной доски на ней существует тур ладьи? Тур ослабленной ладьи, которая ходит только на соседние поля?

5. На шахматной доске с нечетным числом полей одно поле вырезано. При каких расположениях вырезанного поля существует тур ослабленной ладьи?

6. Найдите тур коня на пространственной «доске», имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размером 3×4×6. «Полями» сейчас считаются 72 куба единичного объема, на которые наша «доска» естественным образом разбивается.

7. Даны числа k и m. Как построить матрицу расстояний для задачи коммивояжера с k городами, решением которой был бы тур длины km?



В. Лишевский

Иоганн Кеплер

Трудно представить себе судьбу более тяжелую, чем та, которая выпала на долю Иоганна Кеплера. Голод и нищета, религиозные гонения и вызванные ими скитания, болезни и смерть близких преследовали его всю жизнь. Почти каждый день был заполнен поисками средств к существованию, и непонятно, когда же он успел прочитать все то, что было написано учеными до него, получить выдающиеся достижения в кристаллографии, оптике, математике, астрономии и открыть свои знаменитые законы движения планет! После смерти Кеплера осталось одно изношенное платье, две рубашки, несколько медных монет, 12 694 гульдена неуплаченного жалования, 57 вычислительных таблиц, 27 напечатанных научных трудов и огромное рукописное наследие. Какой же надо было обладать настойчивостью, целеустремленностью, трудолюбием, желанием познать законы природы, чтобы в тех неимоверно тяжелых условиях, в которых жил и творил Кеплер, выполнить такой колоссальный объем работы и внести столь значительный вклад в мировую науку!

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 года в небольшом немецком городке Вейль-дер-Штадте, насчитывавшем тогда всего несколько сотен жителей. Его отец — Генрих Кеплер — был человеком без определенных занятий, скитальцем (по словам Иоганна Кеплера), который в 1589 году исчез из дома окончательно. Мать Иоганна — Катерина Гульденман — обладала тяжелым и неуживчивым характером. Она немного разбиралась в травах и лечила всех обращавшихся к ней за советом настоями и отварами. Эта ее «врачебная» деятельность стала одной из причин, по которым она позже была объявлена ведьмой. Кеплеру пришлось потратить шесть лет жизни, чтобы доказать невиновность своей матери и спасти ее от костра инквизиции.

Детство Кеплера было безрадостным. Оно прошло среди грубых и невежественных людей, в обстановке постоянных ссор и взаимных упреков, ругани и брани. К тому же он рос слабым ребенком, часто болел.

Два ярких события детства запомнились Иоганну и, может быть, определили его будущее. В возрасте 6 лет, в 1577 году, он впервые увидел комету, а три года спустя родители показали ему лунное затмение.

В 1578 году семилетнего Иоганна отдают в начальную немецкую школу, но вскоре по настоянию учителя, обратившего внимание на способного и прилежного ученика, его переводят в латинскую школу, готовящую будущих служителей церкви и различных государственных учреждений.

Перед окончанием школы встал вопрос: что делать дальше? Учитывая советы учителей, денежные, престижные и иные моменты, родители выбирают для Иоганна духовную карьеру. В 1584 году он поступает в низшую семинарию города Адельсберга, а затем продолжает учебу в высшей семинарии в Маульбронне.

После окончания семинарии в 1589 году Иоганн поступает в Тюбингенский университет на факультет искусств. Здесь он изучает математику, астрономию, греческий и древнегреческий языки, риторику, поэзию, этику, философию. Через два года, успешно сдав магистерский экзамен, Кеплер переходит на теологический факультет, где для студентов-богословов был установлен трехлетний срок обучения. Иоганн прилежно учится, много читает, занимается стихосложением, участвует в театрализованных представлениях, которые студенты-теологи разыгрывают на рыночной площади.

В то время в Тюбингенском университете было несколько незаурядных преподавателей, но наибольшее влияние на молодого Кеплера оказал Михаил Мёстлин, профессор математики и астрономии. Он первый заметил выдающиеся способности Иоганна Кеплера к математике и астрономии и познакомил его и еще нескольких своих воспитанников с системой мира Коперника (в университете Мёстлин был вынужден преподавать систему мироздания Птолемея). Именно Мёстлин разжег в Кеплере страсть ученого, долгое время был советчиком и помощником Иоганна в научных занятиях, направлял и одобрял его деятельность.

В конце 1594 года обучение Кеплера на теологическом факультете должно было закончиться, но неожиданно произошло событие, резко изменившее судьбу Иоганна. В протестантской средней школе Граца — главного города провинции Штирии (Австрия) — скончался преподаватель математики, и протестантская община города обратилась в сенат Тюбингенского университета с просьбой порекомендовать им достойного кандидата на эту должность. Выбор пал на Кеплера, а он, как обучающийся на государственный счет, не мог отказаться. Иоганну очень не хотелось оставлять учебу, а с нею и мечты о духовной карьере; однако пришлось подчиниться. 14 марта 1594 года Кеплер покинул Тюбинген и отправился к месту своей первой службы.

В Граце Кеплер прожил шесть лет. Помимо преподавания в школе, в его обязанность входило составление астрономических календарей на следующий год и прилагаемых к ним астрономических прогнозов. В календаре помещались сведения о времени восхода и захода Солнца, Луны, ее фазах, о положении планет среди звезд и многое другое. В разделе «Прогнозы» обязательно сообщались предположения о погоде, видах на урожай, политические, военные и иные предсказания.

Здесь, в Граце, в 1596 году Кеплер написал свою первую крупную работу «Тайна Вселенной» (рукопись этой книги Кеплер озаглавил так: «Предвестник космографических исследований, содержащий космографическую тайну»). В этой работе он пытался построить гелиоцентрическую систему мира, устанавливая числовую зависимость между расстояниями планет от Солнца и размерами правильных многогранников. По Кеплеру в сферу, на которой расположена орбита Сатурна, вписан куб, в него вписана следующая сфера — с орбитой Юпитера, далее последовательно вписаны тетраэдр, сфера Марса, додекаэдр, сфера Земли, икосаэдр, сфера Венеры, октаэдр, сфера Меркурия *). В центре всей этой системы сфер и многогранников находится Солнце.

Свою «Тайну Вселенной» Кеплер послал Галилео Галилею и Тихо Браге. Оба ученых ответили незамедлительно. Галилей приветствовал появление еще одного приверженца коперниковской системы. Браге, высказав свое отрицательное отношение к умозаключениям Кеплера, обратил внимание на самостоятельность мышления Кеплера, на его знание астрономии, на искусность и упорство в вычислениях. Чтобы лично познакомиться с молодым ученым, Браге приглашает его к себе.

В это время происходят изменения в личной жизни Кеплера. В апреле 1597 года он женится на дочери мельника Барбаре Мюллер, и через год у них появляется сын Генрих. Прожив всего два месяца, ребенок умирает. Та же участь постигает и дочь Сусанну, родившуюся годом позже. Кеплер тяжело переживает смерть детей. А тут еще и другие неприятности. В начале 1598 года в Граце усиливаются гонения на протестантов, к которым принадлежал и Кеплер. В сентябре того же года под страхом смертной казни предложено покинуть город всем протестантским священникам и учителям школы. Кеплер вынужден бежать из города. Правда, вскоре для него было сделано исключение, и через месяц Кеплер возвращается в Грац. Но обстановка в городе неспокойная, и Кеплер, воспользовавшись приглашением Тихо Браге, решает ехать к нему.

1 января 1600 года на пороге нового столетия Кеплер уезжает в Прагу, тогдашнюю резиденцию императора Священной Римской империи Рудольфа II. Здесь живет и работает Тихо Браге — придворный императорский математик.

Однако совместная работа с Тихо Браге продолжалась недолго. Осенью 1601 года покровитель Кеплера умирает. Придворным математиком назначают Кеплера, ему же поручается забота об инструментах и рукописях Браге. В руках Кеплера оказываются журналы астрономических наблюдений, которые Браге вел на протяжении почти четверти века. Эти наблюдения были весьма точны для своего времени, они-то и позволили Кеплеру открыть знаменитые законы движения планет, называемые теперь его именем.

Зимой 1601 года Кеплер выводит один из законов движения планет, который впоследствии получил название второго закона, или закона площадей. Вначале Кеплер формулирует его для Марса, опираясь на результаты наблюдений движения этой планеты, а затем, проверив правильность этого закона для движения других планет, распространяет его на всю Солнечную систему. Закон площадей гласит: радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади. Или иначе: радиус-вектор планеты описывает площади, пропорциональные времени.

Закон, который теперь называют первым законом, Кеплер сформулировал в 1605 году: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Выводы этих двух законов были даны в основном произведении Кеплера по астрономии — в книге «Новая астрономия», которая увидела свет в 1609 году. (Полное ее название — «Новая астрономия, причинно обоснованная, или физика неба, изложенная в исследованиях движения планеты Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге».)

---

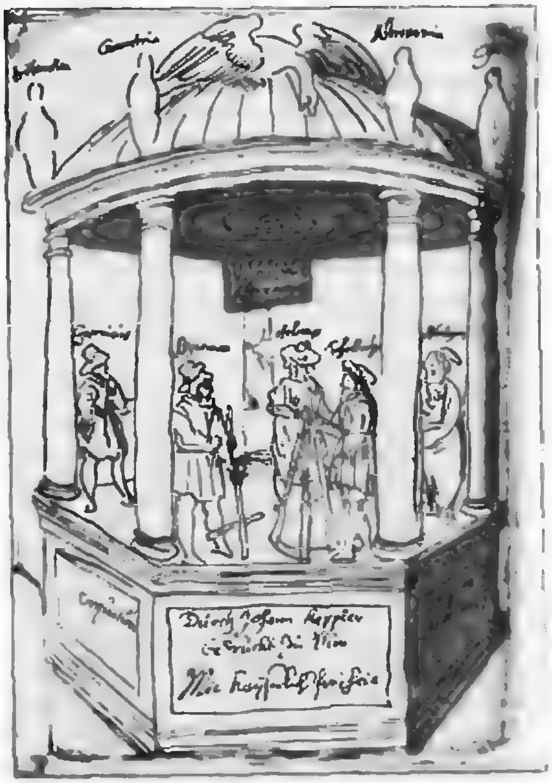
*) Во времена Кеплера были известны только шесть упомянутых планет Солнечной системы

Третий закон был найден позднее, в 1618 году, он приведен в книге Кеплера «Гармония Мира», изданной в 1619 году. Сейчас этот закон формулируется так: квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

В Праге Кеплер прожил десять лет. Это был наиболее плодотворный в творческом отношении период его жизни. Здесь же, в Праге, Кеплер пишет два фундаментальных трактата по оптике: «Дополнения к Вителлию, в которых излагается оптическая часть астрономии» (1604 г.) и «Диоптрика» (1611 г.).

Первая книга написана, действительно, как дополнения к хорошо известному в то время трактату польского ученого XII века Вителло. Кеплер останавливается на многих вопросах, касающихся геометрической и физиологической оптики. Он ввел в оптику термины «оптическая ось» и «мениск», «сходимость» и «расходимость» световых пучков, создал теорию механизма зрения, которая в основном совпадает с современной, объяснил действие собирающих и рассеивающих очковых линз, исправляющих дальнозоркость и близорукость, вплотную подошел к разработке теории оптических инструментов.

Вторая книга (ее полное название — «Диоптрика, или доказательство того, как становится видимым изображение с помощью недавно изобретенной зрительной трубы») явилась результатом дальнейших исследований, связанных с оптическими инструментами, особенно после создания Галилеем в 1609 году первого телескопа. Термином «диоптрика» Кеплер назвал тот раздел оптики, где рассматривается явление преломления света (в отличие от евклидовской катоптрики, изучающей отражение света). Поразительно, что, не зная правильной формулировки закона преломления света (этот закон был найден для частного случая Снеллиусом в 1617 году, а для общего — Декартом в 1637 году), Кеплеру удалось построить в целом правильную теорию действия оптических приборов и, в частности, зрительных труб.



Собственноручный набросок Кеплера к фронтиспису «Рудольфинских таблиц».

Относительно благополучный десятилетний период пребывания Кеплера в Праге закончился. В конце 1610 года заболевает жена Барбара. Врачи находят у нее перемежающуюся лихорадку. Дети Кеплера заболевают оспой, и в феврале 1611 года умирает сын Фридрих.

В эти дни Прага становится ареной военных действий. Это воюют за престол император Рудольф II и его брат Матвей. 23 мая 1611 года Рудольф II отрекается от престола. Королем Чехии, а вскоре и императором Священной Римской империи становится Матвей. Кеплер остается без своего высокого покровителя, и хотя Матвей оставляет ученого на должности придворного математика, решает покинуть Прагу. В конце мая Кеплер уже в Линце — столице Верхней Австрии, где предлагает сословному собранию свои услуги в качестве преподавателя и провинциального математика. Его предложение принято, и Кеплер возвращается за семьей в Прагу. Дома он застает жену в очень тяжелом состоянии, и 3 июля она умирает. Этот, 1611 год, был самым несчастливым в жизни Кеплера: смерть сына, смерть жены...

В Линце Кеплер прожил 14 лет. Помимо того, что он числился императорским математиком, его назначили математиком провинции Верхней Австрии. Его главным делом было продолжение составления таблиц планетных движений (на основе данных наблюдений Тихо Браге). Но Кеплера интересовали и сугубо математические проблемы. Это, прежде всего, — математика переменных величин и теория правильных многоугольников и многогранников.

В 1615 году вышла книга Кеплера «Стереометрия винных бочек», положившая начало целому ряду исследований в математике переменных величин, которые привели к созданию Ньютоном и Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчислений.

Поводом для написания книги (со слов самого Кеплера) послужила такая история. Как-то осенью 1613 года, когда Кеплер покупал вино, он был изумлен тем, как торговец определял вместимость бочки. Он брал палку, на которой были нанесены деления, вставлял ее в наливное отверстие бочки и измерял расстояние от отверстия до самой дальней точки бочки — до края днища. Проделав это одно измерение, он сразу же говорил, сколько вина в данной бочке. Кеплера заинтересовало, насколько точно торговец определял объем бочки при помощи одного измерения.

Уже к концу года были получены результаты этого исследования. Вначале Кеплер нашел формулу для вычисления объема бочки, а затем — и других тел вращения. Для нахождения объемов этих неправильных тел он применил метод «исчерпывания», заполняя тела фигурами, объемы которых поддавались вычислению.

Находя объем тела как сумму элементарных объемов, заполнявших тело, Кеплер часто употреблял латинское выражение Summa omnium — сумма всех. Как известно, один из создателей интегрального исчисления — Лейбниц ввел знак интеграла $\int$ (удлиненная буква *S*) именно для сокращенной записи выражения Summa omnium.

Тема правильных многоугольников и многогранников была развита в пятитомном труде Кеплера «Гармония мира».

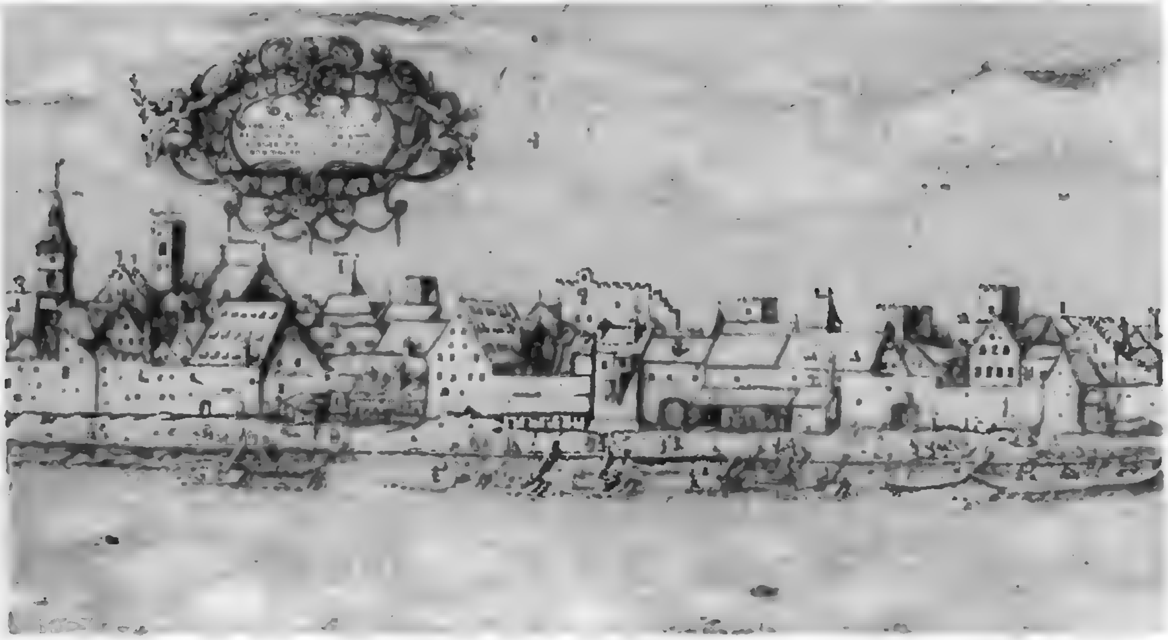
Кеплер был выдающимся математиком не только по своему официальному званию, но и по самой сути. Он внес большой вклад в теорию конических сечений, ввел термин «фокус» (параболы, гиперболы, эллипса). Введение им понятия бесконечно удаленной точки способствовало созданию проективной геометрии. Он был хорошим вычислителем, принимал участие в разработке теории логарифмов, составил собственные таблицы логарифмов, наконец, он способствовал изобретению первой вычислительной машины.

В Линце Кеплер много и плодотворно работает. Этому немало способствует его вторая жена — Сусанна Рейттингер, на которой он женился в 1613 году. Это — спокойная, добрая и трудолюбивая женщина. Она терпеливо и с достоинством переносит невзгоды и лишения, радуется научным успехам мужа и умеет поддержать его в трудную минуту.

Однако спокойная работа в Линце прерывается письмом сестры, которая сообщает, что мать Кеплера обвиняют в колдовстве. Навет исходил от соседки, невзлюбившей мать ученого. Клевета упала на благодатную почву. Этому способствовали также необщительный и малосимпатичный характер Катерины и то, что она занималась «врачеванием». В то время в Германии повсюду велась охота за ведьмами. В Леонберге, где жила Катерина, только за одну зиму было сожжено шесть женщин, подозреваемых в колдовстве.

Получив письмо от сестры, Кеплер сразу же направил властям Леонберга письмо, в котором отводил от своей матери обвинение в колдовстве и отвергал слухи о том, что он сам тоже, якобы, занимается черной магией. Письмо не возымело действия, и началось следствие. Оно тянулось почти 5 лет.

7 августа 1620 года Катерина была арестована и препровождена в тюрь-



Регенсбург. Старинная гравюра.

му. Узнав об этом, Кеплер спешит в Леонберг. Процесс начался 4 сентября и продолжался более года. Кеплер построил защиту очень искусно. Он не отвергал существования ведьм, не отрицал свидетельские показания, а просто давал каждому конкретному случаю вполне естественное объяснение, отводящие от матери обвинение в колдовстве. 4 октября 1621 года процесс был прекращен, и измученную женщину выпустили из тюрьмы. В апреле следующего года Катерина скончалась.

Мать Кеплера была спасена от костра инквизиции благодаря своему сыну, но какой ценой! Шесть лет вместо занятий наукой всемирно известный ученый вынужден был бороться с невежеством, тупостью, жестокостью.

Кеплер возвращается в Линц. Здесь он заканчивает работу над таблицами логарифмов, начатую еще летом 1619 года, когда он познакомился с книгой Д. Непера «Описание удивительных таблиц логарифмов» (1614 г.). Так как Кеплеру приходилось много вычислять, он не мог пройти мимо изобретения Непера и составил свои таблицы логарифмов, которые по структуре были более похожи на современные.

Летом 1624 года Кеплер, наконец, заканчивает составление новых астрономических планетных таблиц, над которыми он трудился 22 года. Эту работу Кеплер считал основным делом своей жизни. Старые таблицы движения планет были неточны, и новые кеплеровские таблицы с нетерпением ждали моряки и астрономы, составители календарей и астрологи. После опубликования в 1627 году «Рудольфинские таблицы» (названные так по имени Рудольфа II) в течение почти двух веков служили людям, только в начале XIX века они были заменены более точными.

Последние годы жизни Кеплера были вновь омрачены невзгодами, лишениями и скитаниями. Нет денег ни на жизнь, ни на издание своих трудов. В Линце начинаются гонения на протестантов. Им всем предложено или перейти в католичество, или в течение шести месяцев покинуть город. Кеплеру и работникам его типографии разрешено остаться в городе до окончания работы над «Рудольфинскими таблицами».

Уже восемь лет идет Тридцатилетняя война. Линц, как и вся Верхняя Австрия, оккупирован баварскими войсками, которые ведут себя как завоеватели. Город мучается в тисках голода, начинаются эпидемии. В городе вспыхивают пожары, и в огне сгорает типография Кеплера; рукопись книги чудом остается целой.

Кеплер не может больше оставаться в Линце. Он забирает семью, грузит книги, рукописи и немудреную домашнюю утварь на судно, идущее вверх по Дунаю, и отправляется в Ульм, где он договорился издать «Рудольфинские таблицы». Начинаются сильные морозы, реку сковывает лед. Кеплер вынужден оставить семью в Регенсбурге, а сам добирается до Ульма на лошадях. В Ульме Кеплер живет около года, из которых девять месяцев уходят на печатание «Таблиц».

Наконец, «Рудольфинские таблицы» увидели свет. Кеплер навещает семью в Регенсбурге и отправляется в Прагу, где в то время находился император Фердинанд.

Император милостиво встречает Кеплера, принимает от него в подарок экземпляр «Таблиц» и предлагает перейти в католичество, обещая за это всяческие блага. И вновь Кеплер отказывается — он не может пойти на сделку со своей совестью.

В судьбу Кеплера вмешивается любимец императора — полководец Альбрехт Валленштейн. Он давно знает Кеплера, так как дважды обращался к нему как к астрологу. Валленштейн предлагает Кеплеру поступить к нему на службу. Ученый соглашается, и летом 1628 года вместе с семьей переезжает в герцогство Саган — владения Валленштейна.

В августе 1630 года Валленштейн получает отставку, и Кеплер вновь остается без покровителя и... без денег. Осенью того же года он отправляется в Регенсбург на сбор германских князей, где тогда находился император, чтобы получить хотя бы часть причитающихся ему денег. Вскоре после приезда в Регенсбург Кеплер тяжело заболел лихорадкой. Здесь он и умер 15 ноября 1630 года на 59 году жизни.

Злоключения Кеплера продолжались и после его смерти. В результате сражений Тридцатилетней войны кладбище, на котором его похоронили, было полностью разрушено, и от могилы Кеплера не осталось даже следа. Его рукописное наследие переходило из рук в руки, терялось, растаскивалось, пока, наконец, в 1774 году бо́льшая часть архива Кеплера не была приобретена Петербургской академией наук *).

С именем Кеплера связаны основные законы небесной механики. В его честь названы один из лунных кратеров и малая планета № 1134. В начале XIX века жители Регенсбурга соорудили Кеплеру памятник, а к 300-летию со дня рождения был установлен монументальный памятник на родине Кеплера в Вейль-дер-Штадте. В этих же городах открыты музеи его имени.

---

*) В настоящее время 18 из 22 томов рукописного наследия Кеплера хранятся в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР.

Непридуманные опечатки

Трапеция — несчастный случай четырехугольника (частный!)

* * *

На галкой поверхности лежит брусок (на гладкой!)

* * *

Добросовестно заблудившийся оппонент (заблуждавшийся!)

* * *

Читатели сетуют (советуют!)

* * *

Непримиримые отклонения от верных результатов (неприемлемые!)

* * *

Модное радиоактивное излучение (мощное!)

* * *

Траектории пересекаются под углом 60°C

* * *

$\{x\}$— удобная часть числа x (дробная!)

* * *

Качательная (касательная!)

* * *

Положительные полуочи (полуоси!)

* * *

Адеквантный (адекватный!)

* * *

Острофизические наблюдения (астрофизические!)

* * *

Перелетные звезды (переменные!)

* * *

Бесконечно милая величина (малая!)

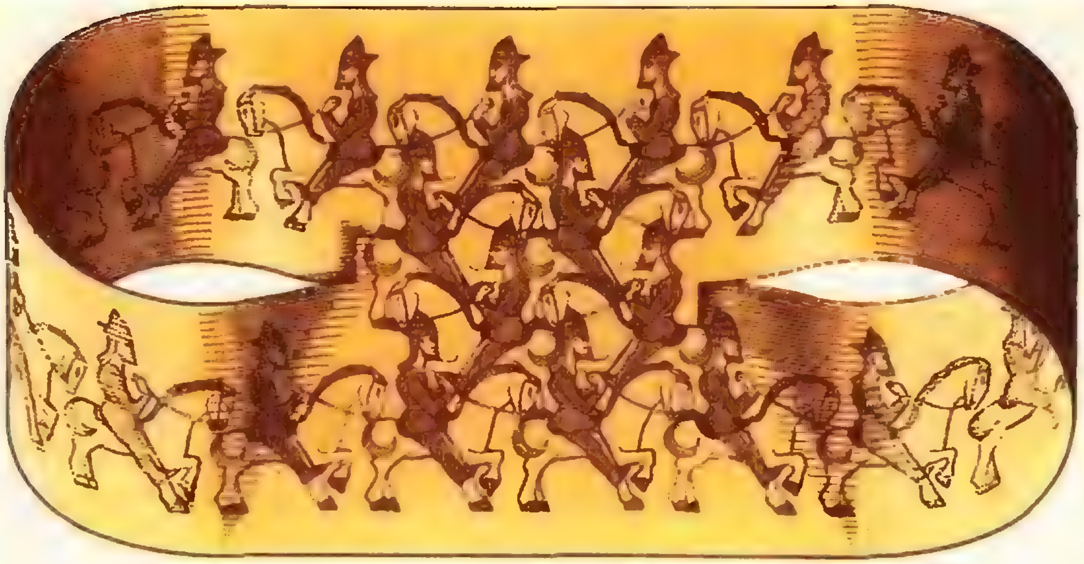
* * *

Четырехзначный механизм (четырехзвенный!)

* * *

Критически построенный читатель (настроенный!)

А. В.



А. Таллер

Сюрпризы листа Мёбиуса

Представим себе поверхность и сидящего на ней муравья. Удастся ли муравью доползти до обратной стороны поверхности — образно говоря, до ее изнанки, не перелезая через край? Конечно же нет! В этом были уверены математики до середины прошлого века, когда немецкий астроном и геометр Август Мёбиус привел первый пример односторонней поверхности, в любое место которой может доползти муравей, не перелезая через край. Об этой поверхности, называемой *листом* (или *лентой*) *Мёбиуса*, мы и расскажем.

Прежде, чем читать дальше, изготовьте модель листа Мёбиуса: возьмите бумажную полоску длинный узкий прямоугольник *ABCD* (рис. 1); перекрутив ее на 180 , склейте из нее кольцо лист Мёбиуса готов. Попробуйте закрасить одну его сторону, оставив другую белой. Вскоре вы с удивлением обнаружите, что красите «изнанку». Таким образом, лист Мёбиуса действительно является односторонней поверхностью.

Лист Мёбиуса преподнесет вам не один сюрприз и в том случае, если вы попытаетесь его разрезать:

1) Разрежьте вашу ленту Мёбиуса по центральной линии. При последнем разрезе (рис. 2) полоска, вместо того, чтобы развалиться на два куска, разворачивается в длинную связную замкнутую ленту.

2) Полученную после первого разреза ленту снова разрежьте по ее центральной линии. Перед последним сжатием ножниц попробуйте угадать, что будет?

3) Возьмите еще одну очень узкую полоску бумаги, скрутите ее на этот раз не на 180°, а на 360° и склей-

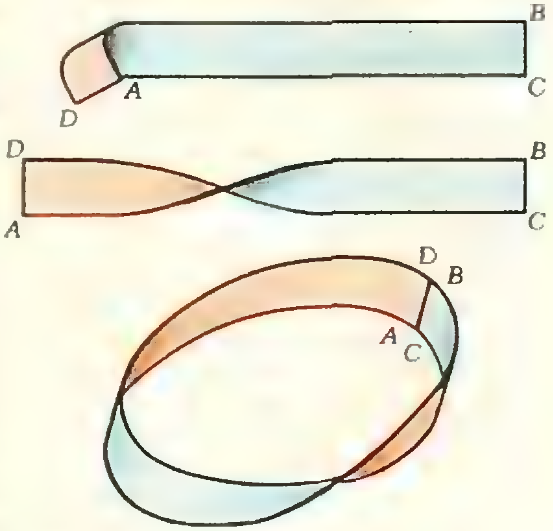


Рис. 1.

те; затем разрежьте и ее по центральной линии. Сравните результат с результатом предыдущего разреза.

Почему так происходит? Не прибегая более к бумажным моделям и ножницам, попробуем пояснить это математически.

Уравнение поверхности Мёбиуса

Построим поверхность Мёбиуса в трехмерной декартовой системе координат $Oxyz$. Рассмотрим на плоскости $z = 0$ окружность радиуса R с центром в начале координат O ($x^2 + y^2 = R^2$). Пусть точка A равномерно движется в положительном направлении по этой окружности; тогда плоскость α, проходящая через ось Oz и точку A, будет вместе с ней равномерно вращаться вокруг оси Oz. Рассмотрим в плоскости α прямую l, проходящую через точку A. Пусть прямая l вращается вокруг точки A против часовой стрелки (если смотреть на α в направлении движения точки A), причем в любой момент угол между лучом OA и прямой l равен половине угла φ между осью Ox и лучом OA. Таким образом, когда точка A завершит полный оборот, прямая l окажется повернутой относительно начального положения на 180°.

Множество точек пространства, через которые проходит прямая l (участвующая в двух движениях), есть поверхность Мёбиуса (рис. 3). Прямую l естественно называть *образующей* построенной поверхности. Точнее, образующими мы будем называть все прямые, положение которых занимает наша прямая l при своем движении. В отличие от модели, склеенной из бумажной полоски, эта поверхность безгранична (не имеет границы, края) и бесконечна (ее нельзя заключить ни в какую сферу).

Очевидно, положение точки A и, следовательно, положение образующей l, однозначно определяется величиной угла $\varphi = \widehat{xOA}$. Условимся считать, что на образующей l выбрана система отсчета, начальная точка которой есть точка A, положительное направление при $\varphi = 0$ совпадает с положительным направлением оси Ox, а масштаб совпадает с масштабом системы $Oxyz$. Тогда положение точки на образующей однозначно определяется действительным числом λ. Таким образом, задание чисел $\lambda \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in [0; 2\pi[$ однозначно определяет точку M на поверхности; найдем ее координаты. Пусть M_x, M_y, M_z, M' — проекции точки M на оси Ox, Oy, Oz и на плоскость Oxy соответственно (рис. 3). Тогда $OM_x = OM' \times \cos\varphi$, $OM_y = OM' \cdot \sin\varphi$, $OM_z = AM \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$, $OM' = OA + AM \times \cos\frac{\varphi}{2}$. Учитывая $OA = R$ и $AM = \lambda$, получаем, что координаты точки M равны

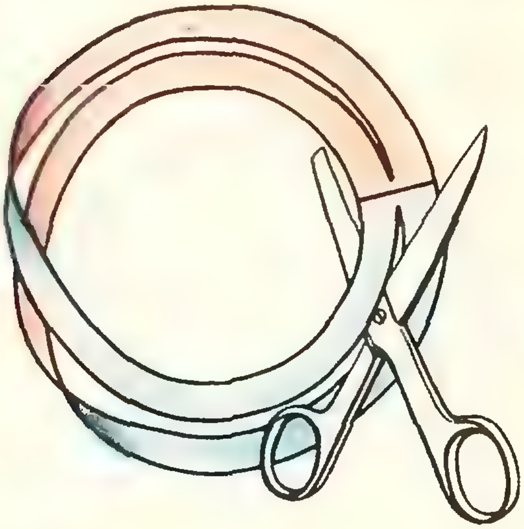


Рис. 2.

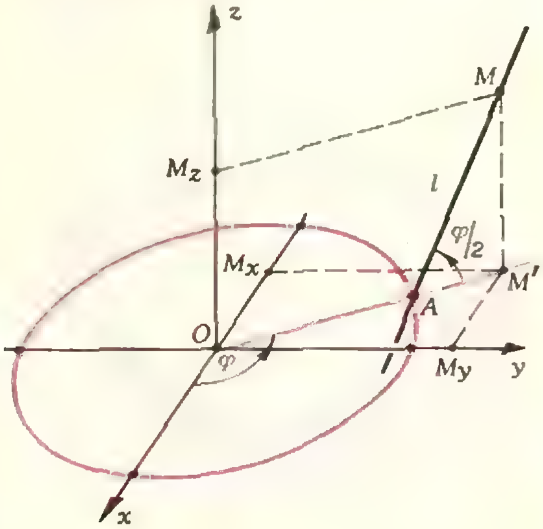


Рис. 3.

$$\left|\begin{array}{l} x=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi,\\ y=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \qquad (1)\\ z=\lambda\sin\frac{\varphi}{2},\end{array}\right.$$

где $0\leqslant\varphi<2\pi$, $\lambda\in\mathbf{R}$ *).

Общий вид поверхности Мёбиуса изображен на обложке журнала. На рисунке 4 показана часть поверхности, отвечающая $-1\leqslant\lambda\leqslant1$; эту часть поверхности мы и изображали бумажной моделью.

Если при обходе окружности мы будем вращать нашу прямую с удвоенной скоростью, то при $-1\leqslant\lambda\leqslant1$ получим полоску, перекрученную на 360° (вспомните разрез 3)). Это уже двусторонняя поверхность (рис. 5). Ее уравнение, очевидно, будет

$$\begin{cases} x=(R+\lambda\cos\varphi)\cos\varphi,\\ y=(R+\lambda\cos\varphi)\sin\varphi, \qquad (1')\\ z=\lambda\sin\varphi.\end{cases}$$

Заметим теперь, что при $\varphi=0$ образующая l пересекает исходную окружность еще и в точке $(-R, 0, 0)$. Следовательно, она пересекает некоторую другую образующую. Таким образом, поверхность Мёбиуса оказалась самопересекающейся.

Линия самопересечения

Чтобы найти линию самопересечения поверхности Мёбиуса, выясним, какие пары образующих могут пересекаться.

Если две образующие лежат в различных вертикальных плоскостях, то точка их пересечения, если она существует, должна лежать на линии пересечения этих плоскостей, т. е. на оси Oz.

Для каждого $\varphi\in[0;\,2\pi[$ найдем точку пересечения образующей с осью Oz. Для этой точки

$$x=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi=0,$$

$$y=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi=0.$$

Поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не могут быть равны 0 одновременно, $R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}=0$. При $\varphi\neq\pi$, $\lambda=-\dfrac{R}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. Из (1) $z=-R\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}$.

Таким образом, координаты точки пересечения образующей с осью Oz:

$$\left(0,\,0,\,-R\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\right).$$

Существенным для нас является тот факт, что все образующие при $\varphi\neq\pi$

---

*) Такое задание поверхности часто называют параметрическим; здесь параметры φ и λ исполняют роль своеобразных координат на поверхности (подобно широте и долготе на земной поверхности).

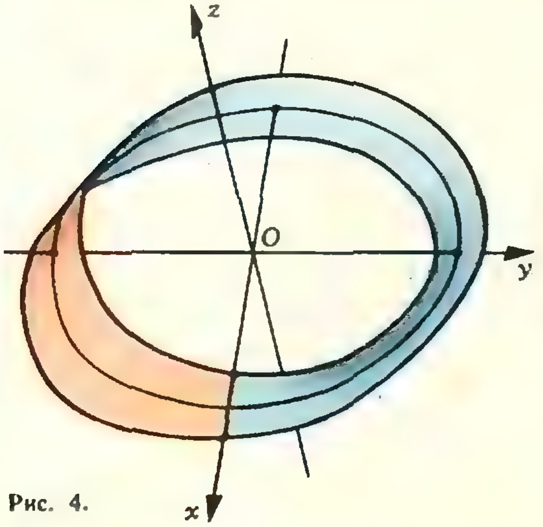


Рис. 4.

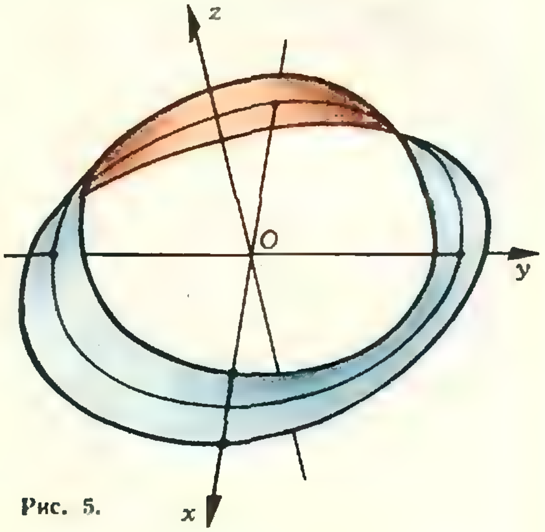


Рис. 5.

пересекают ось Oz в различных точках. При $\varphi=\pi$ образующая параллельна оси Oz.

Таким образом, пересекаться могут только такие пары образующих, которые лежат в одной вертикальной плоскости; иными словами, если одной из пересекающихся образующих соответствует угол φ, то другой соответствует угол $\varphi+\pi$. Пусть положение точки пересечения этих образующих определяется значениями λ_1, λ_2 параметра λ. Тогда из (1)

$$\begin{cases} x=\left(R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi= \\ \quad=-\left(R-\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y=\left(R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi= \\ \quad=-\left(R-\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z=\lambda_1\sin\frac{\varphi}{2}=\lambda_2\cos\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Из этих выражений следует, что λ_1, λ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}=-R+\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}, \\ \lambda_1\sin\frac{\varphi}{2}=\lambda_2\cos\frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

откуда $\left(\text{при } \varphi\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ находим

$\lambda_1=-2R\dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. Подставив найденное значение λ_1 в уравнения (1), получим координаты точки самопересечения:

$$x=-R,\quad y=-R\,\mathrm{tg}\,\varphi,\quad z=-R\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Отсюда видно, что при изменении φ точка самопересечения поверхности Мёбиуса движется вдоль прямой, которая лежит в плоскости $x=-R$ и описывается равнением $z=y$. Таким образом, линия самопересечения является прямой (но не является образующей!). Отрезок этой прямой изображен на обложке. Внимательно изучив заставку, вы найдете линию самопересечения и на ней.

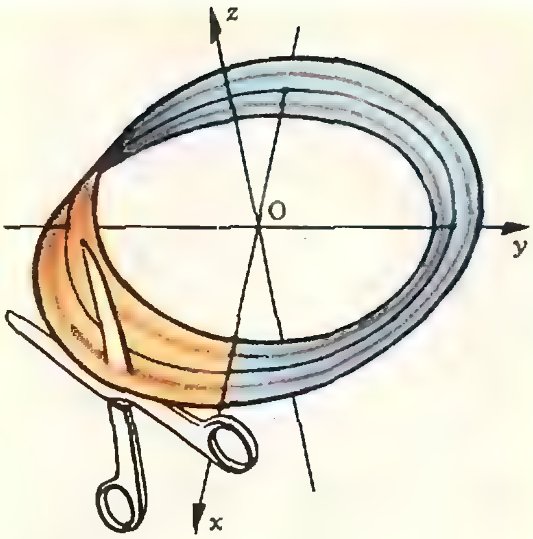


Рис. 6.

Почему же лист Мёбиуса не распадается при разрезе?

Теперь нетрудно ответить и на этот вопрос. Рассмотрите на рисунке 4 (и на обложке) край ленты Мёбиуса, т. е. линию $\lambda=\pm1$. Присмотритесь: этот край не распадается на пару замкнутых кривых, как было бы в случае неперекрученной полоски, а представляет собой одну непрерывную кривую. Наш разрез не касался края, и поэтому край (а значит и вся полоска) после разреза будет оставаться цельным куском.

Как объяснить другие сюрпризы?

Можно считать, что второй разрез осуществляется по линии $\lambda=\frac{1}{2}$ (рис. 6). Координаты точек на этой линии описываются (при $\varphi\in[0,\ 2\pi]$) уравнениями

$$\begin{cases} x=\left(R+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y=\left(R+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z=\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases} \tag{2}$$

Очевидно, разрез делит нашу полоску на две части, которые можно условно назвать внешней и внутренней, причем внутренняя часть является такой же, только более узкой, полоской листа Мёбиуса. Что же представляет собой внешняя часть?

(*Продолжение см. стр. 59*)

И. Яглом

Поговорим об определениях

Из чего состоит математика? Разумеется, в первую очередь, из теорем и аксиом («Геометрия 6», п. 6). Важнейшую часть математики составляют доказательства. Знаменитый трактат Н. Бурбаки «Начала математики» *) начинается со слов: «Со времен греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“».

Наряду с этим фундаментальную роль играют в математике определения («Геометрия 6», п. 2) — ведь, прежде чем доказывать теоремы о тех или иных математических объектах, надо понимать, что это за объекты. Да что «доказывать»! Даже для того, чтобы просто понять теорему «*Касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания*», мы должны знать, что такое «окружность», «касательная к окружности», «точка касания», «диаметр», «перпендикулярна». Пока хоть один из этих терминов остается нам неизвестным, нам нечего задумываться о самой теореме.

Разумеется, это справедливо не только для математики: прежде, чем что-либо обсуждать, мы должны понимать, о чем идет речь. Утверждение «*Анатолий Карпов хорошо играет в шахматы*» человеку, не знающему, кто такой Карпов и что такое шахматы, скажет не больше, чем нам с вами — фразы «*Рецессивный аллель влияет на фенотип только в том случае, когда генотип гомозиготен*» или «*Тарарабумбия очень зелемична*».

Чаще всего «*определение задается указанием ближайшего рода и видового отличия*». Слова в кавычках принадлежат знаменитому мудрецу Аристотелю, учителю Александра Македонского (IV в. до н. э.). В гимназиях дореволюционной России ученики заучивали их наизусть, для пущей учености — по-латыни (хотя сам Аристотель латыни, конечно, не знал — он говорил и писал на языке, который ныне называется древнегреческим).

Например, в определении «*Квадратом называется прямоугольник, у которого смежные стороны конгруэнтны*» прямоугольники — это «ближайший род», а конгруэнтность смежных сторон — то «видовое отличие», которое из «рода» прямоугольников выделяет «вид» квадратов (рис. 1). Аналогично, в определении «*Соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент второго множества, называется функцией*» соответ-

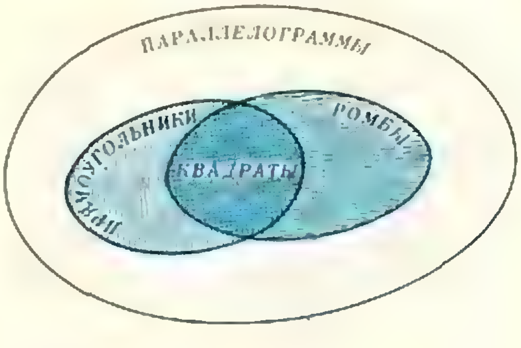


Рис. 1.

---

*) Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Никола́ Бурбаки», поставила перед собой цель — написать полный трактат по современной математике. Трактат издается отдельными выпусками в Париже с 1939 года. У нас в стране перевод трактата начал выходить в 1958 году. Трактат еще не закончен. Поскольку во время писания трактата математика тоже движется вперед, возможно, он не будет завершен никогда.

ствия — «ближайший род», из которого мы выделяем функции, а «*каждому элементу одного множества...*» — «видовое отличие», характеризующее их.

Определения по схеме Аристотеля существуют не только в математике. Так, можно сказать, что *слон — это млекопитающее, обладающее длинным хоботом*. Как известно, *ботаника — это наука о растениях*.

Одно и то же понятие «через ближайший род и видовое отличие» можно, конечно, определить по-разному. Так, *квадрат* можно определить как *прямоугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями* или *прямоугольник, в который можно вписать окружность*. Можно также один и тот же «вид» выделять из разных «родов». Например, *квадрат* можно определить как *ромб, имеющий прямой угол* (рис. 1).

Упражнения

1. Дайте еще несколько определений квадрата по схеме Аристотеля.
2. Определите по той же схеме прямоугольник, ромб, параллелограмм.
3. Дайте несколько разных определений по схеме Аристотеля какого-нибудь нематематического понятия.

Многие определения в математике не укладываются в схему Аристотеля. Например, в определениях «*График функции $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ называют кубической параболой*», «*Мы будем говорить „a больше b“, если разность $a - b$ положительна*», «*Модулем числа a называется само число a, если $a \geqslant 0$, и число $-a$, если $a < 0$*» вряд ли можно естественно указать «ближайший род» и «видовое отличие».

* *
*

Каждое определение является **соглашением** об употреблении некоторого термина или обозначения. Поэтому нельзя говорить об истинности-ложности или доказательстве определений. С другой стороны, о разумности, о полезности, об удобстве того или иного определения размышлять можно и должно.

Из любого определения автоматически вытекает (верная) теорема, имеющая вид «равносильности» («Алгебра 7», п. 21). Например, из определения квадрата на с. 32 следует теорема «*Прямоугольник тогда и только тогда является квадратом, когда его смежные стороны конгруэнтны*».

Аристотель (Рим. Национальный музей у Терм).

Одна и та же теорема может тривиально вытекать из определения при одном способе построения некоторой теории и требовать содержательных рассуждений — при другом способе. Например, в школьном курсе геометрии теорема «*Если точки X лежит между точками A и B, то $|AX| + |XB| = |AB|$*» прямо следует из определения («Геометрия 6», п. 5), а в геометрии, основанной на системе аксиом Гильберта, требует довольно длинного доказательства.

* *
*

Рассмотрим два определения понятия центральной симметрии. Известное вам определение («Геометрия 6», п. 17) можно сформулировать и так: фиксируем точку O; каждой точке A плоскости поставим в соответствие точку A' той же плоскости, симметричную точке A относительно O (рис. 2); описанное отображение плоскости на себя называется *симметрией с центром O*.

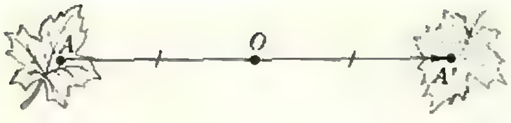


Рис. 2.

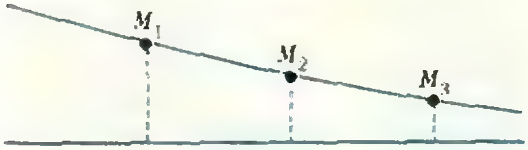


Рис. 3.

З а д а ч а 1. Докажите, что отображение плоскости на себя тогда и только тогда является симметрией с центром O, когда его единственной неподвижной точкой является точка O (т. е. $O'=O$ и при $A\neq O$ имеем $A'\neq A$), любую прямую оно переводит в параллельную прямую и существует такая точка B, для которой $|B'O|=|BO|$.

Теорема, установленная в задаче 1, позволяет дать понятию центральной симметрии второе определение: отображение плоскости на себя называется *симметрией с центром* O, если его единственной неподвижной точкой является точка O, любую прямую оно переводит в параллельную прямую и существует такая точка B, для которой $|B'O|=|BO|$.

В первом определении мы сконструировали некоторый объект (отображение плоскости на себя) и дали ему название. Второе определение имеет вид: объект некоторого рода называется *так-то*, если он обладает такими-то свойствами.

Определения первого вида называют *конструктивными* или *прямыми*, определения второго вида — *дескриптивными* (от латинского descriptio — «описание») или *косвенными*.

Сразу же подчеркнем: понятия конструктивного и дескриптивного определений мы недаром объяснили только на примере — они вряд ли допускают строгое описание. Несмотря на их расплывчатость, нечеткость, противопоставление конструктивных и дескриптивных определений часто бывает полезным.

Если какое-то понятие определено дескриптивно, то не обязательно соответствующий объект существует. Назовем, например, натуральное число, отличное от 1, *перфектным*, если оно равно сумме своих делителей. В этом случае данное нами определение никакого объекта не определило, потому что в число делителей числа n входит и само n; перфектных чисел не существует*).

Таким образом, в отличие от конструктивных определений, любое дескриптивное определение требует еще доказательства, что соответствующий объект существует.

Рассмотрим еще один пример дескриптивного определения: прямые a и b, лежащие в одной плоскости, называются *сходящимися*, если они не имеют общих точек и при движении точки по одной из этих прямых в одном из направлений расстояние от нее до другой прямой неограниченно убывает (рис. 3). Задает ли это определение какой-нибудь объект? Другими словами, существуют ли сходящиеся прямые? Оказывается, ответ на этот вопрос зависит от того, в какой геометрии мы «находимся», какую геометрию рассматриваем. В евклидовой геометрии (или, что для данного вопроса все равно, при той аксиоматике, которая принята в школьном учебнике) сходящихся прямых, конечно, не существует (поэтому мы и были вынуждены прямые на рисунке 3 изобразить искривленными). В геометрии же Лобачевского такие прямые существуют (они там называются *параллельными*).

* * *

Средневековая научная мысль, дав дескриптивные определения: *философский камень* — это препарат, позволяющий превращать неблагородные металлы в золото; *вечный двигатель* (perpetuum mobile) — это прибор, позволяющий производить работу без затраты энергии, — безуспешно билась над построением не-

---

*) Стоит, однако, в определение перфектного числа добавить одно слово: натуральное число, отличное от 1, называется *совершенным*, если оно равно сумме своих собственных делителей,— как ситуация меняется. Например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. О совершенных числах в «Кванте» много писали (1971, № 8, с. 1; 1972, № 4, с. 39; 1973, № 10, с. 71; 1975, № 5, с. 7).

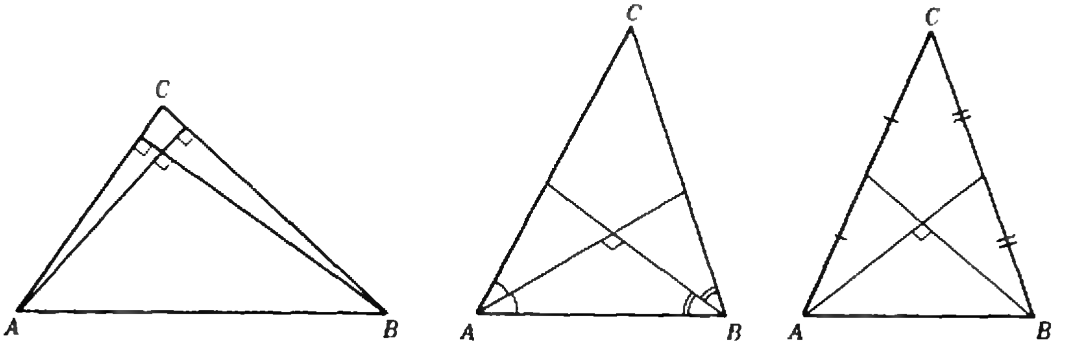


Рис. 4. а) б) в)

существующих объектов *). В отличие от них, дескриптивное определение: *тепловой двигатель* — это механизм, преобразующий тепловую энергию в механическую,— корректно; мы давно уже пользуемся, например, автомобилями (двигатель внутреннего сгорания) и пароходами (паровая машина). Построение объектов, заданных набором требуемых свойств, т. е. дескриптивно, — один из наиболее важных видов человеческой деятельности.

Довольно часто, наряду с конструктивным определением, желательно иметь и дескриптивное.

Скажем, первоначально слон был, разумеется, определен как «вон то животное!». Однако на базе этого определения никакое «слоноведение» развиться не могло. Для создания науки о слонах, безусловно, необходимо было дать исчерпывающий список характеризующих слона признаков, из которых вытекали бы и другие свойства этого вида (так, из того, что слон — млекопитающее, вытекает не только наличие у него костного скелета, но и многие особенности строения скелета).

Задачи

2. Назовем треугольник ABC *прямовысотным* (соответственно, *прямобиссектрисным* или *прямомедианным*), если его высоты (соответственно, биссектрисы или медианы), выходящие из вершин A и B, перпендикулярны (рис. 4). Какие значения может иметь величина угла C

а) в прямовысотном треугольнике?

б) в прямобиссектрисном треугольнике?

в) в прямомедианном треугольнике?

(Предупреждение: задача в) труднее двух предыдущих; для ее решения могут понадобиться векторная алгебра и тригонометрия.)

3. Назовем замкнутую несамопересекающуюся ломаную (не обязательно плоскую!) *правильным многоугольником*, если все ее звенья конгруэнтны и углы между соседними звеньями конгруэнтны. Существует ли неплоский правильный

а) четырехугольник?

б) пятиугольник? (Предупреждение: задача б) — самая трудная в статье; для ее решения требуется неплохое знание стереометрии.)

Какова может быть величина угла между соседними звеньями в таком многоугольнике?

4. Определение параллельного переноса, данное в школьном учебнике («Геометрия 6», п. 36), является конструктивным. Докажите, что это определение равносильно следующему дескриптивному определению: отображение плоскости на себя называется *параллельным переносом*, если оно любой отрезок переводит в конгруэнтный отрезок, имеющий то же направление. Какое из этих двух определений удобнее для доказательства теоремы: *композиция параллельных переносов есть параллельный перенос* («Геометрия 7», пп. 77, 71)?

5. Определение гомотетии, данное в школьном учебнике («Геометрия 7», п. 79), является конструктивным. Докажите, что это определение равносильно (для коэффициента гомотетии $k>0$, $k\neq1$) следующему дескриптивному определению: отображение плоскости на себя называется *гомотетией с коэффициентом* $k>0$, $k\neq1$, если оно произвольный отрезок AB переводит в отрезок $A'B'$, параллельный отрезку AB, одинаково с ним направленный и такой, что $\frac{|A'B'|}{|AB|}=k$.

Какое из этих двух определений удобнее для доказательства теоремы: *композиция гомотетий с коэффициентами* k_1, k_2 (центры их могут не совпадать) *является гомотетией с коэффициентом* $k_1\cdot k_2$ *при* $k_1\cdot k_2\neq1$ *и параллельным переносом при* $k_1\cdot k_2=1$?

---

*) Разумеется, с точки зрения современной физики превращение одних элементов в другие возможно, но колоссальные физические приборы, осуществляющие такие превращения, не имеют ничего общего с тем, что понимали под философским камнем средневековые алхимики.

В. Майер, Н. Назаров

Автогенератор из угольного микрофона

Сто лет назад, в 1878 году, английский ученый Д. Юз изобрел угольный микрофон. Устройство и принцип действия этого прибора очень просты. Между тонкой металлической мембраной, служащей одним электродом, и металлической пластинкой или стержнем, выполняющими роль второго электрода, насыпан угольный порошок. Когда на мембрану микрофона падает звуковая волна, колебания мембраны приводят к периодическому изменению плотности угольного порошка и, следовательно, к изменению его сопротивления. Ток в цепи микрофона, подключенного к источнику постоянного тока, становится пульсирующим. Таким образом звуковые колебания в микрофоне преобразуются в электрические.

Для обратного преобразования электрических колебаний в звуковые может служить динамик. Он состоит из постоянного магнита, между полюсными наконечниками которого расположена подвижная катушка, соединенная с диффузором. Когда по катушке проходит пульсирующий ток, вокруг катушки возникает изменяющееся магнитное поле. Взаимодействие этого поля с полем постоянного магнита приводит к колебаниям катушки и связанного с ним диффузора. В результате в воздухе появляются звуковые колебания.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включенных угольного микрофона *М*, громкоговорителя (динамика) *Гр* и батареи *Б* источников постоянного тока (рис. 1). Звук, падающий на микрофон, приводит к появлению в цепи пульсирующего тока. Этот ток, проходя по обмотке динамика, вызывает колебания диффузора, и динамик становится источником звука. Итак, рассматриваемая система преобразует звук в переменный электрический ток и затем вновь в звук. Если амплитуда излучаемой динамиком звуковой волны больше амплитуды волны, падающей на микрофон, система действует как усилитель звука. Именно в таком качестве она чаще всего применялась раньше и широко используется теперь в телефонной связи.

Развернем микрофон и динамик навстречу друг другу (рис. 2). Колебания диффузора динамика, дойдя в виде звуковой волны до микрофона, вызывают появление в цепи пульсирующего тока, который, в свою очередь, воздействует на колебания диффузора — получается колебательная система с обратной связью, или автогенератор. Слой воздуха между динамиком и микрофоном, служащий «проводником» звуковых колебаний, осуществляет обратную связь между микрофоном и динамиком.

Заметим, что всякий усилитель с цепью обратной связи можно превра-

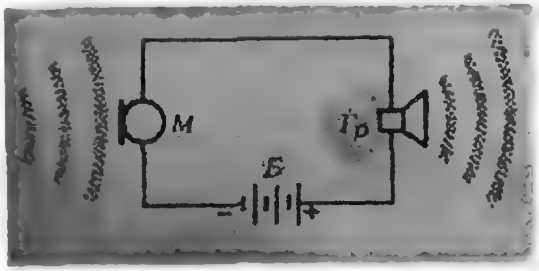


Рис. 1.

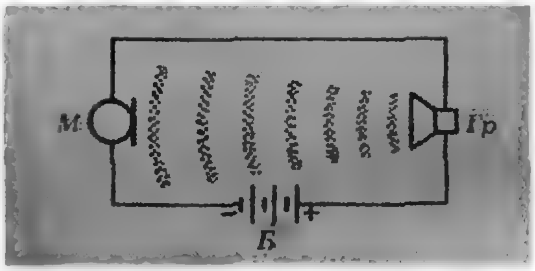


Рис. 2.

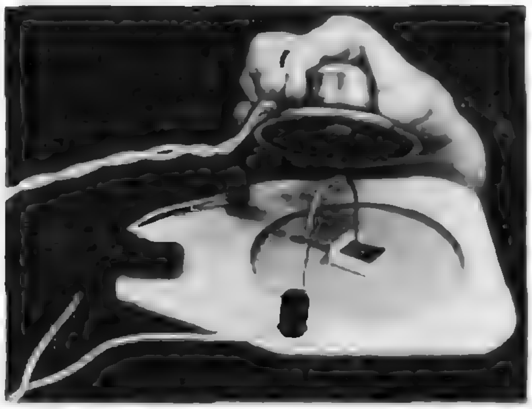


Рис. 3.

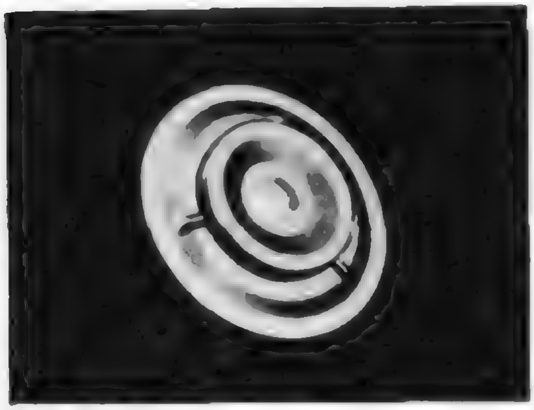


Рис. 4.

тить в автогенератор, если соответствующим образом подобрать обратную связь. Можно предложить большое количество опытов, подтверждающих этот вывод. Некоторые из них уже рассматривались на страницах нашего журнала *).

Вот еще один опыт. Для изготовления модели угольного микрофона вырежьте в фанерной пластинке круглое отверстие диаметром примерно 100 мм и заклейте его папиросной бумагой, которая будет выполнять роль мембраны. В центре мембраны поместите склеенную из плотной бумаги коробочку размером $5 \times 20 \times 20$ мм, на дне ее укрепите электрод из тонкой фольги. В коробочку насыпьте угольный порошок (можно, например, раздробить молотком графитовый стержень от одного элемента батарейки для карманного фонаря; однако порошок не должен быть очень мелким). На угольный порошок в коробочке свободно наложите второй электрод из жести. Слегка побрызгайте на папиросную бумагу и дайте ей высохнуть (чтобы бумага хорошо натянулась).

Соберите цепь, показанную на рисунке 1 (в качестве источника питания можно использовать две или три последовательно соединенные батарейки для карманного фонаря; динамик лучше взять типа 0,5ГД21). Если теперь тихо говорить перед микрофоном, из динамика будет слышен довольно сильный, правда искаженный, звук. Для успеха опыта важно экспериментально подобрать оптимальную величину давления верхнего электрода на угольный порошок.

Развернув динамик, приближайте его к микрофону (рис. 3). При некотором расстоянии между ними система самовозбудится, и возникнет громкий однотонный звук. При прочих равных условиях частота и сила звука зависят от расстояния между микрофоном и динамиком.

Иногда удается поднести динамик очень близко к мембране микрофона, а автоколебания не возникают. В таком случае бывает достаточно слегка прикоснуться к микрофону или крикнуть вблизи него, чтобы система самовозбудилась.

Опыт получится лучше, если вместо самодельного микрофона использовать угольный микрофон из телефонной трубки, внешний вид которого изображен на рисунке 4. Для проведения опытов этот микрофон желательно укрепить на листе фанеры.

---

*) См., например, статью В. Майера и Р.-Э. Шафира «Струйный автогенератор звука» («Квант», 1977, № 1).

В. Гальперин, В. Калинников

Многоугольники на клетчатой бумаге

Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник данной формы, помещая при этом все его вершины в узлы сетки? Как правило — нельзя. Например, из правильных многоугольников так можно нарисовать лишь квадрат. А для каких многоугольников это можно сделать приближенно, т. е. помещая вершины сколь угодно близко от узлов? Оказывается — для всех.

В этой заметке, написанной школьниками, показано, почему и как это можно сделать.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и неколлинеарные векторы, O — некоторая точка; тогда множество Π всех таких точек P, что $\overrightarrow{OP} = m\vec{a} + m\vec{b}$ (где m, n — целые числа), называется *решеткой* (на плоскости), а ее точки — *узлами* решетки (рис. 1). В случае, когда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$, решетка называется *целочисленной* (рис. 2).

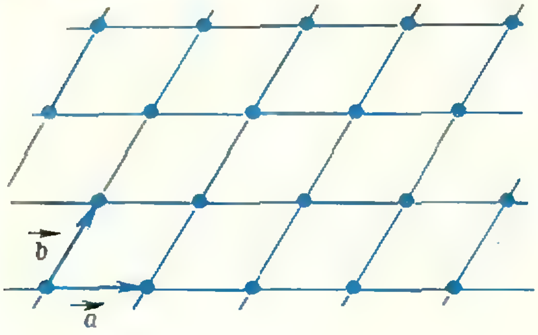


Рис. 1.

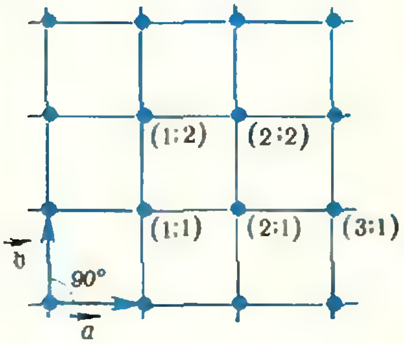


Рис 2.

Будем говорить, что многоугольник *вписывается* в решетку Π, если существует подобный ему многоугольник с вершинами в узлах решетки. На рисунке 3 показан один из способов вписать квадрат в целочисленную решетку. Рисунок 4 изображает решетку, в которую вписан правильный шестиугольник и треугольник (для нее $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$).

Мы сейчас увидим, однако, что многоугольники довольно редко удается вписать в решетку. Действительно:

Задача 1. Правильный треугольник не вписывается в целочисленную решетку (это задача М475а)).

Задача 2. Квадрат не вписывается в решетку, заданную векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если

$$\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = 1 \text{ и } \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 60 .$$

Задача 3. Правильный пятиугольник не вписывается ни в какую решетку.

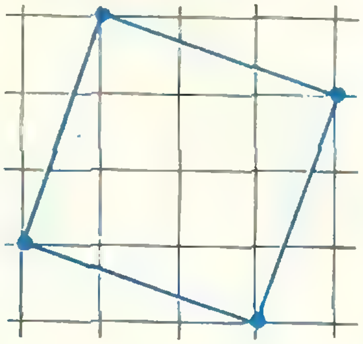


Рис. 3.

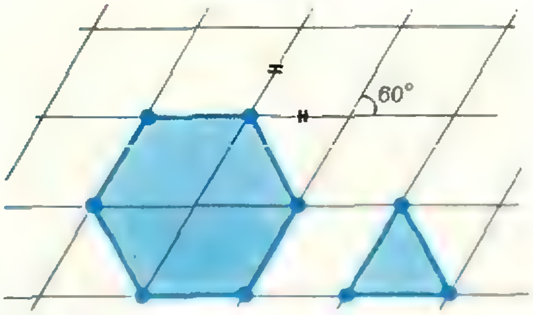


Рис. 4.

Более того, в статье А. Егорова доказано *), что *никакие правильные многоугольники, кроме треугольника, квадрата и шестиугольника — не вписываются ни в какую решетку*. Понятно также, что наперед заданный многоугольник произвольной формы, как правило, не вписывается ни в какую решетку.

Раз задача о вписывании многоугольников в решетку приводит в большинстве случаев к отрицательному результату, естественно ее ослабить: требовать, чтобы вершины попадали в узлы лишь приближенно. Дадим точное определение:

Многоугольник *ε-вписывается в решетку* $П$, если существует подобный ему (с натуральным коэффициентом подобия) многоугольник, каждая вершина которого находится на расстоянии, меньшем ε, от одного из узлов решетки (рис. 5). Заметим, что при $\varepsilon = 0$ здесь получается определение вписанности, данное выше, а при больших ε (бо́льших, чем расстояние между узлами) определение бессодержательно.

Столь же бессодержательно оно стало бы, если мы сняли бы условие натуральности коэффициента подобия; взяв этот коэффициент достаточно близким к 0, можно было бы уместить весь многоугольник вблизи одного узла решетки. При натуральном же коэффициенте подобия (и достаточно малом ε) любые две вершины многоугольника, очевидно, не смогут попасть в ε-окрестность одного и того же узла.

Далее, мы будем говорить, что многоугольник *почти вписывается* в решетку $П$, если он ε-вписывается в нее при любом $\varepsilon > 0$. Ясно, что многоугольник почти вписывается, если он (точно) вписывается. А обратное неверно:

Теорема 1. *Правильный треугольник почти вписывается в целочисленную решетку*. (Это пункт б) из задачи М475).

Доказательство. Расположим сначала правильный треугольник со стороной 2 на целочисленной решетке так, как показано на рисунке 6.

При гомотетии с центром O и натуральным коэффициентом k $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в $\triangle A_kB_kC_k$, где A_k и B_k — узлы решетки, а C_k имеет координаты $(0; k\sqrt{3})$ (ордината y_k точки C_k равна $y_k = ky_1 =$

$$= k|OC_1| = k\sqrt{3}).$$

Так как A_k и B_k — узлы решетки при всех k, то задача состоит в нахождении такого k, чтобы расстояние от C_k до ближайшего узла решетки было меньше ε, т. е. чтобы $k\sqrt{3}$ отличалось от целого менее чем на ε.

Возьмем натуральное N такое, что $N > \frac{1}{\varepsilon}$, и разделим промежуток $[0; 1[$ на N кусочков (полуинтервалов) длины меньше ε: $\left[0, \frac{1}{N}\right[$; $\left[\frac{1}{N}; \frac{2}{N}\right[$; $\ldots$; $\left[\frac{N-1}{N}; 1\right[$.

Отметим теперь на промежутке $[0; 1[$ точки $\{k\sqrt{3}\}$, где $\{x\}$ означает дробную часть x и $k = 1, 2, \ldots, N+1$. Каждая точка $\{k\sqrt{3}\}$ попадает в один из кусочков. Так как кусочков N, а точек $N+1$, то какие-то две точки попадут в один и тот же полуинтервал. Пусть это будут точки $\{m\sqrt{3}\}$

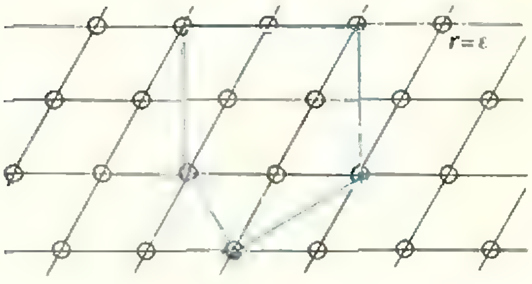


Рис. 5.

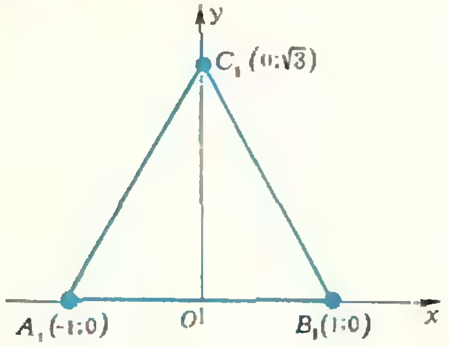


Рис. 6.

---

*) «Квант», 1974, № 12, с. 30.

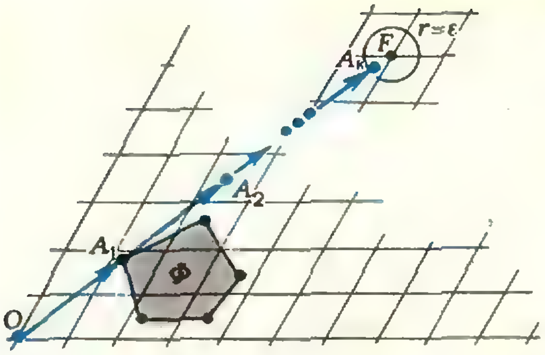


Рис. 7.

и $\{n\sqrt{3}\}$, где $m > n$ — натуральные числа. Тогда $(m-n)\sqrt{3}$ отличается от целого менее чем на $\frac{1}{N}$ и, следовательно, менее чем на ε. Положив k равным $m - n$, получим требуемое.

Теорема доказана, однако имеет место значительно более общий факт.

Основная теорема. *Любой многоугольник почти вписывается в любую решетку.*

Заметим, что пункт в) задачи М475 является частным случаем этой теоремы.

Доказательство. Пусть дана решетка $П$, число $\varepsilon > 0$ и многоугольник Φ.

Докажем, что при некоторой гомотетии с натуральным коэффициентом N многоугольник Φ перейдет в многоугольник Φ' такой, что все вершины Φ' будут на расстоянии, меньшем ε, от узлов решетки.

Рассмотрим вершину A многоугольника. Пусть при гомотетии с центром O и коэффициентом k точка A переходит в A_k и $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{a} + y_A\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, порождающие решетку. Тогда $\overrightarrow{OA_k} = k(x_A\vec{a} + y_A\vec{b}) = (kx_A)\vec{a} + (ky_A)\vec{b}$.

Условие, что A_k менее чем на ε отстоит от узла решетки (рис. 7), будет выполняться, если каждая из координат (kx_A) и (ky_A) будет отличаться от целого менее чем на $c\cdot\varepsilon$, где c — коэффициент, не зависящий от k: можно, например, взять $c = \frac{1}{2\max(|\vec{a}|, |\vec{b}|)}$.

Действительно, пусть $\overrightarrow{OF} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Тогда, если

$$\left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ то } |A_kF| = |\overrightarrow{A_kF}| =$$

$$= |\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA_k}| = |m\vec{a} + n\vec{b} - kx_A\vec{a} - ky_A\vec{b}| = |(m - kx_A)\vec{a} + (n - ky_A)\vec{b}| \leqslant |(m - kx_A)\vec{a}| + |(n - ky_A)\vec{b}| = \left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| + \left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но неравенства $\left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ эквивалентны неравенствам $|m - kx_A| < \frac{\varepsilon}{2|\vec{a}|}$ и $|n - ky_A| < \frac{\varepsilon}{2|\vec{b}|}$. Поэтому если kx_A и ky_A отличаются от целых менее чем на $\frac{\varepsilon}{2\max(|\vec{a}|; |\vec{b}|)}$, то $|A_kF| < \varepsilon$ для некоторого узла F, а это и требовалось.

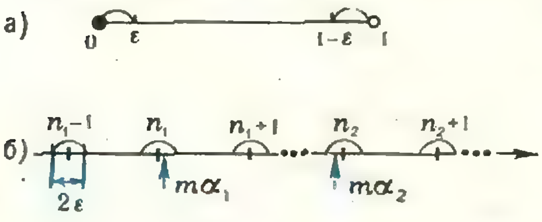


Рис. 8.

Нам нужно, чтобы все вершины многоугольника Φ' попали в ε-окрестности узлов решетки. Так будет, если все числа Nx_A, Ny_A, Nx_B, Ny_B, . . . отличаются от целых менее чем на $c\cdot\varepsilon$ при некотором натуральном N (x_A, y_A, x_B, y_B, . . . — коэффициенты разложения векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, . . . по $\vec{a}$ и $\vec{b}$, A, B, . . . — вершины Φ).

Мы получим искомое натуральное число N, если будет доказана

Теорема Кронекера. Пусть α_1, α_2, . . . , α_n — действительные числа, тогда для любого положительного ε найдется натуральное m такое, что каждое из чисел $m\alpha_i$, где $i = 1, 2, . . . , n$, отличается от целого менее чем на ε (рис. 8б), т. е. $\{m\alpha_i\} \in [0; \varepsilon[\cup]1-\varepsilon; 1[$ (рис. 8а).

Эта теорема уже была установлена при доказательстве теоремы 1 для случая $n = 1$ (было фактически доказано, что при любом α найдется такое натуральное m, что $m\alpha$ отличается от целого менее чем на ε; то, что α было равно $\sqrt{3}$, несущественно). Теорема Кронекера утверждает, что для набора $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ любой длины при некотором натуральном m числа $\alpha_i m$ одновременно отличаются от целых менее чем на ε.

Перейдем к доказательству теоремы Кронекера.

Рассмотрим n последовательностей:

$$\begin{array}{l}
\{\alpha_1\}, \{2\alpha_1\}, \{3\alpha_1\}, \ldots, \{k\alpha_1\}, \ldots \\
\{\alpha_2\}, \{2\alpha_2\}, \{3\alpha_2\}, \ldots, \{k\alpha_2\}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\{\alpha_n\}, \{2\alpha_n\}, \{3\alpha_n\}, \ldots, \{k\alpha_n\}, \ldots
\end{array}$$

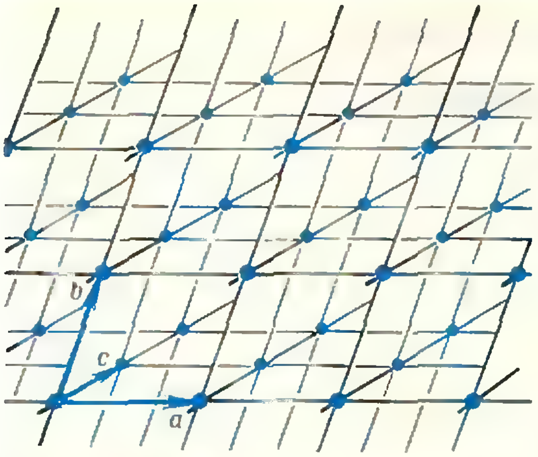


Рис. 9

Рис. 10.

Все члены этих последовательностей принадлежат промежутку [0; 1[. Разобьем этот промежуток на кусочки (полуинтервалы) длины меньше ε:

$$\left[0;\frac{1}{M}\right[;\left[\frac{1}{M};\frac{2}{M}\right[;\ \ldots\ ;\left[\frac{M-1}{M};1\right[,$$

где M — натуральное, $M>\frac{1}{\varepsilon}$ (тогда $\frac{1}{M}<\varepsilon$). Теперь каждому из членов последовательностей поставим в соответствие тот кусочек промежутка [0; 1[, в котором он находится.

Тогда для каждого натурального k будет определен упорядоченный набор полуинтервалов, соответствующих точкам $\{k\alpha_1\}$, $\{k\alpha_2\}$, ..., $\{k\alpha_n\}$. Но так как рассматриваемых полуинтервалов всего M, а в каждый набор входит n полуинтервалов, то число различных таких наборов равно M^n. Если k пробегает значения от 1 до M^n+1, то для некоторых $k_1<k_2\leqslant M^n+1$ наборы совпадут. В этом случае число $m=k_2-k_1$ удовлетворяет условию, так как $\{m\alpha_i\}=\{(k_2-k_1)\alpha_i\}=\{k_2\alpha_i-k_1\alpha_i\}$, а $\{k_1\alpha_i\}$ и $\{k_2\alpha_i\}$ находятся в одном полуинтервале длины меньше ε, поэтому $m\alpha_i$ находится на расстоянии, меньшем ε, от целого числа. Теорема доказана.

До сих пор мы рассматривали решетки на плоскости. Можно рассматривать и *пространственные решетки*. Они определяются так же, как плоские, только вместо двух неколлинеарных векторов нужно взять три некомпланарных (рис. 9). Аналогично тому, как это делалось выше для многоугольников и плоских решеток, определяется *вписанность* и *почти вписанность* многоугольников в пространственную решетку. Какие из пяти правильных многоугольников (рис. 10) вписываются в целочисленную*) пространственную решетку? Вот ответ:

Задача 4. Куб, тетраэдр и октаэдр вписываются в целочисленную решетку.

Задача 5. Додекаэдр и икосаэдр не вписываются ни в какую решетку.

Задача 6. Пусть в пространстве задано семейство параллельных плоскостей такое, что расстояния между соседними плоскостями семейства равны. Можно ли расположить в пространстве а) икосаэдр, б) додекаэдр так, чтобы их вершины лежали на плоскостях семейства?

Мы получили исчерпывающий ответ о вписывании правильных многогранников в пространственную решетку. Для почти вписывания тоже получается исчерпывающий ответ, такой же, как для плоского случая:

Задача 7. Любой многогранник почти вписывается в любую решетку в пространстве.

---

*) Решетка, заданная векторами $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, называется целочисленной, если $|\vec a|=|\vec b|=|\vec c|=1$ и $\vec a\perp\vec b$, $\vec b\perp\vec c$, $\vec c\perp\vec a$.

задачник Кванта

Задачи

М506—М510; Ф518—Ф522

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 апреля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М486, М487» или «Ф498». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М506*. Докажите, что для положительных a, b, c и d справедливо неравенство:
$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+a^2c^2+$ $+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$.

Э. Туркевич

М507. В вышедших в прошлом году в русском переводе «Избранных задачах» из журнала American Mathematical Monthly (М., «Мир», 1977) две задачи замечательного математика П. Эрдеша (№№ 138 и 139) были даны без решения. Редакция «Кванта» получила целый ряд писем, содержащих решения этих задач. Прежде чем познакомить с решениями читателей журнала, мы предлагаем самостоятельно подумать над этими трудными задачами; для этого мы включаем их в Задачник «Кванта».
Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n<2n$ — конечная последовательность натуральных чисел ($n\geqslant 6$).
а) Докажите, что

$$\min_{i,\,j}\,[a_i,\,a_j]\leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

где $[a_i,\,a_j]$ означает наименьшее общее кратное чисел a_i и a_j, а минимум берется по всем парам различных чисел a_i, a_j.
б) Докажите, что

$$\max_{i,\,j}\,(a_i,\,a_j)>\frac{38n}{147}-c,$$

где c не зависит от n, а $(a_i,\,a_j)$ означает наибольший общий делитель a_i и a_j.
Оценки в задачах а) и б) нельзя улучшить (то есть коэффициент 6 заменить меньшим, а $\frac{38}{147}$ — бóльшим).

М508. Окружность касается трех полуокружностей с диаметрами AB, BC и AC ($C\in[AB]$, рис. 1). Докажите, что радиус окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до прямой AB.

И. Шарыгин

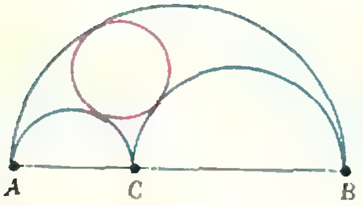


Рис. 1.

М509. Решите в натуральных числах уравнения:
а) $2^x + 1 = 3^y$;
б) $z^x + 1 = (z + 1)^2$;
в)* $z^x + 1 = (z + 1)^y$.

Д. Флейшман

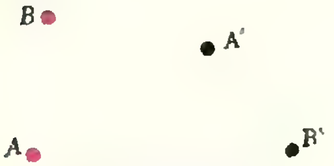


Рис. 2.

М510. В книге «Венгерские математические олимпиады» приводится такая задача (№ 148): «Доказать, что для всех положительных $\alpha < \pi$ выполнено неравенство

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0.$$

Докажите следующее обобщение этого неравенства: для всех $0 < \alpha < \pi$ и натурального n

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n}\sin n\alpha > 0.$$

И. Биргер, Р. Ушаков

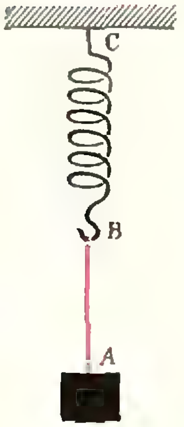


Рис. 3.

Ф518. На рисунке 2 показано положение двух точек A и B и их изображений A' и B', которые дает тонкая линза. Найти построением положение линзы и ее фокусов.

XXIV физическая олимпиада школьников ПНР

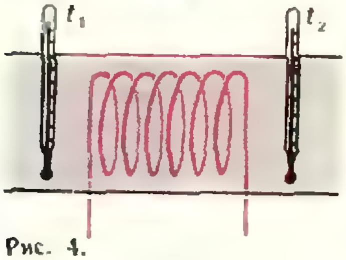


Рис. 4.

Ф519. Груз A подвешен к пружине BC с помощью нити AB (рис. 3). Какова должна быть амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими? Масса груза $m = 0{,}1$ кг, жесткость пружины $k = 1600$ Н/м.

Ф520. В проточном калориметре (рис. 4) исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают с помощью спирали. Газ поступает в калориметр при температуре $t_1 = 20$ С. При мощности нагревателя $W_1 = 1$ кВт и расходе газа $m_1 = 540$ кг/ч температура газа за нагревателем оказалась такой же, как при мощности нагревателя $W_2 = 2$ кВт и расходе газа $m_2 = 720$ кг/ч. Давление газа в трубе всюду одинаково. Найти температуру газа t_2, если его теплоемкость при постоянном объеме $c_V = 21$ Дж/(моль·К), а молярная масса газа $M = 29$ кг/кмоль.

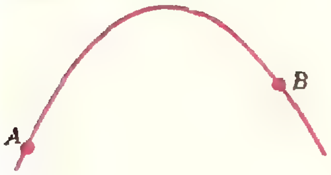


Рис. 5.

Ф521. На рисунке 5 показана часть траектории движения хорошо обтекаемого тела, брошенного под углом к горизонту. В точке A тело имело скорость, равную по абсолютной величине 20 м/с. Сколько времени тело летело от точки A к точке B?

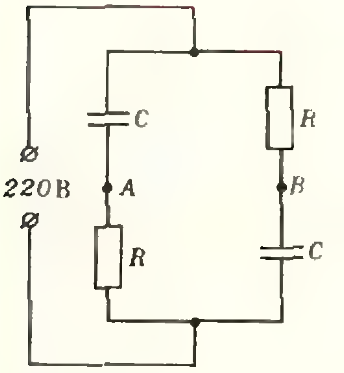


Рис. 6.

Ф522. Цепь, показанная на рисунке 6, подключена к сети переменного тока с напряжением $U_0 = 220$ В. Каково напряжение между точками A и B?

А. Зильберман

Решения задач

М456—М460; Ф472—Ф477

М456. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.*

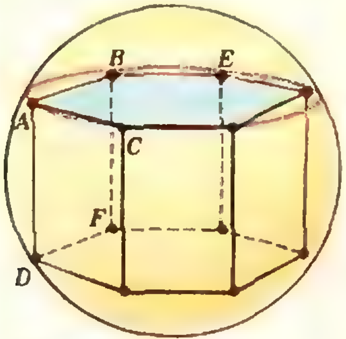


Рис. 1.

Пусть A — вершина многогранника, AB, AC, AD — выходящие из нее ребра. Поскольку точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, через них можно провести сферу; обозначим эту сферу через S_A (рис. 1).

Пусть A и B — соседние вершины. Докажем, что сферы S_A и S_B совпадают. Отсюда сразу вытекает, что сферы S_X совпадают для всех вершин X, то есть все вершины лежат на одной сфере.

Пусть BE и BF — ребра, выходящие из вершины B. Они лежат в двух гранях CAB и DAB, граничащих с ребром AB. Пусть, например, ребро BE лежит в грани CAB, а ребро BF — в грани DAB (заметим, что точка E может совпадать с C и, аналогично, точка F может совпадать с D). По условию, точки C, A, B, E лежат на одной окружности. При этом три точки C, A и B лежат на окружности, которая получается при пересечении сферы S_A плоскостью, проходящей через точки C, A, B. Так как через три различные точки можно провести не более одной окружности, то две построенные окружности совпадают, то есть точка E лежит на сфере S_A. Аналогично доказывается, что точка F лежит на сфере S_A. Значит, сфера S_A проходит через точки B, A, E, F, то есть она совпадает со сферой S_B, что и требовалось.

И. Бернштейн

◆

М457. *На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно.*

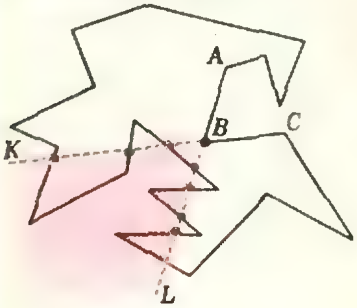


Рис. 2.

Рассмотрим какие-нибудь два последовательных звена AB и BC ломаной. Продолжим эти звенья за вершину B; получим лучи BK и BL (рис. 2). Объединение таких двух лучей назовем *уголком*. Такой уголок можно построить при каждой вершине ломаной. Легко понять, что количество особенных пар равно количеству пересечений звеньев с уголками. Мы утверждаем, что каждый уголок пересекается с ломаной в четном числе точек. В самом деле, пройдя из соседней с B вершины A ломаной в другую соседнюю с B вершину C, мы видим, что наша ломаная входит внутрь уголка столько же раз, сколько выходит из него (поскольку точки A и C обе находятся вне уголка). Значит, и число особенных пар звеньев тоже четно.

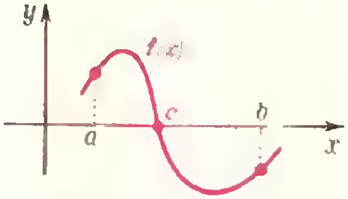
С. Фомин

◆

М458. *Написан многочлен* $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x^2 + *x + 1$. *Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек*

Да, может. Покажем, как для этого второй игрок должен играть.

Всего нужно заменить на числа 9 звездочек — 5 при нечетных степенях и 4 при четных. Каждым ходом второй игрок должен ставить любой коэффициент при степени, имеющей противоположную четность по отношению к коэффициенту, который только что поставил его противник. Тогда после семи ходов останется 2 звездочки при степенях x^k и x^l, причем хотя бы одно из чисел k и l нечетно, и ход будет у второго игрока. Пусть P — многочлен, который *числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?*



Если многочлен $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, то при некотором $c \in [a,b]$ он обращается в 0: $f(c)=0$

Рис. 3.

получится, если заменить звездочки при x^k и x^l нулями, α — коэффициент при x^k и β — коэффициент при x^l, который поставят игроки; тогда после замены всех звездочек получится многочлен $f(x) = P(x) + \alpha x^k + \beta x^l$.

Разберем два случая.

а) k четно, l нечетно. Тогда

$$f(1) = P(1) + \alpha + \beta,$$
$$f(-1) = P(-1) + \alpha - \beta,$$
$$f(1) + f(-1) = P(1) + P(-1) + 2\alpha.$$

Второй игрок должен выбрать $\alpha = \frac{1}{2}(-P(1) - P(-1))$.

Тогда независимо от последнего хода первого игрока окажется, что $f(1) + f(-1) = 0$. Значит, либо $f(1) = f(-1) = 0$, либо $f(1)$ и $f(-1)$ имеют разные знаки, и тогда на отрезке $[-1;\ 1]$ у многочлена f будет корень (рис. 3).

б) k и l нечетны. Тогда

$$f(-1) = P(-1) - \alpha - \beta,$$
$$f(2) = P(2) + 2^k\alpha + 2^l\beta,$$
$$2^l f(-1) + f(2) = c + (2^k - 2^l)\alpha,$$

где $c = 2^l P(-1) + P(2)$. Второй игрок должен выбрать $\alpha = c/(2^l - 2^k)$. Тогда независимо от последнего хода первого игрока окажется, что $2^l f(-1) + f(2) = 0$. Значит, либо $f(-1) = f(2) = 0$, либо $f(-1)$ и $f(2)$ имеют разные знаки, так что на отрезке $[-1;\ 2]$ есть корень.

И. Бернштейн

◆

М459. *В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них), и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — билеты первого маршрута, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — билеты второго маршрута (n — число городов). Обозначим стоимость любого билета c через $Ц(c)$, а стоимость проезда из города A в город B через $Ц(AB)$. Утверждение будет доказано, если нам удастся построить отображение $f\colon \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \to \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, обладающее следующими двумя свойствами:

а) отображение f взаимно однозначно;

б) для любого билета a из первого маршрута $Ц(a) \leqslant Ц(f(a))$.

Мы укажем способ, по которому строится отображение f, обладающее свойством б). Чтобы доказать его взаимнооднозначность, мы покажем, что этот же способ приводит к построению *обратного* к f отображения $g\colon \{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \to \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, — такого, что для любого билета a из первого маршрута $g(f(a)) = a$.

Способ построения отображения f. Пусть a — некоторый билет первого маршрута, взятый в городе A. Обозначим через $X_1(A)$ множество городов, которые в первом маршруте встречаются позже A, а через $X_2(A)$ — множество городов, встречающихся позже A во втором маршруте. Возможны следующие два случая.

1. $X_1(A) \cap X_2(A) \neq \varnothing$.

В этом случае назовем билет a первого маршрута *счастливым* и положим $f(a) = b$, где b — билет второго маршрута, купленный в городе A (см. рис. 4, *а*).

2. $X_1(A) \cap X_2(A) = \varnothing$.

В этом случае назовем билет a первого маршрута *несчастливым*. Выберем из множества $X_1(A)$ такой город B: $B \in X_1(A)$, что $X_1(A) \cap X_2(B) = \varnothing$. Легко понять, что этими двумя условиями город B определяется единственным образом. Действительно, предположив, что существуют два города B_1 и B_2, такие, что $B_1 \in X_1(A)$, $B_2 \in X_1(A)$ и $X_1(A) \cap X_2(B_1) = \varnothing$, $X_1(A) \cap X_2(B_2) = \varnothing$, мы получим противоречие: поскольку из условия задачи следует, что для любых двух городов C и D либо $C \in X_2(D)$, либо $D \in X_2(C)$, должно быть либо $B_2 \in X_1(A) \cap X_2(B_1)$, либо $B_1 \in X_1(A) \cap X_2(B_2)$. Положим теперь $f(a) = b$, где b — билет второго маршрута, купленный в выбранном городе B (рис. 4, *б*).

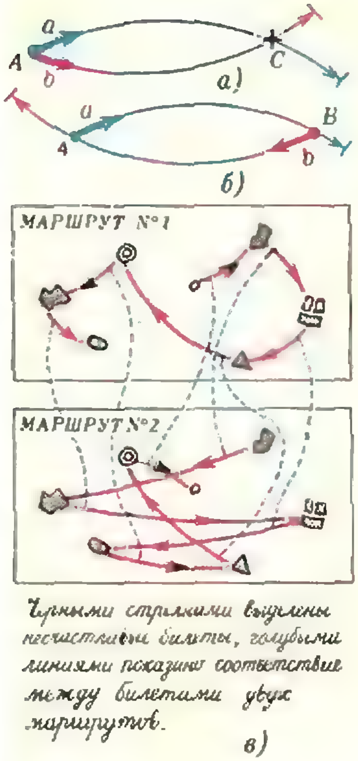

a
A
b
а)
C
a
B
A
b
б)
МАРШРУТ №1
МАРШРУТ №2
Чёрными стрелками выделены несчастливые билеты, голубыми линиями показано соответствие между билетами двух маршрутов.
в)

Рис. 4.

Проверим для отображения f выполнение свойства б). Если a — счастливый билет, то $Ц(a) \leqslant Ц(AC) \leqslant Ц(b)$ (здесь C — какой-то город из непустого пересечения множеств $X_1(A)$ и $X_2(A)$). Если же a — несчастливый билет, то $Ц(a) \leqslant Ц(AB) = Ц(BA) \leqslant Ц(b)$ (здесь мы воспользовались тем, что стоимости проездов из A в B и из B в A совпадают).

Проверим теперь, что построенное отображение f взаимнооднозначно. Определим билеты первого и второго типов для второго маршрута так же, как это было сделано для билетов первого маршрута. Определим отображение g на множестве билетов второго маршрута правилами, сформулированными в пунктах 1 и 2. Покажем, что так определенное отображение $g\colon \{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \to \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ *обратно* к нашему отображению f, то есть покажем, что для любого билета a первого маршрута $g(f(a)) = a$ (рис. 4, в).

Пусть a — счастливый билет первого маршрута (купленный в городе A): $X_1(A) \cap X_2(A) \neq \varnothing$. Соответствующий ему по правилу 1 билет $b = f(a)$ второго маршрута (купленный тоже в городе A) также счастливый, и по определению отображения g имеем $g(b) = a$. Поэтому в этом случае $g(f(a)) = a$.

Пусть теперь a — несчастливый билет первого маршрута. Легко видеть, что соответствующий ему во втором маршруте билет $b = f(a)$, купленный в городе B, определяемом условиями $B \in X_1(A)$ и $X_1(A) \cap X_2(B) = \varnothing$, будет несчастливым билетом второго маршрута, поскольку $X_1(B) \subseteq X_1(A)$ (и, следовательно, $X_1(B) \cap X_2(B) = \varnothing$). Покажем, что правило 2 ставит в соответствие билету b второго маршрута, купленному в городе B, билет a первого маршрута, купленный в городе A. Для этого нужно убедиться только в том, что $A \in X_2(B)$ (условие $X_2(B) \cap X_1(A) = \varnothing$ у нас выполнено). Действительно, $X_1(A) \cap X_2(A) = \varnothing$ и $B \in X_1(A)$, так что $B \notin X_2(A)$. Но тогда $A \in X_2(B)$. Поэтому, согласно определению, $g(b) = a$, так что и в этом случае мы получаем $g(f(a)) = a$.

Д. Бернштейн

◆

М460. *Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A особым, если оно само является точным квадратом и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.*

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

а) Легко проверить, что есть одно двузначное особое число — 49.

Пусть z^2 — четырехзначное особое число, то есть $z^2 = 100x^2 + y^2$, где $10 \leqslant x^2 < 100$, $0 < y^2 < 100$. Ясно, что $x \geqslant 4$ и $z > 10x$. Положим $z = 10x + t$. Тогда $z^2 = 100x^2 + 20tx + t^2$.

Если $t > 1$ или $x > 4$, то $20tx + t^2 > 100$, что не подходит. Значит, остается одна возможность: $x = 4$, $t = 1$; при этом действительно получается особое число $1681 = 41^2 = 100 \cdot 4^2 + 9^2$ (рис. 5).

б) Мы хотим найти 20-значное особое число $z^2 = 10^{10}x^2 + y^2$, причем $10^9 \leqslant x^2 < 10^{10}$, $0 < y^2 < 10^{10}$. Ясно, что число $10^{10}x^2$ само является квадратом числа 10^5x. Поэтому естественно попытаться взять в качестве особого числа ближайший квадрат, следующий за $10^{10}x^2$, то есть взять $z = 10^5x + 1$. Тогда $z^2 = (10^5x + 1)^2 = 10^{10}x^2 + 2 \cdot 10^5x + 1$, так что $y^2 = 2 \cdot 10^5x + 1$. Мы получаем уравнение $2 \cdot 10^5x = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$.

Это уравнение легко решить подбором. Положим $y + 1 = 10^5$, $y - 1 = 2x$. Тогда $y = 10^5 - 1$, $x = (10^5 - 2)/2 = 5 \cdot 10^4 - 1$. Ясно, что выполнены неравенства $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $0 < y^2 < 10^{10}$. Таким образом, число $z^2 = 10^{10}x^2 + y^2$ является искомым особым 20-значным числом (см. рис. 6).

Аналогично доказывается, что для любого k существует $4k$-значное особое число.

в) Мы докажем, что существует не более двух $4k$-значных особых чисел. Пусть $z^2 = 10^{2k}x^2 + y^2$ — особое число, то есть $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$, $0 < y^2 < 10^{2k}$. Ясно, что $z > 10^kx$; пусть $z = 10^kx + t$. Тогда $z^2 = 10^{2k}x^2 + 2xt10^k +$

$+ t^2$. Поскольку $x > 3\cdot 10^{k-1}$, $z^2 > 10^{2k}x^2 + 6t10^{2k-1}$; значит, $6t10^{2k-1} < 10^{2k}$, так что $t = 1$.

Итак, $z = 10^k x + 1$. Имеем:

$$(10^k x + 1)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^k x + 1 = 10^{2k}x^2 + y^2,$$

откуда $y^2 = 2\cdot 10^k x + 1$, так что $2\cdot 10^k x = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$.

Отсюда вытекает, что $y - 1$ четно, так что $y - 1 = 2u$. Поэтому нужно решить систему

$$5\cdot 10^{k-1}x = u(u + 1),\quad 0 < u < 5\cdot 10^{k-1}.$$

Поскольку числа u и $u + 1$ взаимно просты, это равенство возможно лишь тогда, когда либо одно из них делится на 2^{k-1}, а другое — на 5^k, либо одно из них делится на $5\cdot 10^{k-1}$ (а другое на 2 и на 5 уже не делится). Разберем следующие, связанные с этим обстоятельством, четыре случая.

1) u делится на $5\cdot 10^{k-1}$. Поскольку $0 < u < 5\cdot 10^{k-1}$, это случай невозможен.

2) $u + 1$ делится на $5\cdot 10^{k-1}$. При условии $0 < u < 5\cdot 10^{k-1}$ это возможно лишь, если $u + 1 = 5\cdot 10^{k-1}$. Такое решение всегда существует: оно описано в пункте б).

3) u делится на 2^{k-1}, а $u + 1$ — на 5^k. Предположим, что, кроме u, есть еще одно решение u' третьего типа. Тогда $u - u'$ делится и на 2^{k-1}, и на 5^k, то есть делится на $5\cdot 10^{k-1}$. Но поскольку $|u - u'| < 5\cdot 10^{k-1}$, то $u = u'$. Значит, существует не более одного решения третьего типа.

4) u делится на 5^k, а $u + 1$ — на 2^{k-1}. Аналогично случаю 3) доказывается, что существует не более одного решения четвертого типа.

Таким образом, всего может быть не более трех решений (по одному второго, третьего и четвертого типов).

Проверим, однако, что если u — решение третьего типа, а u' — решение четвертого типа, то одно из них не удовлетворяет исходным неравенствам. Действительно, в этом случае число $v = u + u' + 1$ делится на 2^{k-1} и на 5^k, то есть на $5\cdot 10^{k-1}$; поскольку $0 < v < 10^k$, то $v = 5\cdot 10^{k-1}$. Значит, одно из чисел u и u' (например, u) меньше чем $2{,}5\cdot 10^{k-1}$, но тогда соответствующее ему число x не превосходит $1{,}25 \times 10^{k-1}$, что противоречит неравенству $x^2 \geqslant 10^{2k-1}$.

Таким образом, всего имеется не более двух $4k$-значных особых чисел. Можно показать, что для некоторых k имеется всего одно такое число ($k = 1, 2$), а для некоторых — два особых числа ($k = 4$).

г) Докажем, что для любого $k > 0$ существует $(4k + 2)$-значное особое число z (при $k = 7$ отсюда будет следовать утверждение пункта г) задачи). Имеем уравнение $z^2 = 10^{2k+1}x^2 + y^2$, где $10^k \leqslant x^2 < 10^{2k+1}$, $0 < y^2 < 10^{2k+1}$.

Перепишем его в виде $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 10^{2k+1}x^2$.

Пусть $z - y$ четно: $z - y = 2v$. Тогда $z + y = 2(v + y)$, так что

$$v(v + y) = 25\cdot 10^{2k-1}x^2.$$

Будем решать это уравнение подбором. Положим $v = 25\cdot 10^{2k-1}$. Тогда уравнение принимает вид $x^2 = v + y$.

Единственная сложность в решении этого уравнения заключается в том, что y — маленькое число (по условию, $y < \sqrt{10^{2k+1}}$). Поэтому x надо подобрать так, чтобы x^2 было как можно ближе к числу v (и больше его).

Возьмем в качестве x наименьшее натуральное число, для которого $x^2 > v$, и положим $y = x^2 - v$. Докажем, что число $10^{2k+1}x^2 + y^2$ является искомым особым числом. Нам достаточно проверить неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и $10^{2k} \leqslant x < 10^{2k+1}$.

Из нашего выбора числа x вытекает, что $(x - 1)^2 \leqslant v$, и, поскольку v не является точным квадратом, $(x - 1)^2 \leqslant v - 1$, так что $x - 1 < \sqrt{v}$. Поэтому $y = x^2 - v = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1 - v < v - 1 + 2\sqrt{v} + 1 - v =$

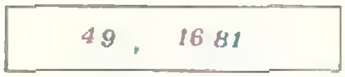

49 , 16 81

Рис. 5.

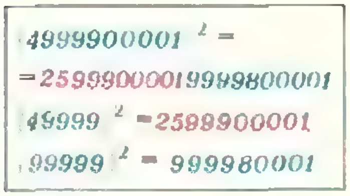

$4999900001^2 =$
$= 25999000019999800001$
$49999^2 = 2599900001$
$99999^2 = 999980001$

Рис. 6.

Разберем случай $k = 4$.

1) *Решений нет.*

2) $u = 5\cdot 10^3 - 1 = 4999$,
$y = 2u + 1 = 9999$,
$x = u(u + 1)/5000 = 4999$,
$z = 10^4 x + 1 = 49\,990\,001$.

3) *Есть одно решение $u = 624$. При этом $x = u(u + 1)/5000 = 78$. Это решение не удовлетворяет неравенству $x^2 \geqslant 10^7$.*

4) *Есть одно решение $u = 7\cdot 625 = 4375$.*
$y = 2u + 1 = 8750$,
$x = u(u + 1)/5000 = 3829$,
$z = 38\,290\,001$.

Число z^2 — особое.

Случай $k = 5$ (22-значное особое число).

$$v = 25\cdot 10^9$$

$x =$ (*целая часть* $\sqrt{v}$) $+ 1 = 158115$,
$y = x^2 - v = 36\,996$,
$z = 2v + y = 50\,000\,036\,996$;
z^2 — 22-значное особое число.

$=2\sqrt{v}$. Таким образом, $0 < y^2 < 4v = 10^{2k+1}$. Далее,

$$10^{2k} < v < x^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}.$$

Значит, числа x и y удовлетворяют нужным неравенствам, и число $10^{2k+1}x^2 + y^2$ является искомым $(4k+2)$-значным особым числом.

И. Бернштейн

Ф472. *Нарисовать примерный график зависимости от времени показания вольтметра после размыкания ключа K (рис. 7). Вольтметр и катушка индуктивности идеальные, $R = 100$ Ом, $U = 300$ В.*

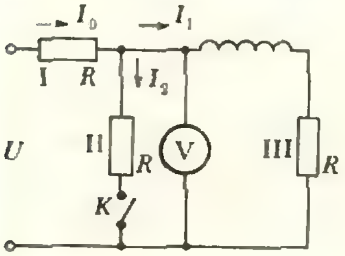


Рис. 7.

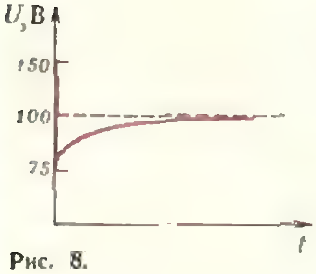


Рис. 8.

При разомкнутом ключе ток, текущий по цепи, равен $I_1 = \frac{U}{2R} = 1{,}5$ А. При этом вольтметр показывает падение напряжения на сопротивлении III: $U_1 = I_1R = 150$ В.

После замыкания ключа в катушке возникает э. д. с. индукции, препятствующая изменению магнитного потока через катушку, то есть препятствующая изменению тока I_1, текущего по катушке. Так что в первый момент после замыкания ключа через катушку течет ток $I_1 = 1{,}5$ А. Найдем показание вольтметра в этот момент. Очевидно, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении II: $U_2 = I_2R$. Определим значение I_2. Из равенств

$$I_0 = I_1 + I_2,$$
$$U = I_0R + I_2R$$

(см. рис. 7) находим

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{U}{R} - I_1\right) = 0{,}75 \text{ А}.$$

Таким образом, в первый момент после замыкания ключа вольтметр показывает

$$U_2 = I_2R = 75 \text{ В}.$$

После установления тока в цепи вольтметр, очевидно, будет показывать напряжение

$$U_2' = U - I_0'R = U - \frac{U}{R + \frac{R}{2}}R = \frac{1}{3}U = 100 \text{ В}.$$

Итак, сразу после замыкания ключа показание вольтметра скачком падает от 150 В до 75 В, а затем постепенно нарастает до 100 В (рис. 8).

И. Слободецкий

◆

Ф473. *Рисунок 9 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения.*

1) Определить отношение масс шариков.

2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шар.

Пусть m_1 — масса первого шарика, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_1'$ — его скорости соответственно до и после столкновения, m_2 — масса второго шарика, а $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_2'$ — его скорости до и после столкновения. Согласно закону сохранения импульса

$$m_1\Delta\vec{v}_1 + m_2\Delta\vec{v}_2 = 0, \text{ или } m_1\Delta\vec{v}_1 = -m_2\Delta\vec{v}_2, \tag{1}$$

где $\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1$ — изменение скорости первого шарика, $\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_2$ — изменение скорости второго шарика при столкновении. Из (1) получаем

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\Delta\vec{v}_1|}. \tag{2}$$

Следовательно, для того чтобы найти отношение масс шаров, нужно построить векторы $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ и затем взять обратное отношение их модулей.

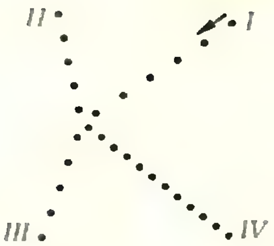


Рис. 9.

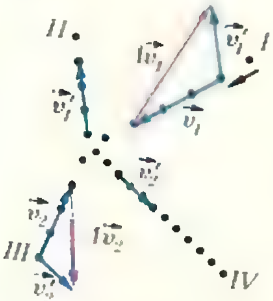


Рис. 10

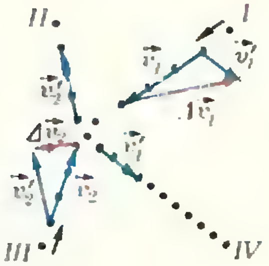


Рис. 11.

Скорости шариков равны перемещениям шариков за время τ между последовательными вспышками лампы, деленным на τ. Так как значение τ одинаково для обоих шариков как до, так и после столкновения, то в масштабе $1:\frac{1}{\tau}$ векторы, изображающие скорости шариков, просто равны векторам перемещений шариков за время между последовательными вспышками лампы. Воспользуемся этим для того, чтобы найти $\Delta\vec v_1$ и $\Delta\vec v_2$.

Мы знаем, как двигался один из шариков до столкновения. Для того чтобы построить вектор $\Delta\vec v_1$, необходимо также знать, как двигался этот шарик после столкновения — по ветви II, III или IV? Для того чтобы выяснить это, нам придется перебрать все возможные варианты (их всего три). При правильном выборе траекторий движения шариков векторы $\Delta\vec v_1$ и $\Delta\vec v_2$ согласно равенству (1) должны быть направлены в прямо противоположные стороны.

Прежде чем приступить к построению, заметим, что $\Delta\vec v$ не меняется при «обращении» движения шарика, то есть если до столкновения шарик 1 двигался по ветви I, а после столкновения — по ветви II, то $\Delta\vec v$ такое же, как и в том случае, если до столкновения он двигался по ветви II, а после столкновения — по ветви I.

Теперь мы можем приступить к построению. Предположим, что к шарику 1 относятся ветви I и II, а к шарику 2 — ветви III и IV. Построив в этом случае векторы изменений скоростей шариков (рис. 10), получим, что они не направлены вдоль одной прямой (на рисунке 10 для удобства векторы $\vec v$ построены в масштабе $1:\frac{1}{3\tau}$). Следовательно, наше предположение не верно. Проверяя так же другие возможные варианты, убеждаемся, что к шарику 1 относятся ветви I и IV, а к шарику 2— ветви II и III (рис. 11). Измерив длины векторов, изображающих $\Delta\vec v_1$ и $\Delta\vec v_2$, найдем:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta\vec v_2|}{|\Delta\vec v_1|}=\frac{1}{3}.$$

Теперь ответим на второй вопрос. Обозначим τ_1 время между моментом столкновения шариков и последней до столкновения вспышкой лампы. Тогда ясно, что перемещение шарика за это время должно составлять τ_1/τ часть перемещения шарика за время τ между вспышками. Измерив соответствующие перемещения первого шарика, найдем, что τ_1/τ равно 11/19. Таким же оно должно быть и для второго шарика. Непосредственным измерением убеждаемся, что этому условию удовлетворяет ветвь III. Следовательно, шарик 2 до столкновения двигался по ветви III.

И. Слободецкий

◆

Ф474. *Цепь, показанная на рисунке 12, собрана из одинаковых резисторов и вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1 = 10$ В, а третий — $U_3 = 8$ В. Каково показание второго вольтметра?*

Ясно, что вольтметры не идеальные — в противном случае токи через резисторы не протекали бы, и показания вольтметров были бы одинаковыми.

Показания вольтметров пропорциональны токам, текущим через них. Значит, токи, текущие через резисторы I, II и III, относятся как

$$I_I : I_{II} : I_{III} = (U_1 : U_2 : U_3) : (U_2 + U_3) : U_3.$$

Поскольку резисторы одинаковы, падения напряжения на них пропорциональны токам. Для резисторов II и III имеем:

$$\frac{U_1-U_2}{U_2-U_3}=\frac{I_{II}}{I_{III}}=\frac{U_2+U_3}{U_3},$$

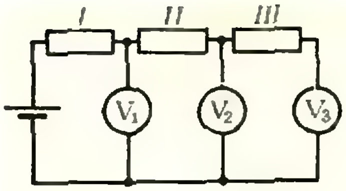


Рис. 12.

Ф475. *На рисунке 13 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 14.*

1) Найти графически ток в лампочке.

2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю?

3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи?

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

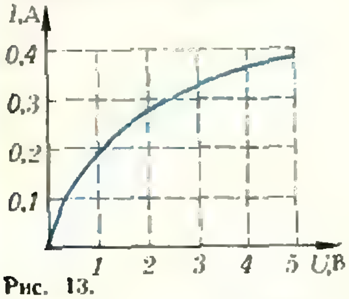


Рис. 13.

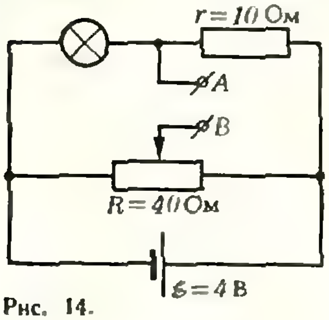


Рис. 14.

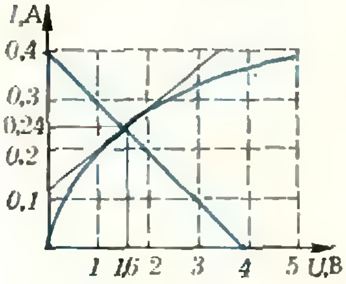


Рис. 15.

откуда

$$U_2^2 + U_2U_3 - U_1U_3 - U_3^2 = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$U_2 = -\frac{1}{2}U_3 + \sqrt{\frac{U_3}{4}(5U_3 + 4U_1)}$$

◆

1) Ток I, текущий через лампу, и напряжение U на ней связаны зависимостью, приведенной на рисунке 13. Но при включении лампы в схему ток и напряжение оказываются связанными и еще одним соотношением: $U + Ir = \mathscr{E}$ (см. рис. 14). Ясно, что если на рисунке 13 построить этот график, то точка пересечении его с вольтамперной характеристикой лампы определит значения U и I. Выполнив построение (рис. 15), найдем:

$$I = 0{,}24\ \text{А}.$$

2) Чтобы напряжение U_{AB} между точками A и B равнялось нулю, нужно так установить движок потенциометра, чтобы выполнялось равенство $U_{CB} = U_{R_1} = U_{CA} = 1{,}6$ В (рис. 16). Следовательно, отношение сопротивлений R_1 и R_2 «плеч» потенциометра $(R_1 + R_2 = R)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{U_{CA}}{\mathscr{E} - U_{CA}},$$

или $\frac{R_1}{40 - R_1} = \frac{1{,}6}{2{,}4}$, откуда

$$R_1 = 16\ \text{Ом}, \quad R_2 = 24\ \text{Ом}.$$

3) Чтобы при малом изменении э. д. с. $\mathscr{E}$ батареи напряжение U_{AB} почти не менялось, надо так подобрать плечи потенциометра, чтобы изменение напряжения на левом плече (R_x) было таким же, как изменение напряжения на лампе.

При изменении э. д. с. на малую величину $\Delta\mathscr{E}$ напряжение U_{CA} на лампе меняется вблизи «рабочей точки» (1,6 В) на малую величину

$$\Delta U_{CA} = \Delta\mathscr{E} - \Delta Ir,$$

где ΔI — изменение тока в лампе при малом изменении ΔU_{CA}. Выясним, как зависит ΔI от ΔU_{CA}. Отношение $\frac{\Delta I}{\Delta U_{CA}}$ вблизи рабочей точки равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $I\,(U_{CA})$ в рабочей точке: $\frac{\Delta I}{\Delta U_{CA}} = k$. Построив касательную, найдем $k \approx 0{,}08$ (рис. 15), так что $\Delta I = \Delta U_{CA}k \approx 0{,}08\,\Delta U_{CA}$.

Итак, $\Delta U_{CA} = \Delta\mathscr{E} - \Delta U_{CA}kr$, откуда

$$\Delta U_{CA} = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + kr}.$$

Напряжение U_{CB} на левом плече потенциометра с сопротивлением R_x равно $U_{CB} = \frac{R_x}{R}\mathscr{E}$; при изменении э. д. с. на малую величину $\Delta\mathscr{E}$ напряжение U_{CB} меняется на величину

$$\Delta U_{CB} = \frac{R_x}{R}\Delta\mathscr{E}.$$

Приравняв ΔU_{CA} и ΔU_{CB}, получим:

$$R_x = \frac{R}{1 + kr}.$$

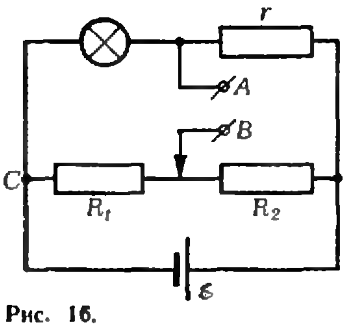


Рис. 16.

Подставив численные значения, найдем

$$R_x \approx 0{,}22\ \text{Ом}, \quad R - R_x \approx 18\ \text{Ом}.$$

При этом $U_{AB} \approx 0{,}6$ В, и при изменении э. д. с. $\mathscr{E}$ в пределах ±1 В значение U_{AB} меняется менее чем на 0,03 В. Рассчитанная нами схема может быть использована как стабилизатор небольших напряжений; впрочем, практически лучше использовать вместо потенциометра вторую цепь из лампочки и резистора, включенных в обратном порядке.

А. Зильберман

◆

Ф476. *Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7 : 1000. Для увеличения концентрации* ^{235}U, *который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения* UF$_6$ *(шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия (эффузия). Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками (рис. 17). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Определить отношение концентраций* ^{235}UF$_6$ *и* ^{238}UF$_6$ *в откачиваемом газе. Относительная масса фтора равна 19.*

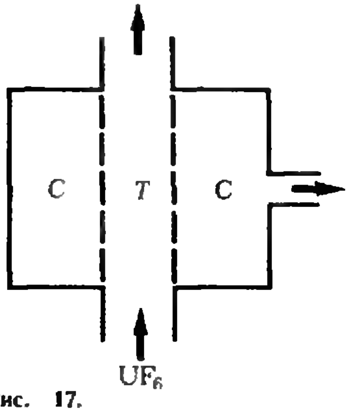


Рис. 17.

Обозначим n_1 и n_2 число молекул соответственно ^{235}UF$_6$ и ^{238}UF$_6$ в единице объема газа UF$_6$. За время t через отверстие площади s проходит число N_1 молекул ^{235}UF$_6$, равное

$$N_1 = v_{x1} s t n_1,$$

и число N_2 молекул ^{238}UF$_6$, равное

$$N_2 = v_{x2} s t n_2,$$

где v_{x_1} и v_{x_2} — проекции средних скоростей молекул ^{235}UF$_6$ и ^{238}UF$_5$ на ось x, направленную перпендикулярно отверстию.

Отношение N_1/N_2 — отношение концентраций молекул ^{236}UF$_6$ и ^{238}UF$_6$ в откачиваемом газе — равно

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{v_{x1} n_1}{v_{x2} n_2}.$$

Очевидно, что $\dfrac{v_{x1}}{v_{x2}} = \dfrac{v_1}{v_2}$, где v_1 и v_2 — средние квадратичные скорости движения молекул газов. Так как $v = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$, где m — масса молекулы, то $\dfrac{N_1}{N_2} = \dfrac{n_1}{n_2}\sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$ (m_1 и m_2 — массы молекул ^{235}UF$_6$ и ^{238}UF$_6$ соответственно). Отсюда

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{1000}\sqrt{\frac{352}{349}} \approx \frac{7{,}03}{1000}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф477. *Резиновое кольцо массы m лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Кольцо немного растягивают так, что оно сохраняет форму окружности и центр его остается неподвижным. После этого кольцо отпускают. Описать дальнейшее поведение кольца. Коэффициент упругости резинового жгута равен k.*

Из соображений симметрии представляется ясным, что кольцо будет колебаться — растягиваться и сжиматься, сохраняя форму окружности, и центр его будет оставаться неподвижным. Чтобы убедиться в правильности этих представлений, достаточно рассмотреть движение какой-нибудь одной точки (или малого элемента) кольца и убедиться в том, что она действительно совершает колебания.

Выделим малый элемент A кольца. Когда кольцо растянуто, на элемент A со стороны соседних участков кольца действуют силы $|\vec{f}|$ упругости, направленные по касательным. Равнодействующая $|\vec{F}|$ этих сил направлена к центру кольца (рис. 18). Под действием этой силы элемент A смещается к положению равновесия; при этом длина его уменьшается. Проскочив по инерции положение равновесия (когда длина его нормальна — резина не растянута), элемент продолжает двигаться к центру. При этом со стороны соседних участков на него начинают действовать сжимающие его силы упругости, равнодействующая которых направлена от центра кольца к положению равновесия. Таким образом, направление силы периодически меняется на противоположное.

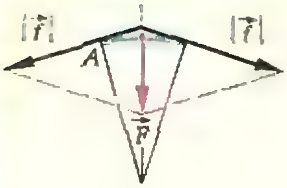


Рис. 18.

Посмотрим, как связаны между собой величина $|\vec{F}|$ этой силы и величина Δr смещения элемента от положения равновесия.

Силы упругости $|\vec{f}|$ пропорциональны растяжению (удлинению) Δl элемента, а растяжение Δl пропорционально смещению Δr элемента от положения равновесия (рис. 19).

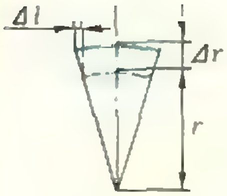


Рис. 19.

Следовательно, сила $|\vec{F}|$ пропорциональна смещению Δr элемента A от положения равновесия. А как известно, под действием такой силы тело совершает гармонические колебания около положения равновесия. Значит, действительно кольцо будет колебаться около положения равновесия — положения, в котором оно не растянуто и не сжато.

Найдем период этих колебаний. В момент максимального растяжения вся механическая энергия E_1 кольца равна его потенциальной энергии — энергии упругой деформации:

$$E_1 = П = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\,[2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r]^2}{2} = 2k\pi^2a^2$$

($a = \Delta r$ — амплитуда колебаний каждой точки кольца). При прохождении кольцом положения равновесия его полная механическая энергия E_2 равна сумме кинетических энергий всех его точек:

$$E_2 = K = \sum_i \frac{m_i v_{\max}^2}{2} = \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

($v_{\max}$ — скорость каждой точки кольца при прохождении положения равновесия). Так как трение отсутствует, то согласно закону сохранения механической энергии $E_1 = E_2$:

$$2k\pi^2a^2 = \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Отсюда найдем $v_{\max}$:

$$v_{\max} = 2\pi a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Но при гармонических колебаниях $v_{\max} = \omega a$. Значит, $\omega = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$, и период колебаний каждой точки кольца, а следовательно, период колебаний всего кольца равен

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

А. Абрамян

А. Звонкин

Анализ помогает алгебре

Довольно часто алгебраическую задачу удается решить, подыскав и исследовав методами анализа какую-нибудь подходящую вспомогательную функцию. С такими задачами мы познакомимся на этом занятии математического кружка.

Пример 1. *Сколько корней имеет уравнение*

$$x^3-3x=a? \qquad (1)$$

Решение. Как известно, существует формула для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9). Однако эта формула очень громоздка. Нельзя ли найти число корней уравнения, не решая его?

Используя производную, нарисуем график функции $y=x^3-3x$ (рис. 1а). На том же чертеже нарисуем график функции $y=a$, то есть горизонтальную прямую (на рисунке 1б изображено сразу несколько таких прямых — для разных значений a). Количество корней уравнения (1) есть просто количество точек пересечения нашего графика и прямой*). Сразу бросается в глаза особая роль красных прямых. Если прямая $y=a$ лежит между красными прямыми, т. е. $|a|<2$, то она имеет с графиком функции $f(x)=x^3-3x$ три точки пересечения, если выше или ниже ($|a|>2$) — одну, сами же красные прямые ($|a|=2$) имеют с графиком две общие точки (одна из них — *точка касания*).

Задача 1. Сколько корней имеет уравнение

$$3x^5-50x^3+135x=a?$$

Задача 2. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2e^x=a?$$

Пример 2. *Сколько корней имеет уравнение*

$$a^x=x? \qquad (2)$$

Решение. Рассмотрим пять случаев взаимного расположения графиков $y=a^x$ и $y=x$ (рис. 2). Рисунок 2а соответствует значениям $a\in]0, 1[$, рисунок 2б — значению $a=1$, остальные три рисунка (от рисунка 2в к рисунку 2д a возрастает) — значениям $a>1$. Количество решений уравнения (2) в каждом из пяти случаев видно «невооруженным глазом». Единственное, что по существу осталось узнать, — при каком значении $a=a_0$ имеет место картинка 2 г, то есть прямая $y=x$ *касается* кривой? Ответить на этот вопрос нам поможет производная.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания A (рис. 2г). Тогда $f'(x_0)=a^{x_0}\ln a=1$. Кроме того, $a^{x_0}=x_0$. Получилась система

$$\begin{cases} a^x=x, \\ a^x\ln a=1. \end{cases}$$

Решим ее. Для этого во второе урав-

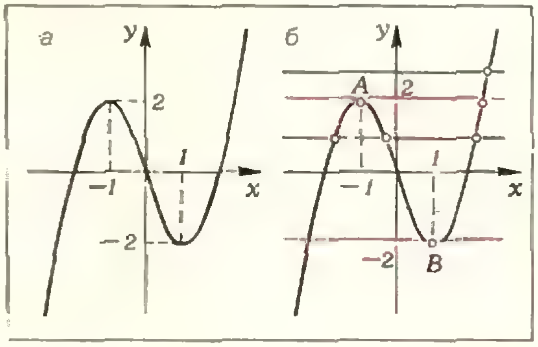


Рис. 1.

---

*) То, что прямая действительно пересекает график так, как показано на чертеже, вытекает из п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10». Действительно, функция $x\to x^3-3x$ непрерывна и монотонна на каждом из промежутков $]-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty[$; следовательно, ее множество значений на каждом из этих промежутков — промежуток; поэтому, например, для любого $a\in[-2; 2]$ существует такое $x_0\in[-1; 1]$, что $f(x_0)=a$, причем, ввиду монотонности функции f на отрезке $[-1; 1]$, такое x_0 единственно. В последующих примерах читатель легко проведет подобное рассуждение сам.

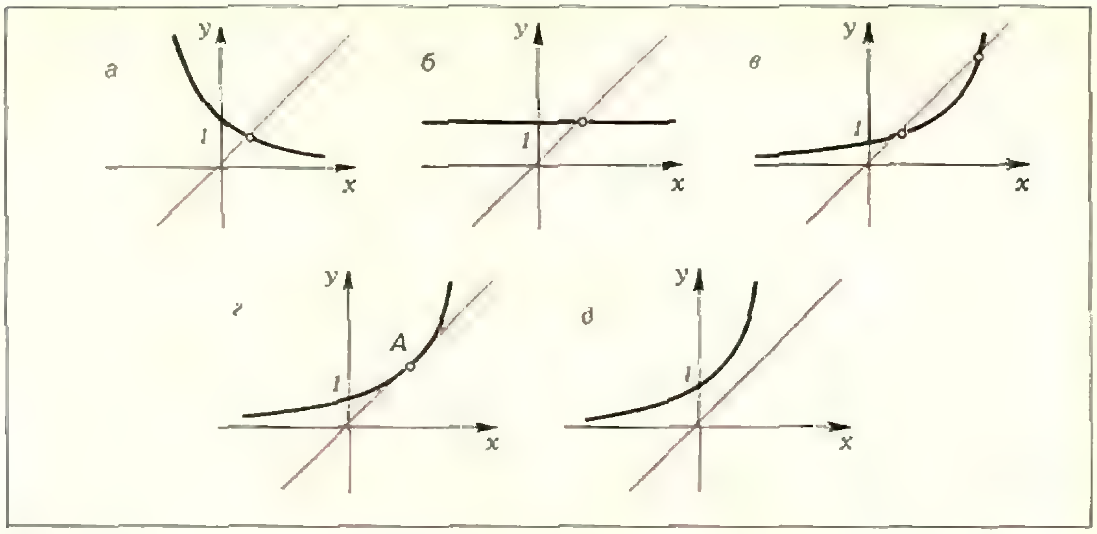


Рис 2.

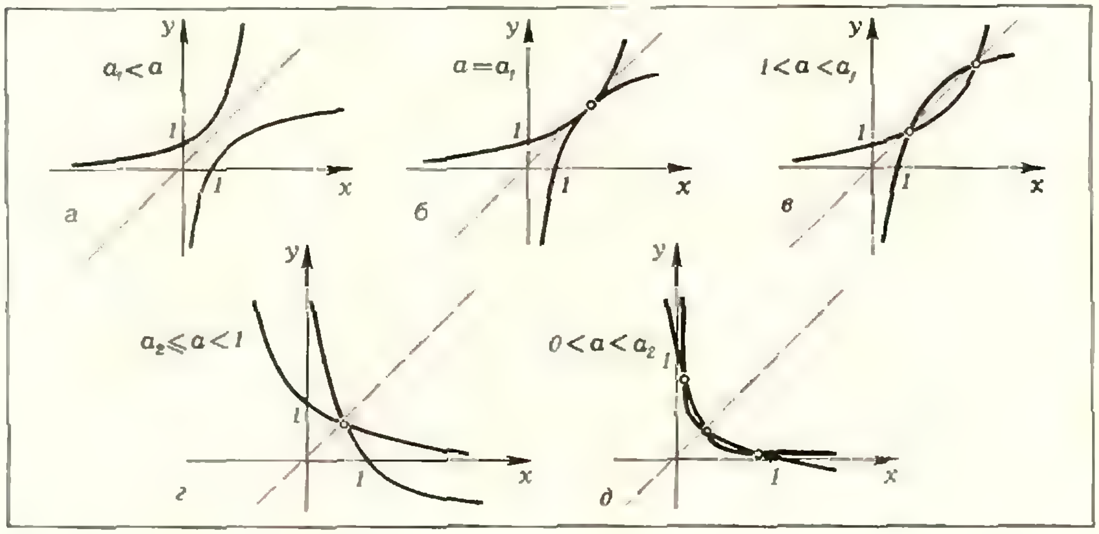


Рис. 3.

нение вместо a^x подставим x, получим $x=\frac{1}{\ln a}$. Полученное значение x подставляем в первое уравнение: $a^{\frac{1}{\ln a}}=\frac{1}{\ln a}$; логарифмируем и преобразуем:

$$\frac{1}{\ln a}\cdot\ln a=\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)\Leftrightarrow 1=-\ln(\ln a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ln a=\frac{1}{e}\Leftrightarrow a=e^{\frac{1}{e}}.$$

Итак, $a_0=e^{\frac{1}{e}}$.

Задача 3. Сколько корней имеет уравнение

$$a^x=\log_a x?$$

Указание *). На рисунке 3 изображены пять случаев взаимного расположения графиков $y=a^x$ и $y=\log_a x$. Для удобства пунктиром изображена также прямая $y=x$. Функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратны, поэтому их графики симметричны относительно этой прямой. Вам остается лишь найти значения a_1 и a_2.

Заметим, кстати, что рисунок 3а изображен на обложке учебника «Алгебра 8» (при $a=10$). Особенно интересным нам кажется случай, изображенный на рисунке 3д. Такая картинка получается, например, при $a=\frac{1}{16}$.

Упражнение. Для $a=\frac{1}{16}$ найдите координаты точек пересечения.

Пример 3. *При каких значениях a существует такое положительное b, что уравнение*

$$x^2+a=2b\cdot\ln x \qquad (3)$$

имеет единственный корень?

---

*) См. также статью А. Егорова в «Кванте» № 10 за 1977 г., с. 37.

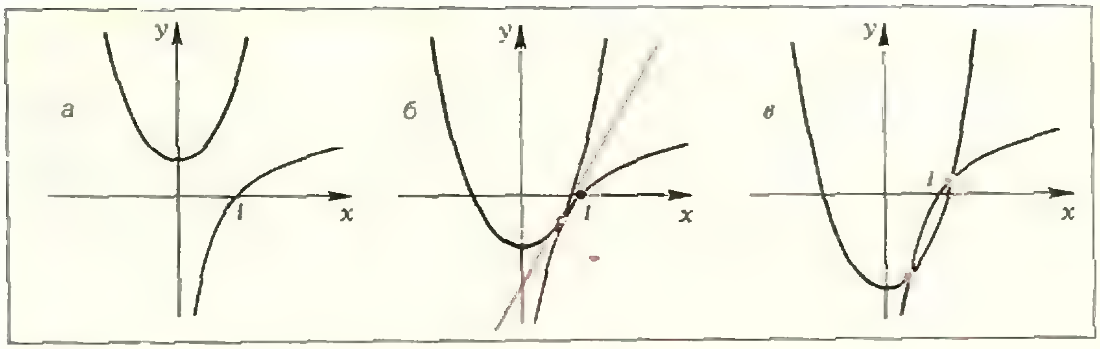


Рис. 4.

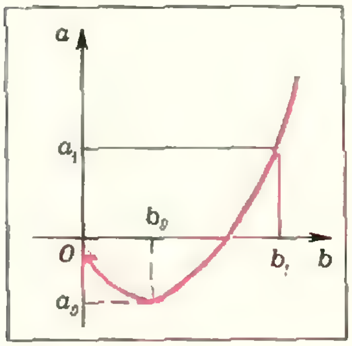


Рис. 5.

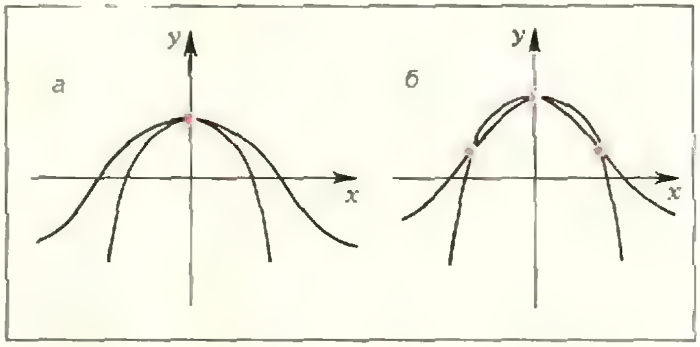


Рис. 6.

Решение. Как всегда, начнем с картинки. На рисунке 4 изображены три случая взаимного расположения графиков $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$ (для $b>0$). Ясно, что уравнение (3) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда эти графики касаются (рис. 4б). В точке касания совпадают не только значения самих функций $f(x)=x^2+a$ и $g(x)=2b\cdot\ln x$, но и значения их производных $f'(x)=2x$ и $g'(x)=\frac{2b}{x}$. Получилась система:

$$\begin{cases} x^2+a=2b\cdot\ln x \\ 2x=\frac{2b}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим $x=\pm\sqrt{b}$ (напомним, что по предположению $b>0$). Значение $x=-\sqrt{b}$ системе не удовлетворяет, так как $\ln x$ при $x=-\sqrt{b}$ не определен. Подставляя полученное значение x в первое уравнение, получаем

$$a=b\cdot\ln b-b. \tag{4}$$

Таким образом, графики $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$ касаются, если и только если выполнено условие (4); при этом касание происходит в точке с абсциссой $x=\sqrt{b}$.

Задача свелась к выяснению следующего вопроса: *при каких значениях a существует такое b, что выполняется равенство* $a=b\cdot\ln b-b$? Еще одна, эквивалентная, формулировка: *найти множество значений функции* $f(b)=b\cdot\ln b-b$.

Контрольный вопрос: почему мы опустили требование положительности b?

На координатной плоскости Oba нарисуем график функции $b\to b\cdot\ln b-b$ (рис. 5). Теперь ответ на поставленный вопрос «почти ясен»: нужное значение b существует при $a\geqslant a_0$ (значений может быть и два!). Значение a_0 находим из уравнения $f'(b)=0$. Поскольку $f'(b)=\ln b$, $b_0=1$.

Таким образом, $a_0=f(b_0)=-1$.

Контрольный вопрос. Как видно из рисунка 5, если a принадлежит интервалу $]-1, 0[$, то ему соответствуют два значения b. Что это означает для графиков $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$? Нарисуйте.

Иногда знание количества корней помогает решить уравнение. Например, если известно, что некоторое уравнение имеет ровно один корень, можно попробовать просто угадать его.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Один из корней этого уравнения легко угадывается: $x=0$. Есть ли еще корни? Обратимся к графику (рис. 6). Вблизи точки $x=0$ графики функций $y=\cos x$ и $y=1-\frac{x^2}{2}$ так похожи друг на друга, что без дополнительного исследования невозможно понять, какой из рисунков, 6а или 6б, — правильный. Попробуем доказать, что для всех $x\neq 0$ справедливо неравенство $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ (то есть равенство невозможно).

Пусть $$f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}.$$

Эта функция четна, (т. е. $f(x)=f(-x)$), поэтому рассмотрим только положительные значения x. Поскольку $f(0)=0$, для доказательства неравенства $f(x)>0$ при $x>0$ достаточно установить, что f *возрастает* на полупрямой $[0, +\infty[$. Учитывая, что f непрерывна при $x=0$, достаточно установить, что $f'(x)>0$ при $x>0$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 54). Поскольку $f'(x)=x-\sin x$, неравенство $f'(x)>0$ равносильно неравенству $\sin x<x$, которое при $x>0$ очевидно*).

Последний пример, который мы рассмотрим, касается обобщения неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим. Легко доказать, что при $x>0$, $y>0$ имеет место $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$. Запишем это неравенство в таком виде:

$$x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y.$$

Напрашивается следующее обобщение:

Пример 5. *Пусть положительные числа a и b таковы, что $a+b=1$. Доказать, что для всех $x>0$, $y>0$ справедливо неравенство*

$$x^a y^b\leqslant ax+by, \qquad (5)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$.

Решение. Произведем следующие равносильные преобразования неравенства (5): заменим b на $1-a$, перенесем все члены в одну часть и поделим обе части на y (поскольку $y>0$, знак неравенства сохранится). Мы получим неравенство

$$a\cdot\frac{x}{y}-\left(\frac{x}{y}\right)^a+1-a\geqslant 0.$$

Обозначим $\frac{x}{y}=t$; заметим, что $t>0$. Осталось доказать, что при $t>0$ и $a\in\,]0, 1[$ имеет место неравенство

$$at-t^a+1-a\geqslant 0,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $t=1$. Это доказательство мы оставим в виде упражнения читателю. (Указание. Функция $at-t^a+1-a$ при $t=1$ имеет минимум).

Задачи

4. Сколько корней имеет уравнение
а) $e^x=ax$?
б) $3x^4+4x^3-36x^2=a$?
в) $\frac{x}{\ln x}=a$?

5. Решить (одно уравнение с двумя неизвестными):

а) $\frac{1}{x}+2\sqrt{x}=3y(1-\ln y)$;

б) $\frac{\ln x}{x}=e^{\cos y}$;

в) $4^x+1=2^{x+1}\cdot\sin y$.

6. Нарисовать на плоскости (p, q) множества значений (p, q), при которых уравнения
а) $x^3=3p^2x+q$,
б) $p^x=x^q$ $(x>0)$
имеют 0, 1, 2, ... решений относительно x.

7. Решить уравнения
а) $\ln x=x-1$
б) $(x-1)e^x+x^2-3x+2=0$
в) $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3$.

8. Определить (без помощи таблиц), какое число больше — e^π или π^e.

) См. также «Алгебра и начала анализа 10», п. 77.

«Квант» для младших школьников

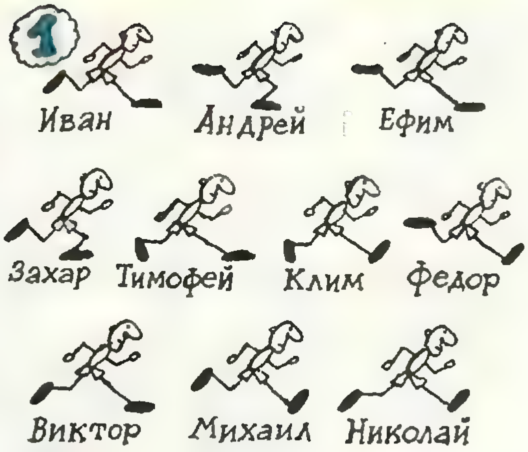
Задачи

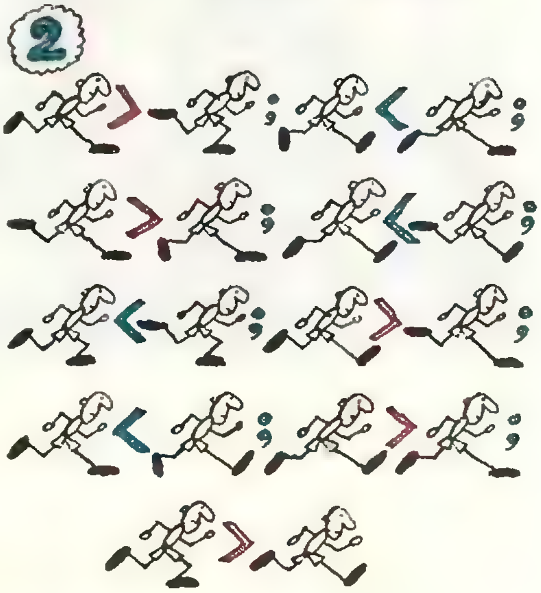
1. В соревнованиях по бегу участвуют десять спортсменов: Андрей, Виктор, Ефим, Захар, Иван, Клим, Михаил, Николай, Тимофей и Федор (рис. 1). Спортсмен, первым пришедший к финишу, получил 9 баллов, вторым — 8 баллов, третьим 7 и т. д., вплоть до последнего, который получил 0 баллов. Как распределились баллы между участниками бега, отражено на рисунке 2. Определите с помощью этого рисунка, сколько баллов получил каждый из десяти спортсменов. Подставьте вместо цифр 67 480, 2 401 240 564, 953 564 начальные буквы имен спортсменов, получивших соответствующее количество баллов. Что у вас получилось?

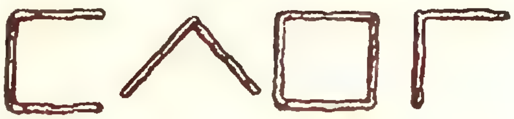
2. Согните из мягкой проволоки фигуру, при параллельном проектировании которой на различные плоскости получаются буквы С, Л, О, Г, написанные так, как изображено на рисунке 3.

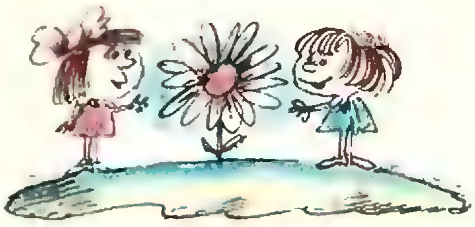
3. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки больше двух лепестков).

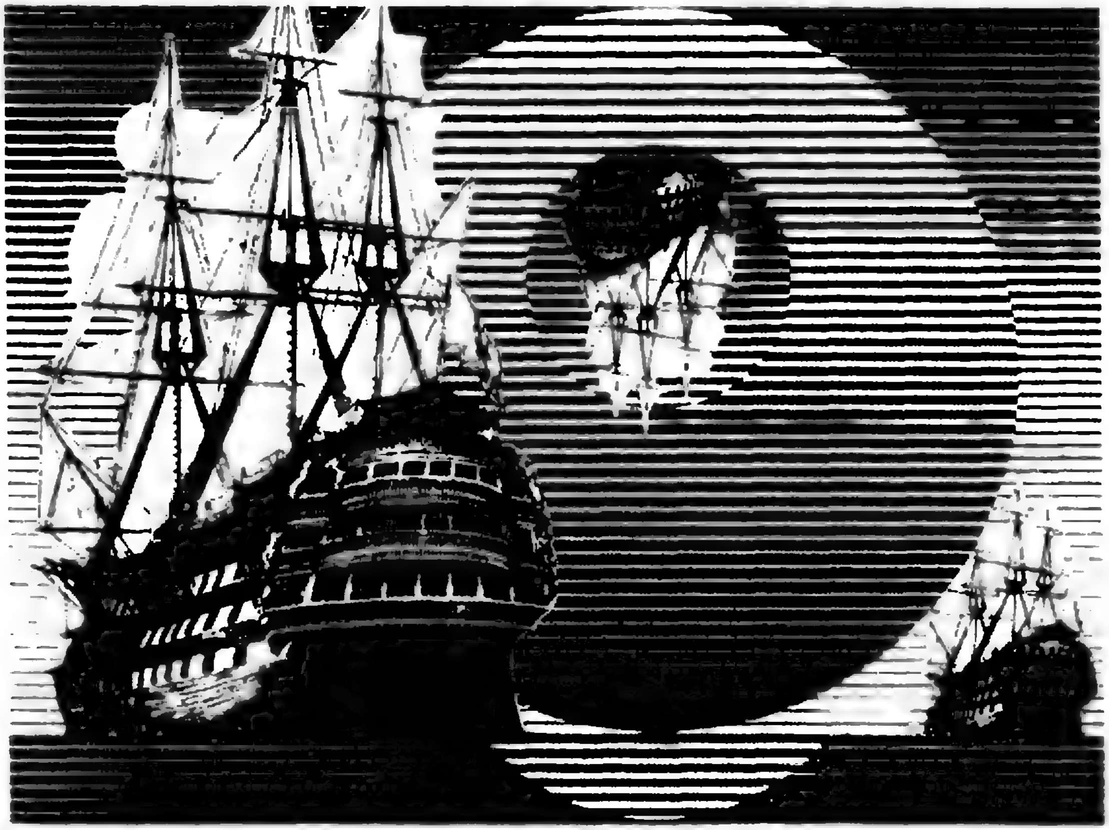
4. Живут пять братьев: Иван, Степан, Андрей и близнецы Сергей и Агей. Произведение лет Сергея и Агея равно году рождения Андрея, а произведение лет Андрея и Степана равно году рождения Ивана. Как зовут сына Андрея, если он в пять раз моложе своего дяди — тезки?











А. Дозоров

Знакомы ли вы с линзой?

Наверное, нет на свете такого мальчика, который не играл бы с увеличительным стеклом (линзой). Впрочем, и девочки тоже. А хорошо ли вы знаете линзу? Это можно легко проверить на опытах.

1. Если у вас есть стеклянная линза, ограниченная двумя выпуклыми поверхностями (одна из них может быть плоской или даже вогнутой), получите с ее помощью изображение Солнца на листе белой бумаги. Лучи от Солнца, находящегося очень далеко от Земли, падают на Землю практически параллельным пучком. Линза собирает эти лучи в точке, называемой фокусом. Расстояние от линзы до фокуса называют фокусным расстоянием. Определите фокусное расстояние вашей линзы. Подумайте, почему стеклянную линзу иногда называют «зажигательным стеклом»?

2. Подойдите к включенному телевизору, расположите линзу между экраном и листом белой бумаги. Перемещая лист, получите на нем четкое изображение телевизионного экрана. Каким будет это изображение?

Кстати сказать, точно так же устроен фотоаппарат, только там роль белого листа бумаги играет фотопленка или фотопластинка.

Нетрудно получить изображение окна, включенной настольной лампы, удаленного здания. Может быть, вам даже удастся таким образом «сфотографировать» своего товарища.

Попробуйте вращать линзу вокруг оси, перпендикулярной плоскости сечения линзы. Поворачивается ли изображение?

3. Получив на листе бумаги какое-нибудь изображение, внимательно рассмотрите его. Затем закройте

Посмотрите на эту красивую фотографию капель росы на листе. Оказывается, водяные капельки—это тоже линзы. Изображение в капельке тем больше, чем меньше сама капелька.

Фото А. Макиенко

половину линзы. Что изменилось при этом? Ну конечно, изображение осталось на том же месте и тех же размеров, но яркость его уменьшилась. Постарайтесь объяснить это.

4. В принципе, любое прозрачное тело с неплоской поверхностью образует линзу. Так, очень хорошо увеличивают стеклянные шарики, причем оказывается, чем меньше шарик, тем больше его увеличение. Именно маленький шарик был главной частью в первом микроскопе.

Если у вас есть такой шарик, вы можете сделать себе неплохой карманный микроскоп. Для удобства шарик лучше закрепить в оправу. Рассматриваемый предмет надо располагать как можно ближе к шарику.

Стеклянные палочки (их можно найти в школьном химическом кабинете) — тоже линзы.

Даже волнистая поверхность воды действует как линза. Включите свет в ванной комнате, налейте в ванну воды и слегка взволнуйте воду — по дну ванны побегут светлые «зайчики».

Сделайте те опыты, о которых мы рассказали, и подумайте, какие еще интересные опыты можно провести с линзой.

(Начало см. с. 28)

Пусть P и S — точки, определяемые уравнениями (1) при $\lambda = 1$ и уравнениями (2) соответственно. Координаты вектора $\vec{SP}$ равны разности координат точек P, S:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi, \\ y = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Из уравнений (3) видно, что вектор $\vec{SP}$ меняется периодически, с периодом 4π. Его длина $|\vec{SP}|$, как и следовало ожидать, остается равной $\frac{1}{2}$ (проверьте!). Следовательно, изменения этого вектора сводятся к одним поворотам, причем при изменении φ на величину 2π направление вектора меняется на противоположное, а при изменении φ в диапазоне от 0

(Окончание см. с. 81)

А. Виленкин

Производная и задачи на экстремумы

Введение в школьную программу производной позволяет единым методом решать различные задачи на наибольшие и наименьшие значения. Но, как показывают результаты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году, далеко не все поступающие умеют это делать. Некоторым «тонким» вопросам из этой области и посвящена настоящая статья.

1. Возрастание и убывание функции

В школьном учебнике («Алгебра и начала анализа 9», п. 54) есть следующая теорема и замечание, на которых базируется исследование возрастания и убывания функции с помощью производной.

Теорема. *Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на интервале I; если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на интервале I.*

Замечание. *Если функция f монотонна на интервале $]a; b[$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна и на отрезке $[a; b]$.*

Эта теорема и замечание позволяют решать многие задачи на нахождение интервалов и промежутков монотонности.

Пример 1 (МИИГАиК *), 1977). *Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=2x^3-3x^2$.*

Найдем производную данной функции:

$$y'=6x^2-6x=6x(x-1).$$

Мы видим, что при возрастании x производная функция y' меняет знак, когда x проходит через точки 0 и 1. Нарисуем ось Ox (рис. 1) и рассмотрим три промежутка: $]-\infty; 0]$, $[0; 1]$ и $[1; +\infty[$. На каждом из них y' имеет один и тот же знак (и обращается в ноль в точках 0 и 1), поэтому из приведенного замечания следует, что функция y возрастает на промежутках $]-\infty; 0]$ и $[1; +\infty[$ и убывает на промежутке $[0; 1]$ (схематически это изображено стрелками на рисунке 1).

2. Наибольшие и наименьшие значения. Критические точки

Напомним, что точка x_0, принадлежащая области определения функции f, называется

точкой минимума функции f, если существует такая окрестность $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)>f(x_0)$;

точкой максимума функции f, если найдется такая окрестность $]x_0-\delta; x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)<f(x_0)$.

Точки минимума или максимума называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках называются *экстремумами функции*.

Как найти точки экстремума данной функции? Для этого часто применяется следующая теорема.

Теорема Ферма. *Если точка x_0 является точкой экстремума для функции f и в этой точке существует производная, то она равна нулю:* $f'(x_0)=0$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 55).

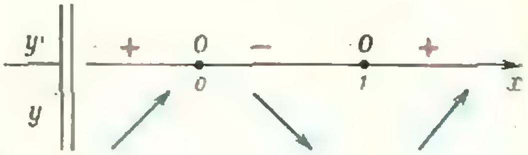


Рис. 1.

---

*) Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Теорема Ферма помогает искать точки экстремума функции f следующим образом. По этой теореме точками экстремума могут быть лишь те внутренние точки области $D(f)$, в которых производная существует и равна нулю, либо точки, в которых производная не определена. Все такие точки называются «критическими» для данной функции.

Отыскав критические точки и промежутки монотонности данной функции, часто удается найти и точки максимума или минимума этой функции. Так, в рассмотренном выше примере в критической точке $x = 1$ функция имеет минимум в силу того, что она убывает на промежутке $]0; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty[$.

В большинстве практических задач, однако, требуется найти не экстремумы, а наименьшее значение некоторой функции (сырья, материалов, затрат) или наибольшее (продукции, прибыли и т. п.). В чем разница между этими понятиями?

Когда мы говорим, что *функция f имеет в точке x_0 экстремум*, скажем, максимум, что мы тем самым описываем поведение функции вблизи данной точки (но только вблизи!): функция f в некоторой окрестности данной точки определена и ее значения всюду меньше $f(x_0)$. Однако поведение функции «вдали» от точки x_0 мы не определяем. Даже если точка x_0 является точкой максимума функции f, вне некоторой окрестности этой точки значения функции могут начать увеличиваться и превзойти значение $f(x_0)$.

Как же искать наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции на всей области ее определения?

Наибольшее (или наименьшее) значение функции может достигаться либо на границе области определения функции, либо внутри этой области. Если оно достигается в некоторой внутренней точке, то в этой точке производная не может быть ни положительной (тогда функция в этой точке возрастала бы), ни отрицательной (тогда бы функция убывала), поэтому производная равна нулю или не существует, то есть такая точка — критическая. Однако наибольшее значение функции может достигаться и в граничной точке области определения функции, где производная ни при чем (она не определена, так как у этой точки нет окрестности, на которой функция определена). Значит, граничные точки надо рассматривать отдельно.

Получается следующее правило (оно приведено в п. 59 учебника):

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения дифференцируемой функции, заданной в некотором промежутке, следует

найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка;

вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка;

из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Заметим еще, что если функция задана на интервале, то у нее может и не быть наибольшего или наименьшего значения на этом интервале. Такова, например, функция $y(x) = x$ на интервале $]0; 1[$: она не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Действительно, на левом конце интервала $y(x)$ становится сколь угодно малой, но значение 0 не принимает, а справа «не достигает» значения 1. Еще один пример: функция

$$y(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x-3)},$$

заданная на интервале $]1; 3[$. Когда x приближается к 1, значения функции неограниченно возрастают (говорят, что функция стремится к «плюс бесконечности»). Когда же x приближается к 3, значения функции неограниченно убывают (функция стремится к «минус бесконечности»)! Здесь нет даже значений, которых функция могла бы «достигать».

Отметим, что для дифференцируемых функций, заданных на отрезке, такая неприятность возникнуть не может.

Теперь остановимся на некоторых примерах.

Пример 2 (МЭИС*), 1977). *Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x)=x-2\ln x$ на отрезке $[1; e]$.*

Здесь $y'=1-2/x$. Приравнивая производную нулю и решая полученное уравнение, находим: $x=2$. Поскольку $1<2<e$, эта точка — критическая. Далее, анализируя формулу $y'=1-2/x$, мы видим, что производная не определена при $x=0$, но эта точка вне отрезка $[1; e]$. Значит, функция определена и дифференцируема на отрезке $[1; e]$ и потому по указанному выше правилу обязана принимать наибольшее и наименьшее значение, причем эти значения будут каждое в одной из трех точек: $x=1$, $x=e$ (граничные точки), $x=2$ (критическая точка). Имеем: $y(1)=1$, $y(2)=2-2\ln 2$, $y(e)=e-2$. Оценив эти числа, можно показать, что $y(2)$ — наименьшее, а $y(1)$ — наибольшее значение данной функции на отрезке $[1; e]$, но сравнить $2-2\ln 2$ и $e-2$ нелегко. Проще исследовать поведение функции на данном отрезке. Строя схему знаков производной и возрастания и убывания функции y (рис. 2), находим, что функция y убывает на $[1; 2]$ и возрастает на $[2; e]$. Значит, наименьшее значение функции y существует и достигается при $x=2$ (и это — точка минимума). Наибольшее значение тоже существует и достигается в одной из точек $x=1$, $x=e$ (но ни одна из них не является точкой максимума!). Сравнивая $y(1)=1$ и $y(e)=e-2$, находим, что $e-2<2,9-2=0,9<1$. Значит, наибольшим значением функции является $y(1)=1$.

Подобным образом (по знакам производной) исследуются все критические точки функции, когда требуется найти все экстремумы функции и указать их характер. Общее правило здесь такое.

Если в точке x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то x_0 — точка максимума функции;

если в точке x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции;

если производная в точке x_0 равна нулю, но положительна как до точки x_0, так и за нею, или отрицательна как до точки x_0, так и за нею, то функция не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума (такие точки называются *«точками перегиба»*).

Пример 3. *Найти экстремумы и наибольшие и наименьшие значения функции $y(x)=3x^5-5x^3+1$ на отрезке $[-2; 2]$.*

Приравнивая нулю производную $y'(x)=15x^4-15x^2$, получаем три критические точки: $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Строя схему знаков производной и поведения функции (рис. 3), находим, что функция y имеет в точке $x=-1$ точку максимума, в $x=0$ точку перегиба и в точке $x=1$ точку минимума. Сравнивая значения функции y в точках $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ и $x=2$, находим, что наибольшим значением функции на заданном отрезке является $y(2)=57$, а наименьшим $y(-2)=-55$.

3. «Текстовые» задачи на экстремумы

Выше мы остановились на исследовании функций с помощью производной. Необходимость такого исследования возникает при решении самых разнообразных прикладных («текстовых») задач. Общая схема решения этих задач следующая. Мы описываем условия задачи переменными и уравнениями и выписываем функцию, экстремум которой надо найти. Эта функция обычно зависит от многих переменных, но с помощью уравнений мы выражаем все переменные через какую-либо одну, подставляем их в выражение для функции и получаем функцию от одной переменной, после чего стандартным методом проводим исследование.

Пример 4 (МЭИС, 1977). *Найти конус наибольшего объема, образующая которого имеет данную длину l.*

Объем конуса выражается через высоту H и радиус основания конуса R следующим образом:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

В эту формулу входят две перемен-

---

*) Московский электротехнический институт связи.

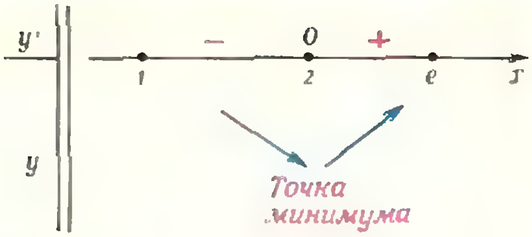


Рис. 2.

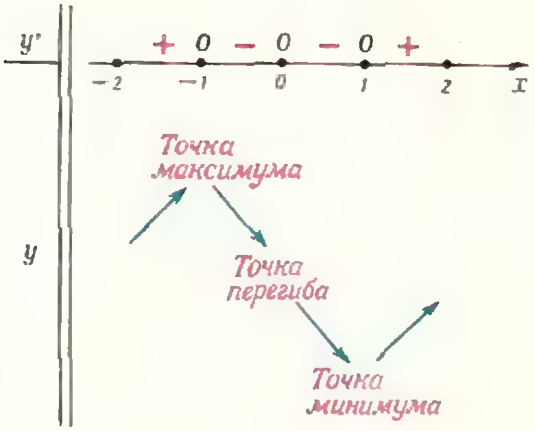


Рис. 3а.

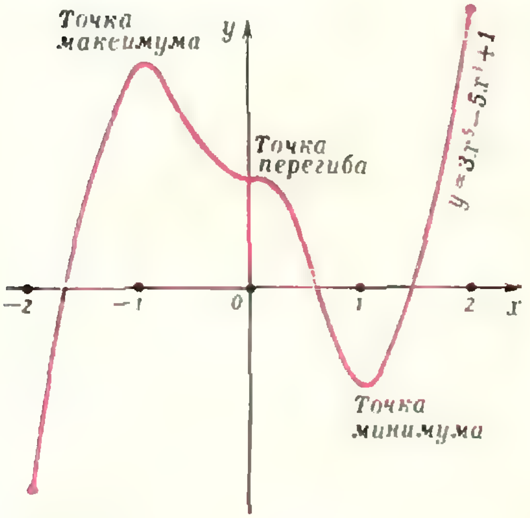


Рис. 3б.

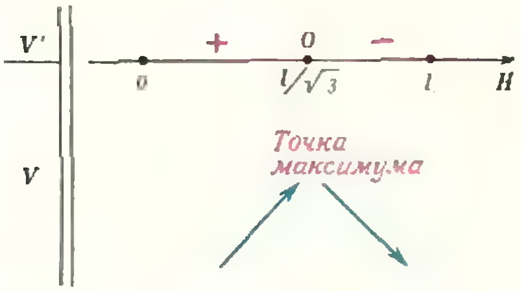


Рис. 4.

ные (R и H), но с помощью условия, что образующая имеет длину l, можно исключить одну из переменных. Какую именно? В принципе — безразлично, но на практике надо учитывать, что дальше нам придется решать уравнение $V'=0$, поэтому лучше оставить ту переменную, через которую V выражается наиболее просто. В данном случае имеем: $R^2+H^2=l^2$, откуда $R^2=l^2-H^2$, а также $H^2=l^2-R^2$. Получаем:

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi(l^2-H^2)H,$$

$$V(R)=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}.$$

Видно, что лучше оставить H, тогда

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi l^2H-\frac{1}{3}\pi H^3,$$

$$V'(H)=\frac{1}{3}\pi l^2-\pi H^2.$$

Функция V определена (по смыслу задачи) при $H\in[0;\ l]$. Критическая точка всего одна: $H=l/\sqrt{3}$. Строя схему знаков производной и поведения функции (рис. 4), мы видим, что $H=l/\sqrt{3}$ — точка максимума, причем в ней достигается и наибольшее значение функции V, так как до этой точки V возрастает, а после нее — убывает.

Заметим, что если бы в задаче спрашивалось, *при каком радиусе основания объем конуса наибольший*, наше решение не изменилось бы. Мы сначала нашли бы $V(H)$, точку максимума (и наибольшего значения) $H=l/\sqrt{3}$, а потом

$$R=\sqrt{l^2-(l/\sqrt{3})^2}=l\sqrt{2/3}.$$

Упражнения

1 (МИТХТ*), 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

2 (МИНХ**), 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=2\sin 2x+\cos 4x$ на отрезке $[0;\ \pi/3]$.

---

*) Московский институт тонкой химической технологии.

**) Московский институт народного хозяйства.

3 (МГУ, мехмат, 1977). Дана функция $f(x)=\cos x\cdot\sin^2 x$, $x\in[-\pi;\pi]$. Доказать, что наименьшее значение функции f на этом отрезке больше $-0{,}39$.

4 (МЭИС, 1977). Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

5 (МЭИС, 1977). Даны точки $A(0;\ 3)$ и $B(4;\ 5)$. Найти на оси Ox точку M такую, чтобы $S=|AM|+|MB|$ было наименьшим.

6. Найти наибольшее значение функции $y(x)=\sin(\sin x)$.

7. Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью 40 000 м². Затраты на постройку одного дома жилой площадью S складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. При строительстве дома жилой площадью 400 м² 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо строить домов, чтобы затраты были наименьшими?

8. Мощность, затрачиваемая на движение парохода, пропорциональна кубу его скорости. Найти наиболее экономичную скорость парохода при движении против течения, скорость которого равна a км/ч.

9. Имеется батарея с внутренним сопротивлением r. Какое сопротивление надо подключить к батарее, чтобы выделяемая на нем мощность была наибольшей?

10. На горизонтальной плоскости лежит кирпич массы m. С какой наименьшей (по модулю) силой и под каким углом к плоскости надо его тянуть, чтобы он сдвинулся с места, если коэффициент трения равен k?

11 (МИСиС*), 1977). Определить интервалы возрастания и убывания, экстремумы и построить схематически график функции

а) $f(x)=x^4-2x^2+5$;
б) $f(x)=x^4-2x^3-2x^2$;
в) $f(x)=x^4-\dfrac{20}{3}x^3+8x^2$;
г) $f(x)=x^2(x-1)^2$;
д) $f(x)=3x^3-x+2$.

12 (МИСиС, 1977). На промежутке $]0;\pi[$ задана функция $y=1-\cos x$. Найти наибольшее значение абсциссы точки пересечения касательной к графику данной функции с осью Ox.

13 (МИСиС, 1977). Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

14 (МВТУ**), 1977). Все вершины правильной треугольной призмы принадлежат сфере радиуса R. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

15 (МИСИ*), 1977). Найти наибольшее и наименьшее значение функций

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ на отрезке $[-4;\ 0]$;

б) $f(x)=x^4-8x^2+9$ на отрезке $[-1;\ 1]$;

в) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$ на отрезке $[-3;\ -1]$.

16 (МВТУ, 1977). Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара равен R. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

17 (МИНХ, 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

а) $f(x)=2\cdot 2^{3x}-9\cdot 2^{2x}+12\cdot 2^x$ на отрезке $[-1;\ 1]$;

б) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}$ на отрезке $[-1;\ 2]$;

в) $f(x)=2\ln^3 x-9\ln^2 x+12\ln x$ на отрезке $[e^{3/4};\ e^3]$;

г) $f(x)=2\log_2^3 x-15\log_2^2 x+36\log_2 x$ на отрезке $[4;\ 16]$.

18 (МИСиС, 1977). Из всех конусов, описанных около данного шара, найти тот, который имеет наименьший объем.

19 (МАИ, 1977). Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь расположен на берегу). Если матрос может делать пешком по 5 км/час, а на веслах по 4 км/час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

20 (МАИ, 1977). В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь? Найти эту площадь.

21 (МИСиС, 1977). Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент времени расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения $(-3;\ 0)$ и $(0;\ 5)$?

22 (МИСиС, 1977). В фигуру, ограниченную линиями $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=6$ вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x=6$, а две другие — на параболах $y=x^2$, $y=2x^2$. Найти эту площадь.

23 (МИСиС, 1977). В фигуру, ограниченную прямой $y=3x$ и параболой $y=x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найти эту площадь.

---

*) Московский институт стали и сплавов.

**) Московское высшее техническое училище.

*) Московский инженерно-строительный институт.

Л. Тарасов

Симметрия в задачах по физике

С понятием симметрии человек встречается фактически везде — в природе, технике, искусстве, науке. Вспомним симметрию, свойственную бабочке и кленовому листу, симметрию форм автомобиля и самолета, симметрию в ритмическом построении стихотворения или музыкальной фразы, симметрию орнаментов, симметрию в атомной структуре молекул и кристаллов. В частности, симметрия довольно часто встречается в задачах по физике.

Что такое симметрия? Многие затрудняются дать ответ на этот вопрос, хотя проявления симметрии в различных конкретных случаях воспринимаются практически всеми. В повседневной практике с понятием симметрии обычно сопоставляют нечто уравновешенное, гармоничное, обладающее хорошим соотношением пропорций. При конкретном применении этого понятия говорят, например, о симметрии относительно оси, симметрии при отражении в зеркале, симметрии квадрата, правильного шестиугольника и т. д.

Решая задачи, мы нередко используем симметрию, не оговаривая этого факта, как нечто само собой разумеющееся. Так, представляется очевидным, что центр тяжести однородной прямоугольной пластины находится в точке пересечения ее диагоналей, что поле вне заряженного металлического шара можно рассматривать как поле точечного заряда, находящегося в центре шара, что математический маятник совершает колебания, симметричные относительно направления силы тяжести.

В решениях задач часто можно встретить фразы типа «из соображений симметрии ясно, что...» или «на основании симметрии можно заключить...». Вот несколько конкретных примеров.

Задача 1. *Четыре одинаковых точечных заряда q размещены в вершинах квадрата. Какой заряд Q противоположного знака надо поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов оказалась в равновесии?*

Равновесие означает, что сумма сил, приложенных к каждому заряду, равна нулю. При этом достаточно рассмотреть равновесие одного из пяти зарядов. Спрашивается, какого? Из соображений симметрии ясно, что рассматривать заряд Q не имеет смысла, так как он будет находиться в равновесии независимо от своей величины. Опять-таки из симметрии очевидно, что все заряды q эквивалентны, так что с равным основанием можно выбрать любой из них. Рассмотрим, например, заряд, находящийся в точке A (рис. 1). Изобразим силы $\vec F_1$, $\vec F_2$, $\vec F_3$ и $\vec F_4$, действующие на него со стороны остальных четырех зарядов. Спроектируем эти силы на направление AB и запишем условие

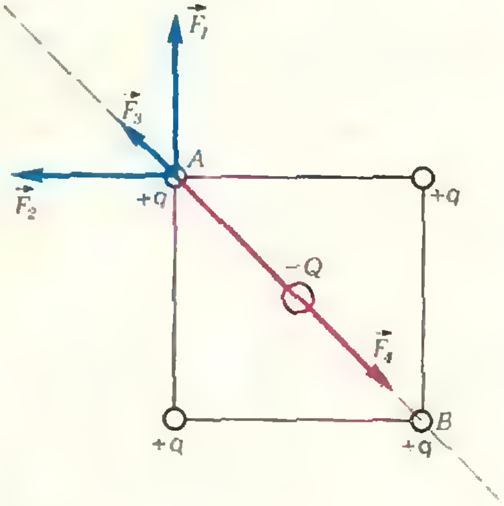


Рис. 1.

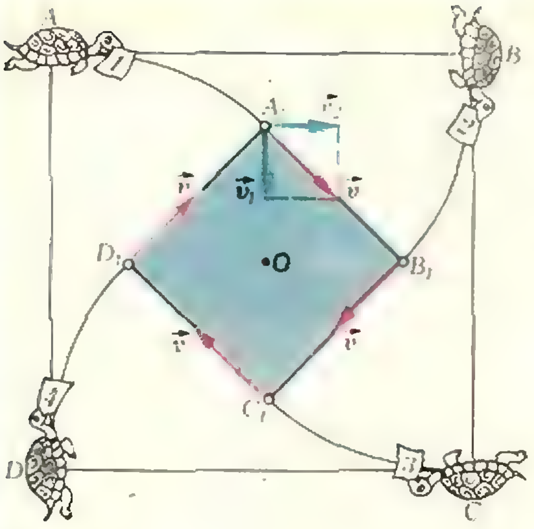


Рис. 2.

равновесия:

$$\left|\vec{F}_4\right| - \left|\vec{F}_1\right| \cos 45^\circ - \left|\vec{F}_2\right| \cos 45^\circ - \left|\vec{F}_3\right| = 0,$$

или, используя закон Кулона (одинаковый для всех слагаемых множитель $^1(4\pi\varepsilon_0)$ попутно сокращаем):

$$\frac{Qq}{a^2/2} - \sqrt{2}\,\frac{q^2}{a^2} - \frac{q^2}{2a^2} = 0$$

(здесь a — длина стороны квадрата). Отсюда следует, что

$$Q = \frac{q}{4}\left(2\sqrt{2} + 1\right).$$

Задача 2. *Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной a. Они начинают одновременно двигаться с постоянной по величине скоростью $\vec{v}$, причем первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая на третью, третья на четвертую, четвертая на первую. Встретятся ли черепахи? Если встретятся, то через какое время?*

Прежде всего заметим, что с точки зрения условия задачи все черепахи полностью равноправны, эквивалентны друг другу. Из соображений симметрии ясно, что в любой момент времени черепахи будут образовывать квадрат, а скорости их будут направлены по сторонам квадрата (рис. 2). Ориентация и размеры таких квадратов будут изменяться со временем — до тех пор, пока квадрат не стянется в точку O (тогда черепахи и встретятся). Опять-таки из соображений симметрии точка O — общий центр всех упомянутых квадратов. Для того чтобы найти время t, через которое произойдет встреча черепах, разложим вектор скорости $\vec{v}$ черепахи на составляющую $\vec{v}_1$, направленную к центру O, и перпендикулярную составляющую $\vec{v}_2$. Тогда

$$t = \frac{a/\sqrt{2}}{\left|\vec{v}_1\right|} = \frac{a/\sqrt{2}}{\left|\vec{v}\right|/\sqrt{2}} = \frac{a}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Задача 3. *Однородный брусок массы m висит на трех вертикальных проволоках равной длины, расположенных симметрично (рис. 3). Определить натяжения проволок, если средняя проволока стальная, а две другие медные. Считать, что модуль Юнга стали в два раза больше модуля Юнга меди, а поперечные сечения проволок одинаковы.*

Из соображений симметрии ясно, что удлинение Δl всех трех проволок одно и то же. По закону Гука силы натяжения стальной и медной проволок равны соответственно

$$\left|\vec{F}_c\right| = \frac{\Delta l}{l_0} SE_c \quad \text{и} \quad \left|\vec{F}_м\right| = \frac{\Delta l}{l_0} SE_м,$$

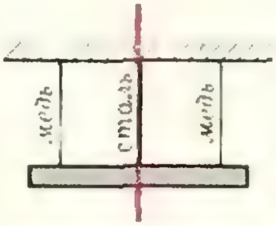


Рис. 3.

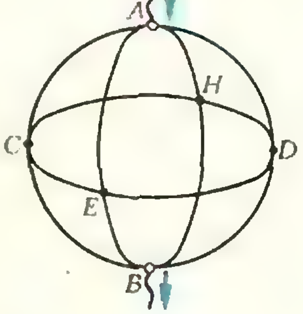


Рис. 4.

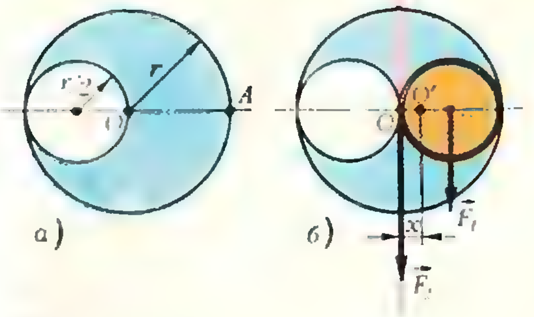


Рис. 5.

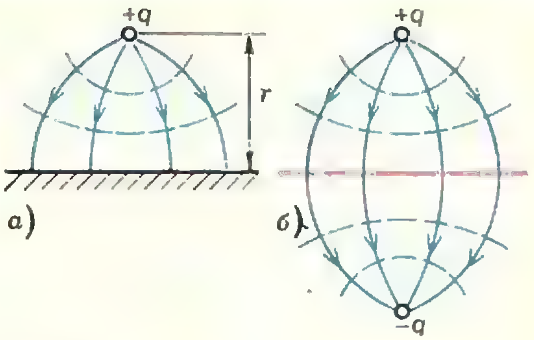


Рис. 6.

где $E_с$ и $E_м$ — модули Юнга стали и меди, l_0 и S — начальная длина и площадь поперечного сечения проволок. Учитывая, что из условия равновесия бруска

$$2\left|\vec F_м\right| + \left|\vec F_с\right| - m\left|\vec g\right| = 0,$$

находим

$$\left|\vec F_с\right| = m\left|\vec g\right|/2 \text{ и } \left|\vec F_м\right| = m\left|\vec g\right|/4.$$

Задача 4. *Их трех одинаковых проволочных колец сварен каркас, показанный на рисунке 4. Найти сопротивление между точками A и B, если сопротивление четверти длины каждого кольца равно R.*

Из соображений симметрии очевидно, что в точке A электрический ток в равных частях распределится по ветвям AC, AE, AD, AH, поэтому точки C, E, D, H будут иметь одинаковые потенциалы. Следовательно, по кольцу $CEDH$ ток не идет. Убрав мысленно это кольцо, находим искомое сопротивление R_{AB} как общее сопротивление четырех параллельно соединенных проводников с сопротивлением $2R$ каждый:

$$R_{AB} = 2R/4 = R/2.$$

Разобранные задачи наглядно показывают, как на практике работают соображения симметрии. Во всех случаях имела место определенная симметрия физической ситуации: одинаковость по величине и знаку зарядов, расположенных в вершинах квадрата; симметричное начальное положение и одинаковое поведение черепах; симметрия подвесной конструкции в случае балки и т. п. Встречаются, однако, задачи, где симметрия присутствует не столь явно, а как бы в скрытом виде. Для выявления симметрии надо немного видоизменить рассматриваемую в задаче ситуацию (не меняя, разумеется, ее физического содержания). В результате «симметризации» задачи удается, как правило, быстро и просто найти искомый результат. Приведем примеры.

Задача 5. *Найти положение центра тяжести плоской фигуры, показанной на рисунке 5, а.*

Очевидно, что центр тяжести фигуры находится где-то на отрезке OA. Чтобы найти его положение, заменим несимметричную фигуру, показанную на рисунке 5, *а*, двумя симметричными фигурами, вложенными друг в друга (рис. 5, *б*). Одна из них — это круг радиуса $r/2$, а другая — круг радиуса r с двумя симметричными круговыми отверстиями радиуса $r/2$ каждый. На рисунке 5, *б* показаны силы тяжести $\vec F_1$ и $\vec F_2$ этих фигур, точки приложения сил очевидны из соображений симметрии.

Обозначим через x расстояние искомого центра тяжести O' от точки O. Из условия равновесия (условия равенства нулю суммы моментов относительно оси, проходящей через точку O') получаем:

$$\left|\vec F_2\right| x - \left|\vec F_1\right| (r/2 - x) = 0,$$

или, учитывая, что сила тяжести фигуры пропорциональна ее площади:

$$(\pi r^2 - \pi r^2/2)x - \pi r^2/4(r/2 - x) = 0.$$

Отсюда $x = r/6$.

Задача 6. *Точечный заряд $+q$ находится над проводящей плоскостью на расстоянии r. С какой силой он притягивается этой плоскостью?*

Заряд $+q$ наведет на плоскости отрицательные заряды, плотность которых будет уменьшаться по мере удаления от заряда $+q$. Картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей электрического поля, созданного точечным зарядом $+q$ и наведенными на плоскости зарядами, показана на рисунке 6, *а* (сплошные синие линии — силовые линии поля, пунктирные — сечения эквипотенциальных поверхностей).

Если эту несимметричную картину дополнить до симметричной (рис. 6, *б*), то получим картину электрического поля, образованного двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$, находящимися на расстоянии $2r$ друг от друга. Это означает, что сверху от плоскости электрическое поле, созданное точечным зарядом $+q$ и наведенными зарядами, совпадает с полем точечных зарядов $+q$ и $-q$. Следовательно, искомая сила притяжения заряда $+q$ к плоскости равна силе взаимодействия зарядов $+q$ и $-q$:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4r^2}.$$

Задача 7. *Мяч бросают с поверхности земли под углом α с начальной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 7, а). На расстоянии l от точки бросания находится вертикальная стенка. Мяч упруго ударяется о стенку и отскакивает обратно. На каком расстоянии x от стенки он приземлится?*

Уберем мысленно стенку и продолжим траекторию полета мячика (пунктирная линия на рисунке 7, *б*). При упругом ударе о стенку абсолютная величина скорости мяча не изменяется, а угол падения β равен углу отражения β_1. Следовательно, участки траектории AB (в отсутствие стенки) и AC (при наличии стенки) симметричны относительно прямой AA_1 (относительно стенки). Отсюда получаем:

$$x = OB - l = \frac{v_0^2}{|\vec{g}|}\sin 2\alpha - l.$$

Задача 8. *Между точками A и B включено сопротивление R. Кроме того, имеются еще $N-2$ точек, причем между каждой парой точек, включая сюда и точки A и B, также присоединено сопротивление R. Найти результирующее общее сопротивление между точками A и B.*

Разместим мысленно указанные $N-2$ точки на прямой OO_1, относительно которой точки A и B симметричны. Тем самым мы перейдем от несимметричной картины, показанной на рисунке 8, *а*, к симметричной картине, приведенной на рисунке 8, *б* (на рисунке $N=6$). Из соображений симметрии ясно, что потенциалы всех точек на прямой OO_1 одинаковы, поэтому эти точки можно разъединить. Тогда искомое сопротивление R_{AB} можно найти по формуле:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{N-2}{2R}.$$

Отсюда

$$R_{AB} = 2R/N.$$

Вернемся к вопросу, поставленному ранее: что такое симметрия? По какому основному признаку можно усмотреть ее присутствие в том или ином случае? Известный немецкий математик Герман Вейль предложил прекрасное и простое определение симметрии, согласно которому *симметричным называется такой предмет, который можно как-то изме-*

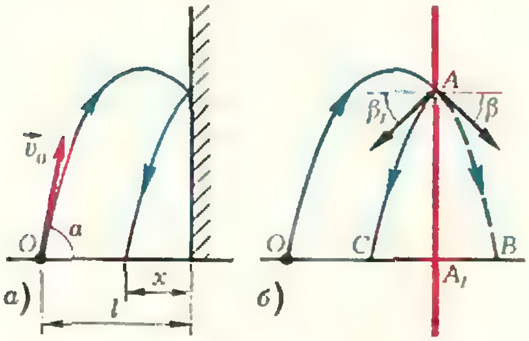


Рис. 7.

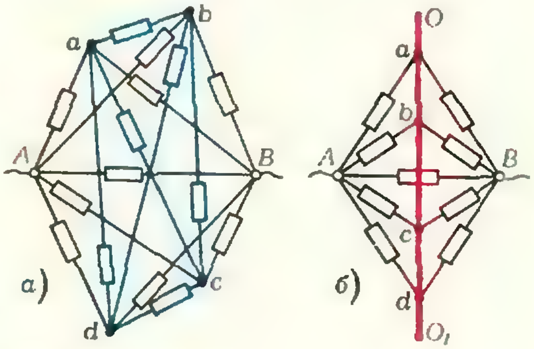


Рис. 8.

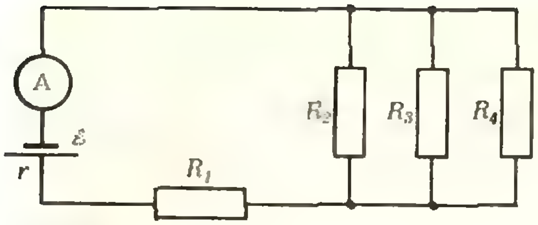


Рис. 9.

нять, получая в результате то же, с чего начали. Так, в задаче 4 поворот проволочного каркаса вокруг прямой AB на угол 90° возвращает нас к исходной ситуации, то есть фактически ничего не изменяет. Это — симметрия квадрата; она имеет место также в задачах 1 и 2. В задачах 3, 5, 6, 7 и 8 мы встречаемся с так называемой зеркальной симметрией — симметрией по отношению к отражению в плоском зеркале; сечение плоскости этого зеркала (плоскости симметрии) показано на соответствующих рисунках красной линией.

Однако понятие симметрии связано не только с чисто геометрическими преобразованиями (поворотами, отражениями, переносами и т. п.). Обратимся к такому примеру.

Известен случай с одним опытным наборщиком. Набирая страницу задачника по физике, он увидел в рукописи следующее выражение для показания амперметра в цепи, изображенной на рисунке 9:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r + \dfrac{R_1R_3R_4 + R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4}{R_3R_4 + R_2R_3 + R_2R_4}}.$$

Посмотрев внимательно на это выражение, наборщик заявил, что в нем содержится какая-то ошибка. Дело в том, объяснил он, что, согласно рисунку, показание амперметра не должно измениться, если, например, поменять местами сопротивления R_2 и R_3. Если же в рассматриваемой формуле заменить R_2 на R_3, а R_3 на R_2, то результат, как легко видеть, изменится. Наборщик оказался совершенно прав: в числителе дроби в формуле было пропущено слагаемое $R_1R_2R_4$.

Случай с наборщиком весьма поучителен. Важно помнить, что если в данной ситуации (электрической схеме, конструкции и т. п.) имеет место симметрия по отношению к перестановке каких-то элементов, то эта симметрия должна проявляться и в соответствующих формулах.

В заключение предлагается несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Мяч бросают горизонтально с высоты H с начальной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 10). Мяч упруго ударяется последовательно о две параллельные вертикальные стенки. Найти расстояние l между стенками, при котором мяч попадает в точку A.

2. Найти положение центра тяжести диска, в котором сделаны два круговых выреза, как показано на рисунке 11.

3. В вершинах правильного шестиугольника помещены одинаковые заряды $+q$. Какой заряд Q следует поместить в центр шестиугольника, чтобы система зарядов оказалась в равновесии?

4. На расстоянии r от двух взаимно перпендикулярных проводящих полуплоскостей помещен заряд q. Найти силу, действующую на заряд.

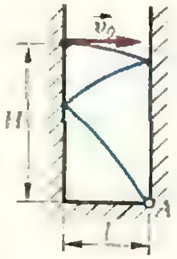


Рис. 10.

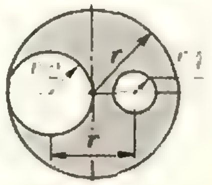


Рис. 11.

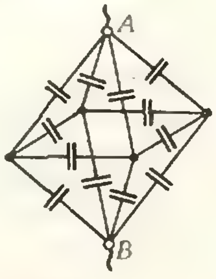


Рис. 12.

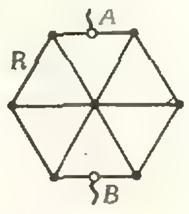


Рис. 13.

5. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый собраны в батарею в виде восьмигранника (рис. 12). Какова емкость этой батареи между точками A и B?

6. Из одинаковых отрезков проволоки сопротивлением R каждый сварена фигура, показанная на рисунке 13. Найти сопротивление между точками A и B.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

Уральский государственнный университет им. А. М. Горького

Математика

Варианты письменного экзамена

Математико-механический факультет

1. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы не все девушки оказались сидящими непосредственно рядом?

② Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a, а угол между ними равен α. Грань пирамиды, проходящая через основание треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\frac{|x-5|}{6x}+\frac{1}{3}\geqslant 0.$$

4. Найти все значения x из отрезка $[-\pi;\ 0]$, при которых функция $f(x)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}$ удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases}\ln f(x)>\dfrac{1}{2},\\ f'(x)\leqslant -f(x).\end{cases}$$

Физический факультет

1. Точка движется по координатной прямой так, что ее координата s изменяется по закону $s=A+B\sin\frac{\pi t}{2}$ (A и B — постоянные). Найти ускорение при $t=1$.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг боковой стороны, был наибольшим?

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+4x+3}}\leqslant 3^{1+x}.$$

4. При каких значениях x из отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ функция $y=\sin x\cdot\cos 2x$ удовлетворяет неравенству $y''+y+2\sqrt{3}>0$?

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет

1. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a(1-x^2)\geqslant 1.$$

2. При каких положительных значениях параметра a выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\geqslant 32$?

3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\cos x<\log_{\frac{1}{2}}\operatorname{tg} x,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

4. Верно ли, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{x-1}$, $y=0$, $x=0$, $x=2$, меньше 2?

5. Длина всей границы кругового сектора равна l. Какова должна быть длина радиуса сектора, чтобы площадь сектора была наибольшей?

6. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ог-

раниченной линиями $y=\cos ax$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6a}$, $x=\frac{\pi}{2a}$, больше 3?

7. Найти все значения параметра a, при которых точки минимума функции $y=1+a^2x-x^3$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}\leqslant 0.$$

8. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sin x-\sqrt{a}=\cos 2x+2.$$

9. При каком натуральном n девятый член в разложении $(1+0,1)^n$ является наибольшим?

10. Прямая (AD) делит медиану $[BM]$ треугольника ABC в отношении 5 : 1, считая от B. В каком отношении (AD) делит площадь треугольника ABC?

Физический факультет

1. Существуют ли такие отрицательные значения параметра a, при которых

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{1-a}\cdot x^2}{\sin^2 ax}>-1?$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1-\sin x}{|1-\sin x|}\cdot\sin 2x=-\sqrt{2}\cos x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)<0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную линией $|y|=1-x^2$.

5. Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$.

6. Решить неравенство $x^{|\ln x|}>e^4$.

7. Найти объем параллелепипеда с ребрами a, b, c, образующими друг с другом углы $\frac{\pi}{2}$, α, α.

8. Решить неравенство

$$\sin x\cdot|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

9. При каких положительных значениях параметра a выполняется неравенство

$$\lim_{x\to a}\frac{ax^2-(a^2+2)x+2a}{ax^2+(a-2-a^2)x-(a^2-2a)}>0?$$

10. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2\leqslant 4.$$

Физика

Математико-механический факультет

1. Мячик брошен вертикально вверх из точки, находящейся на высоте h. Определить начальную и конечную (при ударе о землю) скорости мячика, если за все время движения он пролетел путь $3h$.

2. Вагонетку массой $m=3000$ кг поднимают по рельсам в гору, наклон которой $\alpha=30°$, с ускорением $|\vec{a}|=0{,}2$ м/с^2. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. Какую работу совершила сила тяги на пути $l=50$ м?

3. Кислород массой $m=10$ г находится под давлением $p_1=3$ атм при температуре $t_1=10$°C. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V_2=10^{-2}$ м^3. Найти объем газа до расширения и температуру после расширения.

4. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостями $C_1=3\cdot 10^{-10}$ Ф и $C_2=5\cdot 10^{-10}$ Ф заряжена до напряжения $U=12$ кВ. Определить напряжения на обоих конденсаторах и заряды на их обкладках.

5. Емкость переменного конденсатора изменяется от $C_1=56$ пФ до $C_2=667$ пФ. Какой комплект катушек индуктивности нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции, работающие в диапазоне длин волн от $\lambda_1=40$ м до $\lambda_2=2600$ м?

Физический факультет

1. Локомотив на горизонтальном участке пути развивает постоянную силу тяги $|\vec{F}|=3{,}5\cdot 10^5$ Н. На участке пути длиной $l=600$ м скорость поезда возросла с $|\vec{v}_1|=10$ м/с до $|\vec{v}_2|=20$ м/с. Определить коэффициент трения, если масса поезда $m=10^6$ кг.

2. В стеклянный стакан массой $m_1=120$ г при температуре $t_1=15$° С налили $m_2=200$ г воды при $t_2=80$°C. Какое количество теплоты будет передано стакану? Удельная теплоемкость стекла $c_1=0{,}20$ кал/(г·град), воды — $c_2=1$ кал/(г×град).

3. По газопроводу пропускают углекислый газ при давлении $p=4$ атм и температуре $t=7$°C. Какова скорость движения газа в трубе, если за время $\tau=10$ минут протекает $m=2$ кг углекислого газа? Площадь сечения канала трубы $S=5$ см^2.

4. На плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d=2$ см падает луч света под углом $\alpha=60°$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности и, преломляясь вторично, выходит обратно параллельно первому отраженному лучу. Определить расстояние между двумя отраженными лучами, если коэффициент преломления стекла $n=1{,}73$.

5. Работа выхода электронов из кадмия $A=4{,}08$ эВ. Какова должна быть длина волны света, чтобы при фотоэффекте максимальная скорость вылетающих электронов была равна $|\vec{v}|=7{,}2\cdot 10^5$ м/с? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Э. Голубов, Р. Емлин

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом φ, вписан цилиндр (одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, и окружность второго его основания имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды). Радиус основания цилиндра и его высота равны r. Вычислить объем пирамиды. При каком значении угла φ объем пирамиды наименьший?

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\frac{|4-x^2|}{4} \text{ и } y=7-|x|.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}>\sqrt{5}(\log_4 x^2-3).$$

4. Сколько есть четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

Физический факультет

1. Вокруг шара радиуса r описана правильная треугольная пирамида с высотой H. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды. При каком H эта площадь наименьшая? Найти наименьшее значение площади.

2. При каких значениях x производная функции

$$y=\sin 2x+10\cos x-6x$$

равна нулю?

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\ .\ .\ .\ +(2n-1)}}{2n^2+n+1}.$$

4. На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найти множество всех тех точек плоскости, произведение расстояний от которых до данных прямых равно сумме этих расстояний.

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнение

$$\sin|x|=|\sin x|.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}\geqslant 0.$$

3. Сколько корней имеет уравнение

$$x^5=5x+2a$$

в зависимости от параметра a?

4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

в зависимости от параметра a?

5. Изобразить в прямоугольной системе координат множество точек

$$\left\{(x;\ y)\ \middle|\ \log_{\left(|x|-\frac{1}{2}\right)}(x^2+y^2)\leqslant\log_{\left(|x|-\frac{1}{2}\right)}4\right\}.$$

6. Найти все значения a, при которых множество

$$\{(x;\ y)\mid x^2+y^2+2x\leqslant 1\}\cap$$
$$\cap\{(x;\ y)\mid x-y+a=0\}$$

содержит только одну точку. Найти эту точку.

7. Построить график функции

$$y=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 1+\log_{\frac{1}{2}} x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

8. Доказать, что функция

$$f(x)=\frac{2}{3}x^9-x^6+2x^3-3x^2+6x-1$$

монотонно возрастает на $\mathbf{R}$.

9. Найти все значения a, при которых функция

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$$

возрастает для всех $x\in\mathbf{R}$.

10. Пусть x_1 и x_2 — соответственно, точка максимума и точка минимума функции

$$f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1.$$

При каких a $x_1^2=x_2$?

11. При каких a функция

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$$

имеет отрицательную точку минимума?

12. При каких значениях x обращается в ноль та из первообразных функции

$$f(x)=\pi\sin\pi x+2x-4,$$

которая при $x=1$ имеет значение 3?

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=2+\sin x \text{ и } y=1+\cos^2 x$$

на промежутке $[0;\ \pi]$.

14. Вычислить объем пространственной фигуры, образованной вращением во-

круг прямой $y=1$ плоской фигуры, ограниченной графиком функции

$$y = 1 + \cos^2 x$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и этой прямой.

15. Будет ли последовательность

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$$

монотонной?

16. Доказать, что для произвольного натурального числа $n \geqslant 2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

17. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}.$$

18. Сколько есть пятизначных чисел, в записи которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

19. Прямые l_1, l_2, l_3 параллельны и не лежат в одной плоскости. На l_1 взято m точек, на l_2 — n точек и на l_3 — k точек. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

20. Сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного многоугольника равна n^2r^2, где n — число сторон многоугольника, а r — радиус описанной окружности. Доказать это.

21. Доказать, что отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон равно $\frac{3}{4}$.

22. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковую сторону видно из центра описанной окружности под углом α.

23. Можно ли из отрезков, конгруэнтных медианам треугольника, построить треугольник?

24. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\pi}{4}$.

В. Вышенский, Н. Перестюк,
А. Самойленко

Ярославский государственный университет

Ярославский государственный университет был основан в 1918 году по декрету, подписанному В. И. Лениным. В связи с тяжелым положением в стране после гражданской войны в 1924 году он был реорганизован в педагогический институт. В 1970 году — в год столетия со дня рождения В. И. Ленина — университет возобновил свою работу. Сейчас в составе университета 5 факультетов: математический, физический, экономический, биологии и психологии, истории и права.

Математический факультет имеет два отделения — математики и прикладной математики.

Студенты физического факультета специализируются по теоретической физике, физике твердого тела и радиофизике.

Математика

Математический факультет

1. Из точки P $(-3;\ 9)$ кривой $y=x^2$ опущены перпендикуляры на оси координат. В каком отношении, считая от оси абсцисс, кривая $y=x^2$ делит площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами и осями координат?

2. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, вписанного в данный круг, чтобы его периметр был наибольшим?

3. Решить уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1)$$

4. Доказать неравенство

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geqslant 3,\ n \in N).$$

Физический факультет

1. Найти

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x}.$$

2. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна a^2. Найти наибольший объем этой пирамиды.

3. Решить неравенство:

$$\frac{2 - 4\log_8 x}{\sqrt{2x^2 - x - 6}} \geqslant 0.$$

4. Решить уравнение:

$$81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0.$$

М. Доброхотова

Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова

МИНХ им. Г. В. Плеханова — один из старейших и крупнейших экономических вузов Советского Союза. На его одиннадцати факультетах обучается около 15 тысяч студентов. На 47 кафедрах института трудятся свыше 500 аспирантов.

В институте имеются следующие факультеты: общеэкономический (специальности — планирование народного хозяйства, экономика труда), экономической кибернетики, торгово-экономический (экономика торговли, экономика общественного питания, бухгалтерский учет в торговле и промышленности), финансовый (финансы и кредит в промышленности и торговле, планирование цен и ценообразование), товароведения и организации торговли продовольственными товарами, товароведения и организации торговли промышленными товарами, экономики промышленности, экономики и планирования материально-технического снабжения, технологический (инженер-технолог по технологии и организации общественного питания), механический (инженер-механик по машинам и аппаратам пищевых производств), заочный (инженер-технолог по технологии и организации общественного питания, экономика общественного питания).

На всех факультетах, кроме технологического, механического и заочного, вступительный экзамен по математике — письменный; на технологическом факультете — устный; на механическом — и письменный, и устный; на заочном — устный на специальности «инженер-технолог» и письменный на второй специальности.

Математика

Вариант 1

(для специальностей «экономическая кибернетика» и «экономика промышленности»)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x,$$

где $0\leqslant x\leqslant \frac{3\pi}{2}$.

2. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}.$$

3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом φ. Площадь большей боковой грани равна Q. Найти объем призмы.

4. Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график

$$y=x^4-2x^2+5.$$

5. Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы цифр равен утроенному искомому числу. Найти это число.

Вариант 2

(товароведение и организация торговли промышленными товарами, экономика торговли)

1. Решить неравенство

$$4^{x+1}-16^x<2\log_4 8.$$

2. В какой точке касательная к графику функции

$$y=\frac{x+2}{x-2}$$

образует угол 135 с осью Ox? Написать уравнение касательной.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12}\right]$ графиками функций

$$y=\sin 2x,\qquad y=1-\sin 2x.$$

4. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине l медианы, проведенной к его боковой стороне.

+ 5. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий, работая один?

Вариант 3

(планирование цен и ценообразование, планирование народного хозяйства, финансы и кредит в промышленности и торговле)

1. Решить неравенство

$$1\leqslant\frac{2-x}{x+1}\leqslant 2.$$

2. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=2^{2x}-5\cdot 2^x+(2\ln 2)x.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=2-x^2,\ y=1,\ y=0.$$

+ 4. Через гипотенузу BC прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α, расстояние от вершины A до этой плоскости равно 3 см. Найти угол между плоскостью α и плоскостью треугольника, если $|AB|=10$ см, $|AC|=15/2$ см.

+ 5. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 300 км. Первый из них приходит на станцию B на 1,5 часа раньше, чем второй на станцию A. В то время как первый проходит 250 км, второй делает только 200 км. Найти скорость каждого поезда.

Вариант 4

(экономика труда, экономика и планирование материально-технического снабжения, экономика общественного питания)

1. Решить неравенство

$$\frac{2x+3}{x^2+x-12} \leqslant \frac{1}{2}.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=2\cdot 3^{3x}-3^{2x}\cdot 4+2\cdot 3^x$$

на отрезке $[-1;\ 1]$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=x^2-4,\quad y=4-x^2.$$

4. Радиус вписанной в конус сферы равен R. Найти объем конуса, если центр описанной вокруг конуса сферы совпадает с центром вписанной сферы.

5. На мебельной фабрике изготавливаются столы и стулья. На изготовление одного стола расходуется 5 м досок и 1 м фанеры. На изготовление одного стула расходуется 1 м досок и 2 м фанеры. Сколько было произведено столов и стульев, если известно, что досок и фанеры было израсходовано по 900 м?

Вариант 5

(товароведение и организация торговли продовольственными товарами, бухгалтерский учет в торговле и промышленности, машины и аппараты пищевых производств)

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 x-4\sin x\cdot\cos x+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\lg(x-1)+\lg(x+1)<\lg(x+5).$$

3. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

4. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти $|AD|$, если $|AK|=6$ см, $|AM|=3$ см и $\widehat{KAM}=60^\circ$.

5. Составить уравнение касательной к графику функции

$$y=\frac{1}{2}\sin^2\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$$

в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{6}$.

В. Барбаумов, В. Ермаков,
Г. Савченко, Р. Сагитов

Московский автомеханический институт

Московский автомеханический институт (МАМИ) организован в 1939 году. В его создании принимал участие один из крупнейших ученых в области автомобильной промышленности академик Е. А. Чудаков.

МАМИ является ведущим учебным институтом в нашей стране, готовящим специалистов по конструированию автомобилей и тракторов, инженеров-механиков, инженеров-испытателей, технологов машиностроительного производства.

В составе института — 4 факультета: автомобилей и тракторов, автомобильных и тракторных двигателей, технологии и автоматизации машиностроения, литейного и кузнечно-штамповочного производства.

Выпускники института, имеющие хорошую теоретическую подготовку, занимаются решением сложных и интересных технических задач. В настоящее время часть выпускников МАМИ направляется в научно-исследовательские организации, специальные конструкторские бюро, занимающиеся проектированием новых марок автомобилей. Выпускники института занимаются вопросами, требующими повышенного знания математики и физики: критическая скорость автомобильной шины, колебания автомобиля на подвеске (теория случайных процессов), прочность и колебания автомобильных двигателей и трансмиссий (методы математической физики), автоматические устройства разного рода (теория автоматического регулирования), устойчивость движения автомобиля и многое другое.

Для студентов, интересующихся математикой и физикой, кафедры высшей математики, прикладной математики, физики, теоретической механики, теории механизмов и машин, электротехники и автоматики организуют специальные семинары и научные кружки.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4^x+2^{x+1}=80.$$

2. Решить уравнение

$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}=5.$$

3. Решить неравенство

$$\lg 2^{\frac{x-1}{2x-3}}>-\lg 2.$$

4. Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5. Найти функцию $F(x)$, если $F'(x)=3x^2+1$ и $F(1)=3$, и построить ее график.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2^{2x+1}+4=9\cdot 2^x.$$

2. Решить уравнение

$$6\sin^2 x-3\sin x\cdot\cos x-\cos^2 x=1.$$

3. Решить неравенство

$$2^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{x-3}}<1.$$

4. Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x+1 \text{ и } y=5+3x-2x^2.$$

А. Рязановский

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(физический факультет)

Математика

Вариант 1

1. Найти косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

2. Решить уравнение

$$7\cdot 10^{2x+3}-5\cdot 4^{2x+3}=2\cdot 25^{2x+3}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

5. Построить график

$$y=x^4-2x^2+5.$$

Вариант 2

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные и взаимно перпендикулярные. Найти угол между суммой и разностью векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{p}=8\vec{a}+4\vec{b}$ и $\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$.

2. Решить уравнение

$$7\cdot 2^x-4^x=10.$$

3. Решить уравнение

$$8\sin^2\frac{x}{2}+3\sin x-4=0.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1.$$

5. Построить график

$$y=x^3-3x^2+2.$$

Физика

1. С крыши упали две капли с интервалом времени Δt. Расстояние между каплями через $t_1=1$ с после падения второй из них составляло $l=50$ см. Определить Δt.

2. Груз массой $m=10$ кг перемещают равномерно по прямой в горизонтальной плоскости, прилагая силу, направленную под углом $\alpha=30^\circ$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

3. Два груза массами $m_1=3$ кг и $m_2=6{,}8$ кг висят на концах нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на $h=2$ м ниже большего. Грузы приходят в движение без начальной скорости. Через какое время они окажутся на одной высоте?

4. При выстреле в горизонтальном направлении ствол орудия, масса которого $M=500$ кг, откатывается на расстояние $l=80$ см. Определить среднее значение силы торможения в тормозном устройстве орудия. Масса снаряда $m=4$ кг, его начальная скорость $|\vec{v}|=600$ м/с.

5. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на высоту $h=2$ см. Какова масса льдины, если ее площадь 150 см²? Плотность льда $\rho_л=0{,}92$ г/см³.

6. Сообщающиеся сосуды с площадью сечений S_1 и S_2 заполнили жидкостью плотности ρ. Затем колено сосуда с сечением S_1 закрыли, и находящийся в нем воздух нагрели от температуры T_0 до температуры T. Определить температуру T, если уровень жидкости в колене с сечением S_2 поднялся на величину ΔH_2. Начальный объем воздуха в закрытом колене V_0, атмосферное давление $p_0=\text{const}$, тепловым расширением сосуда и жидкости пренебречь.

7. Для нагревания некоторого количества воды от 0°C до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого потребовалось $\tau_2=1$ ч 20 мин для обращения всей этой воды в пар при тех же условиях. Определить по этим данным удельную теплоту парообразования воды.

8. Две электрические лампочки включены в сеть параллельно. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, сопротивление второй $R_2=240$ Ом. Какая из лампочек поглощает бо́льшую мощность и во сколько раз?

9. Найти внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях внешнего сопротивления $R_1=5$ Ом и $R_2=0{,}2$ Ом.

10. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=12$ см следует поставить предмет, чтобы его действительное изображение было в $n=3$ больше самого предмета?

О. Овчинников, Г. Шадрин

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Подробно о МИИГАиКе в «Кванте» (1977, № 6) мы уже писали.

В настоящее время в составе института имеются следующие факультеты: геодезический со специальностями *астрономо-геодезия* (специализация: морская геодезия), *прикладная геодезия, космическая геодезия*; аэрофотогеодезический со специальностью *аэрофотогеодезия*; картографический со специальностью *картография* (специализации: проектирование и составление карт, издание карт); оптико-механический, готовящий специалистов широкого профиля по оптическим и оптико-электронным приборам. При институте действуют заочный факультет со специальностями *прикладная геодезия, аэрофотогеодезия, картография* и вечерний оптико-механический факультет.

С 1977/78 учебного года институт приступил к подготовке специалистов в области *исследования природных ресурсов* (на аэрофотогеодезическом факультете). Студенты этой специальности занимаются высшей математикой и физикой по расширенной программе. В задачи специалистов по исследованию природных ресурсов входит разработка наиболее эффективных методов поиска полезных ископаемых, защиты окружающей среды и т. п. Срок обучения по этой специальности — 5 лет 6 месяцев.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$$

2. Вычислить без таблиц

$$\sin^2 7°30'\cdot\sin 45°-\cos 45°\cdot\cos^2 52°30'.$$

3. Решить неравенство

$$|x^2-5x|<6.$$

4. Решить неравенство $f'(x)>g'(x)$, если

$$f(x)=x-\frac{4}{x},\quad g(x)=2x^3-x.$$

5. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}=(6;\,8;\,-7{,}5)$ и образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec{b}|=50$, найти его координаты.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$$

2. Решить уравнение

$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

3. Решить неравенство $\sqrt{9x-20}<x$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке $[0;\,2]$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, причем $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Физика

1. Один конец нити укреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 0,75 объема поплавка погружено в воду. Определить натяжение нити, если масса поплавка $m=2$ кг и плотность пробки $\rho_п=0{,}25$ г/см³. Массой нити пренебречь.

2. Кабина, к потолку которой подвешен математический маятник длиной $l=1$ м, опускается вниз с ускорением $|\vec{a}|=2{,}4$ м/с². Определить период колебаний маятника.

3. Поезд массой $m=2000$ т при торможении с ускорением $|\vec{a}|=0{,}3$ м/с² остановился через время $t=50$ с после начала торможения. Какое количество тепла выделилось при торможении?

4. Стальной шарик массой $m=20$ г, падая с высоты $h_1=1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2=81$ см. Найти изменение импульса шарика в результате удара и количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Резиновая камера содержит воздух при температуре $t_1=27$°C и нормальном давлении. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воды $t_2=4$°C.

6. Относительная влажность воздуха при $t_1=30$°C равна $r_1=0{,}80$. Какова будет относительная влажность r_2, если этот воздух нагреть при постоянном объеме до $t_2=50$°C? Давление насыщенных паров воды при 30°C равно $p_{01}=31{,}8$ мм рт. ст., при 50°C — $p_{02}=92{,}5$ мм рт. ст.

7. Два одноименных заряда $q_1=7\times10^{-9}$ Кл и $q_2=28\cdot10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии $l=0{,}24$ м друг от друга. На каком расстоянии от первого заряда на линии, соединяющей заряды, нужно поместить третий заряд, чтобы он находился в равновесии?

8. Кипятильник имеет две спирали. При включении первой спирали некоторая масса воды вскипает за $t_1=10$ мин, при включении второй — за $t_2=20$ мин. За какое время вскипит та же масса воды при последовательном включении обеих спиралей?

9. Луч света падает на поверхность раздела двух прозрачных сред под углом $\alpha=30°$ и преломляется под углом $\beta=45°$. Чему равен предельный угол полного отражения для этих сред?

10. При бомбардировке алюминия ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ α-частицами образуется фосфор ${}^{30}_{15}\mathrm{P}$. Записать эту реакцию и подсчитать вы-

деленную энергию, если 1а.е.м = $1{,}66 \times 10^{-27}$ кг. Массы изотопов $^{27}_{13}Al$ и $^{30}_{15}P$ равны, соответственно, 26,99010 а.е.м и 29,97867 а.е.м, и массы α-частицы и нейтрона — 4,00260 а.е.м и 1,00894 а.е.м.

В. Серегина, С. Смирнов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. Что значит $a \geqslant b$? Доказать, что если $a > b$ и $b \geqslant c$, то $a > c$.

2. Найти площадь треугольника ABC, если заданы координаты его вершин: A (3; —1), B (1; —3), C (—6; 6). Укажите все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1 - \sqrt{2}\sin x} + 2\cos x = 0.$$

4. Решить неравенство

$$4^x - 2^{x+1} - 3 < 0.$$

Верно ли, что $\sqrt{2}$ является его решением?

5. Пусть $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x) = 2x - \sqrt{9 - x^2}$, $f_2(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 2)$.

Найти область определения функции $f(x)$, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f_2(x)$ на отрезке [3; 6].

Вариант 2

1. В хирургическом отделении работает 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе:

а) хирурга и ассистента;

б) хирурга и 4-х его ассистентов?

2. На плоскости заданы точки A (—6;3), B (—7; 7), C (—3; 6) и D (—2; 2). Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь. Указать все перемещения плоскости, при которых ромб $ABCD$ отображается на себя.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{4 - \sqrt{3}\cos x} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x = 0.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2^{x+1} - 5 \cdot 3^x}{2^x - 3^{x+1}} < 1.$$

Верно ли, что $\lg\frac{1}{32}$ является его решением?

5. Функция f задана формулой

$$f(x) = \frac{|3x - 4| + 2x^2 - 4x - 1}{|2x + 1| - 2};$$

а) найти область определения функции f;

б) найти производную функции f в интервале $]-\infty; -2[$; чему равно $f'(-4)$?

в) имеет ли функция f пределы при $x \longrightarrow \frac{1}{2}$ и при $x \longrightarrow -\frac{3}{2}$?

г) при каком значении a функция g, заданная правилом

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq \frac{1}{2}, \\ a, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет производную в точке $x = \frac{1}{2}$?

Вариант 3

1. Дана система неравенств

$$\begin{cases} 2x - y > a, \\ 3x + 2y > 3a. \end{cases}$$

а) при $a = 0$ указать хотя бы одно решение системы;

б) верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $5x + y > 4a$?

в) верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $x + 3y > 2a$?

2. При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка A (2; 3) переходит в A_1 (5; 2), а B (2; 5) в B_1 (7; 2). Найти образ точки C (2; 4). Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти величину угла α и координаты точки M.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3 - 5\cos x - 7\sin^2 x} + \cos x = 0.$$

4. Решить неравенство

$$9^{x - \frac{1}{2}} - 3^{x-1}\log_2 56 + \log_2 7 < 0.$$

Верно ли, что $\frac{1}{\lg 9}$ является его решением?

5. Функция f задана формулой

$$f(x) = a\ln x - 3x^2, \text{ где } a > 0.$$

а) Найти наибольшее зачение и промежутки монотонности функции f;

б) при $a = 32$ найти хотя бы одно решение неравенства

$$f(x) > 0;$$

в) при каких a неравенство $f(x) > 0$ имеет хотя бы одно решение?

г) доказать, что при $a < 300$ график функции f не пересекается с графиком функции g, заданной формулой

$$g(x) = \frac{18a - 3x^2}{2}.$$

Верно ли это утверждение при $a = 400$?

В. Тонян

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева (МИСИ) готовит инженеров-строителей широкого профиля для работы в строительных организациях, в проектных и научно-исследовательских институтах. В самом МИСИ решаются важнейшие проблемы, связанные с проектированием и строительством уникальных сооружений, разработкой теории расчета сооружений, научными исследованиями для различных отраслей современной строительной индустрии.

В настоящее время, когда в нашей стране с каждым годом увеличивается объем жилищного, культурно-массового и промышленного строительства, профессия инженера-строителя является одной из самых нужных и интересных. Инженер-строитель проектирует и строит кинотеатры и стадионы, гидростанции и теплоэнергостанции, заводы и жилые здания, разрабатывает новые строительные материалы и новые строительные машины, планирует города и поселки, занимается проблемой опреснения морской воды, экономикой строительства и многими другими вопросами.

МИСИ им. В. В. Куйбышева основан в 1921 году. В настоящее время в институте занимается более 15 тысяч студентов, около 600 аспирантов. В институте имеется 54 кафедры, профессорско-преподавательский состав которых включает 80 профессоров и докторов наук, более 400 доцентов и кандидатов наук.

Характерной особенностью обучения является совмещение учебы с научно-исследовательской работой. Студенты, проявившие склонность к научной работе, после защиты диплома научно-исследовательского характера направляются в аспирантуру.

Окончившие институт работают во многих городах страны и за рубежом. Москвичи направляются на работу в московские организации, стремящиеся сделать нашу столицу образцовым городом.

В настоящее время в состав института входят строительно-технологический, механический, инженерно-педагогический факультеты и факультеты промышленного и гражданского строительства, теплоэнергетического строительства, гидротехнического строительства, градостроительства, водоснабжения и канализации, теплогазоснабжения и вентиляции, автоматизированных систем управления, технической эксплуатации зданий, экономики и организации строительства.

В институте имеются подготовительное отделение и очные и заочные подготовительные курсы.

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу; первый вышел из A, а второй из B. Встретились они через 3 часа. За какое время прошел расстояние AB каждый пешеход, если первый пришел в B на 2,5 часа позже, чем второй пришел в A?

2. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Определить наклон бокового ребра к плоскости основания.

3. Решить уравнение

$$\lg x\cdot(\lg x-8)+16=0.$$

4. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=3.$$

5. В какой точке касательная к линии $y=\ln(4x-1)$ параллельна прямой $y=x$?

Вариант 2

1. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 руб. 80 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ и $|\vec{c}|=8$, вычислить скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$.

3. Решить уравнение

$$7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$$

4. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x}=6\sin x+8\cos x.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=-x^2+6x-1,\ y=0,\ x=1,\ x=3.$$

Билеты устного экзамена

Билет 1

1. Формулы приведения.
2. Признаки перпендикулярности двух плоскостей.
3. Найдите скорость изменения функции $y=(x^2+2x)\cdot x-1$ при $x=8$.
4. Решите неравенство

$$\log_2(x+1)>-\log_2 3.$$

Билет 2

1. Свойства числовых неравенств.
2. Теорема о трех перпендикулярах.

3. Решите уравнение
$\sin^2(3x-1)=0{,}5\sin(3x-1)$.

4. Вычислите интеграл

$$\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Билет 3

1. Достаточное условие экстремума функции.

2. Теорема синусов.

3. Даны векторы: $\vec{a}=(-1;\,2;\,0)$ и $\vec{b}=(2;\,-3;\,-2)$. Найдите координаты вектора $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

4. Решите уравнение:

$$(\log_2 x-3)(2^x-5)=0.$$

Билет 4

1. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции.

2. Формулы площади поверхности и объема призмы.

3. Вычислите

$$\cos(-300^\circ)-2\operatorname{ctg}(-390^\circ).$$

4. Решите неравенство

$$\log_8 x-\log_8 7\geqslant -1.$$

Билет 5

1. Свойства логарифмической функции.

2. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

3. Решите уравнение

$$|x^2-3|=8.$$

4. Вычислите:

V $\arcsin(-1)+2\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$.

Физика

1. Груз массой $m=20$ кг перемещается вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и коэффициентом трения $\mu=0{,}05$. К грузу параллельно основанию приложена сила $|\vec{F}|=500$ Н. Найти ускорение, с которым перемещается груз.

2. Плавающий в ртути куб погружен в нее на $^1/_4$ своего объема. Какая часть объема будет погружена в ртуть, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий куб? Плотность ртути $\rho_{\text{рт}}=13{,}6$ г/см³, воды — $\rho_{\text{в}}=1$ г/см³.

3. В бомбе объемом $V=10$ л содержится смесь водорода и кислорода в равных количествах (масса каждого $m=2$ г). Весь кислород, соединяясь с частью водорода, образует воду. Каково давление оставшегося водорода при $t=17^\circ$C? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

4. Какова затрата электроэнергии в киловатт-часах на получение $m=1$ кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении $U=10$ В, а КПД всей установки $\eta=80\%$? Электрохимический эквивалент алюминия $k=0{,}093$ мг/Кл.

5. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см и плоского зеркала, находящегося на расстоянии $l=15$ см от линзы. Определить положение изображения, даваемого этой системой, если предмет находится на расстоянии $d=15$ см перед линзой.

Г. Валяшко, Н. Дорошкевич,
А. Пугачева

Витебский технологический институт легкой промышленности

Витебский технологический институт легкой промышленности был открыт в 1965 году. В настоящее время он готовит специалистов для легкой и машиностроительной промышленности.

На шести факультетах института по дневной, вечерней и заочной формам обучения обучается свыше 4-х тысяч студентов.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-механиков для работы в механических и сборочных цехах, в проектных бюро и отделах машиностроительных заводов и заводов легкого машиностроения, в отраслевых научно-исследовательских институтах, а также инженеров-технологов трикотажного и ткацкого производства.

Факультет швейного производства и факультет обувного производства готовят инженеров-технологов и инженеров-конструкторов для работы в отделах, лабораториях и цехах швейных и обувных фабрик, домов моделей, а также художников-технологов по художественному оформлению трикотажных и текстильных изделий.

Инженерно-экономический факультет готовит инженеров-экономистов для предприятий легкой и текстильной промышленности и предприятий бытового обслуживания населения.

Институт имеет также вечерний и заочный факультеты.

Математика

Вариант 1

1. Решите уравнение
$\cos 2x+3\sin x+1=0$.

V 2. Докажите, что последовательность, общий член которой $u_n=2\cdot 3^n$, является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых 8 членов.

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции

$$y=\frac{\ln x}{x}.$$

4. Вычислите

$$\int_{-1}^{0}|2^x-2^{-x}|\,dx.$$

+ ⑤ В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания a, угол между плоскостями двух боковых граней с общим ребром равен α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение
$\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$.

2. Решите неравенство
$3\cdot 4^{x+1}-35\cdot 6^{x}+2\cdot 9^{x+1}\geqslant 0$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$, если

$$f(x)=\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}.$$

4. Найдите экстремумы функции $f(x)=-x+\cos 2x$ на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$.

5. Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом φ и меньшей диагональю d. Найдите объем параллелепипеда, если большая диагональ его составляет с плоскостью боковой грани угол α.

Физика

1. Два поезда прошли одинаковый путь за одно и то же время. Однако один поезд, трогаясь с места, прошел весь путь равноускоренно с ускорением $|\vec{a}|=3$ см/с^2, а другой поезд половину пути шел со скоростью $|\vec{v}_1|=18$ км/ч, а другую половину пути — со скоростью $|\vec{v}_2|=54$ км/ч. Найти путь, пройденный каждым поездом.

2. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поднять вагонетку с углем массой $m=200$ кг по эстакаде длиной $l=10$ м и высотой $h=2$ м при коэффициенте трения $\mu=0{,}05$? Каков коэффициент полезного действия подъемника?

3. Паровой молот массой $m_1=9$ т падает с высоты $h=2$ м на стальную болванку массой $m_2=220$ кг. Сколько раз он должен упасть, чтобы температура болванки поднялась на $\Delta t=50$°C? На нагревание болванки идет 50% теплоты, полученной при ударах. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг·К).

4. Температура воздуха вечером была $t_1=15$°C, относительная влажность $r_1=64\%$. Ночью температура упала до $t_2=5$°C. Была ли роса? Давление насыщенного пара при температуре t_1 равно $p_{01}=12{,}7$ мм рт. ст., а при температуре t_2 — $p_{02}=6{,}1$ мм рт. ст.

5. Четыре одинаковых положительных точечных заряда $q=10$ ед. заряда СГСЭ закреплены в вершинах квадрата со стороной $a=10$ см. Найти силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

6. Из центра квадратного плота в воду на глубину $h=10$ м опущена электрическая лампочка. Какие наименьшие размеры должен иметь плот, чтобы свет не мог выйти из воды? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

7. Порог фотоэффекта для бария составляет $\lambda_1=5{,}5\cdot 10^{-7}$ м. С какой скоростью вылетают фотоэлектроны, если облучать барий светом, длина волны которого $\lambda_2=4{,}4\cdot 10^{-7}$ м? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с. Масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

В. Коваленко, П. Скоков

(Начало см. с. 28, 59)

до 4π вектор $\overrightarrow{SP}$ совершает полный оборот. Следовательно, внешняя часть представляет собой дважды (т. е. на 360°) перекрученную полоску. Таким образом, мы видим, что, выполняя второй и третий разрезы (см. 2), 3) с. 28), мы в сущности резали одну и ту же полоску. Не удивительно, что получился одинаковый результат!

Но почему же получились две зацепленные полоски? Это легко понять, если вспомнить взаимное расположение частей до разреза: внешняя часть была как бы обвита вокруг внутренней.

Упражнения

1. Что будет, если разрезать: а) по центральной линии, б) по линии, идущей параллельно краю рядом с ним, — трижды перекрученную полоску? n раз перекрученную полоску?

2. При каких p поверхность, описываемая уравнениями

$$\begin{cases} x=(R+\lambda\cos p\varphi)\cos\varphi,\\ y(R+\lambda\cos p\varphi)\sin\varphi,\\ z=\lambda\sin p\varphi \end{cases}$$

окажется односторонней?

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, вышедшие в первом полугодии 1978 года. Заказы на большинство из них можно направлять (на почтовых открытках) в специализированные магазины, список которых опубликован в «Кванте» № 3 за 1978 год, а также в следующие магазины:

1. 320030, г. Днепропетровск, просп. К. Маркса, 55, маг. № 1;
2. 340005, г. Донецк, УССР, ул. Артема, 84, маг. № 50;
3. 248635, г. Калуга, Гостинные ряды, корп. 13, «Дом книги»;
4. 650099, г. Кемерово, ул. Весенняя, 24, маг. № 15 «Техническая книга»;
5. 252001, г. Киев, ул. Ленина, 39, маг. № 1;
6. 277012, г. Кишинев, ул. Пушкина, 15, маг. «Штиинца»;
7. 191025, г. Ленинград, Пушкинская ул., 2, маг. № 5 «Техническая книга»;
8. 220005, г. Минск, Ленинский просп., 48, маг. № 13 «Научно-техническая книга»;
9. 121019, г. Москва, просп. Калинина, 26, маг. № 200;
10. 270026, г. Одесса, УССР, ул. Дерибасовская, 27, «Дом книги».
11. 630091, г. Новосибирск, Красный просп., 60, маг. № 7;
12. 226047, г. Рига, ул. Ленина, 17, «Гайсма»;
13. 410600, г. Саратов, ул. Братиславская, 81, Облкниготорг;
14. 200001, г. Таллин, бульвар Ленина, 7, «Техническая и медицинская книга»;
15. 278000, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, 72, маг. № 3;
16. 720040, г. Фрунзе, ул. Дзержинского, 43;
17. 680000, г. Хабаровск, ул. К. Маркса, 17, маг. № 44, «Техническая книга»;
18. 310012, г. Харьков, УССР, ул. Свердлова, 17, маг. № 1;
19. 473009, г. Целиноград, Каз. ССР, ул. Училищная, 65;
20. 672000, г. Чита — центр, ул. Ленина, 56, маг. «Научно-техническая книга».

При наличии книг на складе они будут высланы наложенным платежом.

Математика

Издательство «Наука»

1. Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* Перевод с англ. Издание 4-е. Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 45 к.

Профессору Дж. Литлвуду, одному из крупнейших современных английских математиков, принадлежит много важных и глубоких результатов в различных областях математики. Он известен также как остроумный собеседник, с широким кругом интересов, живо реагирующий на любой математический вопрос.

Его небольшую книгу «Математическая смесь» (в английском оригинале — «Разные заметки одного математика»), написанную чрезвычайно увлекательно, можно отнести к редкому жанру собрания математических очерков-миниатюр. Тематика очерков весьма разнообразна. Среди них — математические анекдоты, моменты математической автобиографии, рецензии, небольшие историко-математические исследования, интересные задачи, оригинальные и неожиданные доказательства. Обсуждение некоторых специальных вопросов (баллистики, небесной механики и др.) требует математической техники; такие места (они выделены звездочками) при чтении можно пропустить без ущерба для понимания остального текста.

От этой книги получаешь удовольствие даже при перелистывании, беглом просмотре.

2. Гельфонд А. О. *Решение уравнений в целых числах.* Издание 3-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз.

Решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами более чем с одной переменной представляет собой одну из труднейших проблем теории чисел. Этими задачами много занимались самые выдающиеся математики древности, например, греческий математик Пифагор, александрийский математик Диофант и лучшие математики более близкой к нам эпохи: Ферма, Эйлер, Лагранж. Несмотря на усилия многих поколений выдающихся математиков, в этой области отсутствуют сколько-нибудь общие методы. Проблема решения уравнений в целых числах полностью исследована только для уравнений второй степени с двумя переменными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более переменными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых числах, но даже и более простая задача установления существования конечного или бесконечного множества таких решений.

В предлагаемой читателю книге изложены некоторые основные результаты, полученные в теории решения уравнений в целых числах. Теоремы, формулируемые в ней, снабжены доказательствами в тех случаях, когда эти доказательства достаточно просты.

Книга доступна школьникам старших классов.

3. Солодовников А. С. *Системы линейных неравенств.* Издание 2-е, доп. Объем 5 л., тираж 100 000 экз.

Эта небольшая книжка знакомит читателя с различными аспектами теории систем линейных неравенств: с геометрической стороной вопроса и тесно связанными с нею методами решения систем (в переводе на геометрический язык задание системы линейных неравенств с двумя или тремя переменными означает задание выпуклой многоугольной области на плоскости или, соответственно, выпуклого многогранного тела в пространстве), с некоторыми чисто алгебраическими свойствами систем, с принципиальными вопросами линейного программирования (линейное программирование — это один из разделов теории систем линейных неравенств).

В книге дается описание множества всех решений систем неравенств с двумя и тремя переменными (легко переносящееся на системы с любым числом переменных), изучаются вопросы совместности и несовместности. В последнем параграфе доказывается теорема двойственности линейного программирования.

Книга рассчитана на школьников старших классов и всех любителей математики.

4. Абрамов С. А. *Математические построения и программы.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В этой книге, доступной школьникам старших классов, внимание читателя сосредоточивается на алгоритмической стороне математических задач. Имеется большое количество примеров для самостоятельного решения.

Физика

Издательство «Наука»

1. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. *Физика для всех. Молекулы.* Издание 4-е, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Книга написана одним из крупнейших физиков нашей страны академиком Л. Д. Ландау совместно со своим учеником профессором А. И. Китайгородским. Цель книги — дать читателю в общедоступной форме отчетливое представление об основных идеях и новейших достижениях современной физики. Она является естественным продолжением ранее вышедшей книги этих же авторов (см. «Квант», 1978, № 3, с. 60). В ней излагаются вопросы, связанные с молекулярной физикой: различные фазовые состояния вещества, свойства жидких и твердых растворов, структура кристаллов и т. д.

Книга написана свежо, оригинально, хорошо оформлена и рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

2. Глазер Р. *Биология в новом свете.* Объем 9,5 л., тираж 50 000 экз., цена 90 к.

В книге излагается большой круг биологических проблем и явлений, для изучения которых используются физические и математические методы исследования.

Популярность изложения, живой образный язык безусловно привлекут к ней внимание самого широкого круга читателей.

3. Тейлор Р. *Шум.* Объем 15 л., тираж 30 000 экз., цена 90 к.

В книге в доступной и популярной форме рассматриваются вопросы современной акустики. Особое внимание в книге уделено вопросам борьбы с «шумовым» загрязнением среды.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

4. Карцев В. П. *Магнит за три тысячелетия.* Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 10 л., тираж 70 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной и занимательной форме знакомит читателя с решением проблемы, волнующей в равной степени и ученых-атомников и инженеров. Эта проблема — получение сильных магнитных полей. Известно, что чем большее поле удается создать в машине, тем меньшие размеры она будет иметь, а следовательно, и дешевле стоить. Сейчас ученые разработали несколько эффективных путей получения сильного магнитного поля. Об этих путях, успехах и неудачах ученых и инженеров рассказывается в книге. Особое внимание уделено сверхпроводящим магнитам.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, но в основном на школьников старших классов и учащихся производственно-технических училищ.

Издательство «Знание»

5. Ярмоненко С. П. *Рожденная веком.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Книга знакомит читателя с современными достижениями молодой науки — радиобиологии, поставленными на службу человечеству.

Автор в интересной и доступной форме рассказывает о том, как успехи радиобилогии используются для охраны биосферы, для повышения урожайности в сельском хозяйстве. Особое внимание он уделяет лучевым методам лечения злокачественных опухолей и использованию радиоактивных изотопов для диагностики различных заболеваний.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

И. Клумова,
М. Смолянский

Задачи физической олимпиады в Финляндии

В первых пяти задачах надо выбрать правильные ответы из числа предложенных.

1. На рисунке 1 приведена диаграмма уровней некоторого атома, а на рисунке 2 — несколько спектров излучения. Какой из спектров относится к данному атому?

2. В опыте по нагреванию алюминиевого кубика были получены следующие результаты: масса кубика $m = 1{,}01$ кг, начальная температура $t_1 = (18{,}4 \pm 0{,}5)$°C, конечная температура $t_2 = (31{,}0 \pm 0{,}5)$°C, время нагревания $\tau = 215$ с, подводимая при нагревании мощность $P = (52 \pm 1)$ Вт. Каковы, по данным этого опыта, удельная теплоемкость алюминия и ошибка ее измерения:
а) (880±10) Дж/(кг·К);
б) (880±25) Дж/(кг·К);
в) (880±55) Дж/(кг·К);
г) (880±60) Дж/(кг·К);
д) (880±90) Дж/(кг·К)?

3. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно (рис. 3). Конденсатор C_3 подключается между точками B и D, при этом напряжение между точками A и D не меняется. Все конденсаторы имеют одинаковую емкость. При подключении конденсатора C_3: а) заряд на конденсаторе C_1 увеличивается; б) напряжение между точками A и B возрастает; в) заряд на конденсаторе C_2 увеличивается; г) энергия конденсатора C_2 уменьшается.

4. На рисунке 4 условно показана излучающая антенна, направления тока в ней и электрического и магнитного полей вокруг нее в различные моменты времени. Для каждого момента приведены относящиеся к нему соотношения. Рисунок 4, а правильный. Какие из следующих рисунков тоже правильные?

5. Период колебаний камертона зависит от плотности ρ материала, из которого он изготовлен, модуля Юнга E материала и длины L ножек камертона. С камертонами различной длины были получены следующие результаты:

f, Гц	256	288	320	384	480
L, мм	120	106	96	80	64

Какой из формул выражается период колебаний камертона:

а) $T = \dfrac{A\rho}{E}\sqrt{|\vec{g}|L^3}$;

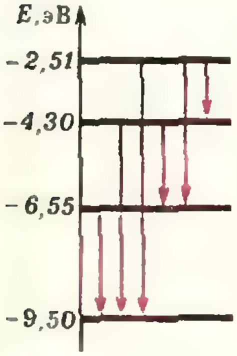


Рис. 1.

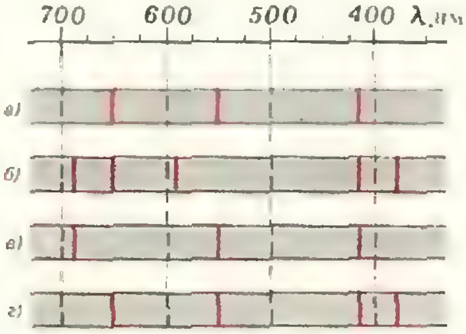


Рис. 2.

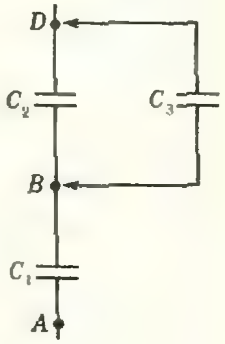


Рис. 3.

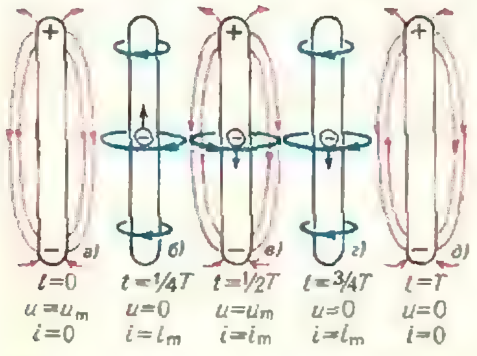


Рис. 4.

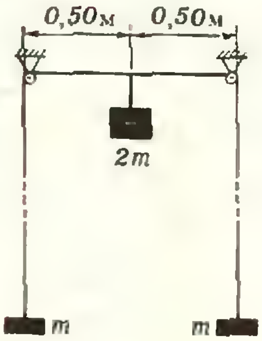


Рис. 5.

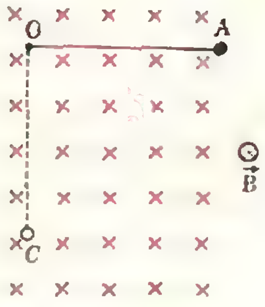


Рис. 6.

б) $T = AL\sqrt{\frac{\rho}{E}}$;

в) $T = \frac{AE}{\rho}\sqrt{\frac{L}{|\vec{g}|}}$?

(Здесь A — безразмерная постоянная, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.) Ответ объясните.

6. Ускорение свободного падения на полюсе Земли равно 9,83 м/с². Радиус Земли $6{,}36\cdot 10^6$ м. На какой высоте над полюсом ускорение равно 9,78 м/с²?

7. Допишите следующие ядерные реакции: а) $n \to p + \ldots$; б) $p \to n + \ldots$; в) $p + {}_{-1}e \to \ldots$; г) ${}_{-1}e + {}_{+1}e \to \ldots$; д) ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + \gamma \to x + n$; е) ${}^{197}_{79}\mathrm{Au} + n \to x + \gamma$.

8. Кубики с массами m, $2m$ и m соединены длинной гибкой нитью, перекинутой через блоки (рис. 5). Массы блоков и нити пренебрежимо малы. Трение в блоках отсутствует. Кубик массой $2m$ отпускают. а) Какова будет скорость этого кубика, когда он опустится на 0,5 м? б) Каково положение равновесия системы?

9. Длина тонкого металлического провода с тяжелым шариком на конце равна 2,0 м. Провод может двигаться в вертикальной плоскости перпендикулярно магнитному полю; начальное положение провода — горизонтальное (положение OA на рисунке 6). Индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 0{,}25$ мГ. Какова разность потенциалов между концами провода в тот момент, когда он проходит положение OC?

Задачи прислаM. Ахти. Перевод и подготовка к публикации З. Абарбанеля

Анализ помогает алгебре

1.	$\lvert a\rvert>216$ $\lvert a\rvert=216$ $88<\lvert a\rvert<216$ $\lvert a\rvert=88$ $\lvert a\rvert<88$	1 2 3 4 5	4а	$a<0$ $0\leqslant a<e$ $a=e$ $a>e$	1 0 1 2
2.	$a<0$ $a=0$ $0<a<\frac{4}{e^2}$ $a=\frac{4}{e^2}$ $a>\frac{4}{e^2}$	0 1 3 2 1	4б	$a<-189$ $a=-189$ $-189<a<-64$ $a=-64$ $-64<a<0$ $a=0$ $a>0$	0 1 2 3 4 3 2
3.	$a\leqslant 0$ $0<a<\frac{1}{e^e}$ $\frac{1}{e^e}\leqslant a<1$ $a=1$ $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ $a=e^{\frac{1}{e}}$ $a>e^{\frac{1}{e}}$	0 3 1 0 2 1 0	4в	$a<0$ $0\leqslant a<e$ $a=e$ $a>e$	1 0 1 2

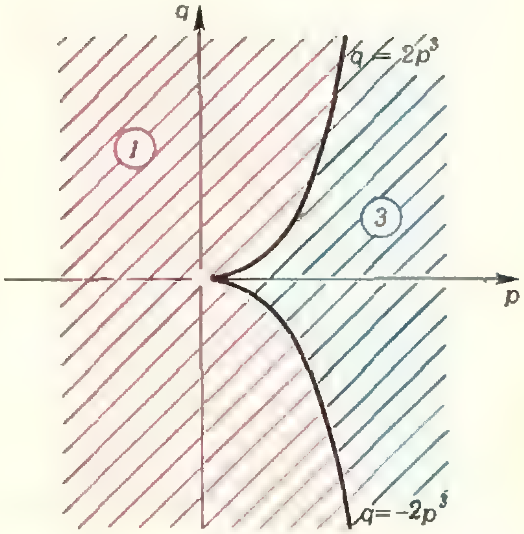


Рис. 1.

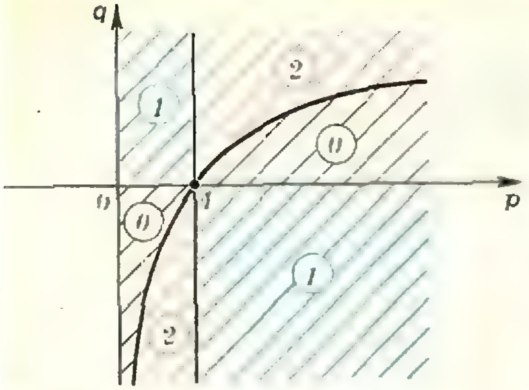


Рис. 2.

5. а) $x=1$; $y=1$
б) $x=e$; $y=-\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$.

в) $x=0$; $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in Z)$;

Указание. Покажите, что наибольшее значение одной из функций совпадает с наименьшим значением другой.

6. а) Красная область соответствует одному корню, синяя — трем корням, линии $q=\pm 2p^3$, $p>0$, — двумя корням. Точка (0; 0) относится к красной области (рис. 1).

б) Синяя область — 1 корень, красная — 2 корня, серая — 0 корней; граничные линии $p=1$, $q=0$, $q=e\ln p$ — 1 корень, точка (1, 0) — бесконечное множество корней (рис. 2).

7. а) 1; б) 1; в) 0.

8. e^{π} больше. Указание: исследовать на экстремум функцию $\dfrac{\log_a x}{x}$.

Производная и задачи на экстремумы

1. Наибольшее значение $y(3)=0$, наименьшее $y(2)=-25$.

2. Наибольшее значение $y(\pi/12)={}^3/_2$, наименьшее $y(\pi/4)=y(0)=1$.

3. Указание. Данная функция четна, наименьшее значение достигается в точке x, для которой $\cos x=-\sqrt{1/3}$, $\sin x=\sqrt{2/3}$.

4. Части должны быть одинаковых масс. Указание. Надо найти наименьшее значение функции $y(x)=x^2+(M-x)^2$.

5. $M(3.2;\ 0)$. Указание. Если $M(x;\ 0)$, то по теореме Пифагора

$$S(x)=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(4-x)^2+5^2}.$$

Можно решать задачу и чисто геометрически, рассмотрев точку A', симметричную A относительно оси Ox.

6. $y(\pi/2)=\sin 1$.

7. 25 домов. Указание. Задача сводится к определению наименьшего значения функции $L(S)=\left(\dfrac{1600}{\sqrt{S}}+\sqrt{S}\right)$.

8. $v=1{,}5\,a$. Указание. Работа, затрачиваемая на прохождение пароходом 1 км со скоростью v (км/час) относительно воды, равна $A(v)=\dfrac{kv^3}{v-a}$.

9. $R=r$. Указание. Мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна

$$P(R)=I^2R=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R.$$

10. Пусть мы тянем кирпич под углом φ к плоскости. Тогда для наименьшего значения $|\vec{F}|$, при котором кирпич сдвинется с места, должно выполняться соотношение $|\vec{F}|\cos\varphi=k\,(mg-|\vec{F}|\sin\varphi)$, откуда $|\vec{F}|=\dfrac{kmg}{\cos\varphi+k\sin\varphi}$. Наименьшего значения эта функция (от φ) достигает при $\operatorname{tg}\varphi=k$, откуда $\varphi=\operatorname{arctg}k$, $|\vec{F}|=\dfrac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}$.

11. а) Возр. $]-1;\ 0]$, $[1;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ -1]$, $[0;\ 1]$; макс. $x=0$; мин. $x=-1$ и $x=1$; б) возр. $[-1/2;\ 0]$, $[2;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ -1/2]$, $[0;\ 2]$; макс. $x=0$; мин. $x=-1/2$ и $x=2$; в) возр. $[0;\ 1]$, $[4;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ 0]$, $[1;\ 4]$; макс. $x=1$; мин. $x=0$ и $x=4$; г) возр. $[0;\ 1/2]$, $[1;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ 0]$, $[1/2;\ 1]$; макс. $x=1/2$; мин. $x=0$ и $x=1$; д) возр. $]-\infty;\ -1/3]$, $[1/3;\ \infty[$; убыв. $[-1/3;\ 1/3]$; макс. $x=-1/3$; мин. $x=1/3$.

12. $(\pi-2)/2$. Указание. Пусть касательная проведена в точке с абсциссой $x_0=t$. Тогда ее уравнение $y=\sin t\times x-t\cdot\sin t+1-\cos t$. Поскольку ось Ox имеет уравнение $y=0$, надо решить это уравнение относительно x, получаем $x=(\cos t-1+t\sin t)/\sin t$. Исследуя ее как функцию от t, находим $x'(t)=\dfrac{\cos t\,(1-\cos t)}{\sin^2 t}$, наибольшее значение при $t=\pi/2$.

13. $R=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $H=2R$. Указание. Из равенств $V=\pi R^2H$, $S=2\pi R^2+2\pi RH$ находим $S(R)=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$.

14. $H=2R\sqrt{3}$. Указание. Из равенств $R^2=H^2/4+l^2/3$ (l — сторона основания призмы), $V=\sqrt{3}\,l^2H/4$, находим

$$V(H)=\frac{3\sqrt{3}}{16}(4HR^2-H^3).$$

15. а) Наим. при $x=-2$, наиб. при $x=0$; б) наиб. при $x=0$, наим. при $x=-1$ и $x=1$ (ср. с упр. 11); в) наиб. при $x=-2$, наим. при $x=-3$.

16. $H=R/\sqrt{3}$. Указание. Из формул $r^2+H^2=R^2$ (r — радиус основания цилиндра, H — его высота), $V=\pi r^2H$ следует $V(H)=\pi H(R^2-H^2)$.

17. а) Наиб. при $x=0$, наим. при $x=-1$ и $x=1$. Указание. Положить $2^x=y$, тогда $f=2y^3-9y^2+12y$, $y\in[{}^1/_2;\ 2]$; б) наим. при $x=0$, наиб. при $x=2$; в) наиб. при $x=e^3$, наим. при $x=e^2$; г) наим. при $x=8$, наиб. при $x=16$.

18. См. «Д-10», зад. 1037. (Ответ: $H=4R$.)

19. Матрос должен пристать к берегу в 3 км от лагеря.

20. $h/2$, $ah/4$.

Симметрия в задачах по физике

1. $l=\frac{|\vec{v}_0|}{3}\sqrt{\frac{2H}{|\vec{g}|}}$.

2. Центр тяжести фигуры находится справа от центра диска на расстоянии $3r/22$.

3. $Q=-q(5/4+1/\sqrt{3})$.

4. $|\vec{F}|=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 r^2}(2\sqrt{2}-1)$.

5. $C_{AB}=2C$.

6. $R_{AB}=R$.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Варианты письменного экзамена

Математико-механический факультет

1. $(C_8^3-6)\cdot P_3\cdot P_5=36\,000$ способов. 2. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида, причем S — вершина пирамиды, B — вершина основания. Тогда высота $[SE]$ пирамиды лежит в плоскости SAC и E — середина ребра AC. Если F — основание перпендикуляра, опущенного из S на $[BC]$, то $EF\perp BC$. Ответ. $\frac{a^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi}{12}$. 3. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}0<x^3<1,\\ 0<\frac{|x-5|}{6x}\leqslant(x^3)^{-\frac{1}{3}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^3>1,\\ \frac{|x-5|}{6x}\geqslant(x^3)^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

Ответ. $]0;\ 1[\ \cup\ [11;\ +\infty[$.

4. $[-\pi;\ -\frac{23\pi}{24}[\ \cup\ [-\frac{\pi}{24};\ 0]$.

Физический факультет

1. $-\frac{\pi^2 B}{4}$. 2. Указание. Пусть равнобедренный треугольник ABC с вершиной B вращается вокруг $[AB]$. Пусть, далее, $[BD]$ и $[CF]$ — высоты треугольника ABC. Положим $|AB|=x$, тогда $|AD|=p-x$, $|BD|=\sqrt{2px-p^2}$. Из равенства $|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CF|$ находим $|CF|$. Обозначим объем тела вращения через V. Функция $x\to V$ определена на $]0;\ p[$. Ответ. Боковая сторона равна $\frac{1+\sqrt{17}}{8}p$, основание — $\frac{7-\sqrt{17}}{4}p$. 3. $[-1;\ +\infty[$.

4. Указание. $y=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$. Ответ. $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{9}\right[\cup\left]\frac{8\pi}{9};\ \frac{7\pi}{6}\right]$.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет

1. При $a>1$ решений нет. При $0<a<1$ $x\in]-1;\ -\sqrt{1-a}]\cup[\sqrt{1-a};\ 1[$.
3. $]0;\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}[$. 9. Девятый член T_9 тогда и только тогда будет наибольшим, когда $\frac{T_9}{T_8}\geqslant 1$ и $\frac{T_{10}}{T_9}\leqslant 1$. Достаточность этого условия вытекает из того, что функция $k\to\frac{T_{k+1}}{T_k}$ является убывающей $\left(\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{n-k}{10(k+1)}\right)$. Ответ. $98\leqslant n\leqslant 109$.
10. Указание. Через точку M провести прямую, параллельную (AD). Ответ. 5:2.

Физический факультет

3. $x\in]-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ 2\pi k[\cup]\pi+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k[\ (k\in\mathbf{Z})$. 4. $\frac{8}{3}$. 5. При $a\geqslant 0$ $x\in[-\frac{a}{2};\ +\infty[$. При $a<0$ $x\in[\frac{a}{2};\ +\infty[$.

7. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Физика

Математико-механический факультет

1. $|\vec{v}_{н}|=\sqrt{2|\vec{g}|h}$; $|\vec{v}_{н}|=2\sqrt{|\vec{g}|h}$.

2. $A=ml[|\vec{a}|+|\vec{g}|(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]=910{,}5$ кДж.

3. $V_1=\frac{mRT_1}{\mu p_1}\approx 2{,}4\cdot 10^{-3}$ м³; $T_2=\frac{T_1V_2}{V_1}\approx 1180$ К.

4. $U_1=\frac{C_2U}{C_1+C_2}=7{,}5$ кВ; $U_2=U-U_1=4{,}5$ кВ; $q=C_1U_1=2{,}25\cdot 10^{-6}$ Кл.

5. Комплект катушек должен быть таким, чтобы индуктивность контура менялась в пределах от $L_1=\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2c^2C_1}\approx 8\cdot 10^{-6}$ Г

до $L_2 = \frac{\lambda_2^2}{4\pi^2 c^2 C_2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ Г

Физический факультет

1. $\mu = \frac{|\vec{F}|}{m|\vec{g}|} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2l|\vec{g}|} = 0{,}01$.

2. $Q = \frac{c_1 m_1 c_2 m_2 (t_2 - t_1)}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 5850$ Дж

3. $|\vec{v}| = \frac{mRT}{p\mu\tau S} \approx 0{,}9$ м/с

4. $x = \frac{2d\cos\alpha}{\sqrt{n^2/\sin^2\alpha - 1}} = 1{,}16$ см

5. $\lambda = \frac{hc}{A + mv^2/2} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. Объем равен $\frac{4}{3} r^3 \frac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$. Наименьшим он будет при $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. 2. 32. 3. $\left]0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[8, 16\right[$. 4. 576.

Физический факультет

1. Площадь боковой поверхности равна $\frac{3\sqrt{3}\, rH(H - r)}{H - 2r}$. Наименьшей она будет при $H = (2 + \sqrt{2})\, r$; при таком H она равна $3\sqrt{3}\,(3 + 2\sqrt{2})\, r^2$.
2. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in Z)$. 3. $\frac{1}{2}$.
4. В соответствующей системе координат уравнение искомого множества точек имеет вид $|x| \cdot |y| = |x| + |y|$.

Задачи устного экзамена

1. $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $-\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k\ (k = 0, -1, -2, \ldots)$.
2. $\left[-\sqrt{2 + \sqrt{3}}; -\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right] \cup \left]0; 2\right]$.
3. Если $|a| > 2$, один корень, если $|a| = 2$ — два, если $|a| < 2$ — три. 4. Если $a < \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, решений нет, если $a = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ — четыре решения; если $\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} < a < 1$ — восемь; если $a = 1$ — четыре, если $a > 1$ — решений нет. 6. $\{-1, 3\}$. При $a = -1$ $(0, -1)$, при $a = 3$ $(-2, 1)$.

8. $f'(x) = 6[x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)] = 6[x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1]$. Из первой записи видно, что $f(x) > 0$ при $x \leqslant 1$, из второй — при $x > 1$. 9. $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$. 10. 2. 11. $]1, +\infty[$. 12. 2. 13. $S = \int_0^{\pi} [(2 + \sin x) - (1 + \cos^2 x)]\, dx = \frac{\pi}{2} + 2$.

14. $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{3}{8}\pi^2$. 15. Да (возрастающая). 16. Например, методом математической индукции. 17. 5. 18. $C_9^5 = 126$ чисел. 19. $C_{m+n+k}^3 - C_m^3 - C_n^3 - C_k^3$. 22. $h^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 23. Да. 24. $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$.

Ярославский государственный университет

Математика

Математический факультет

1. 1:2. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. Указание. Привести к виду $A(x)\log_2(x + 1) = B(x)\log_2(x - 1)$. Ответ $\left\{\frac{4}{3}, 3\right\}$.
4. Указание. Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$. Докажите, что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Физический факультет

1. 0. 2. $\frac{a^3}{18}\sqrt[4]{12}$. 3. $]2, 3]$. 4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} l\ (k, l \in Z)$.

Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{4}$. 2. Решая систему

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases}$$

получаем $D(f) = [1, 3]$. Далее с помощью производной находим («Алгебра и начала анализа 9», п. 59)

$$\min_{[1,3]} f(x) = f(3) = \sqrt{2},$$

$$\max_{[1,3]} f(x) = f\left(\frac{7}{\text{[illegible]}}\right) = \sqrt{10}. \qquad (1)$$

Естественно возникает предположение $E(f)=[\sqrt{2}; \sqrt{10}]$ (см., однако, замечание после решения). Докажем его. Для доказательства равенства двух множеств $A=B$ достаточно доказать два «включения»: $A\subset B$ и $B\subset A$. Включение $E(f)\subset[\sqrt{2}; \sqrt{10}]$ вытекает из (1). Чтобы доказать «включение» $[\sqrt{2}; \sqrt{10}]\subset E(f)$, покажем, что для любого $a\in[\sqrt{2}; \sqrt{10}]$ уравнение

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}=a \qquad (2)$$

имеет решение. Если обозначить $\sqrt{x-1}$ через u и $\sqrt{3-x}$ через v, то

$$\begin{cases} u^2+v^2=2, \\ u+2v=a. \end{cases} \qquad (3)$$

Точный смысл этой фразы следующий: если x_0 — решение уравнения (2) и $\sqrt{x_0-1}=u_0$, $\sqrt{3-x_0}=v_0$, то пара $(u_0; v_0)$ является решением системы (3); если, обратно, пара $(u_0; v_0)$ является решением системы (3) и $u_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$, то $x_0=u_0^2+1$ является решением уравнения (2). Нам сейчас важно только второе из этих утверждений. Решая методом подстановки систему (3), находим, что при $|a|\leqslant\sqrt{10}$ пара

$$u_0=\frac{a+2\sqrt{10-a^2}}{5},$$

$$v_0=\frac{2a-\sqrt{10-a^2}}{5}$$

является ее решением (второе решение системы нам здесь не потребуется). При $\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{10}$ имеем $u_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$. Следовательно, при таких a уравнение (2) имеет решение.

Замечание. Вообще говоря, из $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=c$ и $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=d$, где $[a; b]=D(f)$, не следует, что $E(f)=[c; d]$ (постройте пример!). Чтобы этот вывод был верен, достаточно, чтобы функция f была непрерывна на отрезке $[a; b]$. Однако ни понятия *«функция f непрерывна на отрезке»*, ни теоремы *«если $D(f)=[a; b]$, $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=c$, $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=d$ и функция f непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $E(f)=[c; d]$»* в школьных учебниках нет.

3. $\frac{Q}{2}\sqrt{S\cdot\sin 2\varphi}$. 5. 27.

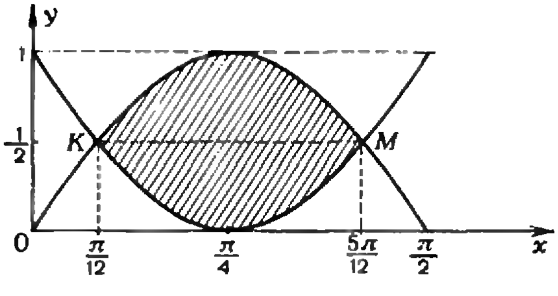


Рис. 3.

Вариант 2

1. $]-\infty; 0]\cup[\log_4 3; +\infty[$. 2. В точках $x_1=0$ (соответствующая касательная $y=-x-1$) и $x_2=4$ (касательная $y=-x+7$). 3. Построим на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ графики функций $y=\sin 2x$ и $y=1-\sin 2x$, найдем точки их пересечения $K\left(\frac{\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$ и $M\left(\frac{5\pi}{12}, \frac{1}{2}\right)$ (см. рис. 3). Искомая площадь S «заштрихованной» фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций:

$$S=\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}\sin 2x\,dx-\int\limits_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}}(1-\sin 2x)\,dx=$$

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

4. $\frac{4}{5}$. 5. 10 дней.

Вариант 3

1. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. 2. Промежутки возрастания $]-\infty; -1]$ и $[1; +\infty[$; промежуток убывания $[-1; 1]$. 3. Искомая площадь равна $2+2\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx=\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$.

4. 30°. 5. 50 км/час и 40 км/час

Вариант 4

1. $]-\infty; -4]\cup[-3; 3]\cup[6; +\infty[$. 2. $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(1)=24$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(0)=0$. 3. Искомая площадь равна $2\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\frac{64}{3}$.

4. $3\pi R^3$. 5. 100 столов и 400 стульев.

Вариант 5

1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg} 3+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 2. $]1; 3[$. 3. $\frac{24}{11}$. 4. Из $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ следует $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

Значит, $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}\right)^2}=4$.

5. $y=\sqrt{3}x+\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$.

Московский автомеханический институт

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi l\ (k,\ l\in \mathbf{Z})$. 3. $]-\infty: \frac{4}{3}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$. 4. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 5. $F(x)=x^3+x+1$.

Вариант 2

1. $\{-1,\ 2\}$. 2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\quad x=-\operatorname{arctg}\frac{2}{5}+\pi l\ (k,\ l\in \mathbf{Z})$. 3. $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$. 4. $\frac{4}{3}R$. 5. 9.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (физический факультет)

Математика

Вариант 1

1. $\frac{6}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{3}{7}$. 2. $\left\{-\frac{3}{2},\ -1\right\}$. 3. $x=2\pi k\ (k\in \mathbf{Z})$. 4. $\frac{5}{12}$.

Вариант 2.

1. $\arccos\frac{63}{65}$. 2. $\{1,\ \log_2 5\}$. 3. $x=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi k\ (k\in \mathbf{Z})$. 4. $e+\frac{1}{e}-2$.

Физика

1. $\Delta t=\sqrt{t_1^2+\frac{2l}{\left|\vec{g}\right|}}-t_1\approx 0{,}05$ с.

2. $\left|\vec{F}\right|=\frac{\mu m\left|\vec{g}\right|}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 21$ Н

3. $t=\sqrt{\frac{h(m_1+m_2)}{\left|\vec{g}\right|(m_2-m_1)}}\approx 0{,}7$ с.

4. $\left|\vec{F}_{\text{ср}}\right|=\frac{m^2v^2}{2lM}=7200$ Н.

5. $m=\frac{\rho_{\text{в}}Sh}{\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}}-1}=3{,}45$ кг (здесь $\rho_{\text{в}}=1$ г/см^3 — плотность воды).

6. $T=T_0\frac{[p_0+\rho\left|\vec{g}\right|\Delta H_2(1+S_2/S_1)]\times(V_0+S_2\Delta H_2)}{p_0V_0}$.

7. $L=\frac{ct_{\text{к}}\tau_2}{\tau_1}=2{,}24\cdot 10^6$ Дж/кг (здесь $c=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды, $t_{\text{к}}=100$°С — температура кипения воды).

8. $P_2/P_1=R_1/R_2=1{,}5$.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ Ом.

10. $d=F\frac{n+1}{n}=16$ см.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{12}$. 2. $-\frac{1}{4}$. 3. $]-1; 2[\cup]3; 6[$. 4. $]-1; 0[\cup]0; 1[$. 5. $(-24;\ -32;\ 30)$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{9},\ 3\right\}$. 2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi l,\quad x=2\pi m\ (k,\ l,\ m\in \mathbf{Z})$. 3. $[2\frac{2}{9};\ 4[\cup]5; +\infty[$. 4. Пусть $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$. Тогда $\min\limits_{[0;\ 2]}f(x)=f(1)=-2\frac{2}{3}$, $\max\limits_{[0;\ 2]}f(x)=f(2)=2\frac{2}{3}$. 5. 2.

Физика

1. $\left|\vec{T}\right|=m\left|\vec{g}\right|(0{,}75\,\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{п}}-1)\approx 40$ Н (здесь $\rho_{\text{в}}=1$ г/см^3 — плотность воды).

2. $T=2\pi\sqrt{l/(\left|\vec{g}\right|-\left|\vec{a}\right|)}\approx 2{,}3$ с.

3. $Q=ma^2t^2/2=2{,}25\cdot 10^6$ Дж.

4. $\left|\Delta m\vec{v}\right|=m\left(\sqrt{2\left|\vec{g}\right|h_1}+\sqrt{2\left|\vec{g}\right|h_2}\right)\approx 0{,}17$ кг·м/с; $Q=m\left|\vec{g}\right|(h_1-h_2)\approx 3{,}7\cdot 10^{-2}$ Дж.

5. $h=\frac{p_0(2T_2-T_1)}{\rho_{\text{в}}\left|\vec{g}\right|T_1}\approx 8{,}4$ м.

6. $r_2=r_1\frac{p_{01}T_2}{p_{02}T_1}\approx 30\%$.

7. $x=l/3=8$ см.

8. $t=t_1+t_2=30$ мин.

9. $\sin\alpha_{пр} = \sqrt{2}/2$; $\alpha_{пр} = 45°$.

10. ${}^{27}_{13}Al + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{30}_{15}P + {}^{1}_{0}n$;

$$E = c^2(m_{Al} + m_\alpha - m_P - m_n) = \\ = 7{,}5\cdot 10^{-13}\ Дж.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

2. Площадь равна 16. Искомых перемещений два: тождественное отображение и осевая симметрия с осью — высотой на AB. 3. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1 - \sqrt{2}\sin x = 4\cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\ (k \in Z)$. 4. $]-\infty;\ \log_2 3[$. Поскольку $2^{\sqrt{2}} < 2^{\sqrt{2,25}} = 2^{1,5} = \sqrt{8} < 3$, $\sqrt{2} \in]-\infty;\ \log_2 3[$. 5. $[-3;\ -2[\cup]1;\ 3]$. $\max\limits_{[3;\,6]} f_2(x) = f_2(3) = \log_{\frac{1}{3}} 10$. $\min\limits_{[3;\,6]} f_2(x) = f_2(6) = \log_{\frac{1}{3}} 40$.

Вариант 2

1. а) A^2_{40}; б) $40\,C^4_{39}$. 2. Площадь равна 15. Искомых перемещений четыре — тождественное отображение, две осевых симметрии и центральная симметрия. 3. $x = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k$, $x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{9} - \pi + 2\pi l\ (k,\ l \in Z)$. 4. $]\log_{\frac{2}{3}} 3;\ \log_{\frac{2}{3}} 2[$. Поскольку $1{,}5^5 < 10$, получаем $5\lg 1{,}5 < 1$, $5\lg 2 < \frac{\lg 2}{\lg 1{,}5} = \log_{\frac{3}{2}} 2 = -\log_{\frac{2}{3}} 2$. Значит, $\lg\frac{1}{32} = -5\lg 2 > \log_{\frac{2}{3}} 2$. 5. а) $]-\infty;\ -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2};\ +\infty[$; б) $f'(x) = -1 + \frac{9}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}$, $f'(-4) = \frac{13}{25}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -2\frac{1}{2}$. При $x \to -\frac{3}{2}$ предела нет; г) $-2\frac{1}{2}$.

Вариант 3

1. а) $x = 1$, $y = 1$; б) Да; в) Нет. 2. Координаты точки M можно найти из системы

$$\begin{cases} |MA|^2 = |MA_1|^2, \\ |MB|^2 = |MB_1|^2. \end{cases}$$

Угол α находится затем из равенства

$$b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = (a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha)\vec{i} + \\ +(a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha)\vec{j},$$

где a_1, a_2 — координаты вектора $\overrightarrow{MA}$; b_1, b_2 — координаты вектора $\overrightarrow{MA_1}$. Поскольку точка C является серединой отрезка AB, ее образ C_1 является серединой отрезка A_1B_1. Ответ. $M(3;\ 1)$, $\alpha = -90°$, $C_1(6;\ 2)$, образ точки M совпадает с M. 3. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ (k \in Z)$. 4. $]\log_3(\log_2 7);\ 1[$. Поскольку $\lg 9 < 1$, $\frac{1}{\lg 9} > 1$. 5. а) Функция f возрастает на $]0;\ \sqrt{\frac{a}{6}}]$ и убывает на $[\sqrt{\frac{a}{6}};\ +\infty[$. $\max\limits_{]0;\,+\infty[} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a}{6} - 1\right)$; б) $\sqrt{\frac{32}{6}}$; в) $a > 6e$; г) Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. При $a \leqslant 400 < 3e^{19}$ $\max\limits_{]0;\,+\infty[} h(x) = \frac{a}{2}\left(\ln\frac{a}{3} - 19\right) < 0$. Поэтому при таких a $h(x) \neq 0$ — графики функций f и g не пересекаются.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Первый — за 7,5 часов, второй — за 5 часов. 2. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 3. 10 000. 5. В точке $\left(\frac{5}{4};\ \ln 4\right)$.

Вариант 2

1. 40 коп., 60 коп., 80 коп. и 1 руб. 2. -62. 3. -1.

4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi l\ (k,\ l \in Z)$.

5. $13\frac{1}{3}$.

Физика

$$1.\ |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - \\ -|\vec{g}|(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 15{,}7\ м/с^2.$$

2. $x = \frac{{}^1/_4\rho_{рт} - \rho_в}{\rho_{рт} - \rho_н} \approx 0{,}2$.

3. $p_{H_2} = \frac{m(\mu_{O_2} - 2\mu_{H_2})RT}{\mu_{O_2}\mu_{H_2}V} =$

$= 2{,}1 \cdot 10^5$ Па.

4. $W = \frac{Um}{\eta k} = 37{,}3$ кВт·ч.

5. Изображение находится на расстоянии $f = 60$ см перед линзой.

Витебский технологический институт легкой промышленности

Математика

Вариант 1

1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi k \ (k \in Z)$.

2. 19680. 3. Функция возрастает на $]0;\ e]$ и убывает на $[e;\ +\infty[$; $y(e) = \frac{1}{e}$ — максимум. 4. $\frac{1}{2\ln 2}$. 5. $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Вариант 2

1. 1. 2. $]-\infty;\ -2] \cup [1;\ +\infty[$. 3. 1.

4. $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ — минимум,

$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ — максимум.

5. $\frac{d^3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2} - \alpha\right)}$.

Физика

1. $l = \frac{8v_1^2v_2^2}{|\vec a|(|\vec v_1| + |\vec v_2|)^2} = 3750$ м $= 3{,}75$ км.

2. $A = m|\vec g|(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}) \approx 5 \cdot 10^3$ Дж;

$$\eta = \frac{m|\vec g|h}{A} = 0{,}8.$$

3. $n = \frac{2cm_2\Delta t}{m_1|\vec g|h} = 56$.

4. Роса была, поскольку $p_2 = \frac{r_1 p_{01} T_2}{T_1} > p_{02}$.

5. $|\vec F| = \frac{q^2}{a^2}(\sqrt{2} + 1/2) \approx 1{,}9$ дин.

6. $a_{min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 23$ м.

7. $|\vec v| = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)} \approx 4{,}45 \cdot 10^5$ м/с.

Задачи физической олимпиады в Финляндии

1. Согласно второму постулату Бора, $h\nu = \Delta E$, откуда $\nu = \frac{\Delta E}{h}$, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\Delta E}$. Для данного атома возможны следующие длины волн излучения: $6{,}9 \cdot 10^{-7}$ м $= 690$ нм, 550 нм, 420 нм, 300 нм, 240 нм и 180 нм. Некоторые из них имеются в спектре в).

2. Удельная теплоемкость алюминия $c = \frac{P\tau}{m(t_2 - t_1)} = \frac{P\tau}{mt} \approx 880$ Дж/(кг·К). Абсолютная ошибка измерения $\Delta c = \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = \frac{\tau}{2m}\left(\frac{P + \Delta P}{t - \Delta t} - \frac{P - \Delta P}{t + \Delta t}\right) \approx \frac{\tau}{m}\frac{P\Delta t + t\Delta P}{t^2} \approx 90$ Дж/(кг·К), где $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 1$°C. Таким образом, правилен ответ д).

3. Правильны ответы а), б) и г).

4. В случае б) правильно все; в случае в) все неверно, кроме соотношения $u = u_{max}$; в случае г) неверно направление магнитных линий; в случае д) вместо утверждения $u = 0$ должно быть $u = u_{max}$.

5. Прежде всего из соображений размерности заключаем, что формула в) заведомо не подходит, а в формулах а) и б) размерность правильная. Анализируя экспериментальные данные, получаем, что $T = \frac{1}{f} \sim L$, чему соответствует формула б). Следовательно, верна формула б).

6. $h \approx 16 \cdot 10^3$ м $= 16$ км.

7. а) $n \to p + {}_{-1}e + \tilde{\nu}$; б) $p \to n + {}_{+1}e + \nu$; в) $p + {}_{-1}e \to n + \nu$; г) ${}_{-1}e + {}_{+1}e \to 2\gamma$; д) ${}^2_1H + \gamma \to n + {}^1_1H$; е) ${}^{197}_{79}Au + n \to {}^{198}_{79}Au + \gamma$. Изотоп ${}^{198}_{79}Au$ радиоактивен и распадается по схеме: ${}^{198}_{79}Au \to {}^{198}_{80}Hg + {}_{-1}e + \tilde{\nu} + \gamma$; здесь ν — нейтрино, $\tilde{\nu}$ — антинейтрино, γ — гамма-квант.

8. а) $|\vec v| \approx 2$ м/с; б) равновесие такой системы невозможно.

9. $|U| = {}^1/_2\sqrt{2|\vec g|l}\,|\vec B|l \approx 1{,}6$ мВ.

Новосибирский государственный университет

(см. «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. Пусть первый спортсмен выбегает из точки A, второй — из точки $Б$. Обозначим скорость первого спортсмена через v_1 (м/с), скорость второго — через v_2 (м/с), радиус окружности-дорожки — через R (м), время, прошедшее между первой и второй встреча-

ми,— через t_1 (с). Так как спортсмены бегут навстречу друг другу, их первая встреча произойдет до того, как второй спортсмен пересечет точку A. Значит, длина пути, который второй спортсмен пробежит до первой встречи, равна a м. Итак, $v_2t = a$, откуда

$v_2 = \frac{a}{t}$ (м/с).

За время t до первой встречи оба спортсмена пробегут полуокружность. Значит, $tv_1 + tv_2 = \pi R$. За время t_1 между двумя встречами спортсмены пробегут окружность. Следовательно, $t_1v_1 + t_1v_2 = 2\pi R$. Отсюда $t_1 = 2t$. Поэтому к моменту второй встречи второй спортсмен пробежит $a + 2t\cdot v_2 = 3a$ (м).

Если бы к моменту второй встречи второй спортсмен пересек обе точки A и $Б$, мы бы имели $3a \geqslant 2\pi R$, откуда $2a \geqslant \frac{4}{3}\pi R > \pi R$. Поскольку расстояние между любыми двумя точками на дорожке не превосходит πR, этот случай невозможен.

Если бы к моменту второй встречи второй спортсмен пересек точку A и не пересек точку $Б$, мы бы имели $3a = \pi R + 2a$, откуда $a = \pi R$, $2a = 2\pi R > \pi R$. Значит, и этот случай невозможен.

Следовательно, к моменту второй встречи второй спортсмен не пересек ни одной из точек A, $Б$. Тогда $3a + 2a = \pi R$. $\Big($Таким образом, в этом случае $2a = \frac{2}{5}\pi R < \pi R.\Big)$ Из $tv_1 + tv_2 = \pi R$, $tv_2 = a$ и $\pi R = 5a$ находим v_1.

Ответ. Скорость первого спортсмена равна $\frac{4a}{t}$ м/с, второго — $\frac{a}{t}$ м/с.

2. $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. Пусть C, D, E — последовательные точки пересечения данной прямой с окружностями O_1 и O_2, F — середина отрезка DE, H — середина отрезка BC. Из $\triangle BO_1H \sim \triangle BO_2F$ вытекает $\frac{r}{2r + R} = \frac{1}{3\frac{1}{2}}$ (r и R — искомые радиусы), откуда $r = \frac{2}{3}R$. По теореме Пифагора $|O_2D|^2 - |DF|^2 = |O_2B|^2 - |BF|^2$, откуда $R = \frac{3\sqrt{30}}{10}$ (см). Ответ. Радиус окружности O_1 равен $\frac{\sqrt{30}}{5}$ (см), окружности O_2 — $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ (см).

4. Данное уравнение равносильно «смешанной системе»

$$\begin{cases} \sqrt{2x} = ax + 1, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} 2x = (ax + 1)^2, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ ax + 1 > 0 \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} a^2x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ ax + 1 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

При $a = 0$ уравнение $a^2x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$. Поэтому при $a = 0$ система (2) решений не имеет.

Пусть теперь $a \neq 0$. В этом случае при $a > \frac{1}{2}$ уравнение $a^2x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0$, а значит, и система (2), решений не имеют.

При $a = \frac{1}{2}$ система (2) имеет единственное решение.

Итак, пусть $a < \frac{1}{2}$ и $a \neq 0$. Положим

$$x_1 = \frac{1 - a + \sqrt{1 - 2a}}{a^2},$$

$$x_2 = \frac{1 - a - \sqrt{1 - 2a}}{a^2}.$$

Тогда

$$ax_1 + 1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 2a}}{a},$$

$$ax_2 + 1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2a}}{a}.$$

Подставив в уравнение $a^2x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0$ «запрещенный корень» $x = \frac{1}{2}$, получим $a = 0$ или $a = -4$. У нас $a \neq 0$. При $a = -4$ имеем $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{8}$.

При $a \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ имеем $x_1 \neq \frac{1}{2}$, $ax_1 + 1 > 0$ и $x_2 \neq \frac{1}{2}$, $ax_2 + 1 > 0$. Значит, при таких a система (2) имеет 2 решения.

При $a < 0$ $ax_1 + 1 < 0$, $ax_2 + 1 > 0$. Выше мы уже отметили, что при $a \neq 0$ имеем $x_2 \neq \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left]-\infty; 0\right[$.

5. Опустим из точки C' перпендикуляр на плоскость ABC. Его пересечение с плоскостью ABC обозначим через D. Поскольку $BC' \perp AC$, по теореме о трех перпендикуля-

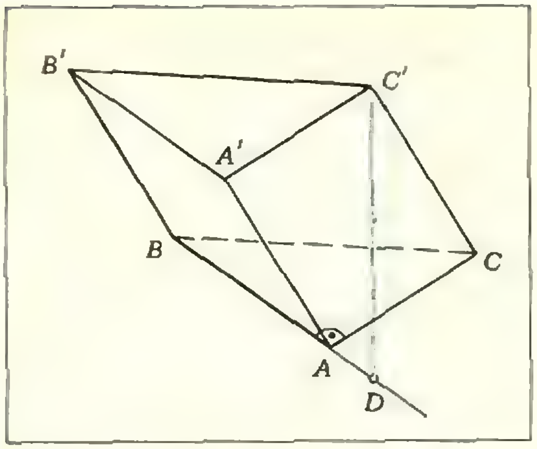


Рис. 4.

рах заключаем $BD \perp AC$. Из условия $BA \perp AC$ вытекает $D \in (BA)$ (рис. 4). Поскольку $C'\widehat{C}D = 60^\circ$, имеем $|C'D| = \sqrt{3}\,|CD|$.

Обозначим $|AD|$ через x. Из $\triangle ACD$ $|CD|^2 = a^2 + x^2$. Из $\triangle BC'D$ $(a\sqrt{6})^2 = 3\,(a^2 + x^2) + (a+x)^2$. Отсюда $\frac{x}{a} = -1$ или $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$.

Если $\frac{x}{a} = -1$, то $x = -a$, точка D совпадает с точкой B, $C'B \perp (ABC)$.

Если $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a}{2}$ и точка D лежит вне отрезка BA.

Ответ. Если $C'B \perp (ABC)$, объем равен $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$; в противном случае он равен $\frac{\sqrt{15}}{4}a^3$.

Вариант 2

1. $9 + \sqrt{161}$ (км/ч). 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k\ (k \in \mathbb{Z})$. 3. Указание. Использовать свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, указанное в задаче 13* после п. 81 «Геометрии 7». Ответ. $\frac{7\sqrt{35}}{20}R^2$. 4. 2.

5. Пусть M, N — середины ребер CC', $A'D'$ соответственно. Обозначим длину ребра куба через a. При помощи теоремы Пифагора или введя систему координат «по ребрам куба», найдем длины сторон треугольника BMN: $|BM| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|BN| = \frac{3}{2}a$, $|MN| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. По формуле Герона площадь треугольника BMN равна $\frac{\sqrt{29}}{8}a^2$. Обозначим середину ребра AD через K. Площадь треугольника BCK равна $\frac{a^2}{2}$. Обозначим искомую величину через φ. Тогда $S_{\triangle BCK} = S_{\triangle BMN}\cdot\cos\varphi$ («Геометрия 10», § 50).

Ответ. $\arccos\frac{4}{\sqrt{29}}$.

Физика

Вариант 1

1. $|\vec{T}| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(k_2 - k_1)\,|\vec{g}|\cos\alpha$ при $k_2 > k_1 > \operatorname{tg}\alpha$.

2. $$x = l\left[\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 2\right) - \sqrt{\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 2\right)\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 1\right)}\,\right].$$

3. В проекциях на начальное направление полета $v_m = v - |\vec{F}_0|\,\tau/m$ и $v_M = |\vec{F}_0|\,\tau/M$; выделившееся при ударе количество теплоты $Q = v|\vec{F}_0|\,\tau - \frac{|\vec{F}_0|^2\tau^2}{2} \times \frac{M+m}{mM}$.

4. Если за время движения внутри конденсатора все электроны пучка успевают дойти до верхней пластины, то

$$I_A = endb\,|\vec{v}|;$$

если же захватывается не весь пучок, то

$$I_A = \frac{\mathscr{E}}{R + 2m|\vec{v}|\,d/(e^2 l^2 nb)}.$$

5. Для оценки будем считать, что вся энергия молотка, равная $5\frac{mv^2}{2}$, затрачивается на работу $|\vec{F}|\,l$ против силы сопротивления $\vec{F}$ (l — длина гвоздя). Очевидно, если приложить к гвоздю силу порядка $|\vec{F}|$, его можно будет вытащить. Таким образом, $|\vec{F}| \sim \frac{5mv^2}{2l}$. Теперь выберем численные параметры. Масса молотка m порядка одного килограмма: $m \sim 1$ кг; длина гвоздя $l \sim 10$ см (гвоздь длинный, так как для его забивания понадобилось 5 ударов достаточно тяжелого молотка). И наконец, относительно скорости $|\vec{v}|$. Если бы груз массы $m \sim 1$ кг свободно упал с высоты $h \sim 0{,}5$ м, его скорость была бы $\sqrt{2|\vec{g}|h} \sim 3$ м/с. Возьмем скорость несколько большую, например, $|\vec{v}| \sim 5$ м/с. Тогда окончательно

$$|\vec{F}| \sim \frac{5mv^2}{2l} \sim 10^3\ \text{Н}.$$

6. Во втором случае, когда затычка прикрепляется к массивному штативу, скорость затычки после зажигания горючей смеси остается равной нулю, то есть практически вся выделившаяся энергия идет на разгон гильзы. В первом же случае часть энергии забирает затычка. Следовательно, и высота полета гильзы в первом случае должна быть меньше, чем во втором. Можно сделать и

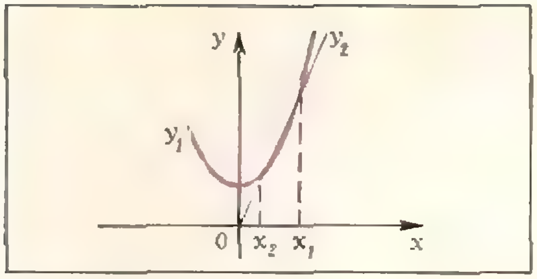


Рис. 5.

количественные оценки. Согласно законам сохранения энергии и импульса отношение высот полета гильзы во втором и первом случаях равно

$$h_2/h_1 = 1 + m_г/m_з.$$

Если массы гильзы и затычки сравнимы ($m_г \approx m_з$), то $h_2 \approx 2h_1$; если же $m_г \gg m_з$, различие в высотах велико.

Вариант 2

1. $U_2 = 2U$; $E = 2CU^2$.

2. $\left|\vec{F}_{Д1}\right| = \left|\vec{F}_{Д2}\right| = {}^1/_4 m \left|\vec{g}\right| \operatorname{ctg}\alpha.$

3. $b = a/n$.

4. Из второго закона Ньютона и уравнения состояния идеального газа получаем для неизвестного расстояния x квадратное уравнение

$$\frac{m\omega^2}{p_0 S} x^2 - x + l = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{p_0 S}{2m\omega^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0 S}}\right).$$

Очевидно, что должно выполняться условие $\frac{4m\omega^2 l}{p_0 S} < 1$, иначе поршень из трубки вылетит. Для того чтобы выяснить, оба ли корня подходят, обратимся к рисунку 1. Здесь изображены графики двух функций:

$$y_1 = \frac{m\omega^2}{p_0 S} x^2 + l \text{ и } y_2 = x.$$

Пересечение этих графиков и дает два корня: x_1 и x_2. Нетрудно видеть, что корень x_1 соответствует неустойчивому положению равновесия, а корень x_2 — устойчивому. Следовательно, из физических соображений подходит лишь один корень x_2 (соответствующий знаку «минус» в скобке).

5. Зная атмосферное давление $p_0 \sim 10^5$ Па (силу тяжести воздушного столба с площадью сечения 1 м²), площадь поверхности Земли $4\pi R^2$ ($R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м — радиус Земли) и долю кислорода в воздухе $k = {}^1/_5$, найдем всю массу M кислорода в атмосфере:

$$M = k\frac{4\pi R^2 p_0}{\left|\vec{g}\right|}.$$

Из реакции горения кислорода $C + O_2 = CO_2$ следует, что количества молей взаимодействующих углерода и кислорода одинаковы:

$$m_C/\mu_C = m_{O_2}/\mu_{O_2},$$

отсюда масса сгоревшего кислорода

$$m_{O_2} = m_C \mu_{O_2}/\mu_C.$$

Таким образом,

$$\frac{m_{O_2}}{M} = \frac{m_C \mu_{O_2}\left|\vec{g}\right|}{4\pi R^2 k p_0 \mu_C} \sim 5 \cdot 10^{-6}.$$

6. В первом случае поведение шариков непосредственно следует из законов сохранения энергии и импульса при упругом столкновении двух одинаковых шариков (сначала соударяются шарики *1* и *2*, а потом — *2* и *3*). Во втором случае толстая резиновая прокладка затягивает процесс передачи импульса от первого шарика ко второму. А это приводит вот к чему. Представим процесс передачи импульса ступеньками (а не плавно, как происходит на самом деле). Деформированная резина сообщает некоторый импульс шарику *2*, тот шарику *3*. За это время деформация резины, а значит, и передаваемый ею импульс, возрастут, замедлившийся было шарик *2* снова ускорится, догонит шарик *3* и увеличит его импульс. Так будет происходить до тех пор, пока шарик *2* в конце концов не отойдет от резиновой прокладки. С этого момента шарики *2* и *3* покатятся практически с одинаковыми скоростями.

Ответы на «Кроссворд МФТИ»

(см. 3-ю страницу обложки)

По горизонтали: 1. Стоматология. 6. Томность. 7. Неуд. 8. Неявка. 11. Илья. 12. Каре. 16. Тортил. 19. Репа. 20. Мерзавец. 21. Транскрипция.

По вертикали: 1. Сатана. 2. Обман. 3. Оптика. 4. Горечь. 5. Ябеда. 9. Япет. 10. Аист. 13. Амплуа. 14. Лекция. 15. Крест. 17. Одерк. 18. Ловец.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 18)

1. Указание. Если $f(x) \neq 0$, то и $f(x + ka) \neq 0$ $(k \in \mathbb{Z}$ и $f(x) = \dfrac{1}{f(x + 3a)} = f(x + 6a)$.

2. Указание. Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится, а если из него исключить члены $\frac{1}{k}$, для которых в записи k встречается цифра, скажем, 2, то ряд будет сходиться. С другой стороны, ряд из обратных величин простых чисел расходится — это следует из неравенств

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \Bigl(1 +$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3^m}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1+\frac{1}{p_k}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{p_k^m}\Big)<\frac{1}{1-1/2}\cdot\frac{1}{1-1/3}\cdot\ldots\times$$

$$\times\frac{1}{1-1/p_k},\quad \lg\frac{1}{1-1/p}<\frac{1}{p},$$

$$\lg\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\Big)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p_k},$$ где p_k — простые числа, $2^m<n<2^{m+1}$

4. 16 и 64.

5. $7\frac{1}{2}$, прогрессия имеет вид $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}, \ldots, 7\frac{1}{2}$.

6. а) Нет; б) да, это число вида $\overline{a999}$.

7. 1976.

8. $\overline{abc}=624$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Булок было 95343:

$$\begin{array}{r} 87130\\ +8213\\ \hline 95343\end{array}$$

(см. «Квант № 4)

1. 929.

2. Возьмем два кувшина разного цвета. Если они и разной формы, то все в порядке. Если же они одинаковой формы, то возьмем какой-нибудь кувшин другой формы. Из этих трех кувшинов легко составить нужную пару.

3. Из условия следует, что при любом натуральном n число $B=(2n-1)^3-(2n-1)=(2n-1)((2n-1)^2-1^2)=(2n-2)(2n-1)2n$ делится на A. Разложим (мысленно) A на простые множители. Среди них не может быть множителей, больших 3 (почему?). Произведение трех последовательных чисел всегда делится на 3, но не всегда на 9 (например, при $n=3$). Число B всегда делится на 8, поскольку из двух последовательных четных чисел одно всегда делится на 4, но B не делится на 16 при $n=2$. Итак, в разложение числа A на простые множители могут входить только степени 2 и 3, причем степень 2 не превышает 3, а степень 3 не больше 1. Значит, A — это 24 или один из его делителей: 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Ответ: 24 и все его делители.

4. Утверждение а) всегда верно. Возьмем какую-нибудь точку — пусть она черного цвета. Проведем окружность радиуса 1 *м* с центром в этой точке. Если на этой окружности есть черные точки, то все в порядке. Если нет, то, проведя окружность радиуса 1 *м* с центром в любой из белых точек первой окружности и взяв любую из точек пересечения этих двух окружностей, получим две точки белого цвета, удаленные на расстояние 1 *м*.

Утверждение б) верно, если вообще найдутся точки разных цветов.

(см. «Квант» № 5)

1. 5.

2. См. рисунки 6 и 7.

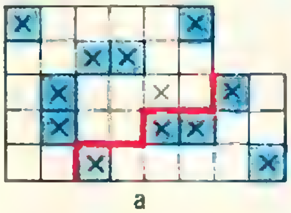


Рис. 6.

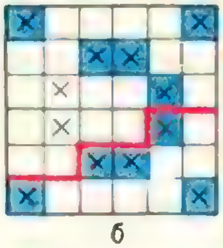


Рис. 7.

3. Разность между возрастами любых двух из этих людей кратна 9. Поэтому сумма четырех возрастов не меньше $3+12+21+30=66$ и не больше $74+65+56+47=242$. Между числами 66 и 242 заключены два куба: 125 и 216. Если возраст самого молодого x, то сумма возрастов имеет вид $4x+9y$. Учитывая, что возраст старшего не превосходит 78, получаем возможные ответы: 36, 45, 63, 72 и 27, 54, 63, 72. Таким образом, старшему 72 года.

5. $729=9^3$ и $729=27^2$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

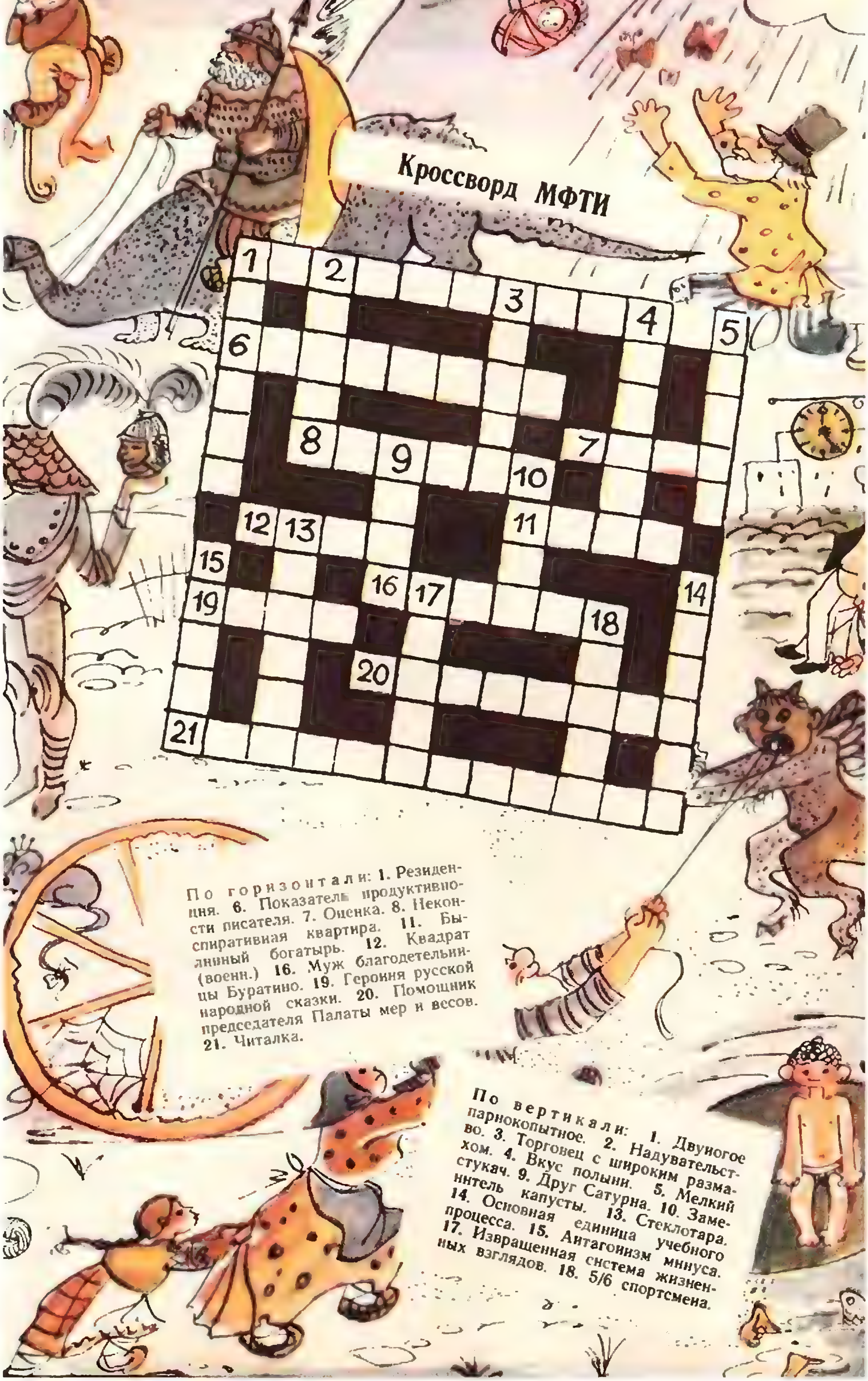
Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 27.03.78.
Подписано в печать 18.05.78
Бумага 70×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 10,02. Т-08286.
Цена 30 коп. Заказ 577. Тираж 310875 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Кроссворд МФТИ



По горизонтали: 1. Резиденция. 6. Показатель продуктивности писателя. 7. Оценка. 8. Неконспиративная квартира. 11. Былинный богатырь. 12. Квадрат (военн.) 16. Муж благодетельницы Буратино. 19. Героиня русской народной сказки. 20. Помощник председателя Палаты мер и весов. 21. Читалка.

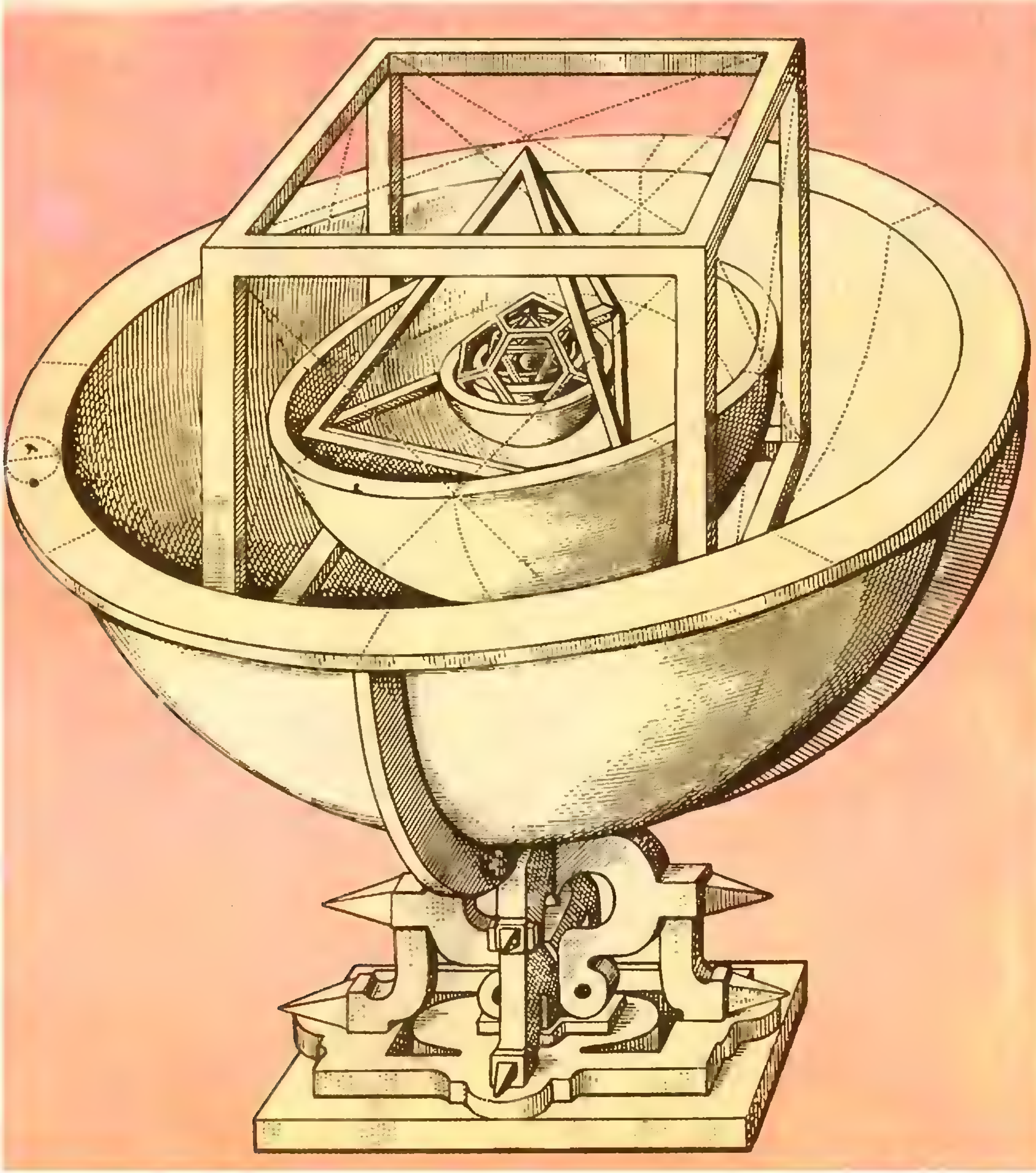
По вертикали: 1. Двуногое парнокопытное. 2. Надувательство. 3. Торговец с широким размахом. 4. Вкус полыни. 5. Мелкий стукач. 9. Друг Сатурна. 10. Заменитель капусты. 13. Стеклотара. 14. Основная единица учебного процесса. 15. Антагонизм минуса. 17. Извращенная система жизненных взглядов. 18. 5/6 спортсмена.

«Наверное, нет на свете такого мальчика, который не играл бы с увеличительным стеклом (линзой)». Так начинается статья «Знакомы ли вы с линзой?» Но чтобы познакомиться с линзой, совсем не обязательно иметь увеличительное стекло. Эти капли росы на дубовом листе — тоже линзы. Если вы никогда не смотрели на росу с такой точки зрения — присмотритесь. И вы увидите тонкие прожилки листа как замысловатую сетку дорог, а паутинку — как мохнатую нитку. И каждая капелька фокусирует солнечный свет.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

«Космический кубок» Кеплера, который вы здесь видите, иллюстрирует гелиоцентрическую модель системы мира.

По Кеплеру, сферы, на которых расположены орбиты планет, последовательно вписываются и описываются около пяти правильных многогранников — октаэдра, икосаэдра, додекаэдра, тетраэдра и куба.



НОМЕР
7

Основан в 1970 году

Квант

7
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

2 *В. Фабрикант*. Сюрпризы зеленого стекла
9 *А. Гейк*. На пути к решению
15 *В. Дуков*. Конвекционные токи и токи смещения
20 *М. Гарднер*. Числа Каталана

Лаборатория «Кванта»

27 *Е. Пальчиков*. Какого цвета зеленка?
28 *А. Лушков, Ю. Лужков*. «Звезды» из водяной капли

Математический кружок

29 *Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер*. Задача о трех кувшинах

Задачник «Кванта»

33 Задачи М511 — М515; Ф523 — Ф527
35 Решения задач М461 — М464; Ф478 — Ф481

«Квант» для младших школьников

40 Задачи
41 *А. Дозоров*. Оптика без оптики

По страницам школьных учебников

44 *А. Земляков, В. Орлов*. Вопросы для выпускников

◆

50 *В. Березин*. Геометрия зубчатой передачи

Практикум абитуриента
Варианты вступительных экзаменов 1977 года

52 *Б. Агафонов, В. Кобелев, В. Прохоренко* Московский энергетический институт
53 *Ю. Худак*. Московский институт радиотехники, электроники и автоматики
54 *Б. Кучеров, В. Горбацевич*. Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского
54 *Л. Милованова*. Московский институт химического машиностроения
55 *Л. Кронгауз, Л. Кульчицкая, Б. Савина*. Московский институт инженеров землеустройства
56 *И. Блюмкина*, Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского
56 *В. Колпаков, Л. Лагуненок*. Ярославский политехнический институт
57 *Г. Мелетьева*. Марийский политехнический институт им. А. М. Горького
58 *Г. Данилова, В. Федоров*. Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева
61 **Ответы, указания, решения**

◆

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта» (с. 49, 59, 60)
Смесь *(с. 32, 43)*

На первой странице обложки изображено семейство гипотрохоид, нарисованных на ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым. О гипотрохоидах можно прочитать на с. 32

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

В. Фабрикант

Сюрпризы зеленого стекла

Какого цвета зеленое стекло?

Этот вопрос может вызвать чувство естественного недоумения. Читатель с раздражением скажет: зеленое стекло потому и называется зеленым, что оно ... Однако не надо спешить со снисходительными разъяснениями. Нехитрый опыт покажет вам, что вопрос о цвете зеленого стекла совсем не так прост.

Если у вас есть кусок зеленого стекла, разбейте его осторожно на несколько не очень маленьких кусочков. Затем посмотрите сквозь один из них на нить лампы накаливания. Как вы и ожидали, нить будет казаться зеленой (рис. 1). Наложите на этот кусочек стекла второй и снова посмотрите на нить.

Вероятно, вы не заметите изменения цвета нити, она будет зеленой по-прежнему. Но если наложить на два кусочка стекла третий и посмотреть сквозь все три кусочка на нить, вы увидите ее уже неокрашенной белесоватого цвета. Сквозь четыре кусочка нить будет казаться красноватой, а сквозь пять кусочков — рубиново-красной!

Результат совершенно неожиданный и весьма поучительный. Оказывается, цвет стекла зависит от толщины, и зеленое в тонком слое стекло становится красным при достаточно большой толщине слоя. Таким свойством обладает, конечно, не каждое зеленое стекло, но как раз самые распространенные дешевые сорта зеленых стекол.

Любопытно, что это же свойство присуще раствору самого важного

Эта статья была опубликована в журнале «Наука и жизнь» (1967, № 5). Текст статьи печатается с небольшими изменениями. (*Прим. ред.*)

красящего вещества на земле — хлорофилла. Как известно, хлорофилл окрашивает листья растений в зеленый цвет. Поместив листья в спирт, можно получить раствор хлорофилла в спирте и провести такой опыт.

Поставьте на лист белой бумаги стакан и медленно наливайте в него раствор хлорофилла. Сначала дно стакана на просвет будет казаться зеленым, а затем, при большой толщине слоя, раствор приобретет насыщенный темно-красный цвет.

Вернемся к зеленому стеклу. Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампочки накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет виден рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло. Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным — при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печки кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекла за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождав еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что, чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, —пирометрического клина (рис. 2). Он представляет со-

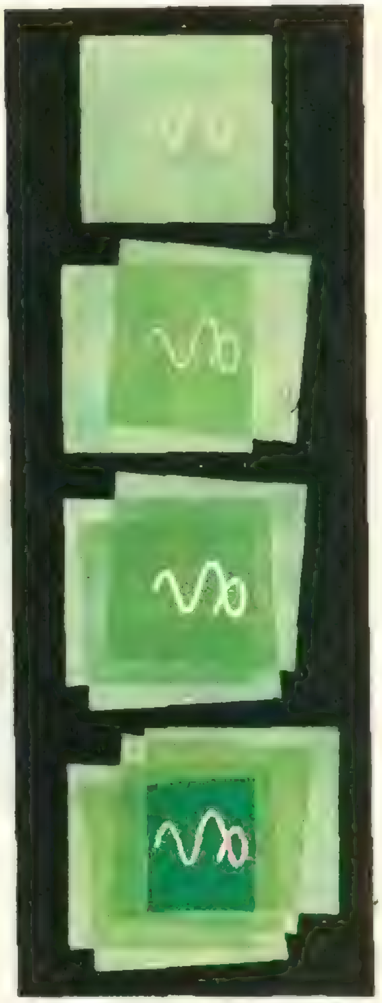


Рис. 1. Изменение видимого цвета нити накаливания от зеленого до красного при наблюдении через разное число кусочков зеленого стекла.

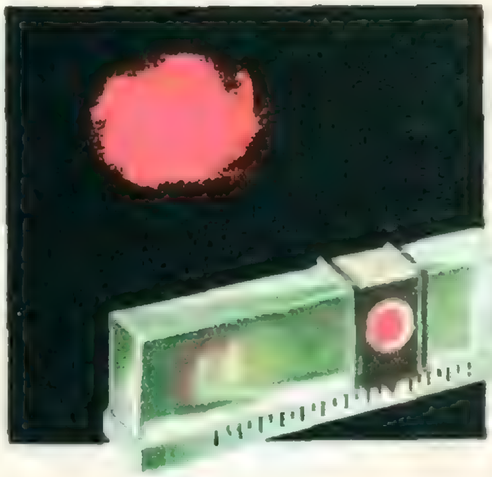


Рис. 2. Пирометрический клин — прибор для определения температуры раскаленных тел.

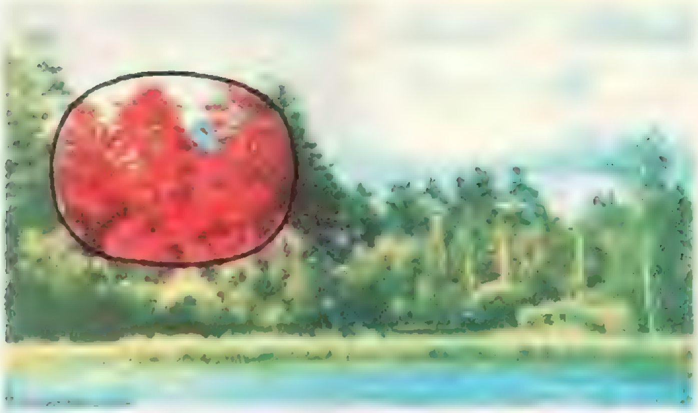


Рис. 3. Вид зеленого пейзажа через синие очки.

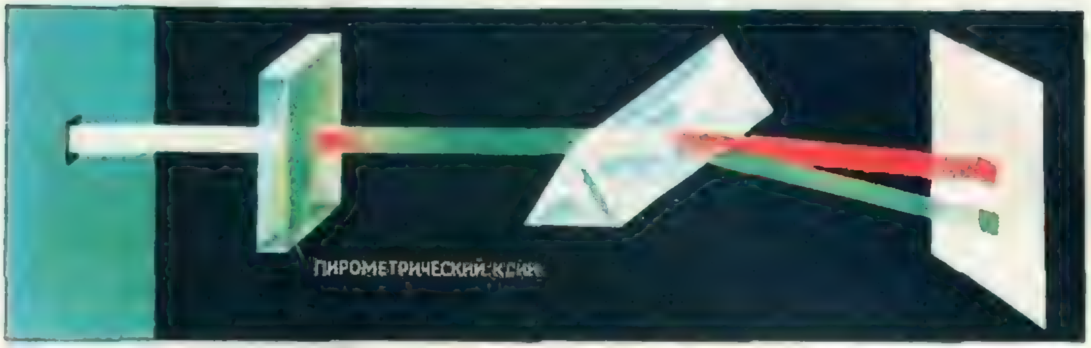


Рис. 4. Опыт, не сделанный Ньютоном. При прохождении белого света сквозь пирометрический клин в спектре остаются зеленые и красные лучи.

бой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин двигается в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела.

Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например, в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

Опыт, не сделанный Ньютоном, и ландшафтная живопись

Наверное, многие из вас помнят знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что солнечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом или сосудом, наполненным раствором хлорофилла. В этих случаях от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло и раствор хлорофилла пропускают не только зеленые, но и красные лучи.

По поводу хлорофилла очень интересны замечания знаменитого русского ботаника К. А. Тимирязева: «Убедиться в том, что хлорофилл пропускает красные лучи, можно очень легко: стоит на залитый ярким солнечным светом ландшафт посмотреть через особое синее стекло (рис. 3), которое пропускает красные и синие лучи, но задерживает зеленые, для того, чтобы перед нашими изумленными взорами вся природа совершенно преобразилась — под обычным синим небом мы увидим кроваво-красную растительность. Не в этой ли особенности цвета хлорофилла лежат те трудности, с которыми, очевидно, приходится бороться ландшафтной живописи? На палитре живописца, по-видимому, нет тех зеленых тонов, которые представляет вблизи ярко освещенная зелень.»

Оставим, однако, живопись пока в стороне и вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт с клином. В качестве источника света используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис. 4). На стене мы опять увидим две полоски — зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная. При увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, и, начиная с некоторого момента, красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок — красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разъяснена. Однако остается еще объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести тому назад.

Капитан дальнего плавания и геометрическая прогрессия

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине восемнадцатого столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская Академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с измерениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его также называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон— лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегает его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго — 243, к концу третьего — 81, четвертого — 27, пятого — 9, шестого — 3. Наконец, седьмой километр заканчивает только один бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось восполь-

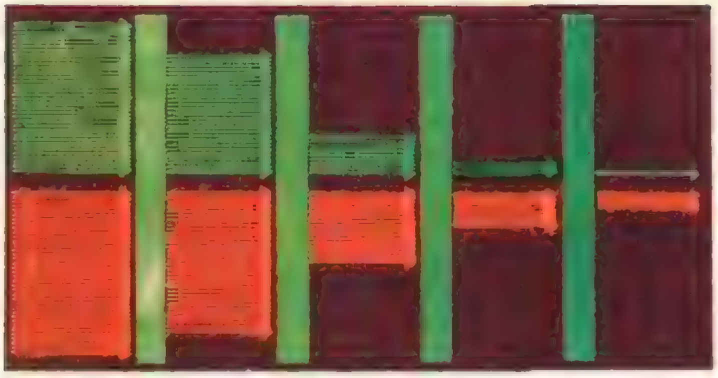
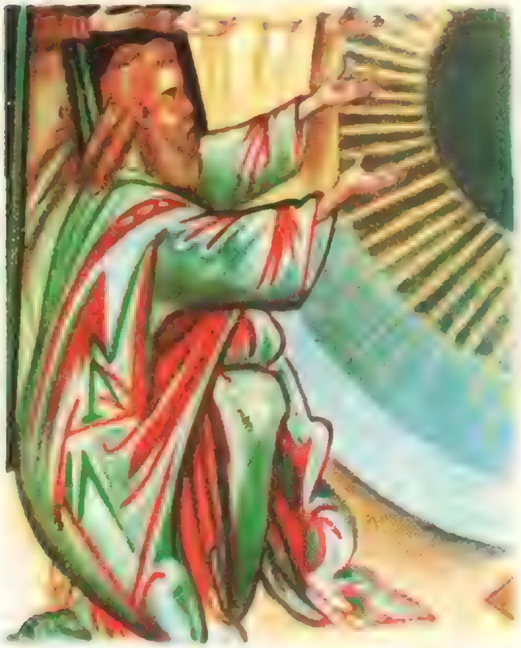


Рис. 5. Иллюстрация применения закона Бугера для объяснения изменения цвета нити лампы накаливания при увеличении числа зеленых стекол.



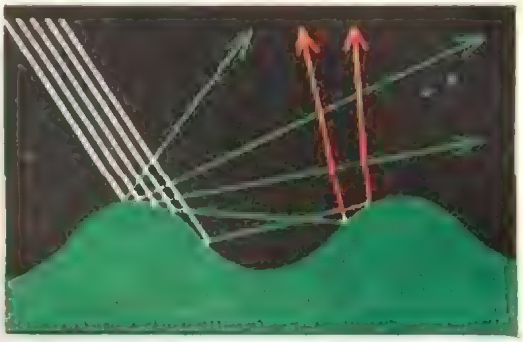


Рис. 6. Острый глаз древнерусского художника заметил изменение цвета в глубине складок ткани, происходящее за счет повторных отражений.

зоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3,1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, то есть одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и так далее. Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, втрое и т. д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии.

Еще немного спорта

Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили весьма великодушные условия. На старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров. Победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера — красные.

После первого километра сторонники новичков приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз, 729 бегунов, а у мастеров — 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так же и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243 человека, а «красных» — 128. После третьего километра «зеленых»— 81, а «красных» — 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» — 27, а «красных» — 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос.

Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых»— 9, «красных»— 16, после шестого — 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов в обеих командах:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше,— одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в числах не только достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис. 5). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в начальной яркости зеленых лучей. Основную роль играют зеленые лучи, что и дает соответствующую окраску.

С ростом толщины стекла, согласно закону Бугера, пропускание зеленых лучей падает несравненно быстрее, чем темно-красных (числа «зеленых» и «красных» бегунов на больших дистанциях). При достаточно большой толщине разница в пропускании уже так велика, что перекрывает начальный перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металлический предмет, тем белее даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале лампочка накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале — гораздо более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных.

Значит, при более высокой температуре разница в яркостях зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.

Древнерусские иконы и наблюдения Леонардо да Винчи

На некоторых древнерусских иконах бросается в глаза необычная расцветка одеяний святых. Складки изображены краской, обладающей резко отличным цветом от цвета гладких частей одеяния. Например, красные складки на зеленом плаще (рис. 6) или оранжевые складки на синем одеянии. Острый глаз древнерусского богомаза заметил, что некоторые ткани обладают двухцветностью и в складках приобретают другой цвет, чем на ровной поверхности. Причина двухцветности тканей та же, что и в опыте с пирометрическим клином.

Если луч света, отраженный от двухцветной ткани, пропустить сквозь призму, то в спектре обязательно останутся две цветные полоски. Для зеленой двухцветной ткани картина будет той же, что с зеленым стеклом: останутся красная и зеленая полоски, остальные лучи поглотятся.

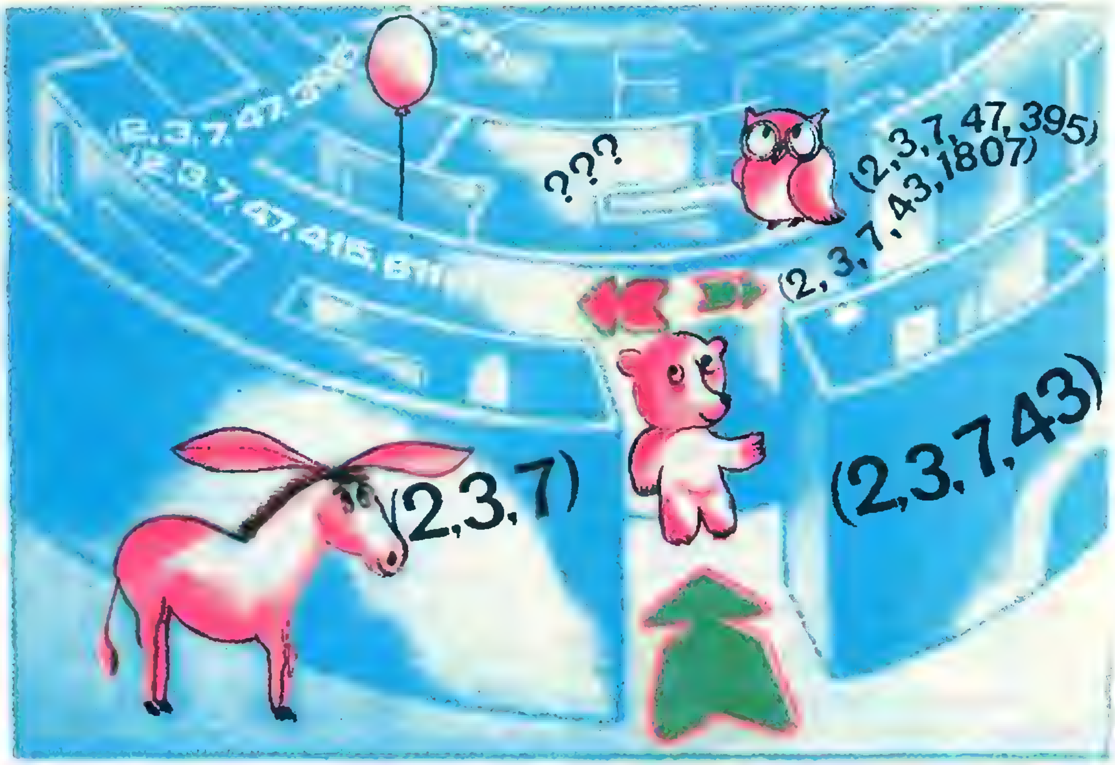
Двухцветная зеленая ткань лучше отражает красные лучи, чем зеленые, но при однократном отражении от гладкой поверхности ткани сказывается бо́льшая яркость зеленых лучей в падающем свете. Поэтому в однократно отраженном свете все-таки преобладают зеленые лучи.

В складках ткани свет испытывает по крайней мере два последовательных отражения. При втором отражении красные лучи отражаются опять сильнее, чем зеленые, и в результате двукратного отражения происходит то же, что и в зеленом стекле большой толщины: яркость красных лучей становится больше яркости зеленых лучей, и ткань меняет цвет. Многократные отражения усиливают этот эффект.

Большинство обычных тканей обладает прямо противоположными свойствами. В складках получается более насыщенный, но такой же цветовой тон, что и на ровной поверхности. Объясняется это опять-таки повторными отражениями. Свет, отраженный от таких тканей, после разложения призмой дает только одну полоску в спектре вместо двух полосок у двухцветных тканей. Например, свет, однажды отраженный от желтого бархата, дает в спектре широкую полосу с наибольшей яркостью в желтой части. Кроме желтых лучей, в спектре присутствуют еще зеленые и голубые лучи. При двукратном отражении полоса в спектре становится у́же, так как голубые лучи практически исчезают совсем, а зеленые сильно ослабляются. Это работает все тот же закон геометрической прогрессии. В результате желто-оранжевый отраженный свет делается более насыщенным.

Один из наиболее разносторонних гениев, живших когда-либо,—Леонардо да Винчи — не только заметил своим глазом художника эту особенность складок тканей, но и, как ученый, дал вполне правильное объяснение наблюдаемому явлению. В «Трактате о живописи» он пишет: «Отраженные цвета имеют гораздо бо́льшую красоту, чем природный цвет этих тел, как это видно на открывающихся складках золотых тканей ..., когда одна поверхность отражается в другой, стоящей напротив, а эта в ней, и так последовательно до бесконечности».

В том же «Трактате о живописи» сказано: «Рефлексы (отражения) от живого тела, получающего свет от другого живого тела, более красны и более превосходно телесного цвета, чем любая другая часть живого тела, какая только может быть у человека». Созерцая с наслаждением в залах ленинградского «Эрмитажа» изумительные полотна Ван-Дейка и Рубенса, нетрудно заметить, что и для этих великих мастеров эффект многократных отражений не был тайной.



А. Гейн

На пути к решению

Иногда небольшое изменение или обобщение условия школьной задачи может привести к интересным теоремам и даже нерешенным проблемам. Так, несколько лет назад В. И. Арнольд предложил задачу: «Описать все наборы из n натуральных чисел, таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся». Об этой задаче мы писали и в «Кванте» («Квант», 1976, № 12, с. 5). Получается она из совсем несложной школьной задачи: найти все такие тройки чисел, отличных от единицы, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число («Сборник задач московских математических олимпиад», М., «Просвещение», 1965, с. 70, задача 215). В ответе — единственный набор: (2, 3, 7). Если отбросить требование о том, чтобы все числа были отличны от единицы, получатся еще три набора: (1, 1, 1), (1, 1, 2) и (1, 2, 3). Столь же легко описать и все такие пары и четверки чисел. А вот дать ответ для произвольного n никак не удается — это до сих пор нерешенная проблема.

В замечательной книге Д. Пойа «Как решать задачу» сформулированы «правила исследователя». Перечислим некоторые из них.

●

Начните с частных случаев — они могут оказаться легче. Рассмотрите полученные результаты. Наблюдайте, обобщайте, проверяйте.

Проанализируйте метод решения, расчлените его и посмотрите, какие его части могут быть перенесены на общий случай.

Подойдите к задаче с различных сторон, исследуйте различные детали; исследуйте одни и те же детали, но с разных точек зрения, попытайтесь усмотреть в каждой детали некоторую новую интерпретацию задачи. Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями. Пытайтесь увидеть знакомое в том, что вы исследуете и полезное в том, что оказалось знакомым.

Вглядитесь в метод. Постарайтесь выделить в нем главное. Постарайтесь улучшить его.

●

Попробуем, пользуясь «правилами исследователя», внимательно присмотреться к тому, что известно о задачах с $n = 2$, 3 и 4; может быть, это поможет нам хоть чуточку приблизиться к решению общей проблемы.

1. Повторение

> *— А разве ты не видишь?*
> *— Нет.*
> *— И я тоже!*
>
> Из разговора Иа-Иа с Винни Пухом*)

С чего же начать? Прежде всего — с ответов в школьных вариантах задачи ($n=2, 3, 4$). Выпишем эти ответы в таблицу:

$n=2$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 3)		
$n=3$	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 3)	(2, 3, 7)	
$n=4$	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2)	(1, 1, 2, 3)	(1, 2, 3, 7)	(2, 3, 7, 43)

Не правда ли, решения для различных n очень похожи? Они образуют вертикальные серии и получаются добавлением единицы. Это наблюдение распространяется на всевозможные n с помощью следующей очевидной леммы:

Лемма 1. *Пусть набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ является решением задачи для $n=k$. Тогда набор чисел $(x_1, x_2, \dots, x_k, 1)$ — решение задачи для $n=k+1$. И наоборот: если среди $k+1$ чисел, являющихся решением задачи для $n=k+1$, имеется единица, то, убрав ее из набора, получим решение задачи для $n=k$.*

А как рождаются новые серии: (2, 3), (2, 3, 7), ...?

Пусть $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n=k$. По условию задачи, если $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1})$ — решение задачи для $n=k+1$, то $x_1 \dots x_k + 1 = Cx_{k+1}$, где C — некоторое натуральное число. Попробуем положить C равным единице (так получаются числа $3=2+1$, $7=2\cdot3+1$, $43=2\cdot3\cdot7+1$). Докажем такую лемму:

Лемма 2. *Если набор чисел $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n=k$, то набор $(x_1, \dots, x_k, x_1 \dots x_k+1)$ — решение задачи для $n=k+1$.*

Произведение первых k чисел в сумме с единицей делится на x_{k+1} по определению числа x_{k+1}. Пусть теперь число x_{k+1} входит в произведение. Обозначим через X_i произведение первых $k-1$ чисел без x_i. Нам надо показать, что $X_i x_{k+1}+1$ делится на x_i. Это следует из того, что $x_{k+1}=X_i x_i+1$; тогда $X_i x_{k+1}+1 = X_i(X_i x_i+1)+1 = x_i(X_i)^2 + (X_i+1)$, а второе слагаемое делится на x_i по условию леммы.

При помощи лемм 1 и 2 из каждого решения задачи для $n=k$ могут быть получены два решения задачи для $n=k+1$. На рисунке 1 показано, как из решений задачи для $n=2$ при помощи леммы 1 (красные стрелки) и при помощи леммы 2 (синие стрелки) таким способом получаются решения задачи сначала для $n=3$, а затем — для $n=4$.

Ниоткуда не следует, что таким путем мы получим все решения. Впрочем, легко доказать, что наборами, указанными на рисунке 1, исчерпываются все решения нашей задачи для $n=2, 3, 4$. К сожалению, из решений для $n=4$ таким способом получаются **не все** решения для $n=5$; кроме решения (2, 3, 7, 43, 1807), получающегося по рецепту леммы 2, есть еще такое: (2, 3, 7, 47, 395).

2. Сведение к уравнению

> *Даже немножечко,*
> *чайная ложечка, —*
> *— это уже хорошо.*
>
> Винни Пух

Лемма 1 позволяет здесь и дальше не рассматривать решений, содержащих 1,— с ними все ясно. Тогда, если набор $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n=k$, то все числа x_i различны (подумайте, почему).

---

*) Все эпиграфы взяты из сказки Милна «Винни Пух и Все, Все, Все».

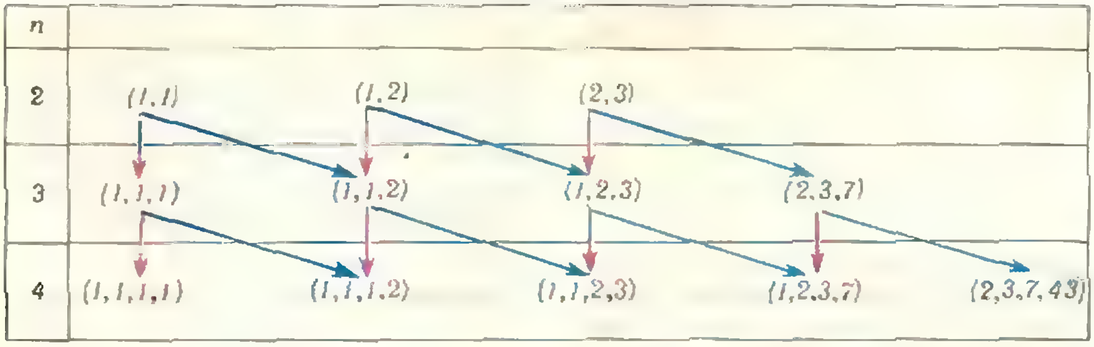


Рис. 1.

Анализируя ответы задачи при $n = 2, 3$ и 4, мы можем создать гипотезы лишь о строении этих ответов, а отнюдь не о том, как решать задачу. Посмотрим теперь, как эти ответы получаются для $n=3$.

Пусть (x, y, z) — некоторое решение задачи с тремя числами. Тогда должны выполняться равенства

$$\begin{cases} xy+1=k_1z, \\ xz+1=k_2y, \\ yz+1=k_3x, \end{cases}$$

где k_1, k_2, k_3 — какие-то натуральные числа.

Перемножив эти соотношения, получим

$$xyz\,(xyz+x+y+z)+xy+xz+yz+1=k_1k_2k_3xyz.$$

Отсюда вытекает, что $xy+xz+yz+1$ делится на xyz, то есть

$$xy+xz+yz+1=Axyz,$$

где A — натуральное число. Разделив обе части этого равенства на xyz, получим

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=A. \qquad (1)$$

Итак, любое решение задачи для $n = 3$ удовлетворяет уравнению (1). Освободившись от знаменателя, легко увидеть, что и обратно: если x, y, z — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (1), то (x, y, z) — решение задачи для $n = 3$.

Левая часть (1) принимает наибольшее значение при наименьших значениях x, y, z; если $2 \leqslant x < y < z$, то

$$A \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}=\frac{27}{24}<2.$$

Следовательно, $A = 1$ и x, y, z удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=1.$$

Ну что же, первый шаг очень естествен. Воспользовавшись определением делимости, мы от несколько неопределенных слов — *одно число делится на другое* — перешли к уравнениям — вполне конкретным и знакомым нам объектам. Правда, появились новые неизвестные k_1, k_2, k_3, которых раньше не было, но это — обычная расплата за «некоторую определенность». И второй шаг вполне понятен — желание избавиться от «лишних» неизвестных (за счет перехода от системы к одному уравнению).

Проделав аналогичную операцию для произвольного n, мы снова получим уравнение вида

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}=A, \qquad (2)$$

где A — натуральное число. Снова легко проверяется обратное утверждение:

если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (2), то набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением нашей задачи.

Итак, исходная задача эквивалентна задаче нахождения решений уравнения (2) в натуральных числах при всевозможных натуральных A. Продвижение, конечно, небольшое, но *«даже немножечко ... — это уже хорошо!»*

Окрыленные успехом, мы можем попытаться доказать, что в уравнении (2) $A = 1$. Поскольку можно считать, что $2 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, для A получаем оценку:

$$A = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}.$$

Однако уже для $n = 14$ сумма, стоящая в правой части, больше 2. Но, может быть, из этой оценки все-таки можно вывести, что величина A ограничена и потому может принимать лишь конечное число значений? Так ведь нет: сумма $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ неограниченно возрастает с увеличением n.

Упражнение 1. Докажите это.

По-видимому, наш метод оценки слишком груб. Нельзя ли его улучшить? Ясно, например, что все числа, входящие в решение, попарно взаимно просты. Поэтому, в частности, если $x_1 = 2$, то $x_3 > 4$.

Покажем, что сумму $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \ldots x_n}$ можно оценить сверху числом $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p}$, где p — n-е простое число.

Действительно, обозначим через p_i какой-нибудь простой делитель числа x_i. Заметим, что $p_i \leqslant x_i$. Поскольку числа x_i попарно взаимно просты, все p_i различны. Будем считать их упорядоченными по величине. Тогда $2 \leqslant p_1$, $3 \leqslant p_2$, $5 \leqslant p_3$ и т. д. Заменяя x_i на p_i, получаем требуемую оценку.

Может быть, сумма величин, обратных простым числам, не превосходит некоторого постоянного числа M? Это означало бы, что $A < M + 1$. Оказывается, и это неверно: с увеличением количества слагаемых сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ возрастает неограниченно *). Тем не менее полученная оценка позволяет утверждать, что $A = 1$ для всех $n \leqslant 58$. Утешительного мало, но по крайней мере ясно, почему, анализируя ответы, мы не натолкнулись на решение с константой $A = 2$: вряд ли кому-нибудь придет в голову рассматривать задачу сразу для шестидесяти чисел.

3. Добавление одного — ничего нового

Безвозмездно, то есть даром.
Сова

Кто может заранее знать, какой путь приведет к успеху? Терпение (но не упрямство) — вот принцип исследователя. Вернемся еще раз к началу нашего путешествия. Теперь у нас в руках анализ ответов и методов решения задачи для частных случаев. Пристального внимания заслуживают леммы 1 и 2 — они содержат хоть какой-то алгоритм нахождения некоторых решений. Какой подход они предлагают? В обеих леммах говорится о том, как из решения задачи для $n = k$ получить решение задачи для $n = k + 1$. Нам такой подход вполне привычен (вспомните метод математической индукции). Попробуем, считая, что задача решена для $n = k$, решить ее для $n = k + 1$.

Итак, пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$. Обозначим произведение $x_1 \ldots x_k$ через f_k. Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{f_k} = A.$$

Если число x_{k+1} дополняет набор $x_1, \ldots, x_k$ до решения задачи для $n = k + 1$ и $x_{k+1} \neq 1$, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} +$$
$$+ \frac{1}{f_k x_{k+1}} = A$$

с тем же самым A (продумайте это).

Приравнивая левые части этих двух равенств и отбрасывая одинаковые слагаемые, получаем

$$\frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{f_k x_{k+1}} = \frac{1}{f_k};$$

следовательно, $x_{k+1} = f_k + 1$. Именно так получается решение и по лемме 2! Значит, в равенстве $x_1\dots x_k+1=C\cdot x_{k+1}$ константа C равна 1 не случайно: дело тут не в простоте, а в уравнении (2). Кстати, лемма 2 *даром* следует из этого уравнения.

---

*) Доказательство этого утверждения, принадлежащего Л. Эйлеру, можно найти в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М., ГТТИ, 1954).

Таким образом, если решение задачи для $n=k+1$ получается добавлением одного числа к решению задачи для $n=k$, то оно образуется либо по лемме 1, либо по лемме 2.

4. А если добавить два?

> *Интересно, что это так бумкнуло? Не мог же я один наделать столько шума! И куда, интересно знать, девался мой воздушный шарик?*
>
> Пятачок

Итак, происхождение леммы 2, по крайней мере, прояснилось. Правда, новых решений мы не получили и по-прежнему непонятно, откуда берутся решения, не образующиеся применением лемм 1 и 2 (например, решение (2, 3, 7, 47, 395) для задачи с $n=5$). Опять тупик? Подумаем еще раз, прежде чем сойти с выбранного пути. Исчерпали ли мы все возможности нашего подхода? Кто мешает нам добавить, ну хотя бы, два числа? Попробуем.

Предположим сначала, что $(x_1,\dots,x_k)$— решение задачи для $n=k$. Тогда

$$\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{f_k}=A. \qquad (3)$$

Пусть $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},x_{k+2})$ — решение задачи для $n=k+2$ и $x_{k+1}\neq 1$, $x_{k+2}\neq 1$. Оказывается, и в этом случае

$$\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_{k+1}}+\frac{1}{x_{k+2}}+\frac{1}{f_kx_{k+1}x_{k+2}}=A \qquad (4)$$

с тем же A. Следовательно,

$$\frac{1}{x_{k+1}}+\frac{1}{x_{k+2}}+\frac{1}{f_kx_{k+1}x_{k+2}}=\frac{1}{f_k}, \qquad (5)$$

откуда

$$x_{k+2}=f_k+\frac{f_k^2+1}{x_{k+1}-f_k}. \qquad (6)$$

Поскольку x_{k+2} должно быть целым, число $d=x_{k+1}-f_k$ является делителем числа f_k^2+1. Итак,

$$\begin{cases} x_{k+1}=f_k+d,\\ x_{k+2}=f_k+\dfrac{f_k^2+1}{d}. \end{cases} \qquad (7)$$

Обозначим теперь через d произвольный делитель числа f_k^2+1 и определим числа x_{k+1}, x_{k+2} равенствами (7). Тогда для чисел f_k, x_{k+1}, x_{k+2} выполняется (6), а значит, и (5). Из (3) и (5) следует (4). Значит, расширенный набор $(x_1,\dots,x_k,x_{k+1},x_{k+2})$ является решением нашей задачи для $n=k+2$. Итак, нами доказана

Лемма 3. *Пусть $(x_1,\dots,x_k)$ — решение задачи для $n=k$, $f_k=x_1\dots x_k$ и d — делитель числа f_k^2+1. Тогда набор $\left(x_1,\dots,x_k,f_k+d,f_k+\dfrac{f_k^2+1}{d}\right)$ является решением задачи для $n=k+2$. И наоборот: если решение задачи для $n=k+2$ получается из некоторого решения задачи для $n=k$ добавлением двух чисел, отличных от 1, то добавленные числа удовлетворяют равенствам (7).*

Таким образом, если решение задачи для $n=k+2$ получается добавлением двух чисел к решению задачи для $n=k$, то оно образуется либо по лемме 2, либо по лемме 3.

Два делителя у f_k^2+1 всегда есть: это 1 и f_k^2+1. Однако легко видеть, что для таких делителей лемма 3 не дает ничего нового по сравнению с леммой 2. Но зато, если f_k^2+1 не является простым числом, то лемма 3 дает начало новой серии решений (x_{k+3} можно строить снова по лемме 2 и т. д.). Например, для решения (2, 3, 7) имеем $f_3^2+1=1765=5\cdot353$, и мы получаем из него по лемме 3 решение (2, 3, 7, 47, 395), которое мы упоминали в п. 1. Аналогично, из решения (2, 3, 7, 43) по лемме 3 получается решение (2, 3, 7, 43, 1823, 193 667) (здесь $f_4^2+1=3261637=17\cdot191861$).

Рассмотрим последовательность решений, получающихся из решения

(2, 3) по лемме 2. Назовем ее *базисной*. Каждый раз, когда число f_k^2+1 оказывается в ней составным, от нее по лемме 3 отщепляется по крайней мере одна ветка (рис. 2).

А много ли составных чисел среди чисел f_k^2+1 для базисной последовательности?

Упражнение 2. Докажите, что в базисной последовательности все числа f_{2k+1}^2+1 делятся на 5.

Из упражнения 2 следует, что по крайней мере при каждом нечетном n от базисной последовательности по лемме 3 будет отщепляться решение, порождающее по лемме 2 новую последовательность решений. Легко проверить, что решения, принадлежащие разным последовательностям, не совпадают.

Итак, всего лишь одна базисная последовательность для каждого $n>2$ порождает по крайней мере $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ решений, не содержащих 1. А гипотеза, что решений без единиц не так уж «много» (точнее, что их число ограничено константой, не зависящей от n), *«бумкнула»*. Она была бы справедлива, если бы, начиная с некоторого n, все решения действительно получались только применением леммы 2.

5. Другой подход

> *А все почему? По какой причине?*
> *И какой из этого следует вывод?*
> Иа-Иа

Конечно, путь, который был выбран, далеко не единственный. В письме читателя *А. Н. Броцкого* из Киева предлагается другой подход: вместо того, чтобы из решения задачи для $n=k$ получать решение задачи для $n=k+1$ или $n=k+2$, попробуем из решения задачи для некоторого n получить другое решение задачи для того же самого n. Броцкий предложил следующую теорему:

Пусть $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ — *решение, получающееся по лемме 2 из решения* $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})$ *и* $\frac{f_{n-2}x_n+1}{x_{n-1}}=d_1d_2$.

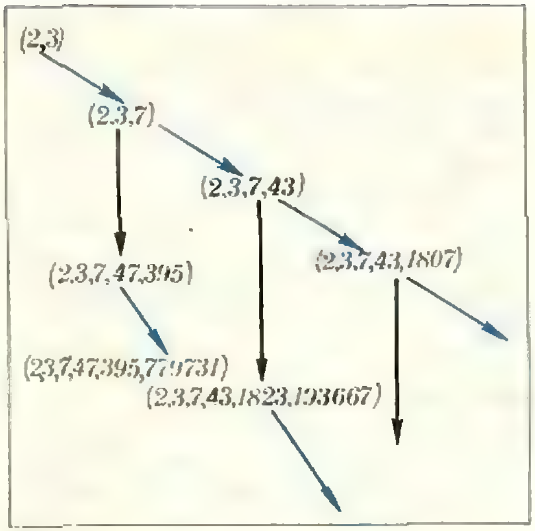


Рис. 2.

Если система уравнений

$$\begin{cases} f_{n-2}x+1=d_1y, \\ f_{n-2}y+1=d_2x \end{cases} \qquad (8)$$

имеет решение в натуральных числах, то набор $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x, y)$ *тоже является решением задачи.*

Упражнение 3. Докажите теорему Броцкого.

Своим методом А. Н. Броцкий из решения (2, 3, 7, 47, 395, 779 731) получил решение (2, 3, 7, 47, 415, 8 111), не образующееся применением леммы 3.

Упражнение 4. Проверьте, что для решений из базисной последовательности система (8) всегда имеет решение в натуральных числах.

Упражнение 5. Проверьте, дает ли метод А. Н. Броцкого, примененный к базисной последовательности, решения, не получающиеся при помощи лемм 2 и 3.

Мы пока не решили проблему до конца — не знаем, сколько решений имеет задача для данного (произвольного) n. Но мы сделали всего лишь несколько шагов, а путь еще долог. В этом наша задача ничем не отличается от проблем, которыми занимаются крупные математики. Процесс познания истины бесконечен. Он не завершается даже решением той или иной задачи, за ней следуют новые, более общие, требующие для своего решения переосмысления старых методов и изобретения новых. Как происходит такое переосмысление, какими принципами при этом должен руководствоваться исследователь, вы видели в этой статье.

В. Дуков

Конвекционные токи и токи смещения

На вопрос «Что такое электрический ток?» обычно отвечают так: это направленное движение зарядов по проводнику. Однако в этом ответе есть только доля истины. Чтобы сформулировать точный ответ, обратимся к истории вопроса.

В 1800 году итальянский физик Алессандро Вольта открыл возможность получения постоянного тока с помощью источника э. д. с., который мы называем теперь гальваническим элементом. В то время существовала гипотеза, согласно которой электричество представляет собой невесомую жидкость, способную проникать через поры тела. Естественно, что электрический ток начали представлять как движение этой жидкости по цепи. Физике предстояло пройти долгий путь, прежде чем было установлено, что внутри проводников движутся заряженные частицы вещества.

Первый шаг сделал Фарадей, показавший, что в электролитах ток представляет собой движение ионов. Ион — атом, имеющий избыток или недостаток заряда определенного знака. Таким образом, у иона две характеристики — масса и электрический заряд. При электролизе ион отдает заряд электроду и оседает на нем. Совокупность осевших ионов образует осадок, массу которого легко измерить.

Из многочисленных опытов Фарадея следовало, что ионы одной и той же валентности переносят одну и ту же порцию заряда. Кстати, именно это заключение привело позже (в 1881 году) Гельмгольца к мысли о существовании элементарного заряда (то, что он связан с элементарной частицей — электроном, физики узнали только в конце XIX века).

Заметим, что если бы Фарадей исходил из идеи элементарного заряда и законов сохранения заряда и вещества, то он мог бы два своих закона, потребовавших многолетних трудных поисков, получить из очень простых рассуждений. Допустим, что в электролите движутся N ионов, каждый из которых несет заряд Ze_0, где Z — валентность, e_0 — величина элементарного заряда. Тогда масса осевших на электроде ионов будет

$$M = Nm_0, \qquad (1)$$

где m_0 — масса иона. Эти ионы принесут на электрод заряд

$$q = NZe_0. \qquad (2)$$

Деля (1) на (2), получаем

$$M = \frac{m_0}{Ze_0} q. \qquad (3)$$

Обозначая $\frac{m_0}{Ze_0} = k$, получаем первый закон Фарадея:

$$M = kq.$$

Умножим и разделим выражение для k на число Авогадро N_A:

$$k = \frac{N_A \cdot m_0}{Ze_0 N_A} = \frac{\mu}{Ze_0 N_A} = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}, \qquad (4)$$

где μ — молярная масса вещества, $F = N_A e_0$ — число Фарадея.

Получается второй закон Фарадея.

Таким образом, законы Фарадея являются следствиями законов сохранения и факта существования элементарного заряда. Выражение (3) раскрывает физический смысл фарадеевского электрохимического эквивалента вещества: эффект нарастания массы отложившегося при электролизе вещества зависит от отношения заряда иона к его массе. Из (3) и (4) следует, что для получения осадка с большей массой нужно брать вещество с большей молярной массой и меньшей валентностью.

Отношение заряда тела к его массе в физике принято называть удельным зарядом. Это очень важная величина. Следует сразу же подчеркнуть колоссальную разницу в величинах удельного заряда микрочастиц и макроскопических тел. Для «легкой» элементарной частицы — электрона

$$\frac{e_0}{m_e} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\text{Кл}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\,\text{кг}} \approx 2\cdot 10^{11}\ \text{Кл/кг},$$

для «тяжелой» — протона

$$\frac{e_0}{m_p} \approx 10^8\ \text{Кл/кг}.$$

Чтобы эти величины произвели впечатление, попробуем вычислить удельный заряд шарика радиусом 1 см из алюминиевого сплава плотностью $\rho = 2\cdot 10^3$ кг/м³. Его масса

$$m = \rho V = 4/3\pi r^3\cdot\rho \approx \frac{4\cdot 3{,}14}{3}(10^{-2})^3\cdot 2\times 10^3\ \text{кг} \approx 8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}.$$

Какой заряд может удержаться на таком шарике? Известно, что интенсивное стекание заряда с поверхности тела начинается при напряженности электрического поля $E_0 \approx 3\cdot 10^6$ В/м. Напряженность поля сферы радиуса r с зарядом q равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Максимальный заряд, который может «удерживаться» на такой сфере, определяется условием $E = E_0$. Таким образом,

$$q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E_0 \approx 4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}86\times 10^{-12}(10^{-2})^2\cdot 3\cdot 10^6\ \text{Кл} \approx 3\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

Итак, максимальный удельный заряд алюминиевого шарика будет

$$\frac{q_{\max}}{m} \approx \frac{3\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}}{8\cdot 10^{-3}\ \text{кг}} \approx 4\cdot 10^{-6}\ \text{Кл/кг}.$$

Удельный заряд протона превышает удельный заряд алюминиевого шарика в 10^{13} раз!

Представим себе, что мы хотели бы получить с помощью заряженных алюминиевых шариков ток в 1А. По определению $I = q/t$. Заряд одного шарика обозначим через q_1; тогда $q = Nq_1$, где N — число шариков. Ток $I = \frac{Nq_1}{t}$, и $N = \frac{It}{q_1} \approx \frac{1\text{А}\cdot 1\text{с}}{3\cdot 10^{-8}\ \text{Кл}} \approx 3\cdot 10^7$. Поток шариков должен быть таков, чтобы через фиксированную площадку проходило в одну секунду 30 млн. шариков! Если этот поток представить себе в трубе, то ее сечение должно быть

$$S = N\pi r^2 = 3{,}14\cdot 30\cdot 10^6 \times (10^{-2})^2\ \text{м}^2 \approx 10^4\ \text{м}^2!$$

В то же время ток в один ампер проходит через проволочку диаметром в доли миллиметра, лишь раскаляя ее. Это объясняется именно тем, что микрочастицы (электроны) обладают большим удельным зарядом.

Вернемся снова к вопросу о природе тока. Ток создается движением заряженных частиц. Не зарядов, а заряженных частиц! И хотя мы пишем $I = q/t$, под зарядом q мы понимаем сумму зарядов частиц, имеющих определенную массу. Поэтому электрический ток обладает механическими свойствами. Впервые они были обнаружены в опытах Толмена и Стюарта. Соленоид, к концам которого был присоединен гальванометр, приводился в быстрое вращение, а затем резко останавливался. Гальванометр при этом фиксировал ток, а направление этого тока соответствовало движению отрицательно заряженных частиц. В этих опытах был измерен удельный заряд частиц, движение которых обуславливало ток. Оказалось, что найденная величина совпала с величиной удельного заряда электрона, найденной по отклонению в электрическом и магнитном полях. Опыты Толмена и Стюарта впервые указали на существование в металлах свободных электронов. Будучи слабо связанными с кристаллической решеткой, электроны после остановки соленоида продолжали движение по инерции — возникал кратковременный ток.

В электролитах ток представляет собой двойной поток ионов, перемещающихся в противоположных направлениях. Ионы имеют одинаковые заряды, но различные массы. Например, в растворе медного купороса носителями тока являются ионы Cu^{++} и SO_4^{--}. Масса иона меди равна 63,5 а. е. м., масса иона SO_4^{--} $32{,}1 + 4\cdot 16 = 96{,}1$ — значительно больше.

На простом опыте, который можно

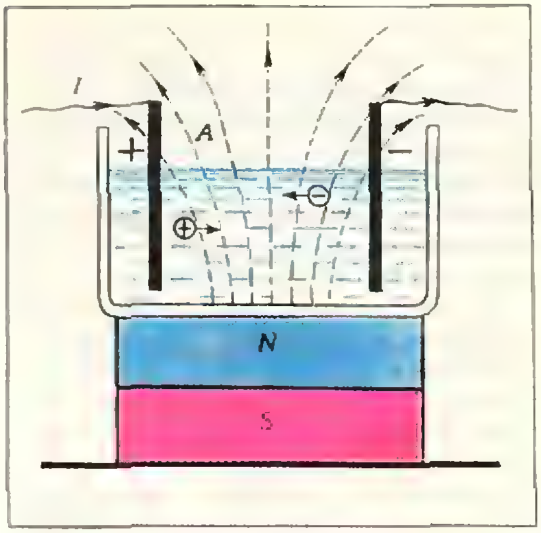


Рис. 1

поставить в домашних условиях, легко обнаружить эту разницу.

Банка с двумя электродами заполняется раствором медного купороса. На поверхность жидкости высыпаются легкие тела, например, мелкие обрезки бумаги. Включается постоянный ток. Если снизу к банке поднести постоянный магнит (рис. 1), бумажки приходят во вращательное движение. Объясняется этот эффект тем, что действующая на движущиеся ионы со стороны магнитного поля сила Лоренца закручивает ионы. Вращающиеся ионы увлекают за собой молекулы воды, и вся жидкость начинает вращаться. Бумажки, плавающие на поверхности, фиксируют эффект. Естественно, сила Лоренца закручивает и ионы Cu^{++}, и ионы SO_4^{--}. Однако направление вращения жидкости определяется направлением движения более тяжелых ионов (ионов SO_4^{--}). Вращение, вызванное увлечением легкими ионами Cu^{++}, «подавляется» вращением более тяжелых ионов SO_4^{--}. Изменение направления тока или полярности магнита приводит к изменению направления вращения электролита.

Аналогичный эффект имеет место в случае «стекания» заряда с острия.

Известно, что плотность заряженных частиц резко увеличивается в направлении к острию, поэтому вокруг него существует сильное электрическое поле. Нейтральные молекулы воздуха в таком поле ионизуются. Если острие имеет положительный заряд, то имеющиеся в воздухе электроны натекают на острие, а положительные ионы движутся в противоположном направлении. Поток этих ионов увлекает нейтральные молекулы воздуха, так же как поток ионов в электролите увлекает молекулы воды. Создается так называемый «электрический ветер». Опыт с задуванием свечи таким ветром демонстрировал еще Франклин в середине XVIII века.

В рассмотренных случаях мы имеем дело с конвекционными потоками жидкости и воздуха. Исторически именно опыт с задуванием свечи привел к понятию конвекционного тока. Считалось, что наряду с обычной конвекцией — потоком нейтральных частиц — существует электрическая конвекция — поток заряженных частиц. Действительно, дальнейшие исследования показали, что токи в металлах, электролитах и газах сводятся к потоку заряженных частиц. Поскольку эти частицы обладают массой, то принципиальной разницы между обычной конвекцией и электрической конвекцией нет. В работе 1875 г. Гельмгольц писал: «Я употребляю это слово [конвекция — *В. Д.*] в том смысле, в каком оно применяется в теории теплоты, чтобы обозначить распространение электричества посредством перемещения электрически заряженных тел». Гельмгольц же поставил принципиально важный вопрос: можно ли рассматривать движение заряженных макроскопических тел (например, наших алюминиевых шариков) как обычный конвекционный ток.

Ответ на этот вопрос мог дать опыт, аналогичный тому, который произвел датский физик Ганс Христиан Эрстед в 1820 г. Он обнаружил, что если вблизи проводника с током поместить магнитную стрелку, то она отклоняется. На стрелку действует сила, пропорциональная величине тока. Направление этой силы зависит от направления тока.

Гельмгольц предложил своему ученику Генри Роуленду поставить следующий опыт: зарядить диск, поме-

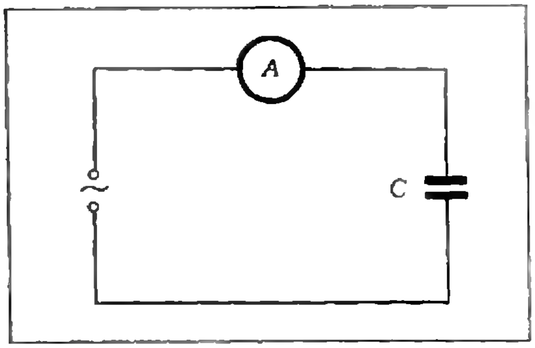


Рис. 2.

стить около него магнитную стрелку и привести диск во вращение. Если вращение заряженного диска эквивалентно протеканию тока (по замкнутой цепи), то как и в случае тока, вращение диска должно вызывать появление магнитного поля.

Действительно, Роуленд обнаружил отклонение магнитной стрелки. Эксперимент был трудный. Как уже говорилось, макроскопические тела не могут «транспортировать» большие заряды. Поэтому приходилось измерять магнитное поле очень слабого тока.

Итак, токи во всех веществах — жидких, твердых, газообразных — сводятся к токам конвекционным. А может ли ток существовать в вакууме, где нет частиц вещества? Обратимся к опыту, схема которого изображена на рисунке 3. Если включить источник переменной э. д. с., амперметр зафиксирует ток. Опыт дает следующий результат. Величина тока в цепи пропорциональна частоте колебаний, генерируемых источником э. д. с., и величине емкости конденсатора. Описанный опыт был известен еще в прошлом веке. Объясняли его так: источник э. д. с. заставляет заряженные частицы колебаться в проводнике, соединяющем обкладки, они «бегают» от обкладки к обкладке, при этом между обкладками ничего не происходит, ибо там — вакуум. В этих рассуждениях ток представляется в виде механического процесса движения заряженных частиц.

Гениальный английский физик Джеймс Клерк Максвелл ввел принципиально новое представление. Движущиеся заряженные частицы связаны с электрическим и магнитным полями. Изменение тока приводит к изменению полей. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, которое сводится, по Максвеллу, к возбуждению электрического поля при изменениях поля магнитного. Уверенный в симметрии электромагнитных явлений, Максвелл предположил, что изменения электрического поля порождают поле магнитное.

В цепи, изображенной на рисунке 3, между пластинами конденсатора изменяется электрическое поле. Согласно Максвеллу, этот процесс приводит к появлению магнитного поля. Но магнитное поле вызывается током. Следовательно, процесс, происходящий между обкладками конденсатора, можно интерпретировать как протекание тока. Не существует «концов» тока. Если цепь разорвана диэлектриком или вакуумом, ток продолжает свой путь, только он будет иметь иную природу. Максвелл назвал этот ток током смещения. Происхождение термина таково. Максвелл предполагал, что пространство, кажущееся нам пустым, заполнено материальной средой с особыми свойствами — эфиром. Эфир имеет ячеистую структуру (такую, например, как кристаллические решетки), и под действием сил электрического поля ячейки могут деформироваться — смещаться, подобно тому как смещаются частицы диэлектрика.

Ток может быть вызван как конвекцией, так и смещением. В случае конвекционного тока его величина пропорциональна скорости перемещения заряженных частиц; ток смещения определяется скоростью смещения, а она, естественно, пропорциональна частоте колебаний. Чем больше емкость конденсатора, тем больше будет объем эфира (при заданном расстоянии между обкладками), следовательно, тем больше будет ячеек и больше эффект смещения. Такова физическая картина.

Математически свою гипотезу Максвелл выразил так:

$$i_{см} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt}$$

—ток смещения пропорционален площади S разрыва цепи (или площади пластины конденсатора) и скорости изменения напряженности электрического поля ($\varepsilon_0 = 8{,}86\cdot10^{-12}$ Ф/м).

Допустим, что источником э. д. с. служит генератор промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц) с напряжением, изменяющимся по закону $u = U_0 \sin \omega t$, где $U_0 = 200$ В. Мы захотели получить максимальный ток смещения в 1 А. Какой должна быть в этом случае площадь пластины плоского конденсатора, если расстояние между пластинами $d = 1$ м?

Известно, что $E = \frac{u}{d}$. Поэтому

$$i_{см} = \varepsilon_0 S \frac{1}{d} \frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \omega U_0 \cos \omega t.$$

Отсюда $I_0 = \frac{\varepsilon_0 S \omega U_0}{d}$, и

$$S = \frac{I_0 d}{\varepsilon_0 \omega u_0} \approx 2 \cdot 10^6 м^2 = 2 \cdot 10^{12} мм^2.$$

Если конденсатор убрать, то между концами разрыва цепи при сечении проводов в 1 мм² ток будет равен $5 \cdot 10^{-13}$ А. Если длину разрыва уменьшить до 1 мм, ток будет в 10^3 раз больше, то есть составлять десятимиллиардные доли ампера — практически нуль. В тех же условиях ток в один ампер мы получим, если увеличим частоту колебаний до 10^{11} Гц, то есть, перейдем в область радиотехнических частот.

Этот расчет показывает, что токи смещения становятся существенными только при очень высоких частотах колебаний. Поэтому в электротехнике токи смещения вообще игнорируют. В радиотехнике ситуация обратная: там они играют первую роль.

Мы всегда стремимся образно представить себе физический процесс. Что такое ток? Первая ассоциация всегда такова: ток — это перемещение частичек по проводнику, их направленное движение. Но эта по существу механическая модель является лишь грубым отображением реальности. К ней надо относиться осторожно.

Давайте уточним представление о токе. Прежде всего речь идет не просто о частичках, а о движущихся частичках, имеющих электрический заряд, а следовательно, окруженных электромагнитным полем. Последнее определяется двумя компонентами — векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В случае постоянного тока электрическая компонента $\vec{E}$ не фиксируется приборами. В каждом кусочке провода, по которому идет ток, имеется одинаковое число положительных и отрицательных зарядов, и их суммарное электрическое поле равно нулю. Приборы обнаруживают вокруг проводника с постоянным током только магнитную компоненту $\vec{B}$.

В случае переменного тока проявляются обе компоненты, причем происходит процесс индукции: изменение электрической компоненты порождает магнитную, изменение магнитной — электрическую. Можно сказать, начинается генерация полей. Переменное электромагнитное поле «отрывается» от проводника с током и распространяется в пространстве со скоростью света в виде электромагнитных волн.

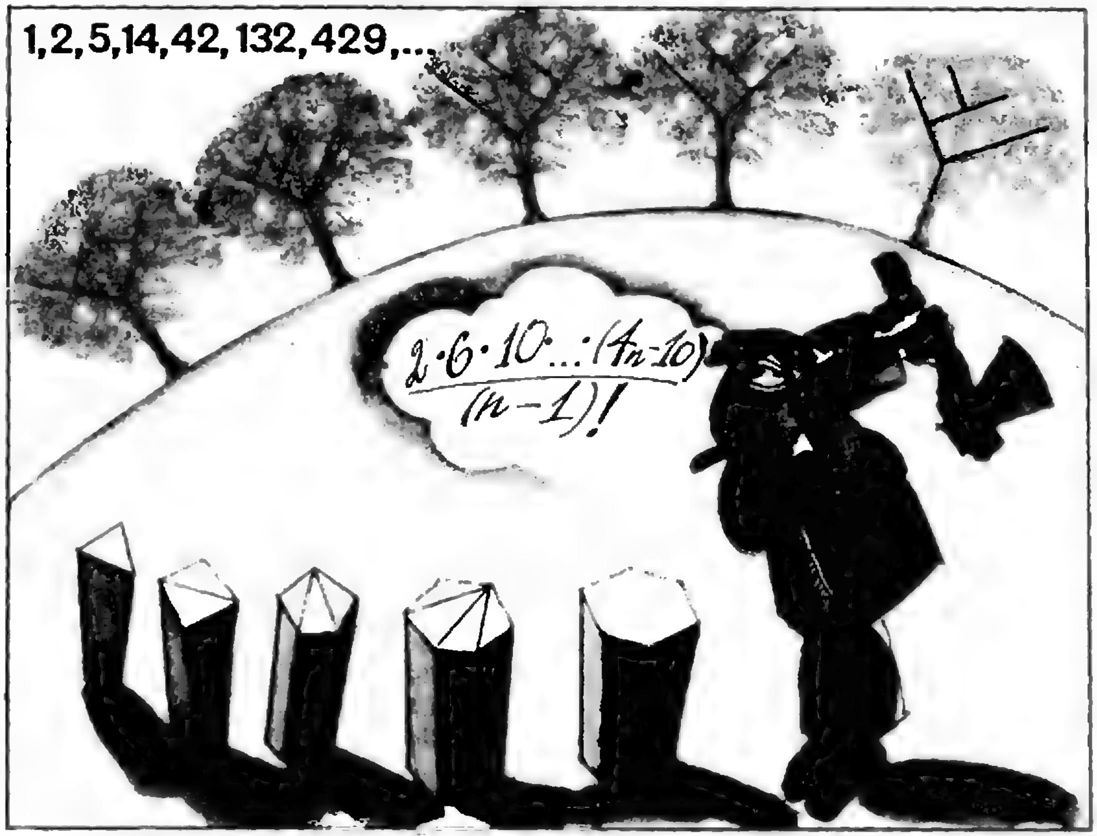
Обратимся еще раз к формуле Максвелла, опустив постоянный коэффициент пропорциональности $\varepsilon_0 S$:

$$I_{см} \sim \frac{dE}{dt}$$

Производная $\frac{dE}{dt}$ имеет физический смысл скорости изменения электрического поля во времени. Чем быстрее меняется электрическая компонента $\vec{E}$, тем больше ток смещения. Но изменение компоненты $\vec{E}$ порождает магнитную компоненту $\vec{B}$. Значит, чем больше ток смещения, тем сильнее магнитное поле.

А в случае постоянного тока — конвекционного тока? Чем больше ток, тем сильнее магнитное поле. Та же пропорциональность между током и магнитным полем.

Таким образом, говоря о токе, нужно иметь в виду прежде всего электромагнитное поле вокруг тока И вопрос о том, что такое ток, следует уточнять: какой ток имеется в виду? Если постоянный — центральную роль играет движение заряженных частичек, которые имеются в проводнике, конвекционные процессы. Если переменный — то эту роль начинает играть электромагнитное поле, и игра эта тем ярче и отчетливее, чем больше частота электромагнитных колебаний.



М. Гарднер

Числа Каталана

В этой статье рассказывается о замечательной последовательности целых чисел, возникающей в самых неожиданных местах *)

Любому математику (и ученому вообще) очень часто приходится сталкиваться с бесконечными последовательностями целых положительных чисел. Если последовательность простая, как, например, последовательность удваивающихся чисел (1, 2, 4, 8, 16, ...) или последовательность квадратов (1, 4, 9, 16, 25, ...), то она распознается сразу же. Редкий математик не сможет узнать числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8...) или треугольные числа (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...). Если же последовательность не столь известна, то можно потратить много времени в поисках задающего ее рекуррентного или нерекуррентного закона. (Закон является реккурентным, если вычисление следующего члена требует знания предыдущих членов; нерекуррентная формула дает n-й член, не требуя знания предыдущих.)

Трудно поэтому поверить, что только в 1973 году в США был издан «Справочник числовых последовательностей». В этой бесценной книге, составленной Н. Дж. А. Слоуном, описано более 2300 целочисленных последовательностей, каждая из которых имеет свой номер. Математик, столкнувшийся с неизвестной ему последовательностью, не должен более тратить время, пытаясь отыскать формулу, ее задающую. Он попросту найдет эту последовательность в книге Слоуна. Она почти наверняка будет приведена в справочнике с дополнительными сведениями, из которых читатель сможет узнать, что это за штука.

---

*) M. Gardner, Mathematical Games, Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places. «Scientific American», June 1976, p. 120—125. Перевод А. Вайнштейна и Е. Черник. Печатается с разрешения журнала «Scientific American», за которым сохраняются все права ©.

В этой статье мы рассмотрим последовательность

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots,$$

имеющую в справочнике номер 577. Члены этой последовательности называются *числами Каталана*. Они не так хорошо известны, как числа Фибоначчи, но обладают тем же прелестным свойством неожиданно появляться в самых непредвиденных местах, особенно в комбинаторных задачах. В 1971 году математик из университета Зап. Виргинии Генри Гулд опубликовал библиографию, содержащую 243 ссылки на случаи использования чисел Каталана; во многих случаях авторы статей даже не подозревали, что имели дело с последовательностью, известной в течение более чем двух веков. В 1976 году Гулд увеличил число ссылок до 450. Вообще, числа Каталана — часто встречающаяся последовательность; тем не менее она достаточно неизвестна, чтобы заставить математика, лишенного доступа к справочнику Слоуна, затратить большие усилия на переоткрытие формул, выведенных много лет назад.

Первым с числами Каталана столкнулся Леонард Эйлер. Он подсчитал, сколькими способами выпуклый многоугольник может быть разделен на треугольники непересекающимися диагоналями. В качестве примера можно привести случай треугольника, квадрата, пятиугольника и шестиугольника (рис. 1). Заметим, что в каждом из этих случаев, независимо от количества сторон n-угольника, число диагоналей равно $n-3$, а число треугольников $n-2$. Легко доказать, что это соотношение выполняется вообще для всех многоугольников. Числа различных триангуляций указанного вида для каждого из этих четырех многоугольников есть первые четыре члена последовательности Каталана.

Эйлер, используя метод математической индукции, который здесь, по его словам, оказался трудоемким, получил такую формулу:

$$\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}.$$

Сомножители, стоящие в числителе, задаются формулой $4n-10$, где n — целое положительное число большее 2. Восклицательный знак, конечно же, обозначает факториал (произведение всех целых положительных чисел, не превосходящих данного числа). Например, при $n=6$ (случай шестиугольника) формула

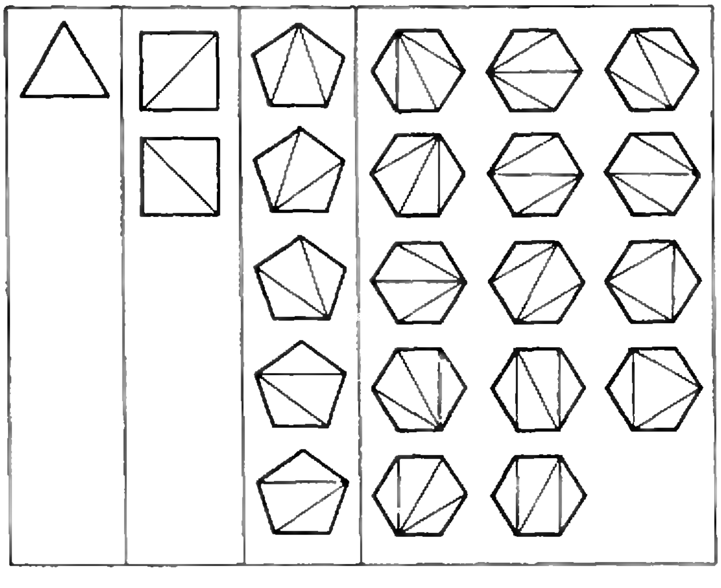
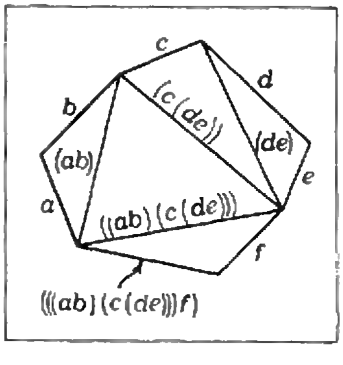


Рис. 1. Задача Леонарда Эйлера о триангуляции многоугольника.

Рис. 2. «Скобочная» триангуляция семиугольника.



принимает вид

$$\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14}{5!}=14.$$

Очень простые рекуррентные формулы получаются, если поместить еще одну единицу перед рядом 1, 2, 5, 14, ... (Получим ряд 1, 1, 2, 5, 14...) Пусть k — последнее вычисленное число Каталана, а n — номер следующего числа. Тогда это число вычисляется по формуле

$$\frac{k\,(4n-6)}{n}.$$

Современник Эйлера Иоганн Андреас фон Сегнер получил загадочную рекуррентную формулу для последовательности Каталана вида 1, 1, 2, 5, ... Запишем в ряд все уже найденные числа Каталана, а под ними запишем те же числа в обратном порядке. Умножим каждое верхнее число на соответствующее нижнее и сложим получившиеся произведения; результат и будет следующим числом Каталана. Например,

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{c} 1\;1\;2\;5\;14 \\ 14\;5\;2\;1\;1 \end{array} \\ \hline 14+5+4+5+14=42 \end{array}$$

Задача Эйлера о триангуляции многоугольника в некотором смысле изоморфна задачам, казалось бы, совсем с ней не связанным. Сам Эжен Шарль Каталан, бельгийский математик, именем которого названа последовательность, в 1838 году решил следующую задачу. Пусть у нас имеется цепочка из n букв, расположенных в заданном порядке. Необходимо расставить $n-1$ пару скобок таким образом, чтобы внутри каждой пары стояло ровно два «выражения». Этими спаренными выражениями могут быть либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения. Сколькими способами могут быть расставлены скобки?

Для двух букв a, b, имеется только одна возможность: (ab). Для трех букв таких возможностей уже две: $((ab)\,c)$ и $(a\,(bc))$. Для четырех букв количество способов увеличивается до пяти: $((ab)\,(cd))$, $(((ab)\,c)\,d)$, $(a\,(b\,(cd)))$, $(a\,((bc)\,d))$ и $((a\,(bc))\,d)$.

Эти числа 1, 2 и 5 есть первые три числа Каталана; оказывается, числа Каталана дают нам количество способов расстановки скобок в буквенных цепочках соответствующих длин.

В 1961 году Фордер, описывая числа Каталана, указал простой способ установления взаимно однозначного соответствия между описанными выше триангуляциями многоугольников и расставлением скобок в буквенных цепочках. В качестве примера рассмотрим триангулированный семиугольник (рис. 2). Обозначим все его стороны, кроме одной, буквами от a до f. Каждую диагональ, образующую треугольник с двумя смежными сторонами семиугольника, обозначим буквами этих сторон, взятыми в скобки. Все оставшиеся диагонали последовательно обозначим буквами подобным же образом, комбинируя обозначения двух других сторон соответствующего треугольника. Основание обозначается последним, и обозначение для него однозначно определяется триангуляцией. Если применить этот прием для многоугольников, изображенных на рисунке 3, то получим цепочки букв с расставленными скобками.

Английский математик Артур Кэли доказал, что числа Каталана перечисляют все плоские корневые кубические деревья*). Дерево — это связный граф (вершины, соединенные отрезками), не имеющий циклов. «Плоский» означает, что граф нарисован на плоскости без пересечений. «Корневое» — что дерево имеет «ствол», конец которого назван корнем. Таким образом, граф можно нарисовать в виде как бы растущего вверх из земли дерева. «Кубическое» означает, что в каждой вершине (кроме корня и концов веток) дерево разветвляется, образуя точки, в которых встречаются 3 ребра.

Изображение такого дерева (рис. 3) говорит само за себя. Цветные линии показывают, как триангуляция многоугольника порождает корневое кубическое дерево. Рядом с многоугольниками эти деревья изо-

---

*) Именно. n-е число Каталана равно количеству плоских корневых кубических деревьев с $(n+1)$-й концевой вершиной. (*Прим. ред.*)

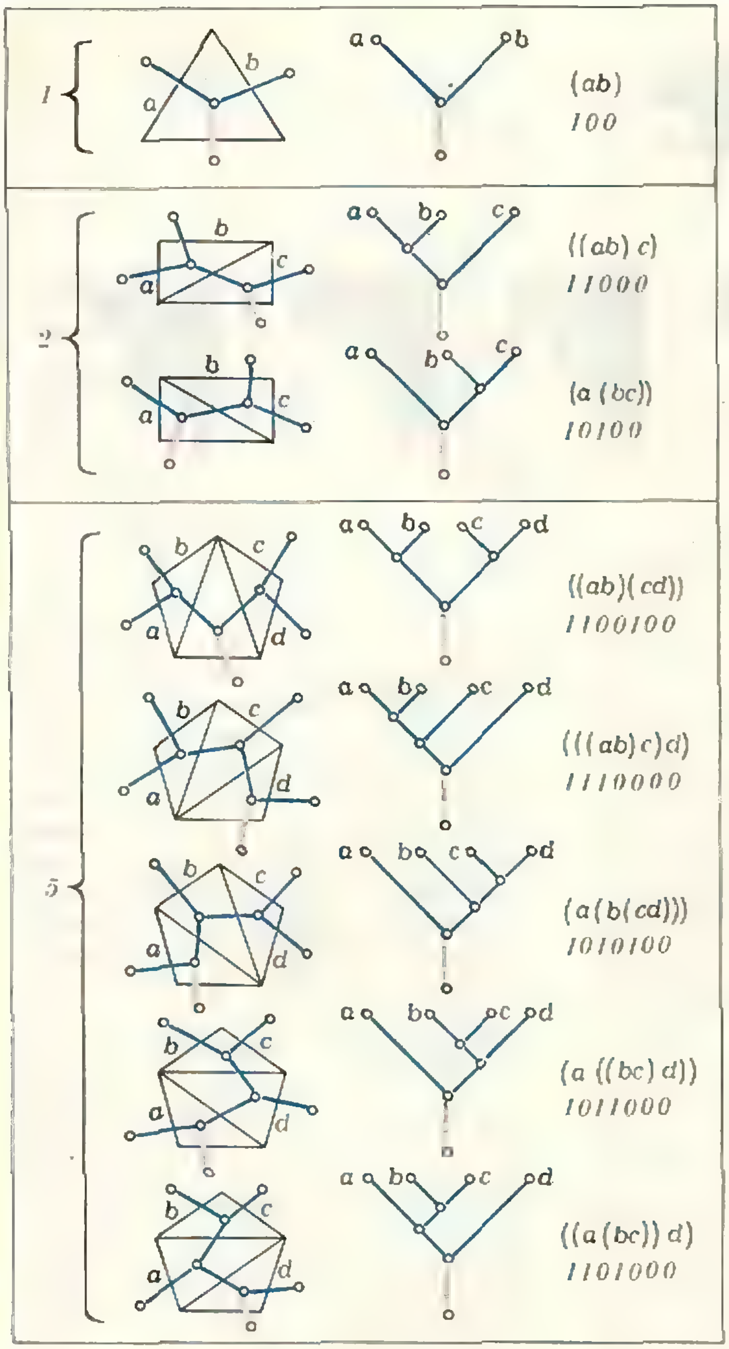

1
a
b
(ab)
100
2
c
((ab) c)
11000
(a (bc))
10100
5
d
((ab)(cd))
1100100
(((ab)c)d)
1110000
(a(b(cd)))
1010100
(a ((bc) d))
1011000
((a (bc)) d)
1101000

Рис. 3. Триангуляция и корневые кубические деревья.

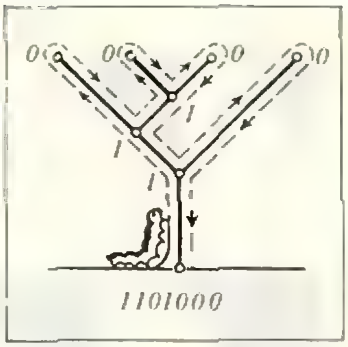

0
0
0
0
1
1
1
1
1101000

Рис. 4.

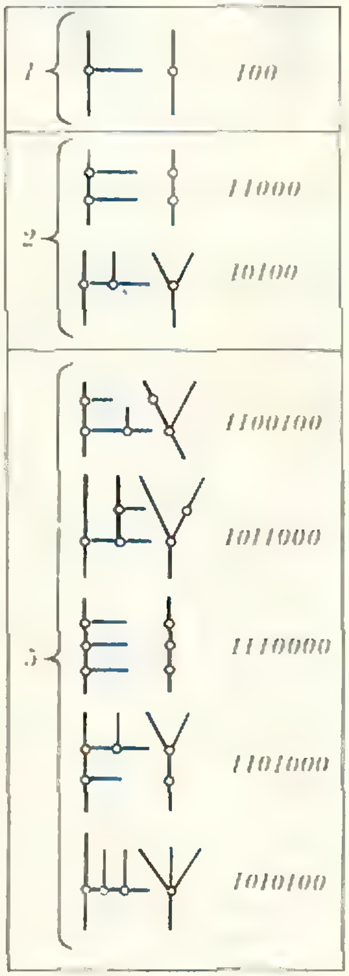

1
100
2
11000
10100
5
1100100
1011000
1110000
1101000
1010100

Рис. 5. Преобразование корневых кубических деревьев в корневые деревья с фиксированным числом ребер.

бражены в общепринятом виде. Легко понять, каким образом порядок расположения ветвей соответствует расстановке скобок. Под каждой цепочкой букв со скобками мы запишем двоичное число, получаемое заменой всех левых скобок единицами, а всех букв — нулями, пропуская правые скобки. Эта двоичная запись — удобный краткий способ записи нашей триангуляции многоугольника и соответствующего этой триангуляции дерева. Нам нет необходимости вводить обозначения для правых скобок, так как если задано положение левых скобок и метод группировки букв,

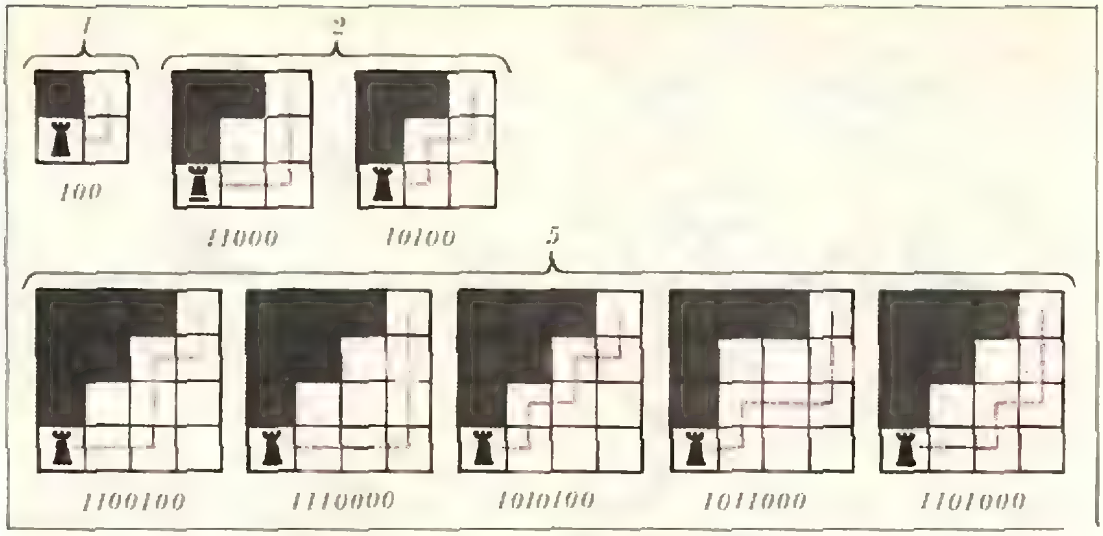


Рис. 6. Как числа Каталана перечисляют пути ладьи.

то правые скобки могут быть расставлены единственным образом.

Польский математик Ян Лукасевич предложил удобный способ нахождения двоичного числа, соответствующего данному дереву (рис. 4). Нарисуем дерево с четырьмя верхними ветвями. Концы этих ветвей помечены нулями, а кубические вершины — единицами. Представим себе червяка, взбирающегося по стволу и обходящего все дерево вдоль пунктирной линии (рис. 4). На каждой вершине червяк объявляет метку. Однажды объявленная метка второй раз не называется. В нашем примере червяк объявит метки 1101000, дающие то самое двоичное число, которое отвечает расстановке скобок в выражении, соответствующем этому дереву.

В 1964 году было обнаружено, что число произвольных корневых деревьев с n ребрами также равно n-му числу Каталана. У таких деревьев всего n вершин, не считая корня, но вершины могут иметь любую степень.

Можно указать много способов установления взаимно однозначного соответствия между такими деревьями и корневыми кубическими деревьями. Простейший способ был указан Фрэнком Бернхартом (рис. 5). Кубические деревья перерисуем так, чтобы каждое ребро росло от вершины вертикально вверх или горизонтально вправо. Представим себе, что каждое горизонтальное ребро (на рисунке 5 — синие линии) стягивается в точку и исчезает. Если на правом конце горизонтального ребра есть кубическая вершина, то она переносится налево и сливается с вершиной на левом конце. Все вертикальные ребра остаются различными. Это простое преобразование переводит все корневые кубические деревья с n концевыми вершинами в корневые деревья с n ребрами.

Червяк, обползающий любое дерево из этого нового множества (см. рисунок 5, правое дерево в каждой паре), назовет то же самое двоичное число, что и на исходном дереве, если он изменит свой алгоритм следующим образом. Он начинает не с корня, а с нижней вершины. Каждый раз, когда червяк лезет вверх по ребру, он записывает 1, когда же он лезет вниз, то записывает 0.

Рассмотрим шахматные доски со сторонами 2, 3, 4, ..., в которых закрашены все квадраты северо-западнее главной диагонали (рис. 6). Требуется провести ладью из левого нижнего угла в правый верхний. Двигаться можно только на север и на восток, не заходя при этом на закрашенные клетки. Спрашивается, сколько существует различных путей ладьи на доске со стороной n?

И снова дают ответ числа Каталана. Под стороной длины n напишем двоичное число, соответствующее корневому кубическому дереву с n концевыми вершинами. Продвигаясь по двоичным разрядам числа слева направо, будем двигать ладью вправо, проходя 1, и вверх, проходя 0 (последняя двоичная цифра не учитывается). Эта последовательность двоичных цифр определяет путь, и все пути ладьи могут быть получены таким же образом.

Ниже приводятся еще 7 занимательных задач, решаемых с помощью чисел Каталана. В первых пяти я отметил, как соответствующие двоичные числа (без последней цифры) дают решение задачи.

1. Два человека, A и B, баллотируются на должность. Каждый из них получает n голосов. Сколькими способами можно подсчитать $2n$ голосов так, чтобы ни разу A не был впереди B? (1 — голос за A, 0 — голос за B).

2. Положим пенни, никель и дайм*) в ряд. На пенни положим лицом вверх колоду из n карт, идущих по старшинству снизу вверх. За один раз карту можно передвинуть или с пенни на никель, или с никеля на дайм (другие перемещения не разрешаются). Пользуясь этими двумя ходами, мы перенесем все карты на дайм за $2n$ ходов. Сколько разных перестановок можно получить на дайме, если исходное количество карт n? (1 — перемещение с пенни на никель, 0 — перемещение с никеля на дайм).

3. Пьяница выходит из дверей бара и бредет вперед. Он с равной вероятностью делает шаг вперед или назад, причем все шаги его равны по длине. Сколькими способами он может вернуться к двери за $2n$ шагов? (1 — шаг вперед, 0 — шаг назад.)

Этой задаче о случайном блуждании можно придать другую форму. Король начинает с 1-го ряда шахматной доски, и, делая ход вперед или назад по вертикали, возвращается на исходную клетку после $2n$ ходов. Нарисуем пространственно-временную диаграмму, откладывая время по горизонтальной оси. Зигзагообразную линию можно рассматривать как профиль горной цепи с пиками высотой в целое число миль, не превышающее n. Кривые ходов короля изобразят все горные цепи такого вида.

4. Четное число ($2n$) солдат, все разного роста, построены в две равные шеренги — A и B. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы слева направо в каждой шеренге солдаты расположились в порядке увеличения роста, и любой солдат в шеренге B был выше соответствующего солдата в шеренге A? (Занумеруем солдат числами 1, 2, 3, ..., по возрастанию роста, и занумеруем также слева направо цифры в двоичных числах, соответствующих корневым деревьям с n ребрами. Тогда номера единиц дадут положение солдат в ряду A, а номера нулей — в ряду B. Эта задача легко моделируется с помощью колоды карт.)

5. Билеты стоят 50 центов, и $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина из них имеет по 1 доллару, остальные — по 50 центов. Кассир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких что кассир всегда сможет дать сдачу? (1 — 50 центов, 0 — 1 доллар.)

6. Гексафлексагоны — это занимательные игрушки, получающиеся при складывании прямых или зигзагообразных полос бумаги в шестиугольники, которые меняют свою лицевую поверхность при перегибании (они описаны в главе 1 моей книги*). Правильный гексафлексагон определенного типа при перегибании проходит через различные состояния. Общее количество таких состояний для всех правильных гексафлексагонов с n поверхностями является числом Каталана. Например, гекса-гексафлексагон (6 поверхностей) может быть сделан тремя способами. Полное число всех состояний — число Каталана 42.

Если мы не будем обращать внимание на состояния гексафлексагона

---

*) Пенни, никель, дайм — мелкие монеты: 1, 5, 10 центов США. (*Прим. перев.*)

*) М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения, «Мир», 1971 г.

1.	a 1				
2.	aa 1	ab 2			
5.	aaa 1	aab 2	aba 3	abb 4	abc 5
15.	aaaa 1	aaab 2	aaba 3	abaa 4	abbb 5
	aabb 6	abba 7	abab 8	aabc 9	abac 10
	abca 11	abbc 12	abcb 13	abcc 14	abcd 15

Рис. 7. Как числа Белла перечисляют рифмовки.

и заинтересуемся, сколькими существенно различными способами можно сделать гексафлексагон с n поверхностями, то ответ дается последовательностью, перечисляющей триангуляции многоугольников без учета тех, которые получаются вращением или отражением уже полученных. Эта замечательная последовательность (№ 942 по книге Слоуна) имеет вид 1, 3, 4, 12, 27, 82, 228, 733, 2282, 2528, ...

В неопубликованных статьях Бернхарта и других энтузиастов, интересующихся флексагонами, описано, как смену состояний, возникающую при перегибании флексагона с n поверхностями, можно наглядно представить, двигаясь вдоль линий $(n+1)$-угольника, разбитого на треугольники.

7. За круглым столом сидит четное число человек. Каждый пожимает руку одному из остальных так, что никакие две пары соединенных рук не пересекаются. Сколькими способами это можно сделать?

Можете ли вы найти простой геометрический способ установления взаимно однозначного соответствия между этой задачей и каждой из предыдущих? (Имеется изящный способ, предложенный Бернхартом.)

Нерекуррентные формулы для n-го числа Каталана имеют различный вид в зависимости от того, как занумерованы члены последовательности. Формула приобретает простейший вид, если последовательность начинается так: 1, 2, 5, ... При такой нумерации n-м числом Каталана будет

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Если последовательность начинается с 1, 1, 2, 5, ..., то оказывается, что все нечетные числа Каталана, большие единицы, стоят на тех и только тех местах, номера которых являются степенью двойки. Так, четвертое, восьмое, шестнадцатое и т. д. числа Каталана — нечетные. Это только одно из многих необычайных свойств последовательности.

Предостережение: решая комбинаторные задачи, легко перепутать числа Каталана с тесно связанной с ними последовательностью 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877... (В примечании к своей библиографии, которая также включает список ссылок на указанную выше последовательность, Гулд отмечает, что если подсчитываемые объекты достаточно сложны, то при $n=4$ легко можно пропустить 15-й объект и предположить, что имеешь дело с последовательностью Каталана.) Эти числа называются числами Белла по имени Эрика Белла, опубликовавшего много статей на эту тему. Числа Белла перечисляют разбиения на классы множества из n элементов. Например, количество различных рифмовок для строфы из n строчек есть число Белла. Четырехстишие имеет 15 возможных рифмовок. Если на правила рифмовки в сонете (состоящем из 14 строчек) махнуть рукой, получится 190 899 322 различных рифмовок (14-е число Белла).

На рисунке 7 показывается, как числа Белла перечисляют все рифмовки для строф, содержащих от одной до четырех строк. Рифмующиеся между собой строки соединим дугами. Отметим, что лишь когда мы добрались до четверостиший, потребовалось пересечение дуг (№ 8). Джоанна Гроуми, исследовавшая эту проблему в 1970 году в своей докторской диссертации, назвала рифмовки, которые не нуждаются в пересечении дуг, плоскими. Числа Белла перечисляют все рифмовки, числа Каталана — только плоские рифмовки.

Числа Белла стоят в справочнике Слоуна под номером 585. Но колокола*) вызванивают другую историю, которую мы отложим до будущих времен.

---

*) У Гарднера здесь игра слов: Bell (Белл) — bell (колокол). (*Прим. ред.*)

Е. Пальчиков

Какого цвета зеленка?

> *Не верь глазам своим.*
> К. Прутков

Та самая зеленка, которой смазывают мелкие раны и царапины? Многие, наверное, скажут, что зеленого (и будут правы!).

Но посмотрите сквозь пузырек с зеленкой на какой-нибудь яркий источник света — например, на Солнце, нить лампочки накаливания или на дуговой разряд. Вы увидите, что зеленка пропускает только красный свет. Получается, что зеленка красного цвета!?

Возьмите несколько кювет разной толщины, налейте в них раствор зеленки*) и посмотрите на просвет. Тонкие слои раствора имеют, действительно, зеленый цвет, более толстые приобретают неопределенную серую окраску (с пурпурным оттенком), а еще более толстые кажутся красными. Иными словами, цвет зависит от толщины слоя раствора. Как это можно объяснить?

Оказывается, спектр пропускания тонкого слоя зеленки имеет в видимой области две полосы прозрачности: широкую сине-зеленую и узкую красную (рис. 1). На самом деле красная полоса не узкая, а простирается дальше в инфракрасную область, но глаз человека из этой широкой полосы видит только маленький кусочек, попадающий в область видимого света. В красном участке поглощение мало по сравнению с сине-зеленым (коэффициент пропускания для красного света существенно больше, чем для сине-зеленого). Но сине-зеленая полоса шире красной и расположена в том участке спектра, где глаз имеет высокую чувствительность. Поэтому раствор зеленки в тонком слое будет казаться зеленым.

Увеличим толщину слоя зеленки в два раза, или, что то же самое, расположим последовательно друг за другом два одинаковых слоя. Как изменится коэффициент пропускания света? Очевидно, уменьшится. Чтобы получить его новое значение, надо перемножить коэффициенты пропускания первого слоя и второго такого

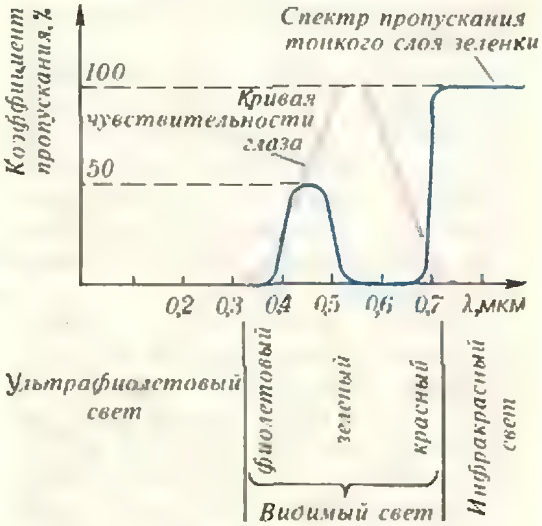


Рис. 1.

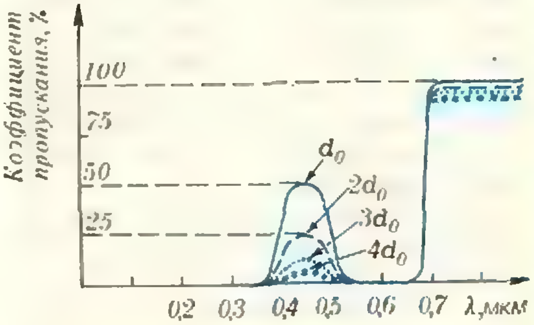


Рис. 2.

---

*) Зеленку желательно разбавить, иначе придется брать очень тонкие кюветы.

А. Лушков, Ю. Лужков

«Звезды» из водяной капли

В двенадцатом номере нашего журнала за прошлый год в разделе «Лаборатория «Кванта» была опубликована статья М. Голубева и А. Кагаленко «Капля на горячей поверхности». Редакция получила много откликов на эту статью. Предлагаем вашему вниманию небольшую заметку об одном из опытов, проведенных с водяной каплей на раскаленной поверхности.

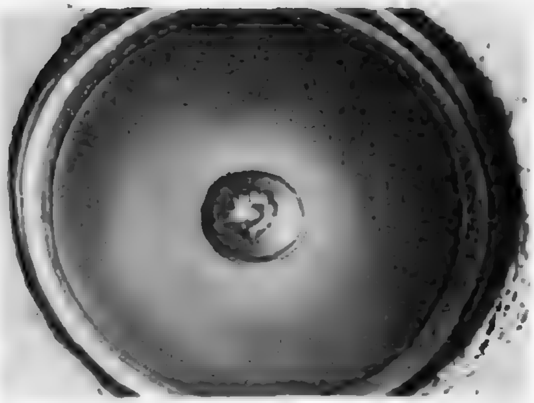


Рис. 1.

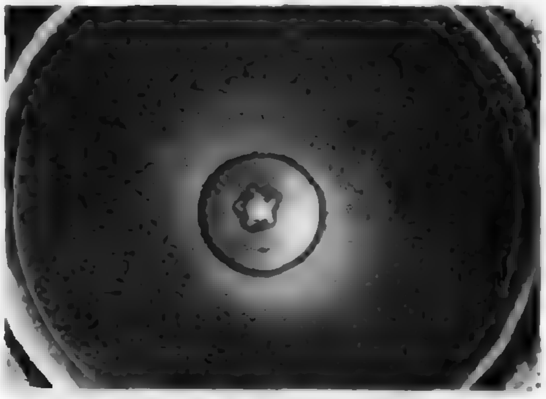


Рис. 2.

Для опытов мы воспользовались дальней левой конфоркой (мощностью 1500 Вт) электроплиты «Луч». С помощью тонкой наждачной бумаги тщательно очистили от грязи сферическую поверхность конфорки (радиус кривизны равен 80 мм), раскалили ее до температуры 400—500°С и капнули на нее немного воды (массой 3—8 г).

Сначала капля вела себя очень неустойчиво: она вращалась, вытягиваясь из стороны в сторону, в центре капли появлялись и лопались пузырьки пара (рис. 1). Пар выбрасывался в окружающее пространство небольшими порциями вместе с частичками воды.

После некоторого уменьшения размеров капли ее поведение стало более стабильным — в капле возникли устойчивые продольно-поперечные колебания. В результате такого сложного колебательного движения вместо сферической капли появилась «звезда» правильной геометрической формы (рис. 2). В разных опытах число лучей «звезды» было разным — от 5 до 8. Если капля была достаточно крупной (диаметром 25—30 мм), вместо «звезды» возникал звездчатый диск с 20—24 зубцами.

Характерным признаком, предшествующим появлению «звезды», было возникновение на поверхности капли «морщин», а внутри капли — отчетливо видных колец. Время жизни «звезды»-капли составляло обычно около 3 секунд.

же слоя. Другими словами, коэффициент пропускания для одного слоя надо возвести в квадрат. При этом для сине-зеленой полосы коэффициент пропускания уменьшится очень сильно, а для красной полосы останется почти неизменным.

На рисунке 2 показано, как изменяются коэффициенты пропускания красной и сине-зеленой полос при последовательном увеличении толщины слоя зеленки. Ясно, что доля сине-зеленого света становится все меньшей и меньшей по сравнению с долей красного света. Начиная с некоторой определенной толщины, раствор зеленки на просвет будет не зеленым, а красным.

Так какого же цвета зеленка на самом деле?

Если вы по-прежнему затрудняетесь ответить на этот вопрос, советуем вам прочитать статью В. Фабриканта «Сюрпризы зеленого стекла», опубликованную в этом номере журнала (прим. ред.).

Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер

Задача о трех кувшинах

Предлагаемая статья является отрывком из книги американских математиков Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией», русский перевод которой в ближайшее время будет опубликован в серии «Библиотека математического кружка» издательством «Наука». Материал подготовлен к печати Л. Савиной.

Сейчас мы рассмотрим применение геометрии к решению задач, в которых требуется разделить жидкость на определенные порции с помощью инструментов, казалось бы, непригодных для этого. Для решения нам понадобятся так называемые *трилинейные координаты*, которые мы сейчас и опишем.

Обычно для нанесения точек с заданными декартовыми координатами пользуются миллиметровой бумагой. Для наших целей лучше использовать *триангулированную бумагу*, т. е. бумагу, на которой проведены три системы параллельных линий, разбивающие ее на маленькие равносторонние треугольники. Нарисуем на такой бумаге большой равносторонний треугольник ABC со сторонами, проходящими по линиям сетки. Для произвольной точки P в этой плоскости определим числа x, y, z как расстояния от этой точки до прямых BC, CA и AB соответственно, причем для каждой из этих прямых расстояние будем считать положительным, если точка лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник ABC, и отрицательным в противном случае. Полученную тройку чисел (x, y, z) будем называть *трилинейными координатами точки P относительно треугольника ABC*. Заметим, что для точек, лежащих внутри треугольника ABC, все три координаты положительны. Кроме того, если a — длина стороны треугольника, а h — высоты $\left(h=\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, то

$$\frac{1}{2}(ax+ay+az)=$$

$$=S_{PBC}+S_{PCA}+S_{PAB}=S_{ABC}=\frac{1}{2}ah,$$

откуда следует, что

$$x+y+z=h.$$

Трилинейные координаты чрезвычайно удобны для описания ситуации, в которой участвуют три переменные величины, имеющие постоянную сумму. Если одна из этих величин x, y или z остается постоянной, а две другие изменяются, то точка (x, y, z) движется по прямой, параллельной одной из сторон треугольника ABC. В частности, прямые, на которых лежат стороны BC, CA и AB, описываются уравнениями

$$x=0,\ y=0,\ z=0,$$

а вершины A, B, C имеют координаты $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$.

Именно такая ситуация возникает в том случае, когда h литров жидкости разлито по трем сосудам: в первом x литров, во втором y литров и в третьем — z литров. Постепенному переливанию жидкости из второго сосуда в третий соответствует движение точки с трилинейными координатами (x, y, z) относительно треугольника ABC с высотой, равной h, по прямой $x=\text{const}$ в направлении, соответствующем уменьшению y и увеличению z. Если каждый сосуд может вмещать h литров (такую ситуацию мы будем обозначать символом $|h;\ h,\ h,\ h|$), то каждая из координат x, y, z может принимать любое значение от 0 до h, и множество точек, в которые можно попасть, *как-то* переливая жидкость из одного сосуда в другой — это множество мы назовем *областью операций* — задается неравенствами

$$0\leqslant x\leqslant h,\ 0\leqslant y\leqslant h,\ 0\leqslant z\leqslant h,$$

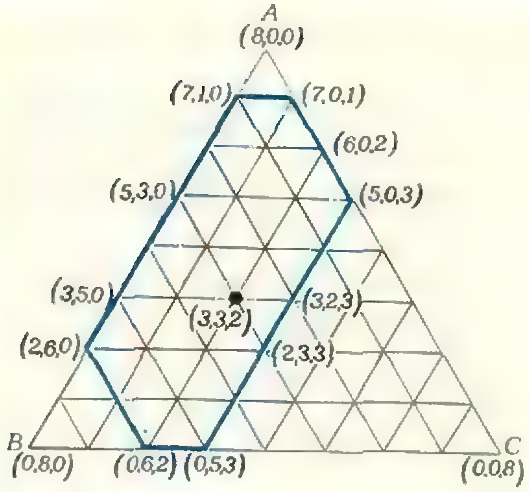


Рис. 1.

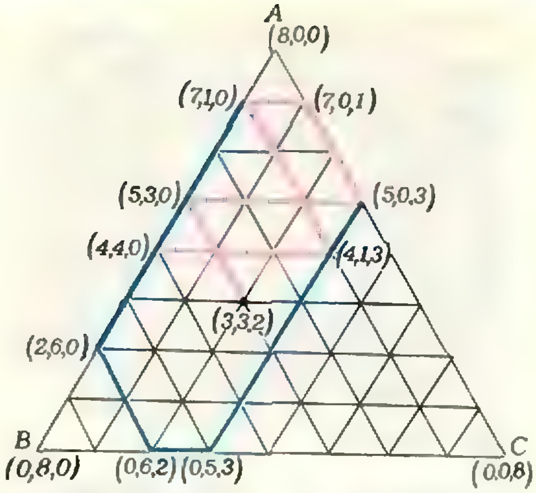


Рис. 2.

и совпадает со всем треугольником ABC.

Гораздо больший интерес представляет случай $[h;\ a,\ b,\ c]$. Здесь три данных сосуда имеют емкости a, b, c и $h\geqslant a>b>c$. Поставим задачу: *нужно отмерить определенную величину d литров жидкости, многократно переливая ее из одного сосуда в другой; при этом разрешается только либо полностью опорожнить один сосуд, либо до краев наполнить другой (а возможно, произойдет то и другое одновременно)*. Область операций теперь задается неравенствами

$$0\leqslant x\leqslant a,\quad 0\leqslant y\leqslant b,\quad 0\leqslant z\leqslant c,$$

которые, как правило, определяют правильный или неправильный шестиугольник, ограниченный шестью прямыми

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=c.$$

Но в частных случаях эта область может превратиться в пятиугольник, трапецию, параллелограмм или (как мы уже видели) охватывать весь равносторонний треугольник.

Будем считать, что числа a, b, c, h и d — целые.

На рисунках 1 и 2 проиллюстрирована ситуация $[8;\ 7,\ 6,\ 3]$: 8 литров жидкости некоторым образом разлиты в сосуды емкостью 7, 6 и 3 литров. Здесь областью операций является шестиугольник $0\leqslant x\leqslant 7$, $0\leqslant y\leqslant 6$, $0\leqslant z\leqslant 3$, ограниченный прямыми $x=7$, $z=0$, $y=6$, $x=0$, $z=3$, $y=0$. Трилинейные координаты вершин шестиугольника (относительно равностороннего треугольника с высотой 8) — (7, 1, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 2), (0, 5, 3), (5, 0, 3), (7, 0, 1). Допустим что в первом сосуде находится 3 литра жидкости, во втором — тоже 3; тогда в третьем сосуде — 2 литра жидкости. Такому распределению жидкости соответствует точка с координатами (3, 3, 2). Шесть направлений, исходящих из этой точки, указывают на шесть возможных операций по переливанию. Направление от точки (3, 3, 2) к точке (5, 3, 0) соответствует процессу опустошения третьего сосуда: содержавшаяся в нем жидкость переливается в первый сосуд; противоположному же направлению — от точки (3, 3, 2) к точке (2, 3, 3) — процесс наполнения третьего сосуда: он доливается жидкостью из первого. Направлению от точки (3, 3, 2) к точке (0, 6, 2) соответствует процесс опустошения первого сосуда, содержимое которого переливается во второй сосуд; при этом второй сосуд полностью заполняется, и т. д.

Допустим, что нам нужно отмерить 4 литра жидкости (то есть получить 4 литра хотя бы в одном из сосудов). Прежде всего заметим, что при первом же разрешенном переливании жидкости мы от внутренней точки области операций (в нашем случае — от точки (3, 3, 2)) переходим к ее граничной точке — таковы условия переливания. Например, красная ломаная на рисунке 2 задает один из возможных способов перехода от точки (3, 3, 2) к точке (4, 4, 0) (и, таким образом, деления восьми литров на две равные порции). Легко видеть, что звенья ломаной всегда параллельны сторонам треугольника ABC, причем ломаная «поворачивает» только тогда, когда попадает на границу области. Если теперь, не ставя перед собой задачи об отмеривании четырех литров, провести из точки (3, 3, 2) всевозможные ломаные (со звеньями, параллельными сторонам треугольника ABC, и с концами на границе нашей шестиугольной области), то рано или поздно мы побываем во всех граничных точках нашего шестиугольника. То же справедливо для любой целой точки данной области операций (как внутренней, так и граничной). Значит, каково бы ни было распределение восьми литров жидкости по сосудам для случая [8; 7, 6, 3], «доливанием» и «опорожнением» сосудов можно отмерить любое целое число литров жидкости (меньшее восьми).

На рисунке 3 проиллюстрирован случай [10; 8, 7, 6]: 10 литров жидкости разлиты по сосудам, вмещающим 8, 7 и 6 литров. Область операций здесь снова шестиугольник. В этом случае для любого распределения десяти литров по сосудам легко отмерить $d = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ и 9 литров жидкости. Но если с самого начала ни в одном из сосудов не содержится пяти литров жидкости, то мы эти 5 литров никогда не сможем отмерить, поскольку путь, проходящий через точки (0, 5, 5), (5, 0, 5) и (5, 5, 0), замкнут, и на него нельзя попасть ни с какого другого пути. Вообще, если $h = 2d \geqslant a > b > c > d$, то в ситуации $[h;\ a,\ b,\ c]$ опустошением и доливанием сосудов d литров жидкости нельзя отмерить, как бы эти h литров ни были распределены по сосудам, если только ни в одном из сосудов первоначально не было d литров.

Рассмотрим еще случай [10; 8, 6, 4] — четное число литров жидкости разлито по сосудам с четными емкостями (рис. 4). Здесь область операций — пятиугольник. Из рисунка 4 видно, что если первоначально в каждом из сосудов было по четному числу литров, то есть исходная точка — с четными координатами (например, (6, 2, 2)), то мы никогда не сможем отмерить нечетное число литров жидкости.

Наиболее известны задачи, соответствующие случаю $[h;\ a,\ b,\ c]$, где $h = a = 2d = b + c$. В этом случае область операции — параллелограмм с вершинами $(a,\ 0,\ 0)$, $(c,\ b,\ 0)$, $(0,\ b,\ c)$, $(b,\ 0,\ c)$. На рисунках 5 и 6 показаны два решения задачи, соответствующей случаю [8; 8, 5, 3] с исходным распределением жидкости (8, 0, 0); требуется отмерить 4 литра жидкости. Иными словами, два человека, имея сосуд, наполненный восемью литрами какой-то жидкости, и два пустых сосуда, емкостью 5 литров и 3 литра, хотят разделить эти 8 литров жидкости поровну.

Первое, что нужно сделать, — это наполнить либо сосуд емкостью 5 литров, как на рисунке 5, либо сосуд емкостью 3 литра, как на рисунке 6.

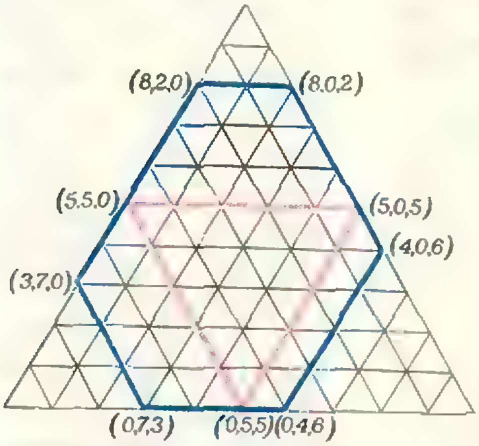


Рис. 3.

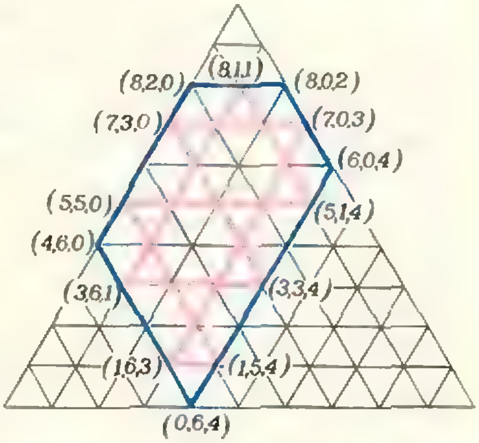


Рис. 4.

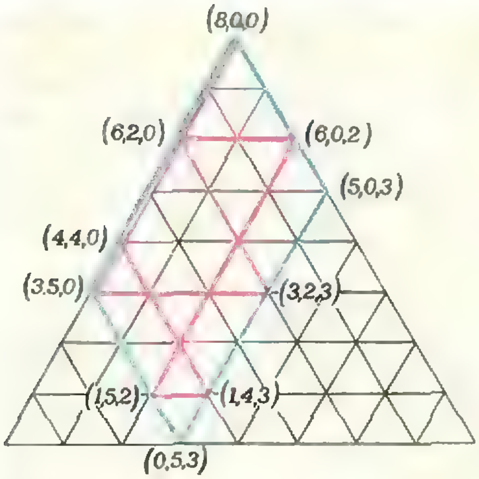


Рис. 5.

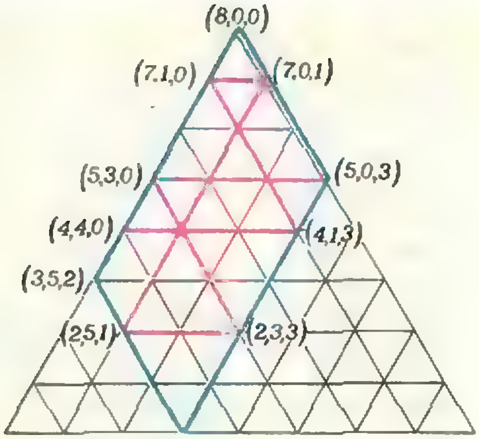


Рис. 6.

После этого всякий раз, когда ломаная попадает на одну из сторон нашего параллелограмма — прямые $y = 0$, $y = 5$, $z = 0$, $z = 3$, — мы рассматриваем эту сторону как зеркало. (Правило зеркальных отражений объясняется тем, что каждый отрезок ломаной, параллельный стороне исходного треугольника, соответствует операции переливания жидкости из одного сосуда в другой, а третий сосуд в это время не трогают.) Таким образом мы получаем решение $(8, 0, 0) \to (3, 5, 0) \to (3, 2, 3) \to (6, 2, 0) \to (6, 0, 2) \to (1, 5, 2) \to (1, 4, 3) \to (4, 4, 0)$ и решение $(8, 0, 0) \to (5, 0, 3) \to (5, 3, 0) \to (2, 3, 3) \to (2, 5, 1) \to (7, 0, 1) \to (7, 1, 0) \to (4, 1, 3) \to (4, 4, 0)$.

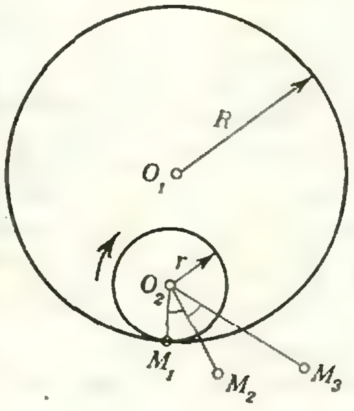
Ясно, что отмерить *любое* целое число литров жидкости в ситуации $h - a = b + c$ можно лишь в том случае, когда числа a и b взаимно просты.

Гипотрохоиды

Рисунок на первой странице обложки, выполненный на ЭВМ, изображает семейство замкнутых кривых — гипотрохоид.

Трохоида — линия, которую вычерчивает точка, жестко связанная с окружностью (O_2, r), катящейся без скольжения по прямой. Когда же окружность (O_2, r) катится не по прямой, а по неподвижной окружности (O_1, R), касаясь ее изнутри, то точка M жестко связанная с окружностью (O_2, r), описывает гипотрохоиду. Ясно, что циклоида («Квант», 1978, № 4, с. 13) — частный случай трохоиды, гипоциклоида (см. там же) — частный случай *гипотрохоиды*.

Здесь на рисунке изображены точки M_1, M_2, M_3, жестко скрепленные с окружностью (O_2, r), где $r = \frac{R}{3}$. Эти точки расположены так, что $M_1\widehat{O_2}M_2 = M_2\widehat{O_2}M_3$ и $|O_2M_2| - |O_2M_1| = |O_2M_3| - |O_2M_2|$. (Таким образом, точки M_1, M_2 и M_3 лежат на спирали Архимеда — см. «Квант», 1976, № 6, третья страница обложки).



Семейство гипотрохоид, показанное на обложке, описывается точками M_1, M_2, M_3, …, M_{10}, расположенными аналогичным образом. При $|O_2M_i| < 2R/3$ гипотрохоида — замкнутая самопересекающаяся линия, представляющая из себя вогнутый криволинейный треугольник с петлями у вершин. Если же $|O_2M_i| > 2R/3$, то получаем замкнутую самопересекающуюся линию несколько иного вида: она состоит из трех выпуклых лепестков, пересечение которых — выпуклый криволинейный треугольник.

В. Березин

задачник Кванта

Задачи

M511—M515; Ф523—Ф527

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 октября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М511, М512» или «Ф523». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

M511. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD}=\widehat{CDM}$. (8—9 кл.)

Ю Михеев

M512. Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для любого натурального $m>1$ числа $m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \ldots$ попарно взаимно просты. (10 кл.)

А Колотов

M513*. Докажите, что существует такое число A, что в график функции $y=A\sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.) (10 кл.)

В Федотов

M514*. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m-x_k|\geqslant|m-k|^{-1}. \qquad (9,\ 10\ \text{кл.})$$

С Конягин

M515. Задано конечное множество K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1. Аналогично из множества K_1 получается K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 10000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n=1, 2, \ldots$). (8 кл.)

В следующих трех пунктах K_0 — множество четырех вершин правильного тетраэдра объема 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д)* Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n ($n=2,3,\ldots$). (10 кл.)

Н. Васильев

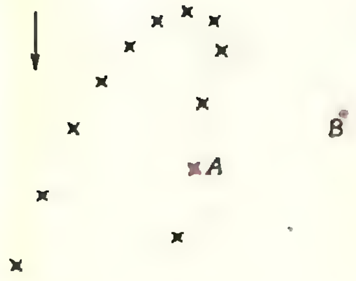


Рис. 1.

Ф523. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 1, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены положения снаряда и одного из осколков через последовательно равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находился в точке B в тот момент, когда первый осколок находился в точке A. Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите способ построения. (8 кл.)

Ф524. Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель? (9 кл.)

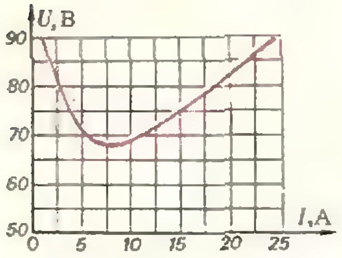


Рис. 2.

Ф525. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика для такой цепи показана на рисунке 2. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U=85$ В. (10 кл.)

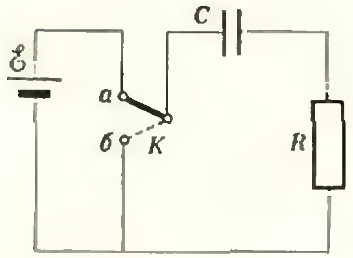


Рис. 3.

Ф526. Полость теплоизолирующих стенок колбы термоса откачана до давления $p=10^{-5}$ атм (при комнатной температуре). Вместимость колбы 1 литр, площадь поверхности колбы $S=600$ см^2. Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90 °С до 70 °С. Теплоемкость воды $c=4,2\times10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R=8,3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать. (9, 10 кл.)

Ф527. В схеме, показанной на рисунке 3, э. д. с. батареи $\mathscr{E}=100$ В, ее внутреннее сопротивление $r=100$ Ом, емкость конденсатора $C=200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R=10$ Ом. Ключ K переключается между контактами *а* и *б* с частотой $f=10$ раз в секунду. При подключении его к клемме *а* конденсатор успевает полностью зарядиться, а при подключении к клемме *б* — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее? Какая мощность выделяется на сопротивлении R? (9 кл.)

Решения задач

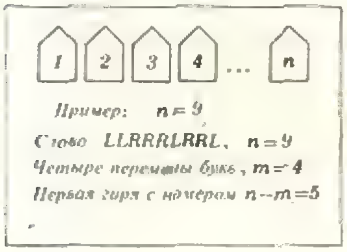
М461—М464; Ф478—Ф481

М461. *На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).*

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R : LRLRLR... Здесь буква L означает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

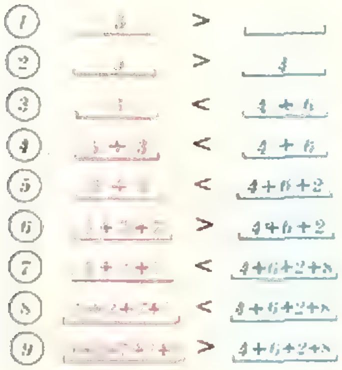


Пример: $n=9$

Слово LLRRRLRRL, $n=9$

Четыре перемены букв, $m=4$

Первая гиря с номером $n-m=5$



а) Занумеруем все гири в порядке возрастания масс; пусть их массы $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Положим первую гирю на левую чашку весов, затем вторую гирю — на правую, третью гирю — на левую и так далее. Легко видеть, что таким образом будет реализована последовательность *LRLRLR* ... .

Как видно, это очень легкий случай. Но, исходя из него, можно сформулировать лемму, которая поможет нам дальше.

Лемма. *Пусть несколько занумерованных подряд гирь с массами a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ... , a_{l-1}, a_l разложены на весы так, что гири с четными номерами лежат на одной чашке весов, а с нечетными номерами — на другой. Тогда перевешивает та чашка, на которой лежит самая тяжелая гиря a_l.*

Действительно, если число гирь четно, то это вытекает из неравенств $a_l > a_{l-1}$, $a_{l-2} > a_{l-3}$, ...; если же число гирь нечетно, то это значит, что на чашку, где лежат гири с массами a_l, a_{l-2}, a_{l-4}, ... , положена еще одна — самая легкая — гиря массы a_k, так что эта чашка тем более перевесит.

б) Пусть задано слово длины n из букв *L* и *R*. Покажем, как надо ставить гири на чашки весов. Мы будем придерживаться следующих правил.

1) Каждый раз на весах (на обеих чашках) должны лежать гири с номерами, идущими подряд (k, $k+1$, $k+2$, ... , $l-1$, l). В частности, следующим взвешиванием к имеющейся группе гирь с массами a_k, a_{k+1}, ... , a_l мы должны добавить гирю либо с массой a_{l+1}, либо — с массой a_{k-1}.

2) Все гири с четными номерами кладутся на одну чашку весов, а с нечетными номерами — на другую чашку.

Как вытекает из леммы, при выполнении этих правил перевешивать будет та чашка, на которой лежит самая тяжелая гиря. Поэтому, если мы хотим, чтобы на очередном ходу положение весов не изменилось, то мы должны поставить на соответствующую чашку гирю, которая легче всех поставленных гирь; если же мы хотим, чтобы положение весов изменилось, то на соответствующую чашку нужно поставить гирю, тяжелее всех уже поставленных.

Осталось только решить, какую гирю следует положить на весы самой первой, чтобы хватило «легких» и «тяжелых» гирь. Для этого посмотрим, сколько раз в заданном слове происходит смена букв (*L* на *R* и *R* на *L*); пусть такая смена происходит m раз. Тогда на первом шагу мы поставим гирю с номером $n-m$.

Легко видеть, что, действуя указанным способом, мы получим последовательность результатов взвешиваний, соответствующую заданному слову.

То же самое решение можно изложить короче, если решать задачу с конца, то есть сначала уложить все гири на весы, а затем по одной их снимать. Положим гири с четными номерами на одну чашку весов, а с нечетными — на другую. Затем, на каждом шаге, если мы хотим изменить положение чашек весов, то с нужной чашки мы снимем самую тяжелую гирю, а если хотим сохранить положение чашек, то снимем самую легкую гирю. Так мы будем делать в соответствии с заданным словом до тех пор, пока не кончатся все гири.

И. Бернштейн

М462. *Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d (рис. 1). Докажите, что*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

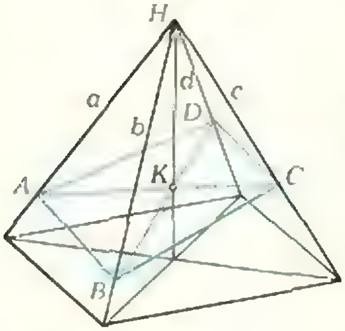


Рис. 1.

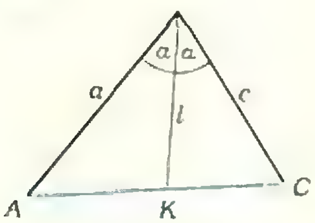


Рис. 2.

Обозначим через α величину угла, который образует высота пирамиды с боковыми ребрами, через A, B, C, D и K — точки пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами и высотой, через H — вершину пирамиды (рис. 1). Ясно, что между длинами a, b, c и d должно быть некоторое соответствие: ведь через три точки A, B, C проходит единственная плоскость, следовательно, d можно выразить через a, b и c. Получить такое соотношение, можно, выразив длину общей биссектрисы HK в каждом из треугольников AHC и BHD через угол α и длины их сторон: a, c (в одном) и b, d (в другом) и приравняв результаты. Именно так и получится требуемое равенство.

Для того чтобы получить нужную формулу длины биссектрисы $l=|HK|$ в треугольнике AHC, воспользуемся тем, что $S(AHC)=S(AHK)+S(KHC)$ (рис. 2). Умножив на 2, получим

$$ac\sin 2\alpha = al\sin\alpha + cl\sin\alpha,$$

откуда

$$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

Аналогично из треугольника BHC

$$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Н. Васильев

◆

М463. *Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.*

[illegible] = [illegible] *(нельзя)*,
[illegible] = [illegible] *(можно)*

Будем вести доказательство индукцией по $k=m+n$. Так как $x_1+x_2+\ldots+x_m\geqslant m$, $y_1+y_2+\ldots+y_n\geqslant n$, то $mn>m$, $mn>n$, откуда $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, $k\geqslant 4$. Если $k=4$, то есть $m=n=2$, $x_1+x_2=y_1+y_2<4$, то хотя бы одно из чисел x_1, x_2 равно 1 и хотя бы одно из чисел y_1, y_2 равно 1. Так что для $k=4$ утверждение задачи справедливо. Предположим, что утверждение доказано для $m+n=k$, и докажем его для $m+n=k+1$.

Пусть x_1 — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y_1 — наибольшее из чисел $y_1, \ldots, y_n$ $(m+n=k+1)$. Если $x_1=y_1$, то вычеркиваем x_1 и y_1. Пусть $x_1>y_1$. Рассмотрим равенство

$$(x_1-y_1)+x_2+\ldots+x_m=y_2+\ldots+y_n, \qquad (*)$$

содержащее всего $m+n-1=k$ слагаемых. Чтобы применить к нему индукционное предположение, нужно проверить, что $y_2+\ldots+y_n<m(n-1)$. Положим $S=y_1+y_2+\ldots+y_n$. Тогда $y_1\geqslant\frac{S}{n}$ и, следовательно,

$$y_2+\cdots+y_n<S-\frac{S}{n}=S\cdot\frac{n-1}{n}.$$

Так как $S<mn$, то $y_2+\cdots+y_n<mn\cdot\frac{n-1}{n}=m(n-1)$.

Вычеркнем в равенстве (*) часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство (это можно сделать по предположению индукции); мы получим либо искомое равенство, либо равенство, содержащее в левой части разность x_1-y_1. В последнем случае нужно y_1 перенести в правую часть.

Д. Бернштейн, Ю. Ионин

М464. *На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы любая точка множества M попала не меньше чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.*

Геометрическая идея решения этой задачи содержится в следующей простой лемме.

Лемма. *Если на плоскости пять квадратов со сторонами, параллельными осям координат, имеют общую точку, то один из этих квадратов содержит центр некоторого другого.*

Докажем эту лемму. Можно считать, что общая точка — это начало координат O. Из пяти центров данных квадратов по крайней мере два центра обязаны лежать в одной из четвертей плоскости, определяемых осями координат (к четвертям присоединяются ограничивающие их лучи). Пусть центры O_1 и O_2 квадратов S_1 и S_2 лежат в I четверти, а $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — координаты точек O_1 и O_2. Выберем из чисел x_1, y_1, x_2, y_2 наибольшее; пусть это, например, x_1. Покажем, что тогда $O_2 \in S_1$. Действительно, ясно, что точка $(x_1; x_1) \in S_1$. Поскольку $O \in S_1$, отсюда следует, что всякая точка $(x; y)$ такая, что $0 \leqslant x \leqslant x_1$, $0 \leqslant y \leqslant x_1$, принадлежит S_1. В частности, $(x_2; y_2) \in S_1$, что и требовалось.

Опишем теперь правило выбора «отмеченных» квадратов. Пусть K_1 — наибольший из данных 1000 квадратов (здесь и далее, если наибольших несколько, берем один из них). Пусть K_2 — наибольший из тех квадратов данного семейства, которые имеют центры вне K_1; K_3 — наибольший из тех квадратов данного семейства, которые имеют центры вне K_1 и K_2, и т. д. Этот процесс оборвется с построением такого квадрата K_n, что вне $K_1, \ldots, K_n$ нет точек множества M (общее число квадратов конечно). Отмеченные таким образом квадраты $K_1, \ldots, K_n$ удовлетворяют, очевидно, первому из условий задачи: они покрывают множество M. Чтобы показать, что они удовлетворяют и второму условию, достаточно убедиться, что никакие пять из них не имеют общей точки. Действительно, по лемме, если такая точка нашлась, один из отмеченных квадратов содержал бы центр другого. Остается заметить, что для выбранных нами квадратов это не так. Действительно, если $i < j$, то центр K_j вне K_i по построению; при этом K_j не больше K_i, следовательно, центр K_i также вне K_j.

А. Плоткин

◆

Ф478. *На кубик, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, налетает точно такой же кубик, причем кубики сталкиваются своими параллельными гранями. Скорость налетающего кубика до столкновения была направлена под углом α к боковым граням (рис. 3). Как будут двигаться кубики после столкновения, если коэффициент трения между гранями кубиков равен μ?*

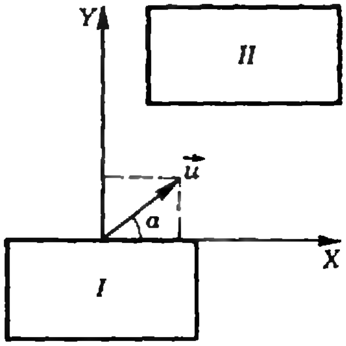


Рис. 3.

Обозначим F абсолютное значение сил упругости, с которыми кубики действуют друг на друга при столкновении. Тогда абсолютное значение силы трения между кубиками равно μF (рис. 4).

За время Δt проекция импульса каждого из кубиков на ось Y изменяется по абсолютной величине на $F\Delta t$. Поэтому для каждого из кубиков

$$|\Delta (mv_y)| = F\Delta t.$$

Абсолютное значение изменения проекции импульса каждого из кубиков на ось X равно $\mu F\Delta t$:

$$|\Delta (mv_x)| = \mu F\Delta t.$$

Из этих соотношений видно, что для каждого кубика

$$|\Delta (mv_x)| = \mu |\Delta (mv_y)|.$$

Это соотношение справедливо для любых интервалов времени. Следовательно, если обозначить v'_x и v'_y проекции скорости кубика на оси X и Y после столкновения кубиков, v_x и v_y — значения ее проекций до столкновения, то

$$\mu m |v'_y - v_y| = m |v'_x - v_x| \Rightarrow \mu |v'_y - v_y| = |v'_x - v_x|.$$

Обозначим $\vec{u}$ и $\vec{w}$ скорости кубиков I и II до столкновения ($\vec{w} = 0$), $\vec{u}'$ и $\vec{w}'$ скорости кубиков I и II после столкновения. Считая, что потеря энергии при столкновении происходит только за счет действия силы трения, получим для кубика I ($u_x = u \cos \alpha$, $u_y = u \sin \alpha$)

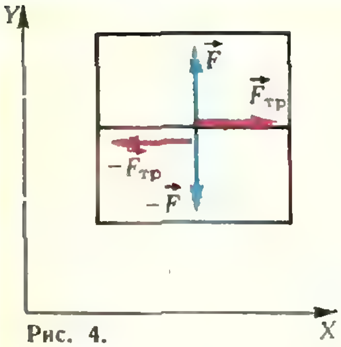


Рис. 4.

$$u'_y = 0,\ \ u'_x = u\cos\alpha - \mu u\sin\alpha = u(\cos\alpha - \mu\sin\alpha),$$

для кубика *II* ($w_x = 0,\ w_y = 0,\ w = |\vec w|$)

$$w'_y = u\sin\alpha,\quad w'_x = \mu u\sin\alpha \qquad (u = |\vec u|).$$

При абсолютно неупругом (вдоль оси Y) ударе

$$u'_y = w'_y = \frac{1}{2}u\sin\alpha.$$

$$u'_x = u\cos\alpha - \frac{1}{2}\mu u\sin\alpha,\qquad w'_x = \frac{1}{2}\mu u\sin\alpha.$$

(Мы считали, что скорость $\vec u$ направлена параллельно линии, соединяющей центры масс кубиков, и площадь контакта при соударении равна площади соприкасающихся граней. При этих условиях кубики после удара не вращаются.)

И. Слободецкий

◆

Ф479. *Для определения неизвестного объема V_1 баллона I собирают схему, приведенную на рисунке 5. Объем баллона II равен V_2 и $V_2 \ll V_1$. Сначала систему откачивают до давления p_0, близкого к нулю. Затем закрывают кран B и заполняют баллон II газом до давления p_0. После этого закрывают кран A, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_1 манометром C. Затем при закрытом кране B вновь наполняют баллон газом до давления p_a, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_2. Эту операцию повторяют n раз. Покажите, что отношение $\frac{p_n - p_0}{np_a}$ есть величина постоянная и равная $\frac{V_2}{V_1 + V_2}$.*

Из условий эксперимента с помощью закона Бойля — Мариотта получается система n уравнений

$$p_0 V_1 + p_a V_2 = p_1 (V_1 + V_2),$$
$$p_1 V_1 + p_a V_2 = p_2 (V_1 + V_2),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$p_{n-1} V_1 + p_a V_2 = p_n (V_1 + V_2).$$

Эта система позволяет выразить все p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) через p_0 и p_a. Действительно,

$$p_i = \frac{p_{i-1}V_1 + p_a V_2}{V_1 + V_2},$$

откуда

$$p_i - p_a = \frac{V_1}{V_1 + V_2}(p_{i-1} - p_a) = \alpha(p_{i-1} - p_a),$$

где $\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$. Следовательно,

$p_{i-1} - p_a = \alpha(p_{i-2} - p_a)$, $p_{i-2} - p_a = \alpha(p_{i-3} - p_a)$ и т. д.

Таким образом, $p_n - p_a = \alpha^n (p_0 - p_a)$, откуда

$$p_n = p_a + \alpha^n (p_0 - p_a),$$
$$p_n - p_0 = (p_a - p_0)(1 - \alpha^n).$$

Но $1 - \alpha^n = (1 - \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1}) \approx$

$\approx n\frac{V_2}{V_1 + V_2}$ (поскольку $V_1 \gg V_2$ и, следовательно, α близко к единице). Значит,

$$p_n - p_0 \approx (p_a - p_0)\, n\frac{V_2}{V_1 + V_2},$$

$$\frac{p_n - p_0}{n(p_a - p_0)} \approx \frac{V_2}{V_1 + V_2}.$$

Если $p_0 \ll p_a$, то

$$\frac{p_n - p_0}{np_a} \approx \frac{V_2}{V_1 + V_2}.$$

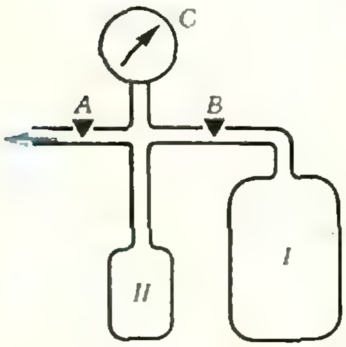


Рис. 5.

А. Митрофанов

Ф480. *Корабль приводится в движение водометным двигателем, выбрасывающим с кормы струю воды со скоростью $\vec{u}$. Ежесекундно выбрасывается масса воды μ, которая берется из реки. При каком значении скорости корабля к. п. д. двигателя максимален? Силой трения и сопротивлением воды пренебречь.*

Полная работа A, совершаемая двигателем за малое время Δt, равна кинетической энергии, которая сообщается воде, выбрасываемой из двигателя корабля. Так как масса воды, выбрасываемой за это время, равна $\mu\Delta t$, то

$$A = \frac{(\mu\Delta t)\,u^2}{2}.$$

Полезная же работа, совершаемая за это время, равна изменению кинетической энергии корабля. Если масса корабля равна M, то

$$A_{\text{пол}} = \frac{M\,(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = Mv\Delta v,$$

где v — абсолютное значение скорости корабля. Пренебрегая квадратом малой величины $(\Delta v)^2$, получим $A_{\text{пол}} = Mv\Delta v$. Для того чтобы найти $M\Delta v$, можно воспользоваться законом сохранения импульса. Так как трение и сопротивление пренебрежимо малы, то импульс системы вода — корабль не меняется. Следовательно,

$$Mv = M\,(v+\Delta v) - \mu\Delta t\,(u-v).$$

Отсюда

$$M\Delta v = \mu\Delta t\,(u-v).$$

К. п. д. двигателя равен

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{2Mv\Delta v}{(\mu\Delta t)\,u^2} = \frac{2\,(u-v)\,v}{u^2}.$$

Это выражение максимально при $v = \frac{u}{2}$.

◆

Ф481. *В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных аккумуляторов, резко возросло внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов и стало равным $\rho = 10\ r$, где r — внутреннее сопротивление нормального аккумулятора. Считая э. д. с всех аккумуляторов одинаковыми, определить, при каких сопротивлениях нагрузки R мощность, выделяемая на нагрузке, не изменится при коротком замыкании поврежденного аккумулятора.*

При замыкании батареи аккумуляторов на сопротивление R по цепи идет ток

$$I_1 = \frac{n\mathscr{E}}{(n-1)r + 10r + R},$$

а на сопротивлении R нагрузки выделяется мощность

$$W_1 = I_1^2 R = \frac{n^2\mathscr{E}^2}{[(n-1)\,r + 10r + R]^2}\,R.$$

После замыкания поврежденного аккумулятора по цепи будет идти ток

$$I_2 = \frac{(n-1)\,\mathscr{E}}{(n-1)\,r + R},$$

а на нагрузке будет выделяться мощность

$$W_2 = I_2^2 R = \frac{(n-1)^2\mathscr{E}^2}{[(n-1)\,r + R]^2}\,R.$$

Приравнивая W_1 и W_2, получим

$$\frac{n^2}{[(n-1)\,r + 10r + R]^2} = \frac{(n-1)^2}{[(n-1)\,r + R]^2}.$$

Отсюда

$$R = 9\,r\,(n-1).$$

И. Слободецкий

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. *Задачи-близнецы.* В каждом из четырех криптарифметических примеров найдите, чему равны значения X и Y:

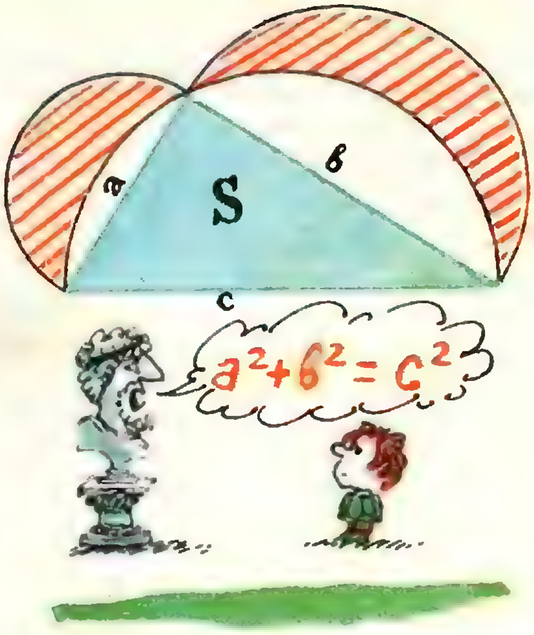
```
   XYZ           XYZ
  ×XYZ          ×XYZ
 ------        ------
  ...Z          ...Z
 ...Y    ;     ...Y    ;
 ..X          ...X
 ------        ------
 .....         ......

   XYZ           XYZ
  ×XYZ          ×XYZ
 ------        ------
  ...X          ...Y
 ...Y    ;     ...X    .
 ...           ...
 ------        ------
 .....         ....
```

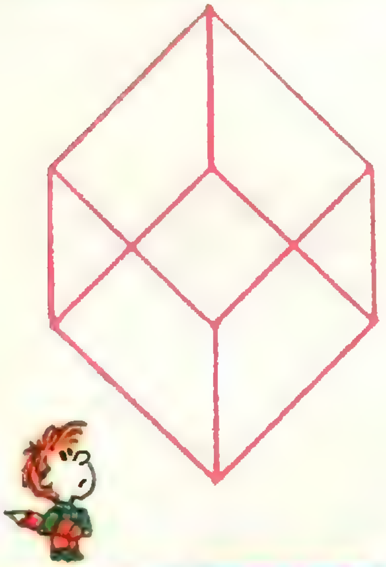
2. *Устная задача.* На сторонах прямоугольного треугольника площади S как на диаметрах построены полуокружности (см. рисунок). Чему равна площадь заштрихованной фигуры? (Для «самых маленьких» сообщаем *теорему Пифагора*: $a^2+b^2=c^2$, где a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы).

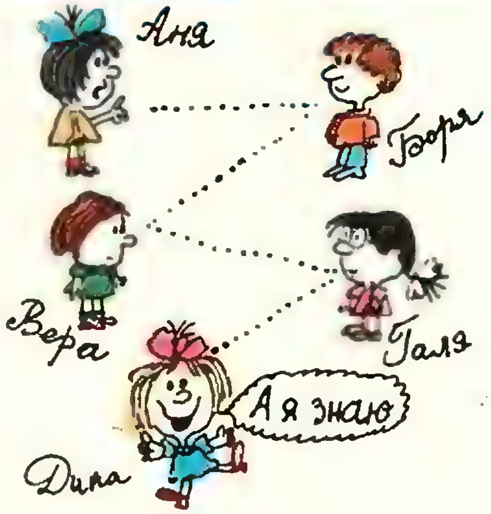
3. *Не пересекая дважды.* Не отрывая карандаша от бумаги, проведите линию, которая пересекла бы по одному разу все 16 отрезков, из которых составлена изображенная на рисунке плоская фигура.

4. Аня задумала натуральное число. Куб этого числа она с остатком разделила на 7. Полученное Аней частное Боря вновь разделил на 7 и тоже — с остатком. Новое частное Вера разделила на 7 и не сообщила, получился остаток или нет. Наконец, Галя разделила Верин результат тоже на 7. Частное оказалось равным 10, но был и остаток.

Дина, узнав все, что проделывалось с Аниным числом, отгадала это число. Какое число задумала Аня?







А. Дозоров

Оптика без оптики

В прошлом номере нашего журнала мы советовали вам проверить на опытах, хорошо ли вы знаете линзу. Теперь предлагаем вам провести еще несколько опытов по оптике, но уже без специальных оптических приборов.

1. Возьмите серебряную обертку от шоколадной конфеты. Разгладьте ее и проткните в ней маленькое отверстие. Через это отверстие, расположив его как можно ближе к глазу, посмотрите на какой-нибудь ярко освещенный текст, помещенный тоже близко к глазу. Вам удалось увидеть сильно увеличенные буквы? Оказывается, не только линза может увеличивать!

А какое изображение буквы вы увидели — прямое или перевернутое? Казалось бы, буква должна быть перевернутой (посмотрите на рисунок 1) — на сетчатке глаза все изображения получаются всегда перевернутыми. Но наш мозг «знает» об этом и к этому «привык»: окружающие нас предметы мы воспринимаем не в перевернутом виде.

В непрозрачной бумаге проткните иглой отверстие. В затемненной комнате перед отверстием зажгите свечу, а с другой стороны отверстия поместите белый лист бумаги — экран. На экране вы увидите четкое перевернутое изображение свечи. Это простое устройство — модель так называемой камеры-обскуры (камеры для наблюдений), которая с давних времен использовалась для получения различных изображений. Камера-обскура является простейшим фотоаппаратом.

2. В том, что мозг действительно «переворачивает» изображение предмета, можно убедиться на таком простом опыте. Между отверстием в фольге (в серебряной бумажке) и глазом поместите небольшой предмет — острие карандаша или булавочную головку. Свет от отверстия создаст на сетчатке неперевернутое изображение предмета (рис. 2). А мозг «по инерции» это изображение перевернет.

3. Отодвиньте фольгу сантиметров на 20 от глаза и посмотрите через

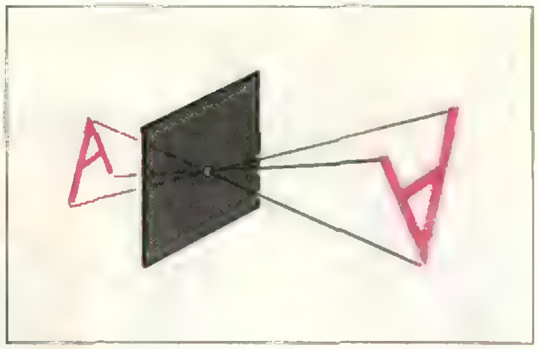


Рис. 1.

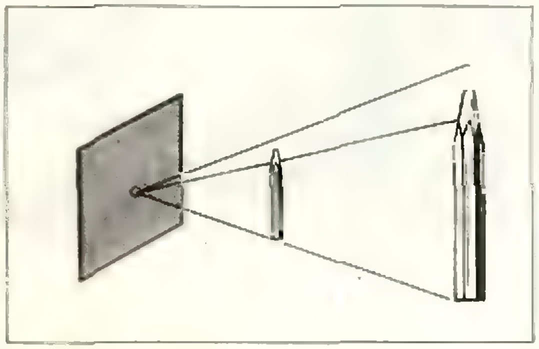


Рис. 2.

отверстие на достаточно яркий источник света. Только осторожно, чтобы не переутомить глаз. Вы увидите расходящиеся от отверстия световые лучи и вокруг отверстия — окрашенные во все цвета радуги кольца. Как это можно объяснить?

Оказывается, свет, подобно волнам на поверхности воды, способен огибать встречающиеся на его пути препятствия.

Поговорим немного о волнах на воде. Как известно, большие и маленькие волны по-разному огибают препятствия. Если, например, из воды торчит столб, то мелкие волны (рябь) образуют за столбом заметную «тень» (область спокойной поверхности воды). Крупные же волны практически никакой «тени» не дают, они хорошо огибают препятствия.

Что значит «мелкие» и «крупные» волны? Почему они по-разному ведут себя при встрече с препятствием? Существует такое понятие — длина волны. Это — расстояние между двумя соседними гребнями (или впадинами) волны. Так вот, мелкие волны по сравнению с крупными имеют гораздо меньшую длину волны. А чем больше длина волны (по сравнению с препятствием), тем сильнее волна огибает препятствие.

То же самое происходит и со световыми волнами: если на пути света встретилось препятствие, свет его огибает. Вот почему вы видели расходящийся от отверстия в фольге световой пучок.

А как появились разноцветные кольца? Все дело в том, что белый свет состоит из лучей разного цвета. Следуя Ньютону, принято выделять семь цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фиолетовый. Для каждого цвета длина световой волны своя. Самая большая длина волны у красного света ($\approx 7 \cdot 10^{-7}$ м), а самая маленькая — у фиолетового ($\approx 4 \cdot 10^{-7}$ м). Теперь вам все понятно, не правда ли?

4. Лезвием от безопасной бритвы прорежьте в фольге узкую щель: просто проведите по фольге бритвой. Отодвиньте щель от глаза сантиметров на 10, посмотрите через нее на окно. Вы увидите несколько темных полосок, параллельных щели. Если их видно плохо, не огорчайтесь. Просто у вас получилась слишком широкая щель. Разгладьте фольгу со щелью — щель станет у́же, а картина лучше. Если и это не поможет, проведите по фольге лезвием еще раз.

Получив хорошую щель, посмотрите через нее (придвиньте щель к глазу) на настольную лампу с прозрачным стеклом или — осторожно! — на Солнце. Смотрите чуть ниже источника света. Видите, перпендикулярно направлению щели возникли два световых столба, на которых видны яркие радужные полосы. Если щель прорезана удачно, то полосок много, а цвета их глубокие и сочные. Обратите внимание на расположение цветов.

Оба опыта, как и предыдущий, объясняются огибанием световыми волнами краев щели.

Очень хорошую щель можно сделать из лезвия для безопасной бритвы. Из плотной бумаги нужно вырезать два прямоугольника по размерам чуть больше лезвия, середину у прямоугольников тоже надо вырезать. В эту рамочку вставьте разломанное пополам лезвие так, чтобы его ост-

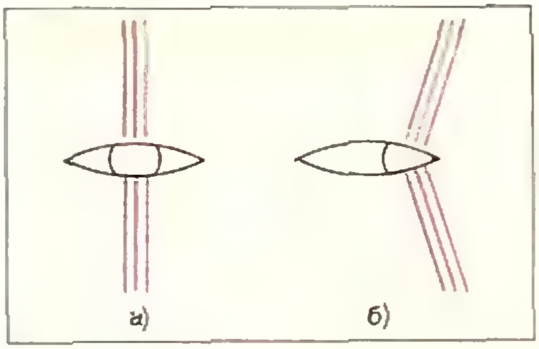


Рис. 3.

рые края почти соприкасались. Две половинки рамки с лезвием между ними склейте — теперь у вас есть хорошая щель.

5. Интересно, что огибание края препятствия световой волной можно наблюдать, вообще ничего не имея под руками. Посмотрите вечером в окно. Вы увидите яркие точки светящихся фонарей. Прищурьте глаз (веки образуют щель) — свет от фонарей загнется вверх и вниз, вместо светящейся точки получится два вертикальных столба лучей (рис. 3, *а*). Продолжая щуриться, поверните голову немного вбок. Щель, образуемая веками, изменит свою форму — лучи от фонарей разойдутся теперь под углом (рис. 3, *б*).

6. Проткните карандашом отверстие в газете, прикройте газетой настольную лампу и с расстояния в несколько метров посмотрите на пучок света из отверстия через капроновую ленту. Нити ленты образуют щели в двух взаимно перпендикулярных направлениях, поэтому свет загибается тоже в двух направлениях.

7. На случайным образом расположенных мелких препятствиях тоже можно наблюдать аналогичные картины.

В морозный вечер соскребите лед с окна. Осторожно подуйте на чистое место — оно затянется мелкими, случайно расположенными кристалликами льда. Теперь посмотрите через это отверстие на уличные фонари. Вокруг них возникнут цветные кольца. Обратите внимание на то, что разные лампы дают разный цветовой набор колец.

Если на улице тепло, то этот опыт можно выполнить с небольшим стеклом, охлажденным в холодильнике.

Можно провести очень много подобных опытов: с копировальной бумагой, с граммофонной пластинкой, с негативами, на которых сфотографированы всевозможные однородные и неоднородные структуры.

Попробуйте самостоятельно придумать аналогичный опыт, и вы получите еще большее удовольствие.

Задачи

На странице 29 помещена статья «Задача о трех кувшинах». Если вы внимательно прочитали эту статью, то попробуйте решить следующие задачи.

1. Имеется сосуд емкостью 12 л, наполненный жидкостью, и два пустых сосуда емкостью 9 л и 5 л. Как разделить жидкость на две равные порции?

2. Три грабителя украли у лавочника флакон с 24 унциями бальзама. Убегая, они встретили по дороге продавца стеклянной посуды, у которого купили три сосуда. Добравшись до надежного места, они захотели разделить добычу, но оказалось, что купленные сосуды вмещают 13, 11 и 5 унций соответственно. Как им поровну разделить добычу?

3. Пусть две точки P и P' имеют трилинейные координаты (x, y, z) и (x', y', z') относительно треугольника ABC. Докажите, что если эти координаты удовлетворяют уравнениям $xx'=yy'=zz$, то

$$\widehat{P'AC}=\widehat{BAP},\ \widehat{P'BA}=\widehat{CBP},$$
$$\widehat{P'CB}=\widehat{ACP}.$$

Л. С.

А. Земляков, В. Орлов

Вопросы для выпускников

> *«... Пора узнать, что в мирозданье,*
> *Куда ни обратись,— вопрос, а не ответ.»*
> А. Фет

Приведенные ниже вопросы адресованы прежде всего тем из вас, кто в этом году окончил X класс и собирается поступать в вуз — проверьте себя перед экзаменами! Из пяти ответов (а, б, в, г или д) всякий раз нужно выбрать единственный верный.

Математика

1. Какая из указанных на рисунке 1 прямых (а, б, в, г, д) является графиком уравнения $2x + 3y + 1 = 0$?

2. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $\log_{1/3} x > 0$?

а) $]0; +\infty[$; б) $]1; +\infty[$; в) $]1/3; +\infty[$; г) $]0; 1[$; д) $]0; 1/3[$.

3. При каких значениях a справедливо соотношение $\exp(\exp(\ln(\ln a))) = a$?

а) Ни при каких; б) при любых; в) при $a > 0$; г) при $a > 1$; д) при $a > e$.

4. Какая из указанных на единичной окружности (рис. 2) точек (а, б, в, г) отвечает значению $\varphi = 1820°$?

д) Нужная точка не указана.

5. Расположите числа $c = \cos 1000°$, $s = \sin 1000°$, $t = \operatorname{tg} 1000°$ в порядке возрастания.

а) $t < c < s$; б) $c < s < t$; в) $t < s < c$; г) $s < c < t$; д) $s < t < c$.

6. Чему равна производная функции $f(x) = \sin(x^2)$?

а) $2\sin x$; б) $\sin 2x$; в) $\cos 2x$; г) $2x\sin(x^2)$; д) $2x\cos(x^2)$.

7. Какая из указанных функций является первообразной для функции $f(x) = -\cos 2x$?

а) $-\sin 2x$; б) $-2\sin 2x$; в) $-\frac{1}{2}\sin 2x$; г) $\frac{1}{2}\sin 2x$; д) $2\sin 2x$.

8. Сколько существует первообразных для функции $f(x) = e^{x^3}$, график которых проходит через точку $(c; 0)$, где c — заданное число?

а) Ни одной; б) одна; в) две; г) бесконечно много; д) ответ зависит от значения c.

9. Скалярное произведение двух векторов равно -1. Чему может равняться величина угла φ между этими векторами?

а) $\varphi = 0°$; б) $\varphi = 90°$; в) $\varphi = 180°$; г) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$; д) $90° < \varphi \leqslant 180°$.

10. Два плоских угла трехгранного угла равны $\alpha = 120°$ и $\beta = 150°$. В каких пределах может находиться величина третьего плоского угла γ?

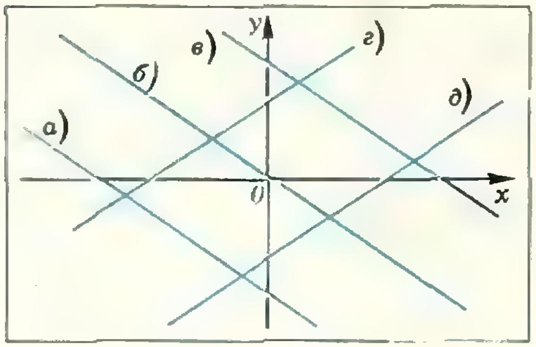


Рис. 1.

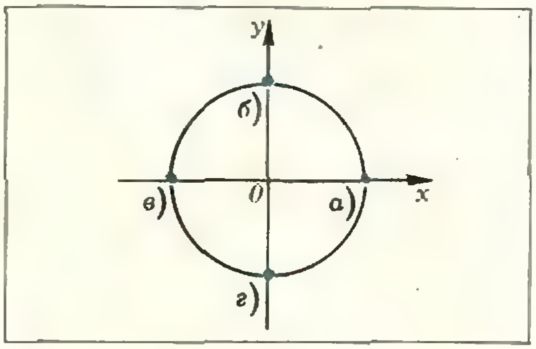


Рис. 2.

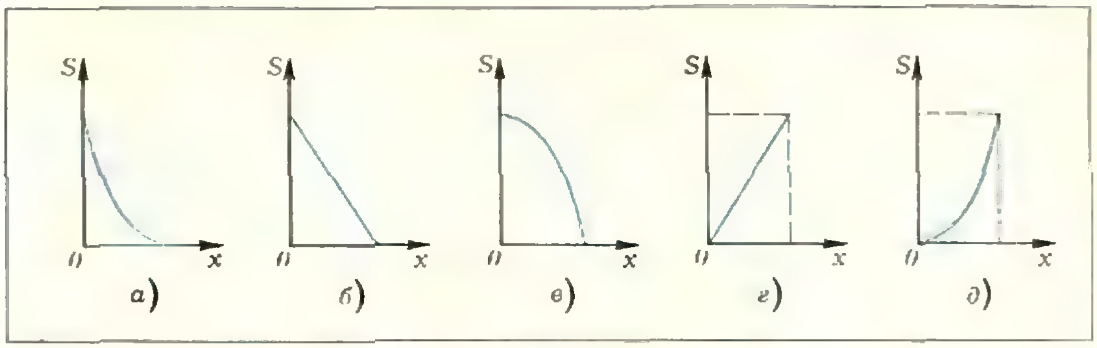


Рис. 3.

а) $0° < \gamma < 90°$; б) $0° < \gamma < 180°$; в) $30° < \gamma < 270°$; г) $30° < \gamma < 180°$; д) $30° < \gamma < 90°$.

11. Каково взаимное расположение плоскостей, заданных уравнениями $x - y + z = 0$ и $y - x - z = 1$?

а) Совпадают; б) параллельны, но не совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются, но не перпендикулярны; д) по уравнениям установить нельзя.

12. Какая из указанных — заданных уравнениями — плоскостей перпендикулярна вектору с координатами $(-1;\ 1;\ 1)$?

а) $2x - y - z = 0$; б) $x - 2y - 2z = 0$; в) $x + y + z = 0$; г) $x + y - z = 0$; д) $x - y - z = 0$.

13. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна 2. В каких пределах может заключаться площадь S полной поверхности этой пирамиды?

а) $S > 2$; б) $S > 4$; в) $2 < S < 4$; г) $3 < S < 4$; д) ответ зависит от числа боковых граней пирамиды.

14. Высота пирамиды равна 1. На каком расстоянии от вершины нужно провести плоскость, параллельную основанию, для того, чтобы она разбивала пирамиду на две части одинакового объема?

а) $1/2$; б) $\sqrt{1/2}$; в) $\sqrt[3]{1/2}$; г) $2/3$; д) ответ зависит от вида пирамиды.

15. Пусть $S(x)$ — площадь сечения пирамиды, проведенного параллельно основанию на расстоянии x от него. Какой из указанных на рисунке 3 графиков (а, б, в, г, д) может являться графиком функции $S(x)$?

16. На сколько частей разбивают пространство плоскости всех пяти граней треугольной призмы?

а) 5; б) 7; в) 9; г) 21; д) 32.

17. На сколько частей разбивают пространство плоскости четырех граней треугольной пирамиды?

а) 5; б) 9; в) 15; г) 16; д) 17.

Физика

1. Пробка плавает в воде. Как изменится архимедова сила, действующая на пробку, если пробка будет плавать в масле? Плотность воды $\rho_в$, плотность масла $\rho_м$, плотность пробки $\rho_п$.

а) Уменьшится в $n_1 = \frac{\rho_в}{\rho_м}$ раз; б) увеличится в $n_1 = \frac{\rho_в}{\rho_м}$ раз; в) не изменится; г) уменьшится в $n_2 = \frac{\rho_в}{\rho_м - \rho_п}$ раз; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. Какой из графиков, приведенных на рисунке 4, выражает зависимость проекции v_y скорости тела на вертикальную ось OY от времени? Сопротивлением воздуха пренебречь; $y_0 = 0$.

3. Кусок мела, летящий со скоростью $\vec{v}$, попадает на горизонтальную поверхность доски, движущейся с постоянной скоростью $\vec{u}$ (рис. 5). Считая движение мела относительно поверхности доски замедленным, определите, какой из приведенных ниже рисунков 6, *а* — *д* соответствует следу мела на доске.

4. На столе лежит брусок массой 1 кг. На брусок в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$, график зависимости которой от времени пока-

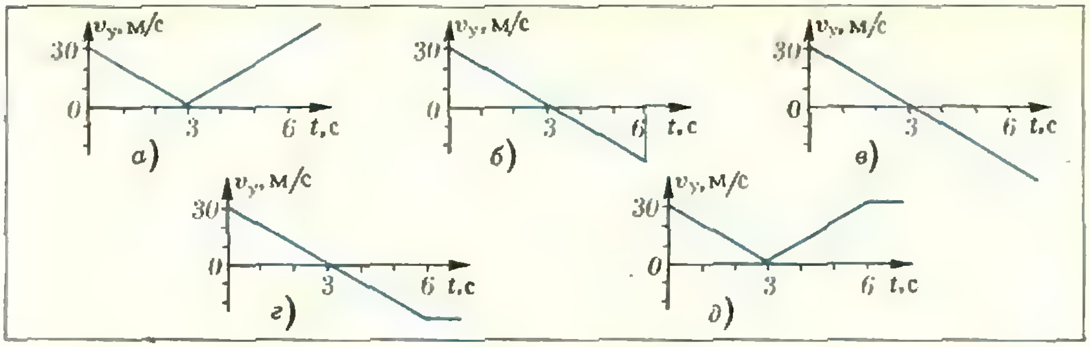


Рис. 4.

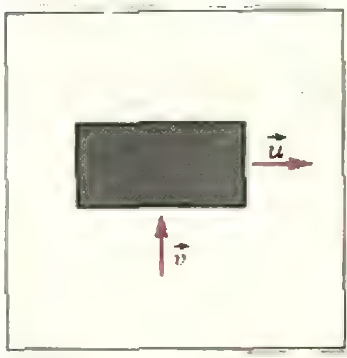


Рис. 5.

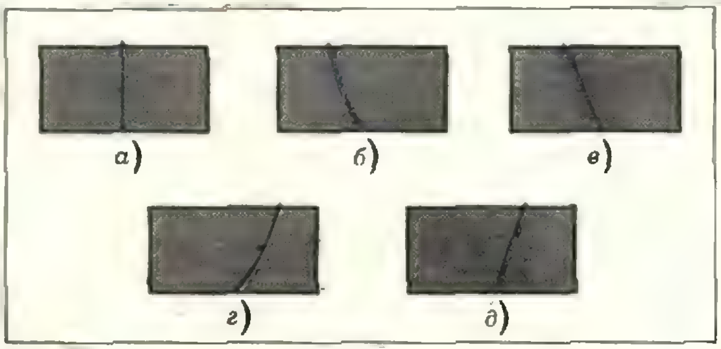


Рис. 6.

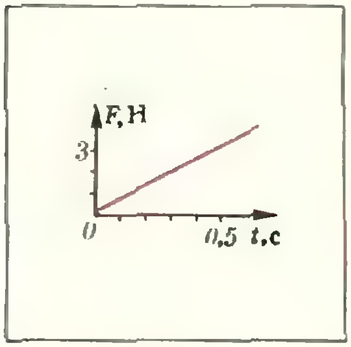


Рис. 7.

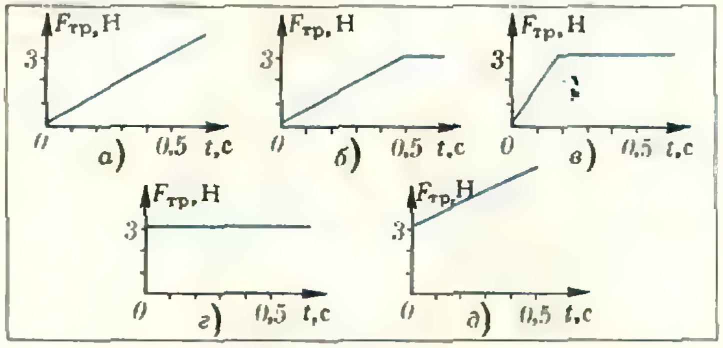


Рис. 8.

зан на рисунке 7. Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,3. Какой из графиков, приведенных на рисунке 8, выражает зависимость силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ между бруском и поверхностью стола от времени?

5. Брусок массой m движется равномерно по горизонтальной поверхности стола под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом φ к вектору скорости тела (рис. 9). Определите силу трения, действующую на брусок. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность стола равен μ.

а) $\mu m|\vec{g}|$; б) $\mu|\vec{F}|\sin\varphi$; в) $|\vec{F}|\cos\varphi$; г) $\mu|\vec{F}|\cos\varphi$; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

6. Две тележки массами $2m$ и m движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями $5|\vec{v}|$ и $|\vec{v}|$ относительно этой поверхности. Чему равна скорость тележек в этой системе отсчета после неупругого столкновения (рис. 10)?

7. Груз массой 1 кг под действием силы 30 Н движется вертикально вверх. Определите значение работы, совершенной силой, если она действовала в течение времени, за которое тело поднялось на 5 м.

а) 0; б) 50 Дж; в) 100 Дж; г) 150 Дж; д) 200 Дж.

8. На диаграмме p — V изображен график процесса, проведенного с иде-

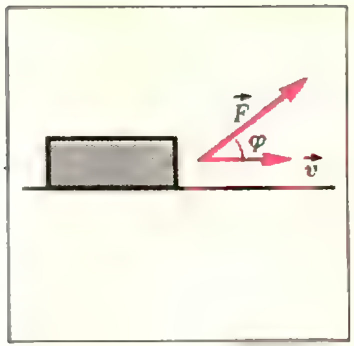


Рис. 9.

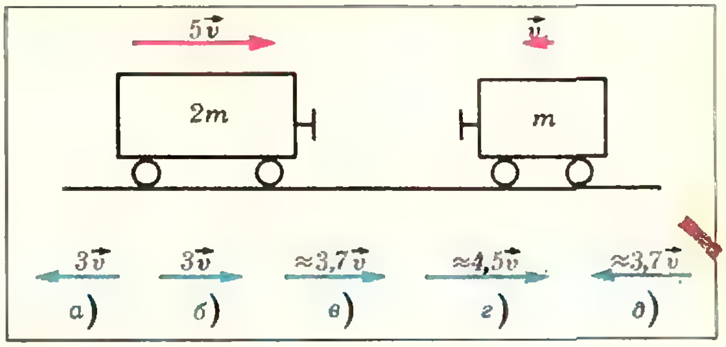


Рис. 10.

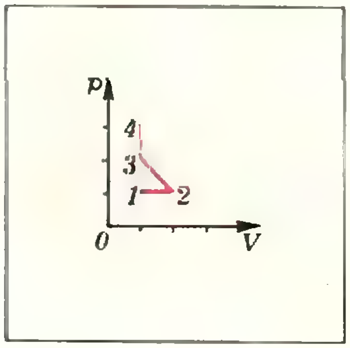


Рис. 11.

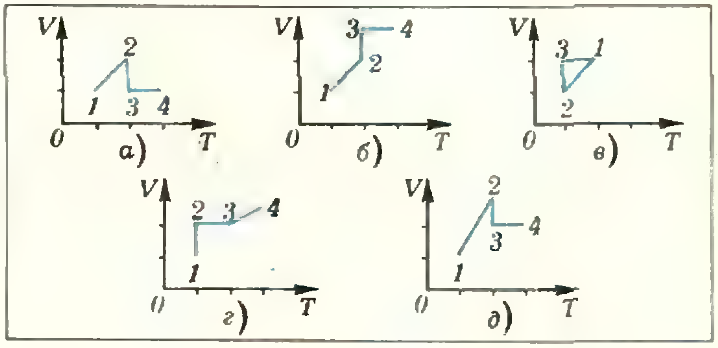


Рис. 12.

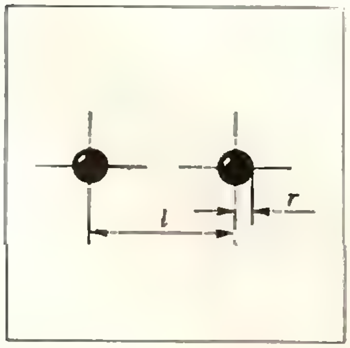


Рис. 13.

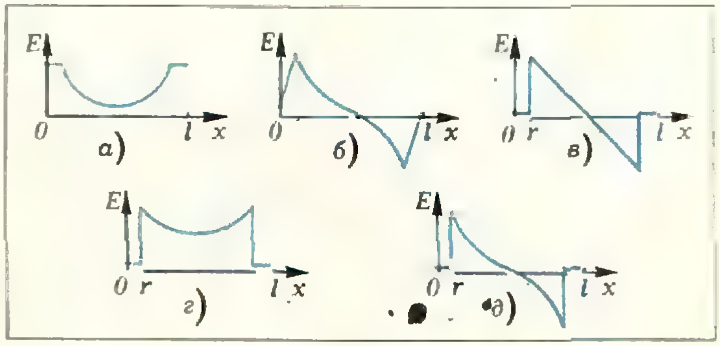


Рис. 14.

альным газом (рис. 11). Участок *2—3* — гипербола. Какой из графиков, изображенных на рисунке 12, соответствует *V—T*-диаграмме данного процесса?

9. Газу сообщили $3 \cdot 10^7$ Дж количества теплоты, и он при этом совершил работу $5 \cdot 10^7$ Дж. Какое из следующих утверждений относительно внутренней энергии системы справедливо?

а) Не изменилась; б) увеличилась на $2 \cdot 10^7$ Дж; в) увеличилась на $8 \cdot 10^7$ Дж; г) уменьшилась на $2 \cdot 10^7$ Дж; д) уменьшилась на $8 \cdot 10^7$ Дж.

10. Один моль идеального одноатомного газа, находящегося при температуре T, нагревают. Определите количество теплоты, которое надо подвести к газу, чтобы изобарически увеличить его объем вдвое.

а) $3/2RT$; б) RT; в) $2RT$; г) $5/2RT$; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

11. Как изменится к. п. д. идеальной тепловой машины, если повысить температуру нагревателя на ΔT К или понизить температуру холодильника на ΔT К?

а) Не изменится; б) увеличится одинаково в обоих случаях; в) увеличится больше при повышении температуры нагревателя; г) увеличится больше при понижении температуры холодильника; д) ни один из ука-

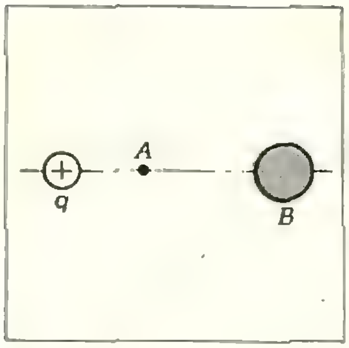


Рис. 15.

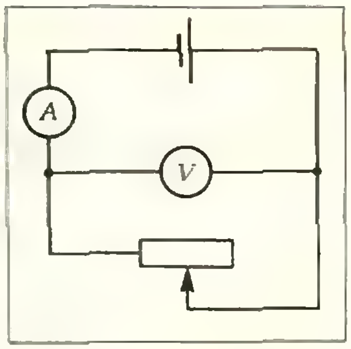


Рис. 16.

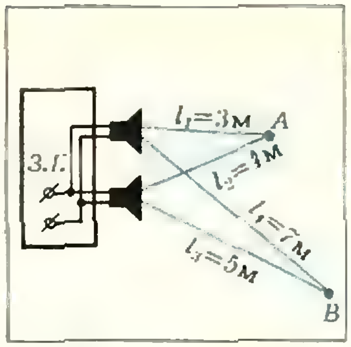


Рис. 17.

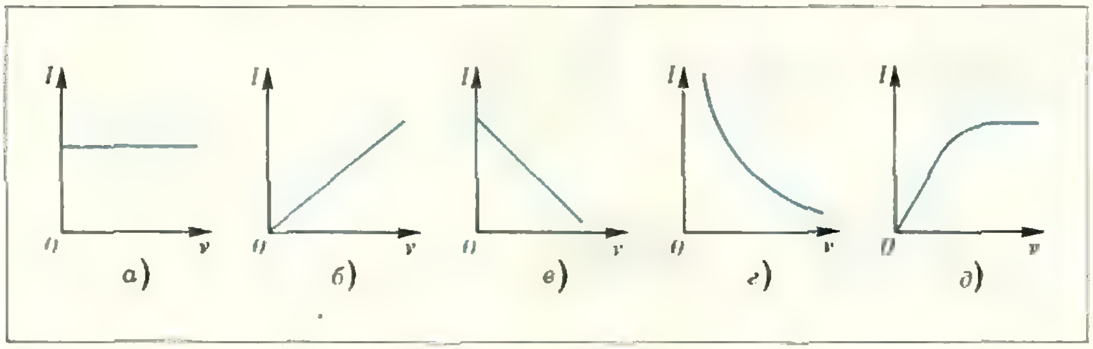


Рис. 18.

занных ответов не является правильным.

12. Два металлических одинаково заряженных шара, радиусы которых равны r, находятся на расстоянии l друг от друга (рис. 13). Какой из графиков, приведенных на рисунке 14, иллюстрирует характер изменения проекции E_l напряженности электрического поля на прямую, проходящую через центры шаров, в точках, принадлежащих отрезку $[l]$?

13. Как изменится напряженность E_A и потенциал φ_A электрического поля заряда q в точке A, если в точке B поместить шар из диэлектрика (рис. 15)?

а) E_A и φ_A увеличатся; б) E_A увеличится, φ_A уменьшится; в) E_A и φ_A уменьшатся; г) E_A уменьшится, φ_A увеличится; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

14. Заряженный конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, обладал энергией электрического поля W. Из конденсатора слили диэлектрик. Чему стала равна энергия электрического поля конденсатора?

а) W; б) $2W$; в) $^1/_2 W$; г) $4W$; д) $^1/_4 W$.

15. Как изменятся показания вольтметра и амперметра при перемещении ползуна реостата влево в цепи, изображенной на рисунке 16?

а) Показания вольтметра уменьшатся, амперметра — увеличатся; б) показания вольтметра и амперметра уменьшатся; в) показания вольтметра и амперметра увеличатся; г) показания вольтметра увеличатся, амперметра — уменьшатся; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

16. В электролитической ванне протекает постоянный электрический ток. Чему равна сила тока, текущего через амперметр, если за время 4 с ионы приносят на катод заряд 2 Кл, а на анод — заряд — 2 Кл?

а) 0; б) 0,5 А; в) 1А; г) 2А; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

17. Два динамика подключены к выходу одного генератора электрических колебаний с частотой 170 Гц. Каков результат интерференции звуковых волн в точках A и B (рис. 17)? Скорость звука в воздухе равна 340 м/с. Считать, что колебания диффузоров в динамиках происходят в одной фазе.

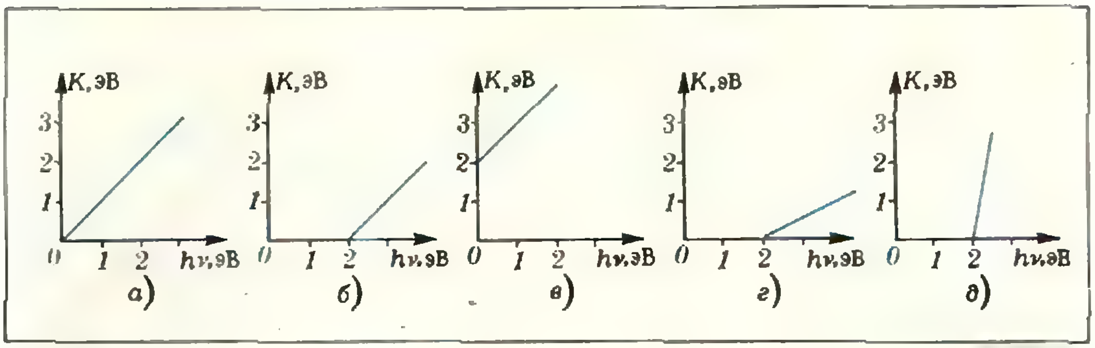


Рис. 19.

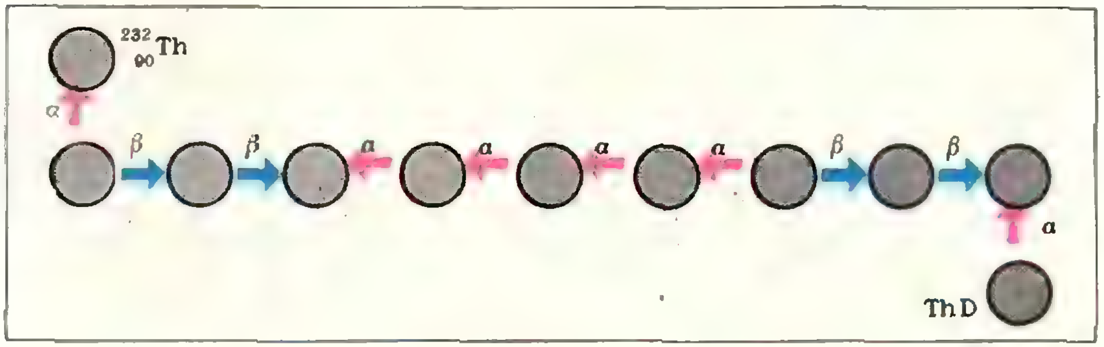


Рис. 20.

а) В точках A и B максимум; б) в точках A и B минимум; в) в точке A максимум, в точке B минимум; г) в точке A минимум, в точке B максимум; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

18. Катушка подключена к источнику переменного тока с изменяющейся частотой. Какой из графиков, приведенных на рисунке 18, характеризует зависимость силы тока от частоты в данной цепи при постоянном действующем значении напряжения? Активным сопротивлением катушки пренебречь.

19. Показатель преломления воды для красного цвета с длиной волны в вакууме $7\cdot10^{-7}$ м равен 1,33. Определите длину λ этой волны в воде и скорость c ее распространения в воде.

а) $\lambda = 7\cdot10^{-7}$ м; $c = 3\cdot10^{8}$ м/с; б) $\lambda = 7\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; в) $\lambda = 5{,}2\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; г) $\lambda = 9{,}3\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

20. Работа выхода электронов с катода вакуумного фотоэлемента равна 2 эВ. Какой из графиков, приведенных на рисунке 19, соответствует зависимости максимальной энергии фотоэлектронов от энергии падающих на катод фотонов?

21. На рисунке 20 представлено радиоактивное семейство тория $^{232}_{90}$Th. Определите заряд и массовое число конечного продукта распада тория — ThD.

а) $^{208}_{82}$ThD; б) $^{208}_{74}$ThD; в) $^{204}_{96}$ThD;

г) $^{212}_{82}$ThD; д) $^{212}_{86}$ThD.

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М461 — М475 и Ф463 — Ф477 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Абдибеков (Аркальск) **66**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **62**, **65а)**, **г)**, **69а)**, **71**, **73**, **74**, **75а)**; *Г. Абзианидзе* (Тбилиси) **67**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **67**, **73а)**, **75а)**; *Ф. Агакишиев* (ст. Зарат АзССР) **67**; *В. Айриян* (Раздан) **66**, **67**, **71**, **72**, **73а)**, **74**, **75а)**; *А. Алексеев* (Пермь) **66—68**, **71—74**, **75а)**; *Д. Алексеев* (Ленинград) **71**; *У. Алга* (Выру)

(Окончание см. с. 59).

Геометрия зубчатой передачи

И в каких только механизмах нет шестерен? И в часах они есть, и в машинном отделении корабля, и в прессах...

Каким образом ведущая шестерня A передает движение ведомой шестерне B? Обратимся к рисунку 1: жестко скрепленный с A «рычаг A_1» толкает жестко скрепленный с B «рычаг B_1» и тем самым поворачивает B.

Хороши ли прямоугольные профили зубьев? Сразу видно, что не очень. Во-первых, даже если ведущая шестерня A вращается равномерно, то этого нельзя сказать о ведомой шестерне B (почему?), а если шестерня B, в свою очередь, передает движение шестерням C, D, и т. д., то неравномерность передаваемого движения может усиливаться. Во-вторых, угол φ между усилием $\vec{F}$, которое ведет шестерню A, и направлением вращения шестерни B переменный. Стало быть, переменно усилие $\vec{F}_1$, толкающее ведомую шестерню, и зубья обеих шестерен снашиваются неравномерно.

Обратимся к рисунку на четвертой странице обложки. На нем показана схема действия масляного насоса, работающего с помощью двух несколько необычных шестерен (в каждой всего лишь по два зуба). Профиль головки каждого зуба очерчен по эпициклоиде, профиль ножки — по гипоциклоидам (об этих двух кривых рассказывалось, например, в «Кванте», 1978, № 4, с. 13.). На рисунке 2 показано, как можно вычертить такой профиль. Окружность ω радиуса $R/4$ катится по неподвижной окружности (O, R) снаружи. Тогда точка $M \in \omega$ описывает профиль головки зуба шестерни (часть эпициклоиды). Окружность ω', конгруэнтная ω, катится по (O, R) внутри. Точка $M' \in \omega'$ описывает паз между головками двух соседних зубьев (часть гипоциклоиды).

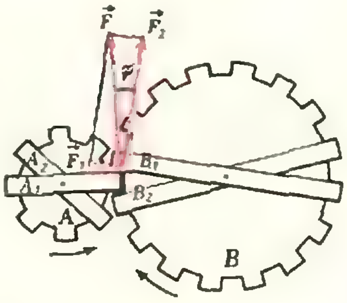


Рис. 1.

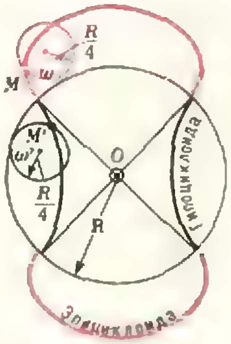


Рис. 2.

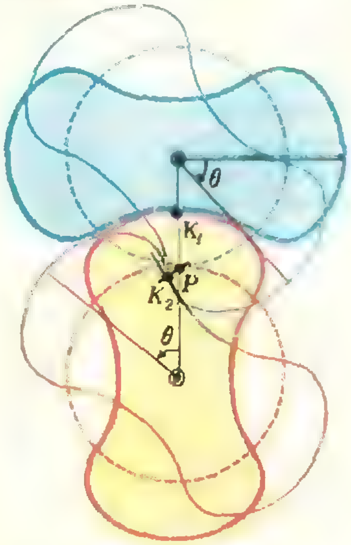


Рис. 3.

На рисунке 3 показано положение двух шестерен, при котором головка зуба нижней шестерни касается профиля верхней в середине паза между двумя ее зубьями. Если верхняя шестерня повернется на θ по часовой стрелке, а нижняя — против часовой стрелки на тот же угол, то они по-прежнему будут иметь общую точку K и, более того, общую касательную в ней. Попробуйте это показать, и установить следующее важное свойство такой пары шестерен: нормаль к профилям зубьев в точке их касания неизменно проходит через фиксированную точку P (не зависящую от положения точки касания).

Изготовив макет такой пары шестерен, вы заметите любопытное ее свойство. Для того чтобы пара работала непрерывно, шестерни должны становиться ведущими попеременно. Это означает, что данная пара шестерен не может работать в качестве механизма, передающего движение. Недаром они используются для перекачки масла, а для передачи движения от одной оси к другой служат две вспомогательные шестерни другого типа (см. рисунок на обложке). Конечно, если изготовить шестерни с большим числом зубьев циклоидального профиля, можно добиться передачи движения от ведущей шестерни к ведомой. Но остаются другие недостатки. Такие шестерни требуют, в частности, очень точной установки, чтобы эпициклоидальный профиль всегда контактировал с гипоциклоидальным. Кроме того, циклоидальные зубья трудно вырезать.

Поэтому на практике обычно используют шестерни, профили зубьев которых вырезаются по эвольвентам окружностей. Чтобы объяснить, что это такое, введем два понятия: центр кривизны кривой γ

и радиус кривизны кривой γ в данной ее точке.

Пусть γ — гладкая кривая, то есть непрерывно поворачивающаяся кривая, не имеющая изломов и заострений. К такой кривой в каждой ее точке можно провести касательную и нормаль, притом единственным образом. Пусть $M_0 \in \gamma$ — фиксированная точка, точка $M \in \gamma$ — переменная, α — угол между касательными к γ в точках M_0 и M (рис. 4). Угол между касательными конгруэнтен углу между нормалями к γ в тех же точках. Устремим точку M к M_0. Тогда точка пересечения нормалей N перейдет в предельное положение N_0. Эту точку N_0 и называют *центром кривизны* кривой γ в точке M_0, длину отрезка M_0N_0 называют *радиусом кривизны* ρ_0 кривой γ в точке M_0. Для каждой точки M_0 гладкой кривой γ центр кривизны N_0 и радиус кривизны ρ_0 определяются однозначно.

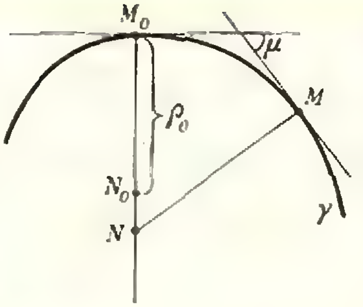


Рис. 4.

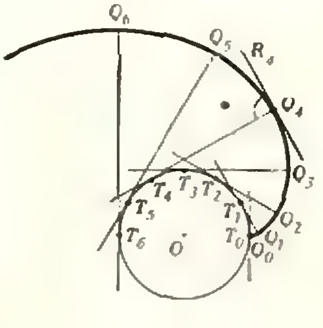


Рис. 5.

Множество γ_1 центров кривизны кривой γ называется ее *эволютой* (в переводе с латыни «развертывающаяся кривая»). Кривая γ по отношению к своей эволюте γ_1 называется ее *эвольвентой* (в переводе с латыни «развертка»). Например, эволюта окружности $(O, |OT_0|)$ есть точка — центр окружности O (рис. 5). Здесь же показана кривая, эволютой которой является окружность γ, то есть ее эвольвента; она построена в результате качения без скольжения по окружности γ некоторой прямой l с отмеченной точкой Q; эта точка и описывает эвольвенту окружности γ; на рисунке 5 отмечены отдельные положения Q_1, Q_2, Q_3, ..., соответствующие положениям точки касания T_1, T_2, T_3, ... прямой l с окружностью. Убедимся, что эволюта кривой γ действительно является окружностью. Когда движущаяся прямая l касается окружности в одной из этих точек, скажем, T_4, прямая в этот момент вращается вокруг T_4; отсюда видно, что угол $T_4Q_4R_4$ — прямой. Рассмотрим нормали к γ в точках Q_3 и Q_4 и устремим точку Q_3 к точке Q_4. Ясно, что в пределе пересечение этих нормалей будет лежать на окружности $(O, |OT_0|)$ в точке T_4, что и требуется.

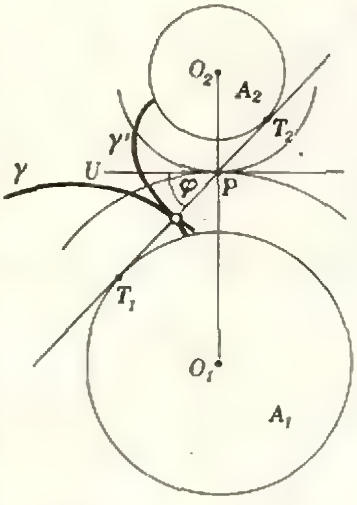


Рис. 6.

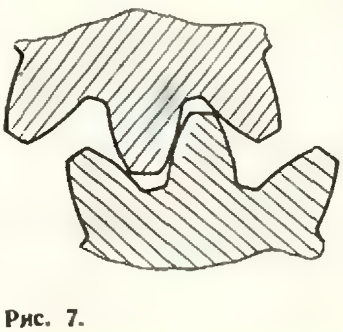


Рис. 7.

Вот по таким эвольвентам окружностей и нарезаются профили зубьев стандартных шестерен.

Эвольвента окружности пересекает касательную к этой окружности под прямым углом; в частности, так она пересекает и общую касательную двух окружностей, показанных на рисунке 6. Представим, что на эти окружности насажены шестерни с профилями зубьев, вырезанными по эвольвентам A_1 и A_2. Тогда ведущая шестерня A_1 толкает ведомую шестерню A_2 по T_1T_2 по направлению общей нормали к γ и γ′ в их точке контакта. Прямая T_1T_2 пересекает линию центров шестерен O_1O_2 в фиксированной точке P — так называемом *полюсе зацепления* шестерен. Движение происходит так, как если бы ведущее колесо A_1 не зубьями, а с помощью лишь трения передавало движение колесу A_2. Проведем через точку P перпендикуляр PU к линии центров O_1O_2 и рассмотрим угол $\varphi = \measuredangle UPT_1$. Он называется *углом зацепления*. В отличие от пары шестерен, рассмотренных на рисунке 1, и пары циклоидальных шестерен, здесь этот угол сохраняет постоянное значение. Отсюда и выгоды профилей зубьев в виде эвольвент окружностей, позволяющих добиться постоянной скорости вращения ведомой шестерни и бесшумной работы.

На рисунке 7 показано, как выглядит эвольвентное зацепление. Ножки зубьев имеют эвольвентный профиль не до самого конца паза, а только там, где проведена синяя линия. Это так называемый «рабочий участок зацепления».

В. Березин

Варианты вступительных экзаменов 1977 года

Московский энергетический институт

МЭИ является одним из крупнейших высших технических учебных заведений страны, готовящим инженерные и научные кадры практически для всех направлений современной энергетики (в том числе — ядерной), электротехники, теплотехники, радиотехники, электроники, автоматики и вычислительной техники.

На дневном отделении института — 10 факультетов: электроэнергетический, теплоэнергетический, промышленной теплоэнергетики, энергомашиностроительный, электромеханический, электрификации и автоматизации промышленности и транспорта, электронной техники, автоматики и вычислительной техники, радиотехнический, энергофизический.

45 специальностей — таков диапазон нашей учебной работы. Более двадцати тысяч студентов обучаются сейчас в стенах нашего института. В Смоленске и Казани работают филиалы МЭИ.

Учебные планы и программы всех специальностей предусматривают усиленную физико-математическую подготовку.

Математика

Вариант 1

1 Упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to a}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}\right)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}\right]^{-1}-\sqrt{2}^{\log_4 a}\right\}^{8}.$$

2. Решить уравнение

$$\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\lg(7-x)=0.$$

3. Площадь сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin(5\pi-x)+\operatorname{tg}(3\pi+x)=\frac{(\cos x)^{-1}-\cos x}{2\sin x}$$

и лежащие на отрезке $\left[-\frac{5}{3}\pi;\ \pi\right]$.

5. В равнобедренной трапеции острый угол при нижнем основании равен α, длина боковой стороны равна a. Длина отрезка, соединяющего вершину верхнего основания трапеции с серединой нижнего основания, также равна a. Найти площадь трапеции.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{\left[(3b^2+2a^2)^2-24a^2b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{3b-a^2\cdot 2^{1-\log_2 b}}+\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+2b\sqrt{a-b^2}},$$

если $\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{\log_{0,2}^3 x+(\log_{0,2}x^3)\times(\log_{0,2}0,0016)+36}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=3x-9x^2-7x^3-6$$

на отрезке $\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]$ и построить график функции на указанном отрезке.

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin x+2\cos x+2\sin x\cdot\cos^2 x=0$$

и лежащие в интервале $\left]-\frac{3}{4}\pi;\ \pi\right[$.

5. Равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α, и периметром, равным p, служит основанием прямой призмы. Угол между диагоналями конгруэнтных боковых граней призмы, проведенными из одной вершины, равен β. Найти объем призмы.

Физика

1. Радиус Луны приблизительно в 3,8 раза меньше радиуса Земли, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. Во сколько раз нужно изменить начальную скорость бросания, чтобы подбросить тело

на такую же высоту на Луне, как и на Земле?

2. Для равномерного поднятия груза массой $m=100$ кг по наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$ к горизонту, надо приложить силу $|\vec{F}|=600$ Н. С каким ускорением груз будет скользить по этой плоскости, если его отпустить?

3. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d=2$ см друг от друга. Разность потенциалов между ними $U=120$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l=3$ мм? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. По квадратной рамке со стороной $a=1$ м движется без нарушения контакта со скоростью $|\vec{v}|=10$ см/с перемычка, электрическое сопротивление которой $R=0{,}5$ см; сопротивление рамки мало. Магнитное поле, индукция которого $|\vec{B}|=0{,}5$ Т, образует с плоскостью рамки угол $\alpha=30°$. Определить ток в перемычке.

5. При включении первичной обмотки трансформатора в сеть переменного тока на вторичной обмотке возникает напряжение $U_1=13{,}3$ В. При включении в эту же сеть вторичной обмотки на клеммах первичной возникает напряжение $U_2=120$ В. Найти отношение числа витков обмоток трансформатора.

6. С какого расстояния надо фотографировать здание длиной $l=50$ м, чтобы весь фасад здания уместился на кадре пленки размером 24×36 мм? Фокусное расстояние объектива $F=50$ мм.

Б. Агафонов, В. Кобелев, В. Прохоренко

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) готовит инженеров широкого профиля с навыками научно-исследовательской деятельности по основным специальностям современной радиоэлектроники, автоматики и системотехники. Выпускники МИРЭА работают на предприятиях соответствующих отраслей промышленности, в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро, вычислительных центрах, занимаются созданием и эксплуатацией самой уникальной современной техники — от микросхем, составляющих основу любого изделия радиоэлектронной промышленности, до сложнейших электронных вычислительных машин, являющихся главным звеном любой современной системы оперативного получения и переработки информации.

Дневное отделение МИРЭА имеет три факультета: радиотехнических систем и устройств, автоматизированных систем управления, электронных и квантовых приборов,

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\cos 4x+2\sin^2 x=0,$$

удовлетворяющие условию $|x|<1$.

4. Большее основание трапеции равно 24 см. Найти ее меньшее основание, зная, что расстояние между серединами ее диагоналей равно 4 см.

5. Доказать, что $|\sin n\alpha|\leqslant n\,|\sin\alpha|$ при любом натуральном n.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy=-12. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения

$$\sin 9x=2\sin 3x,$$

удовлетворяющие условию $0<x<2$.

4. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом в 2 см. Найти сторону ромба.

5. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}.$$

Билеты устного экзамена

Билет 1

1. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

2. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

3. Почленным дифференцированием тождества $\sin 2x=2\sin x\cos x$ доказать тождество $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

4. Найти

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

5. Найти сумму

$$1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\cdots$$

Билет 2

1. Достаточное условие экстремума функции.

2. Теорема Пифагора.

3. В каких точках производная функции $y=x^3$ совпадает со значением самой функции?

4. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 10^{|1-x|}$.

5. Сколько решений имеет уравнение

$$\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x?$$

Физика

1. Найти, под каким углом α к горизонту брошено тело, если известно, что дальность его полета равна максимальной высоте подъема.

2. Конькобежец массой $M = 60$ кг, стоя на льду, бросил вперед груз массой $m = 5$ кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $|\vec{v}| = 1$ м/с. Какую работу совершил конькобежец?

3. Газ занимает объем $V = 2$ л и находится под давлением $p = 5 \cdot 10^5$ Н/м². Вычислить суммарную кинетическую энергию поступательного движения его молекул.

4. Между пластинами плоского конденсатора, расположенными вертикально на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, на нити висит заряженный бузиновый шарик, масса которого $m = 1$ г. После того как на пластины была подана разность потенциалов $U = 1000$ В, нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 20°$. Найти заряд шарика.

5. Найти сопротивление R проволочного тетраэдра, к двум вершинам которого подведено напряжение. Сопротивление каждого ребра тетраэдра равно r.

Ю. Худак

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Институт готовит инженеров по новой технике для авиационной и других отраслей промышленности.

Дневное отделение института имеет три факультета: авиационно-механический, авиационно-технологический и радиоэлектронной радиоаппаратуры.

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Доказать тождество

$$\frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^6 \alpha.$$

2. Решить уравнение (x — натуральное число)

$$A_{x+1}^3 + C_{x+1}^{x-1} = 14(x+1).$$

3. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найти угол при вершине этого треугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_{|x-1|} x \geqslant 1.$$

5. Является ли функция $\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 2\sqrt{2}$ монотонной на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $[1; 6]$?

Билет устного экзамена

1. Доказать теорему Виета (прямую и обратную).

2. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на его основание, равна половине основания. Определить углы треугольника.

3. Решить неравенство

$$4^x - 2^x - 2 < 0.$$

4. Построить график функции

$$y = \frac{\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}.$$

5. Доказать, что функция $x + \sin(2 - x)$ монотонна.

Б. Кучеров, В. Горбацевич

Московский институт химического машиностроения

На дневном отделении института имеется пять факультетов: химического машиностроения, химического аппаратостроения, технической кибернетики и автоматизации химических производств, криогенной техники и механический факультет.

Механический факультет готовит инженеров-механиков по технике основной химии и промышленной экологии, машинам и аппаратам промышленности химических реактивов и особо чистых веществ, нефтехимической технике, машинам и аппаратам органических производств, коррозии химической аппаратуры, машинам и аппаратам микробиологических производств.

Выпускники факультета технической кибернетики и автоматизации химических производств занимаются аналитическими и экспериментальными исследованиями объектов автоматизации химической промышленности; расчетом, проектированием, монтажом, наладкой и эксплуатацией систем автоматического управления с широким использованием моделирования и математических управляющих машин; проектированием узлов автоматизации.

Математика

Вариант 1

1. Доказать тождество

$$\sin^2 \alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

3. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м³ древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м³ сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м³ древесины. Какова ежедневная норма бригады по плану?

4. При каких α и β вектор $\vec{a} = (3;\ -1;\ \alpha)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (2;\ \beta;\ 1)$, если $|\vec{b}| = 3$?

5. В шар радиуса $R = 3$ см вписан цилиндр наибольшего объема. Найти объем этого цилиндра.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{1 - 2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y - x) = 2. \end{cases}$$

3. Поезд выходит из города A и через 10 час. 40 мин. приходит в город B. Если бы поезд проходил в час на 10 км меньше, то прибыл бы в B на 2 час. 8 мин. позже. Определить расстояние между городами и скорость поезда.

4. Найти предел выражения

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{x^2 - 4}.$$

5. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8 см. Найти минимум суммы квадратов длин всех сторон параллелограмма.

Физика

1. За пятую секунду равномерно ускоренного движения тело проходит 45 м. Рассчитать скорость тела в конце пятой секунды и пройденный путь за пять секунд, если начальная скорость тела равна нулю.

2. При какой скорости поезда маятник длиной $l = 11$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если длина рельсов $L = 12{,}5$ м?

3. Какое количество воды может испариться в помещении размером 10×8×4,5 м, если температура воздуха 22°C, а относительная влажность 70%? Плотность насыщающих водяных паров при 22°C $\rho_н = 1{,}94 \times 10^{-2}$ кг/м³.

4. Альфа-частица движется в циклотроне по кругу радиусом $r = 1$ м со скоростью $|\vec{v}| = 20\,000$ км/с. Какова должна быть индукция магнитного поля, чтобы удержать частицу на окружности? Масса альфа-частицы $m = 6{,}5 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд $q = 3{,}2 \times 10^{-19}$ Кл.

Л. Милованова

Московский институт инженеров землеустройства

Подробно о факультетах и специальностях института рассказано в «Кванте», 1977, № 7.

Математика

1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x - 2}{x^2 + 1} < -\frac{1}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\lg \sqrt[3]{3^{x^2 - 8x}} = 0.$$

4. Найти $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right[$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\beta \in \left]\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

5. Зная большее основание равнобедренной трапеции a, ее высоту h и угол α при основании, найти площадь трапеции.

Физика

1. Автомобиль массой $m = 2{,}0$ т поднимается в гору с уклоном 0,20. На участке пути $s = 32$ м скорость автомобиля возросла от $|\vec{v}_1| = 21{,}6$ км/ч до $|\vec{v}_2| = 36$ км/ч. Считая движение автомобиля равноускоренным, определить силу тяги двигателя. Коэффициент сопротивления движению принять равным $k = 0{,}020$.

2. Снаряд массой $m = 40$ кг, летевший в горизонтальном направлении со скоростью $|\vec{v}| = 600$ м/с, разрывается на две части с массами $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 10$ кг. Бо́льшая часть стала двигаться в прежнем направлении со скоростью $|\vec{v}_1| = 900$ м/с. Определить величину и направление скорости меньшей части снаряда.

3. На сколько градусов надо нагреть алюминиевую проволоку сечением $S = 6$ мм², чтобы она приняла ту же длину, что и под действием растягивающего усилия $|\vec{F}| = 508$ Н? (Справочные таблицы прилагаются.)

4. Электрон, обладающий скоростью $|\vec{v}| = 1{,}8 \cdot 10^4$ м/с, влетает в однородное электрическое поле с напряженностью $|\vec{E}| = 0{,}0030$ Н/Кл и движется против силовых линий. С каким ускорением будет двигаться электрон и какова будет его скорость, когда он пройдет расстояние $s = 7{,}1$ см? Сколько времени потребуется для достижения этой скорости? На сколько изменится при этом энергия электрона (масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл)?

5. Два шарика массой $m = 1{,}5$ г каждый, подвешенные в вакууме в одной точке на

шелковых нитях, после получения одинаковых по величине и знаку зарядов разошлись на расстояние $d = 10{,}0$ см, и нити образовали угол $\alpha = 60°$. Считая заряд отрицательным, определить его величину и количество электронов, полученных каждым шариком (заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

6. Элемент с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}0$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 9{,}0$ Ом. Найти: 1) силу тока в цепи; 2) падение потенциала во внешней цепи; 3) падение потенциала внутри элемента; 4) с каким к. п. д. работает элемент.

7. Электрон описывает в магнитном поле окружность радиусом $R = 4$ мм. Скорость электрона $|\vec{v}| = 3{,}5 \cdot 10^6$ м/с. Найти вектор индукции магнитного поля. (Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \times \times 10^{-31}$ кг.)

8. Оптическая сила тонкой линзы $D = 5$ дптр. Предмет поместили на расстоянии $d = 60$ см от линзы. Где и какое получится изображение этого предмета? Каково его линейное увеличение?

Л. Кронгауз,
Л. Кульчицкая,
Б. Саввина

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

В центре Ленинграда, выходя одним фасадом на Садовую улицу, а другим — на канал Грибоедова, за монументальной чугунной оградой возвышается замечательное здание с шестиколонным портиком. Оно построено в конце XVIII века по проекту архитектора Дж. Кваренги, и некогда в нем размещался Ассигнационный банк. Сейчас здесь аудитории одного из ведущих экономических вузов страны — Ленинградского финансово-экономического института им. Н. А. Вознесенского.

В наши дни из его стен выходят по-настоящему широко образованные и высоко квалифицированные современные экономисты. Кроме глубокого знания общеэкономических дисциплин они получают хорошее математическое образование. Студентам ЛФЭИ помимо общего курса высшей математики, читаются теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций, специальные курсы по применению математических методов и моделей в различных областях экономики.

Дневное отделение ЛФЭИ имеет шесть факультетов: финансово-экономический, планово-экономический, промышленно-экономический, учетно-экономический, экономики и планирования материально-технического снабжения, экономики и научной организации труда.

Выпускники ЛФЭИ работают на предприятиях, в научно-производственных объединениях, в научно-исследовательских и проектных институтах.

Математика

Задачи из билетов устного экзамена

1. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, б) $y = \cos^2 x$,

в) $y = \log_6 \sqrt{x}$,

г) $y = \sqrt{2^x}$, д) $y = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

2. Исследовать функции и построить их графики:
а) $y = x^3 - 4x^2$,
б) $y = \lg |x|$,
в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линиями:

а) $x = 4$, $x = 6$, $y = \dfrac{1}{x}$,

б) $y = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$,

в) $y = 4 - x^2$.

4. В зоопарке куском веревки длиной 100 м огораживают загон для зверей, имеющий форму равнобедренного треугольника, основанием которого служит стена павильона. Каким следует выбрать основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

5. Найти член разложения

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17},$$

не содержащий a.

6. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

7. Найдите координаты единичного вектора $\vec{a}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.

И. Блюмкина

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью, содержащей медиану CM грани ABC и параллельной прямой AD, если каждое ребро тетраэдра равно a. Найдите величину двугранного угла между этой плоскостью и гранью ABD.

2. Решить уравнение

$$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x.$$

3. Исследовать функцию $y = x\sqrt{2 - x^2}$ и построить ее график.

4. Решить систему

$$\begin{cases} 10^{1 + \lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x - y) + \lg(x + y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника, вершины которого — концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной его вершины, принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит ее в отношении 1 : 2.

2. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg (x + 10)^2}.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{и} \quad y = x + 1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

Физика

1. Воздушный шар поднимается вертикально с земли с ускорением $|\vec{a}| = 2$ м/с². Через $t_1 = 10$ с от него отделился камень. На какой высоте h от поверхности земли будет находиться камень через $t_2 = 4$ с после его отделения от шара? Ускорение свободного падения $|\vec{g}| = 9{,}8$ м/с².

2. Определить кинетическую энергию E тела массой $m = 200$ г, брошенного горизонтально со скоростью $|\vec{v}_0| = 25$ м/с, в конце 5-й секунды его движения. Ускорение свободного падения $|\vec{g}| = 9{,}8$ м/с².

3. Стеклянный шар, внутри которого есть полость, плавает на поверхности воды, погрузившись в нее на половину своего объема. Какую часть объема шара ($V_{\text{п}}/V$) занимает полость? Плотность стекла $\rho_{\text{с}} = 2500$ кг/м³, воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

4. Какая требуется сила $|\vec{F}|$, чтобы стальной стержень длиной $l = 1$ м и сечением $S = 1$ см² удлинить на $\Delta l = 1$ мм? При какой наименьшей нагрузке $|\vec{F}_{\min}|$ стержень разорвется, если предел прочности стали $\sigma_{\text{пр}} = 7{,}85 \cdot 10^8$ Н/м²? Модуль Юнга стали $E = 21{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м².

5. Найти потенциал φ точки электрического поля, расположенной на расстоянии $r = 50$ см от точечного заряда, создающего поле, если вектор напряженности в этой точке направлен к заряду, а $|\vec{E}| = 10^3$ В/м.

6. Электрон влетает в плоский расположенный горизонтально конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $|\vec{v}| = 2 \cdot 10^4$ км/с. На пластины подано постоянное напряжение $U = 50$ В. Длина пластин конденсатора $l = 5$ см, расстояние между пластинами $d = 10$ мм. На какое расстояние h сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В, конденсатор емкостью $C_2 = 2$ мкФ — до $U_2 = 180$ В. Какая разность потенциалов U установится на обкладках конденсаторов после их соединения одноименными полюсами?

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Скорость электрона $|\vec{v}| = 4 \cdot 10^7$ м/с. Индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 10^{-3}$ Т. Найти период T обращения и радиус R кривизны траектории движения электрона в этом поле. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

9. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения $\alpha_{\text{пр}}$ для этого луча $42^\circ 23'$. Чему равна скорость распространения света в скипидаре? Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

10. С расстояния $d = 100$ м фотографируют автомобиль, движущийся со скоростью $|\vec{v}| = 72$ км/ч. Определить время t экспозиции, за которое изображение на снимке сместилось бы не более чем на $s = 0{,}01$ мм. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 5$ см.

В. Колпиков,
Л. Лагуненок

Марийский политехнический институт им. А. М. Горького

Марийский политехнический институт (г. Йошкар-Ола) был организован в 1932 году на базе Казанского лесотехнического института. До 1965 года он назывался Поволжским лесотехническим институтом.

На дневном отделении института имеется девять факультетов: машиностроительный, радиотехнический, механический, инженерно-экономический, инженерно-строительный, лесоинженерный, лесохозяйственный, мелиоративно-дорожный и факультет деревообработки.

В 1977 году абитуриентам было объявлено, что для получения отметки «отлично» им достаточно сделать любые пять задач варианта.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$$

2. Решить уравнение

$$2\sin 5x \cdot \cos 6x + \sin x = \sin 7x \cdot \cos 4x.$$

3. Решить неравенство

$$9^x < 3^x + 2.$$

4. Упростить

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

5. Дан конус с объемом V и углом наклона образующей к основанию α. Определить боковую поверхность конуса.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4x-x^2,\ y=0,\ x=1,\ x=4.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$x^{\log_x (1-x)^2}=9.$$

2. Решить уравнение

$$1+\cos x=2\sin^2 x.$$

3. При каких значениях k неравенство $x^2-(k-3)x-k+6>0$ справедливо при всех действительных x?

4. Упростить

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\frac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-2}}\right):\left(\frac{x^{-3}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}.$$

5. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух боковых граней, проведенных из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

6. Найти уравнение касательной, проведенной к кривой $y=1-x^3$ в точке, абсцисса которой равна 2.

7. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$.

Г. Мелетьева

Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева

Сибирский автомобильно-дорожный институт (г. Омск) основан в 1930 году. На дневном отделении имеется четыре факультета: автомобильного транспорта, дорожных машин, промышленного и гражданского строительства и дорожно-строительный факультет.

Математика

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$.

2. Упростить

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

3. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств

$$\begin{cases} y\leqslant\log_2 x, \\ 4x-3y-12\leqslant 0. \end{cases}$$

+ ④ Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и наклонена к боковой грани под углом α. Определите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

Вариант 2

1. На обработку одной детали один рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем другой. Сколько деталей каждый из них обработает за 4 часа, если первый обработает за это время на 28 деталей больше второго?

2. Найти область определения функции

$$y=\frac{x^2}{\lg(x-2)}-\sqrt{9-x}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=6-x,\ y=0.$$

4. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между образующими равен 2α. Найти объем конуса.

Физика

1. Электрическую лампу при изготовлении наполняют азотом под давлением $p_1=5\cdot 10^4$ Па и при температуре $t_1=15^\circ$C. Какова температура газа в горящей лампе, если давление в ней повысилось до $p_2=1{,}1\cdot 10^5$ Па?

2. На электроплитке мощностью $P=600$ Вт, имеющей к. п. д. $\eta=45\%$, нагрелось $V=1{,}5$ л воды, взятой при $t=10^\circ$C, до кипения и $\alpha=5\%$ ее обратилось в пар. Как долго длился этот процесс?

3. Определить, расплавится ли железный метеорит массой $m=2$ г, упавший на поверхность Луны со скоростью $|\vec{v}|=220$ км/с, если его температура до столкновения с Луной $t=100^\circ$C.

4. Какое количество бензина израсходовали двигатели самолета, пролетевшего расстояние $l=500$ км со средней скоростью $v=250$ км/ч, если средняя мощность его двигателей $P=2000$ кВт? К. п. д. $\eta=25\%$.

Г. Данилова,
В. Федоров

(*Начало см. с. 49*)

67; *А. Антонян* (Ереван) 71, 72, 73а), 74, 75а); *Б. Аронов* (Саратов) 66—68, 71, 72, 73а), 74, 75; *А. Арутюнян* (Ленинакан) 71—73а); *К. Архангельский* (Киев) 66, 67, 71; *Р. Арыкбаев* (п. Лиман Астраханской обл.) 62; *П. Афанасенко* (Саратов) 66, 67; *Н. Бабина* (п. Научный Крым) 66; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 75а); *К. Бакланов* (Тула) 67, 69а); *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 62, 64, 65а), б), г), 66, 67, 71, 74, 75а), б); *В. Батырев* (Москва) 62, 65а), г), 66—69, 71, 72, 73а), 74, 75а), б); *С. Бахуцнев* (МНР) 62, 66, 71; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) 67, 68; *М. Бествина* (СФРЮ) 61, 62, 65а), б), 66, 67, 69, 71, 74; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) 67; *В. Болотников* (Харьков) 66, 67, 69а), 71, 73а), 75а), б); *О. Вайнберг* (Казань) 61, 62, 64, 71, 72, 74, 75а), б); *М. Вартанян* (с. Ходжабек ГССР) 67; *Н. Великороссов* (Конаково) 66, 67, 68, 69а), 71, 72; *А. Векуа* (Кутаиси) 67, 71; *В. Верзаков* (Рудный) 65б), в), 67, 72, 75а), б); *Д. Виноградов* (Дзержинск) 66; *Г. Выродов* (Ворошиловград) 67; *С. Галстян* (с. Чахрлу АрССР) 61—64, 65а), г), 66—68; *И. Гашимов* (Баку) 62, 67; *А. Гельфгат* (Рига) 71; *А. Гильман* (Москва) 66—68, 70б), 72, 75а); *Е. Горбатый* (Одесса) 71, 72, 74; *Г. Григорян* (с. Авшар Ар ССР) 71, 72; *С. Гришечкин* (Москва) 61—75; *В. Губа* (Вологда) 62, 66, 67, 69, 71—74, 75а), б); *А. Дедков* (Омск) 65а), 67, 69а), 73а), 75а); *А. Дороговцев* (Киев) 66, 67, 73, 74; *О. Евдокимов* (Ленинград) 61—63, 65а), 66—69, 70б); *А. Егоян* (Тбилиси) 66, 67, 71, 72, 73а), 74, 75а); *С. Железовский* (Саратов) 67—74, 75а), б); *В. Живаев* (Ташкент) 66, 67, 71—73а), 74; *Т. Жураев* (Ташкент) 67; *В. Забелин* (Саратов) 66, 67, 71, 75а); *И. Зайцев* (Николаев) 66, 67; *И. Зверович* (Минск) 67, 73а), 75а); *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 62, 66, 67, 69а), 71, 73а), 75а); *К. Зиновьев* (Москва) 66, 67, 70; *Я. Золотарев* (Ташкент) 62, 66—68, 71, 73а), 74, 75а), б); *Р. Измайлов* (Баку) 62, 64, 66, 68, 72, 73, 74, 75б); *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 66, 67, 71; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 62, 67—69, 71, 75а); *В. Калмыков* (Воронеж) 66, 71, 75а); *Я. Канепс* (Лиелварде) 65а), г), 66, 67; *А. Каплан* (Сумгаит) 67, 71, 73а), 74; *В. Карапетян* (Ленинакан) 66, 67, 71, 72, 73а); *П. Каталымов* (Алма-Ата) 73а); *А. Кац* (Ташкент) 66, 71, 72, 74; *А. Качуровский* (Новосибирск) 66, 67, 69а); *И. Кевхишвили* (Тбилиси) 62, 66, 69а), 73а); *А. Керимов* (Баку) 67; *А. Керимов* (Москва) 71, 72, 75а); *Р. Кирзнев* (Талды-Курган) 67; *В. Климович* (Москва) 62; *С. Колпаков* (Москва) 66, 71, 73а), 75а); *В. Корнеев* (Ангарск) 66—69; *А. Коротков* (Ижевск) 67; *И. Коротков* (Волгоград) 66, 67; *С. Корчанов* (Ангарск) 61, 62, 66—68, 71, 72, 73а), 75а); *Д. Корчемный* (Москва) 66—69, 70, 71—75а); *Г. Корчемский* (Кишинев) 66—68; *М. Косой* (Одесса) 67; *В. Костусяк* (Запорожье) 62—64, 66, 68, 71—74, 75а), б); *Л. Костюк* (Киев) 66—68; *Ф. Крис* (Ташкент) 67; *Е Кузьмин* (Череповец) 62, 67, 71, 74, 75а); *С. Кузнецов* (Ангарск) 62, 66, 67, 71, 72, 73б), 75а), б); *А. Кулеско* (Донецк) 65а)—г), 66—68, 69а), 71—75; *И. Куркиев* (Грозный) 66, 67; *С. Лавренченко* (Москва) 66; *В. Ламберг* (Одесса) 73а); *Ламтатидзе* (Тбилиси) 62; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 66, 67, 71, 73а); *В. Лашкин* (Киев), 75а); *М. Левин* (Кривой Рог) 67, 69а); *М. Левин* (Таллин) 66; *Р. Лейнус* (Вильнюс) 67; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 62, 65б), в), 67, 68, 71, 73а), 75а); *Е. Лумельская* (Пермь) 66, 67, 69, 71, 72, 73а), 74, 75а); *А. Ляховец* (Краснодар) 66—68, 71, 74, 75а); *А. Мамиконян* (с/х Ханджян АрССР) 67, 68, 71, 75а); *Д. Мартынов* (Черкизово Московской обл.) 71; *Т. Марьясина* (Москва) 74; *Ф. Махров* (д. Тойшево ЧАССР) 73а); *Р. Мешойрер* (Москва) 62, 66, 68, 69, 70б); *Г. Микаелян* (Кафана) 75а); *А. Милевский* (Мытищи) 61, 62, 66—68; *Д. Миндлин*(Ташкент) 66, 67, 71—74, 75а); *А. Мирлин* (Ленинград) 62, 63, 65а)—г, 66—74), 75а), б); *М. Мкоян* (Ленинакан) 67; *С. Морейно* (Москва) 66; *И. Мустяца* (Кишинев) 66, 67; *З. Набиева* (с. Новосаратовка АзССР) 67; *С. Намик* (Баку) 66; *Б. Наткович* (Тбилиси) 66, 67; *А. Ненашев* (Ленинград) 62—64, 65а), в), г), 66, 67, 69, 70; *Г. Николов* (НРБ) 62, 66—68; *М. Нудельман* (Москва) 71, 72, 73, 75; *И. Облаков* (Ленинград) 66—68; *В. Оганян* (с. Нор-Шен АзССР) 72; *А. Опарин* (Горький) 67, 75а); *В. Остапенко* (Алма-Ата) 66, 67, 71, 73а), 75а); *Ю. Палевская* (Москва) 75а); *Е. Палош* (Ворошиловград) 73а); *Д. Папуш* (Харьков) 61—63, 65а)—г), 66—68, 70, 71, 72, 73; *П. Пачуашвили* (Тбилиси) 67; *В. Печкин* (Малаховка) 62; *А. Подвязников* (Мосальск) 62; *В. Подобедов* (Москва) 67; *А. Попелюхин* (Киев) 66, 75а); *В. Потемкин* (Донецк) 66—68, 69а); *А. Потоцкий* (Казань) 73а); *И. Прокопеня* (Пружаны) 67; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 65а)—г), 66—68, 71, 72, 74, 75а); *А. Рабинович* (Харьков) 61, 62, 66—68; *А. Разбаков* (Полтава) 67; *З. Райхштейн* (Ярославль) 66—69, 71, 73—75; *Н. Рибарска* (НРБ) 62, 65а), г), 66—68, 70; *В. Рогозин* (Щелково) 67, 69а); *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) 66, 67, 71; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) 66—68, 69а), 71, 72, 73а), 74, 75а), б); *И. Савенков* (Лысые Горы Саратовской обл.) 66, 73а); *В. Сакович* (Поставы) 62, 66, 67, 71; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 66—68, 70—74; *С. Свадеба* (Ровно) 66, 67; *Л. Светимова* (п. Страшены МССР) 66; *П. Сердорг* (р. п. Анна Воронежской обл.) 62; *В. Сидоренко* (Красноярск) 67; *С. Сидоренко* (Брянск) 66, 70б); *К. Скудларский* (ПНР) 66; *В. Смелянский* (Москва) 66, 67, 71, 73а); *Ю. Смирнов* (Ленинград) 62, 63, 71, 73а), 75а); *В. Стовба* (Москва) 62—64, 66—75; *М. Струнинский* (Северодонецк) 67, 68; *Ф. Сукачев* (Ташкент) 67, 71, 73а), 74, 75а), б); *А. Суперстаров* (Москва) 66, 67, 70; *В. Тарев* (Коломна) 66, 67; *А. Тартаковский* (Москва) 66—75; *К. Таталян* (Ереван) 61, 66, 71, 73а), 74, 75а); *А. Тимофеев* (Чита) 67; *З. Тлешов* (Алма-Ата) 67; *Н. Трифонов* (Канск) 66, 67; *В. Трофимов* (Москва) 61—64, 66—68, 70—72, 74, 75а), б); *О. Трушин* (Кострома) 62, 67; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) 66, 67, 71; *Р. Убайдуллаев* (Ташкент) 71, 74, 75а), б); *А. Удавихин* (Йошкар-Ола) 66, 67, 69, 71;

Т. Ульмасов (Душанбе) 67; *Г. Усикян* (Раздан) 67; *М. Фадеев* (Ленинград) 66—68; *Э. Файнгольд* (Донецк) 66; *Н. Федин* (Омск) 62, 67, 68; *Я. Федоров* (Ленинград) 67, 68, 71, 73а), 75а); *Ю. Фетисов* (Москва) 67; *Г. Фирсова* (Ленинград) 65а), б), 67—69, 70; *И. Фоменко* (Днепропетровск) 67, 68; *И. Хангл* (ЧССР) 67—69, 70; *А. Хачатрян* (Ереван) 67, 71; *Ю. Церковский* (Москва) 62, 66, 67, 71, 72, 73а), 75а), б); *З. Цихистиви* (Телави) 66, 67, 69а), 73а), 74, 75а); *П. Чеботарев* (Москва) 66, 67; *А. Чекмезов* (Москва) 71, 75а); *В. Челядина* (Ленинград) 67; *М. Черепинский* (Воронеж) 62, 67, 69; *В. Чернов* (Чебоксары) 62; *В. Шенкарь*(Киев)66; *В. Шматенко* (Ангарск) 62, 66, 67, 71, 75а); *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) 61, 62, 66—69, 70, 71, 73; *Ф. Эрдманн* (ГДР) 73а); *И. Эркенов* (Пенза) 66, 67, 71, 73а), 74, 75а); *А. Юдовин* (Баку) 66, 67, 71, 73а), 75а); *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 71, 75а), б).

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф463 — Ф477**, справились с задачами **Ф463** и **Ф468**. Остальные задачи правильно решили: *А. Автюшков* (Минск) 67; *К. Акопян* (Ереван) 70, 73—77; *Е. Александрова* (Глазов) 69; *М. Алексеев* (Обнинск) 70; *А. Антонян* (Ереван) 70, 74, 77; *С. Бавкун* (Черкесск) 70; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 70, 73, 77; *А. Белов* (Москва) 74, 75; *В. Беркут* (Днепропетровск) 64; *А. Большаков* (Саратов) 69, 70; *С. Боткин* (Караганда) 70, 74, 77; *Л. Брускин* (Иркутск) 73; *М. Быков* (Горький) 70; *И. Вайсбурд* (Томск) 64, 65, 69—72; *Д. Василевич* (Ленинград) 75, 76; *Н. Великороссов* (Конаково) 65; *С. Веселянский* (Харьков) 66, 67, 69, 70, 74, 76, 77; *В. Гаврилов* (Орск) 65, 70, 73—77; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 64, 65, 67, 69, 71, 72, 74; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) 69—72; *В. Гаркавый* (Лида) 64, 65, 70—77; *В. Голубенко* (Черкесск) 70, 72; *Ю. Горбунов* (Курск) 70, 74, 77; *Е. Гордиенко* (Кишинев) 66, 67; *С. Горшков* (Среднеуральск) 67; *И. Гусев* (Воркута) 64—66, 69—77; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) 69, 72; *И. Дубовой* (Алма-Ата) 69; *С. Дынник* (Тараклия) 64; *Л. Евельсон* (Брянск) 69, 70; *К. Елин* (Кокчетав) 70; *В. Жаботинский* (Днепропетровск) 75, 76; *М. Жуков* (Москва) 70, 72; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 64—67, 69—77; *И. Зайцев* (Николаев) 67; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 73, 76; *И. Иванников* (Душанбе) 70, 74; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 64—67, 69—76; *С. Исаков* (Пермь) 66; *Е. Казарова* (Ереван) 77; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 64, 65, 67, 69—71, 73—77; *Я. Калайдзидис* (Чимкент) 69, 71, 76, 77; *В. Карапетян* (Ленинакан) 69—71, 73, 74; *А. Карнаухов* (п. Кугана ЯАССР) 67; *С. Карнаухов* (Ростов-на-Дону) 66, 67, 69, 70, 73—75, 77; *В. Кельмин* (Москва) 70, 71, 73; *С. Клейман* (Луков) 69, 70; *В. Кобелев* (Щигры) 64, 65, 67, 75, 76. *В Комов* (Александров) 64—67, 69—77; *М. Константинов* (Свердловск) 73, 77; *Ю. Кордюков* (Серов) 64; *Г. Корчемский* (Кишинев) 70, 73; *В. Костусян* (Запорожье) 75; *А. Краджян* (Ереван) 70; *А. Кудинов* (Воронеж) 72; *Е. Кузьмин* (Череповец) 73; *П. Кулинич* (Воронеж) 67; *А. Куприн* (Москва) 64, 69, 70, 72—74, 76, 77; *С. Куратов* (Кишинев) 64; *М. Курбатов* (Москва) 64—67, 70—77; *Т. Кухтина* (Киев) 67; *Л. Кушнир* (Астрахань) 64, 65, 67, 71, 74—77; *В. Лашкин* (Киев) 64, 67, 69, 73—77; *А. Левченко* (Свердловск) 66, 67, 69, 70, 73—75; *А. Леонович* (Лида) 69; *Д. Лепигин* (Димитровград) 67; *И. Лесюк* (д. Юхновичи Брестской обл.) 73—75, 77; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 67, 70; *Д. Людмирский* (Киев) 64, 65, 67, 69—71, 75—77; *А. Макагонов* (Москва) 65, 67; *В. Макаров* (Челябинск) 64—67; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 64, 74; *М. Матвеев* (Дубна) 64—67; *М. Межуева* (Челябинск) 70; *А. Мирлин* (Ленинград) 64, 67, 69—71, 73, 75, 76; *Н. Миронов* (Кашин) 69, 70; *М. Митрофанов* (Волгоград) 64, 70, 73—75; *А. Мкртчян* (Ленинакан) 70, 71, 73, 74, 76, 77; *А. Могильнер* (Свердловск) 69, 70, 73—76; *И. Молчанов* (Киев) 69, 70, 76, 77; *И. Муромцев* (Орск) 69, 70; *О. Напов* (Рогатин) 67; *Б. Наткович* (Тбилиси) 74; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) 64—67, 70, 72, 73, 76, 77; *С. Нестер* (Днепропетровск) 64; *А. Никитенков* (Великие Луки) 64—67, 69—77; *В. Никитин* (Запорожье) 70, 74; *Л. Николаев* (Москва) 75; *А. Опарин* (Горький) 64, 67, 73—76; *О. Оразмамедов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) 64, 65; *А. Паршаков* (Свердловск) 76, 77; *С. Пасюта* (Гатчина) 74; *В. Переверзев* (Омск) 66; *П. Побыяица* (Ленинград) 64, 65; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 64—67; *А. Попов* (Чусовой) 64—66; *С. Прядкин* (Киев) 69, 76; *М. Райкин* (Оренбург) 64, 67; *Ю. Резник* (с. Веселянка Запорожской обл.) 64—67, 70, 72, 77; *С. Розуван* (Киев) 65; *И. Романов* (Москва) 65; *В. Рудянко* (Мироновка Киевской обл.) 64; *Н. Савченко* (Киев) 64, 65; *П. Саипов* (Ташкент) 69; *С. Седов* (Дрезна) 69, 70; *П. Сильвестров* (Новосибирск) 65; *А. Скипер* (п/о Богородицкое Смоленской обл.) 65; *Н. Смоляков* (Тольятти) 65; *В. Смышляев* (Ленинград) 64, 65, 67; *А. Сторожев* (Актюбинск) 64, 65, 71, 74, 77; *Р. Султанов* (Ташкент) 64—67; *В. Терехин* (Баку) 64, 67; *Ю. Торосян* (Тбилиси) 74; *К. Трутнев* (Казань) 64—67, 69—75, 77; *Н. Федин* (Новосибирск) 65—67; *А. Филатов* (Тюмень) 65; *Л. Хант* (Могилев-Подольский) 64, 65; *А. Ханчецкий* (Вилейка) 65; *А. Шептовецкий* (Москва) 64, 65, 67; *И. Шляхова* (Лобня) 64.

На пути к решению

1. Докажите (например, методом математической индукции) неравенство

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Докажите методом математической индукции, что f_{2k} оканчивается на 6, а f_{2k+1} — на 2.

3. После перемножения уравнений системы (8), получим

$$\overline{f_{n-2}^2}\cdot xy + f_{n-2}\cdot(x+y) + 1 = \\ = \frac{f_{n-2}x_n + 1}{x_{n-1}}\, xy,$$

или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{f_{n-2}xy} = \\ = -f_{n-2} + \frac{f_{n-2}x_n + 1}{f_{n-2}x_{n-1}}.$$

Кроме того, $x_n = f_{n-1}+1$ по условию теоремы; $f_{n-1} = f_{n-2}x_{n-1}$. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{f_{n-1}} = A,$$

докажите справедливость равенства

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \\ + \frac{1}{f_{n-2}xy} = A.$$

4 и 5. Покажите, что для базисной последовательности

$$\frac{f_{n-2}x_n + 1}{x_{n-1}} = f_{n-2}^2 + 1.$$

Вопросы для выпускников

Математика

Правильные ответы: **1.** а. **2.** г. **3.** г. **4.** д. **5.** в. **6.** д. **7.** в. **8.** б. **9.** д. **10.** д. **11.** б. **12.** д. **13.** в. **14.** в. **15.** а. **16.** г. **17.** в.

Приведем комментарии к некоторым вопросам.

5. $1000° = 2\cdot 360° + 280°$, $\operatorname{tg} 280° < -1 < \sin 280° < 0 < \cos 280°$.

8. Искать первообразную вовсе не обязательно, тем более, что вы ее и не найдете, хотя она существует (см. последний абзац п. 100 учебника «Алгебра и начала анализа 10»).

9. $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b} < 0.$

10. $\alpha + \beta + \gamma = 270° + \gamma < 360°$, поэтому $\gamma < 90°$; $\gamma > \beta - \alpha = 30°$.

13. Если α — двугранный угол при основании пирамиды, то площадь основания равна 2 $\cos\alpha$, а полная поверхность $S = 2 + 2\cos\alpha$.

14. Легко доказать, что объемы гомотетичных многогранников относятся как третьи степени длин сходственных отрезков.

15. Если S_0 — площадь основания пирамиды, h — ее высота, то

$$S(x) = S_0\cdot\left(\frac{h-x}{h}\right)^2 = \frac{S_0}{h^2}(h-x)^2.$$

16. Плоскости боковых граней делят пространство на 7 частей. Плоскости оснований призмы каждую из этих частей разбивают на три.

17. К каждой вершине прилежит трехгранный угол, к каждой грани — «усеченный» трехгранный угол, к каждому ребру — «дважды усеченный» двугранный угол; кроме того, есть внутренняя часть; всего 15 частей.

Физика

Ответы: 1. в. 2. б. 3. в. 4. б. 5. в. 6. б. 7. г. 8. а. 9. г. 10. г. 11. г. 12. д. 13. б. 14. г. 15. а. 16. б. 17. г. 18. г. 19. в. 20. б. 21. а.

Варианты вступительных экзаменов 1977 года

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. a^2. **2.** $\left\{\frac{1}{5}, 6\right\}$. **3.** 3. **4.** $\left\{-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$. **5.** $\frac{3}{2}a^2\sin 2\alpha$.

Вариант 2

1. $-2b$. **2.** $]0;\ 125]$. **3.** $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]} f(x) = f(1) = -19$, $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{7}\right) = -5\frac{38}{49}$. **4.** $\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

5. $$\frac{p^3\sin\alpha\sqrt{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}}{128\cos^6\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)\sin\dfrac{\beta}{2}}.$$

Физика

1. Начальную скорость надо уменьшить приблизительно в 2, 4 раза.

2. $|\vec{a}| = 2|\vec{g}|\sin\alpha - \frac{|\vec{F}|}{m} \approx 4$ м/с^2.

3. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eUl}{md}} \approx 2{,}5 \cdot 10^6$ м/с.

4. $I = \frac{2|\vec{B}|\,a\,|\vec{v}|\sin\alpha}{R} = 0{,}1$ А.

5. $n_1/n_2 = \sqrt{U_2/U_1} = 3$.

6. $d \approx 70$ м.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. $\left\{-1,\ \frac{9}{16}\right\}$.

2. $x_1 = 4$, $y_1 = 5$ и $x_2 = 5$, $y_2 = 4$.

3. $\left\{-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right\}$.

4. 16 см. 5. Доказательство можно провести, например, методом математической индукции.

Вариант 2

1. —3. 2. $x_1 = 7$, $y_1 = -3$ и $x_2 = -7$, $y_2 = 3$. 3. $\left\{\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18}\right\}$.

4. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

Физика

1. $\alpha = \operatorname{arctg} 4 = 76°$.
2. $A = Mv^2(1 + M/m)/2 = 390$ Дж.
3. $K = 3/2pV = 1500$ Дж.
4. $q = m|\vec{g}|\operatorname{tg}\alpha/U = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$ Кл.
5. $R = r/2$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант письменного экзамена

2. 4. 3. Указание. Если d_1, d_2 — диагонали параллелограмма, а a, b — его стороны, то $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Ответ. $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. 4. $]0;\ \frac{1}{2}[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.

5. На $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$ — нет, на $[1;\ 6]$ — да.

Московский институт химического машиностроения

Математика

Вариант 1

2. $]1;\ \frac{2\sqrt{3}}{3}[$. 3. 24 м^3. 4. $\alpha_1 = -4$, $\beta_1 = 2$ и $\alpha_2 = -8$, $\beta_2 = -2$. 5. $12\sqrt{3}\pi$.

Вариант 2

2. $x = 2$, $y = 4$. 3. 640 км, 60 км/ч.
4. $\frac{1}{16}$.

5. Указание. Если d_1, d_2 — длины диагоналей параллелограмма, а a, b — длины его сторон, то $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Ответ. 32.

Физика

1. $|\vec{v}| = 50$ м/с; $s = 125$ м.

2. $|\vec{v}| = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}} \approx 18{,}8$ м/с.

3. $m = 0{,}3\,\rho_{\text{н}}V = 2{,}1$ кг.

4. $|\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|}{rq} \approx 0{,}4$ Т

Московский институт инженеров землеустройства

Математика

1. $y_{\max} = y(-3) = 28$, $y_{\min} = y(1) = -4$. 2. $]-3;\ 1[$. 3. $\{0,8\}$. 4. $-\frac{33}{65}$.

5. $(a - h \cdot \operatorname{ctg}\alpha)h$.

Физика

1. $|\vec{F}_{\text{т}}| = m\left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} + |\vec{g}|(\sin\alpha + k\cos\alpha)\right] = 6{,}4$ кН

2. $v_2 = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = -300$ м/с; меньший осколок движется в сторону, противоположную большему.

3. $\Delta T = \frac{|\vec{F}|}{ES\alpha} = 52{,}5$ К, где $\alpha = 24 \times 10^{-6}$ К$^{-1}$ — коэффициент линейного расширения алюминия и $E = 7 \cdot 10^{10}$ Н/м^2 — модуль Юнга.

4. $|\vec{a}| = \frac{e|\vec{E}|}{m} \approx 5{,}3 \cdot 10^{8}$ м/с^2; $|\vec{v}_1| = \sqrt{v^2 + 2|\vec{a}|s} \approx 2 \cdot 10^4$ м/с;

$t = \frac{|\vec{v}_1| - |\vec{v}|}{|\vec{a}|} \approx 4 \cdot 10^{-6}$ с;

$\Delta W = e|\vec{E}|s \approx 3{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж.

5. $|q| = d\sqrt{m|\vec{g}|\operatorname{tg}\alpha} \approx 9{,}7 \cdot 10^{-8}$ Кл; $|q|/e \approx 6 \cdot 10^{11}$.

6. 1) $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = 0{,}11$ А; 2) $IR = 0{,}99$ В; 3) $Ir = 0{,}11$ В; 4) $\eta = \frac{R}{R + r} = 0{,}9$.

7. $|\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|}{eR} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ Т.

8. $f = 30$ см; $\Gamma = f/d = 1/2$.

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

Математика

Задачи из билетов устного экзамена

4. $50\sqrt{2}$. 5. $T_8 = C_{17}^8$. 6. A_9^5.

7. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Площадь равна $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$, величина двугранного угла $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{33}}\right)$. 2. 5. 4. $x=4{,}5$; $y=0{,}5$.

Вариант 2

1. Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$— параллелепипед, O— точка пересечения медиан треугольника AB_1D_1. Разложите по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$ векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.

2. $]-\infty; -11[\cup]-11; -10[\cup]-10; -9[\cup]-9; 2]\cup[3; +\infty[$. 3. $S = \int_1^4 [(x+1)-(x^2-4x+5)]\,dx = 4{,}5$.

4. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in Z)$.

Физика

1. $h = |\vec{a}|t_1^2/2 + |\vec{a}|t_1t_2 - |\vec{g}|t_2^2/2 = 101{,}6$ м.

2. $E = m(|\vec{v}_0|^2 + |\vec{g}|^2t^2)/2 = 302{,}6$ Дж.

3. $V_п/V = 1 - \rho_в/2\rho_с = 4/5$.

4. $|\vec{F}| = E\Delta lS/l = 21{,}6$ кН; $|\vec{F}_{min}| = \sigma_{пр}S = 78{,}5$ кН.

5. $\varphi = |\vec{E}|r = 5$ кВ.

6. $h = \frac{eUl^2}{2md|\vec{v}|^2} \approx 2{,}8$ мм.

7. $U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 260$ В.

8. $R = \frac{m|\vec{v}|}{e|\vec{B}|} \approx 22{,}8$ см; $T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} \approx 36\cdot 10^{-9}$ с.

9. $v = c\sin\alpha_{пр} \approx 2\cdot 10^8$ м/с.

10. $t = \frac{s(d-F)}{F|\vec{v}|} \approx 1$ мс.

Марийский политехнический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\{3,\ 3^9\}$. 2. $x = \frac{\pi}{4}k$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}l\ (k,\ l \in \mathbf{Z})$. 3. $]-\infty; \log_3 2[$. 4. $x—1$.

5. $\sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}}$. 6. $\min\limits_{[-1;\,3]} y = y(3) = -\frac{5}{13}$, $\max\limits_{[-1;\,3]} y = y(0) = 1$. 7. 9.

Вариант 2

1. 4. 2. $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k,\ l \in \mathbf{Z})$. 3. $]-3;\ 5[$. 4. $\sqrt{2}$.

5. $\dfrac{\sqrt[3]{4V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

6. $y = -12x + 17$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{6}$. 2. $-\cos^3\alpha\cdot\sin^2\beta$. 4. Боковая поверхность равна $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$, объем — $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

Вариант 2

1. Первый — 48 деталей, второй — 20.

2. $]2; 3[\cup]3; 9]$. 3. $S = \int_0^2 x^2dx + \int_2^6 (6-x)\,dx = 10\frac{2}{3}$. 4. $\frac{\pi}{3}S\sqrt{S\cdot\operatorname{tg}\alpha}$.

Физика

1. $T_2 = \frac{p_2T_1}{p_1} = 633{,}6$ К, $t_2 = 360{,}6$°C.

2. $\tau = \frac{\rho V(c\Delta t + \alpha L)}{\eta P} \approx 0{,}75$ ч, где $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность, $c = 4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость и $L = 2{,}26\cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота парообразования воды.

3. Расплавится.

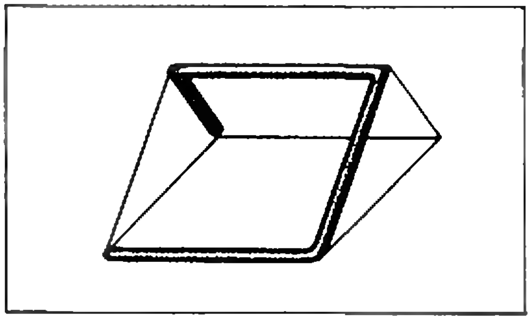


Рис. 1.

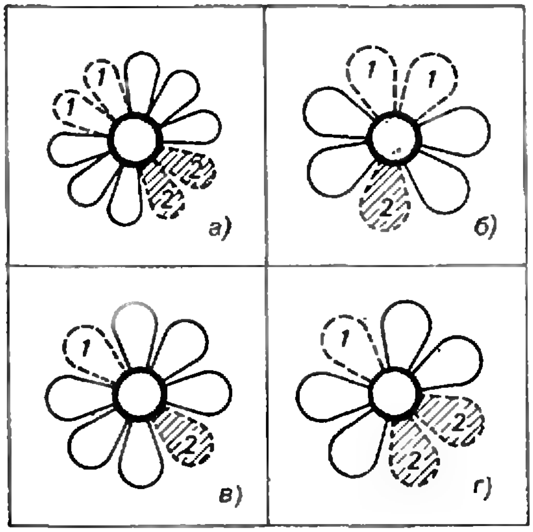


Рис. 2.

4. $m = \dfrac{Pl}{vq\eta} \approx 1{,}3 \cdot 10^3$ кг, где $q = 4{,}5 \times \times 10^7$ Дж/кг — теплота сгорания бензина.

Задачи наших читателей

(*см. «Квант» № 5*)

6. Точки A и B движутся по двум концентрическим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями. Если в начальный момент точки находились на одном радиусе, то расстояние $|AB|$ между точками все время будет оставаться постоянным.

7. Э. д. с. одного аккумулятора значительно больше э. д. с. другого. Ток, генерируемый «сильным» аккумулятором, идет частично через лампу, а частично — через «слабый» аккумулятор, который играет роль шунта с небольшим сопротивлением. К «сильному» аккумулятору последовательно подсоединяют очень малое сопротивление, а в цепь «слабого» аккумулятора — очень большое сопротивление. Вследствие этого уменьшается ток, протекающий через «слабый» аккумулятор, и увеличивается ток, протекающий через лампу.

8. Работа при подъеме бревна за толстый конец равна $A_1 = mgh_1$, где h_1 — расстояние от тонкого конца до центра тяжести бревна. При подъеме бревна за тонкий конец $A_2 = mgh_2$, где h_2 — расстояние от толстого конца до центра тяжести. По условию $A_1 - A_2 = A$. Решая систему

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = l \\ mg\,(h_1 - h_2) = A, \end{cases}$$

находим

$$h_1 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{mg}\right).$$

«Квант» для младших школьников

(*см. «Квант» № 6*)

1. Федор получил 9 баллов, Николай — 8, Виктор — 7, Клим — 6, Иван — 5, Андрей — 4, Захар — 3, Михаил — 2, Ефим — 1, Тимофей — 0. Таким образом, расшифровка цифрового ряда

67480, 2401240564, 953564

следующая:

КВАНТ. МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА.

2. См. рисунок 1.

3. Вторая девочка должна своим первым ходом сделать ромашку симметричной. В зависимости от четности числа лепестков и количества лепестков, оторванных первой девочкой, она отрывает один или два лепестка (рис. 2, *а*) — *г*)). Затем вторая девочка симметрично повторяет ходы первой девочки. Поскольку сразу с обеих «половинок» ромашки лепестки отрывать нельзя, первая девочка проигрывает.

4. Сергею и Агею по 44 года, Андрею 41 год, Степану 47 лет, а Ивану 50. Так как из чисел 41, 44, 47 и 50 кратно пяти только 50, получаем, что сына Андрея зовут Иван.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
И. Смирнова.

Зав редакцией Л. Чернова

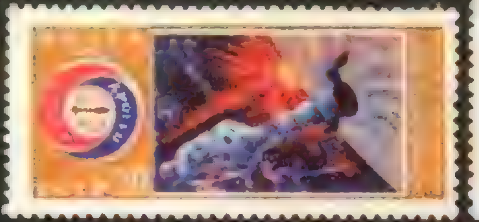
Художественный редактор Т. Макарова

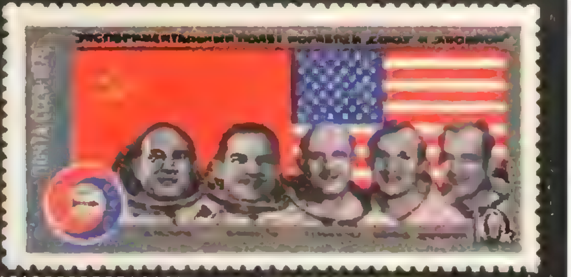
Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/IV 1978 г.
Подписано в печать 14/VI 1978 г.
Бумага 70×108¹/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,88. Т-11680
Цена 30 коп. Заказ 941
Тираж 300 606 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



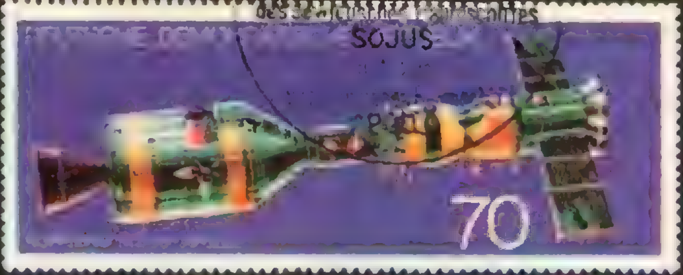


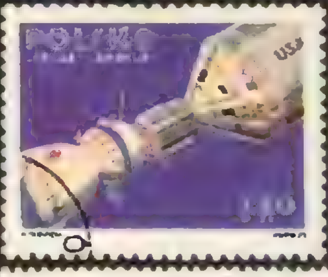
На марках — «Союз» — «Аполлон»

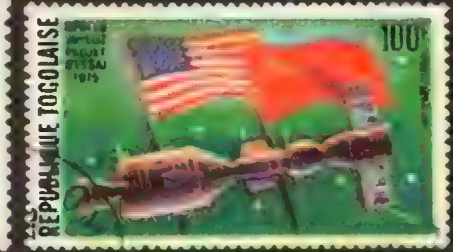
15 июля 1975 года с космодрома Байконур стартовал космический корабль «Союз-19» с космонавтами Алексеем Леоновым и Валерием Кубасовым. В тот же день с мыса Канаверал был запущен космический корабль «Аполлон» с Томасом Стаффордом, Вэнсом Брандом и Дональдом Слейтоном. 17 июля в 19 часов 12 минут по московскому времени корабли состыковались, образовав первую международную орбитальную станцию.

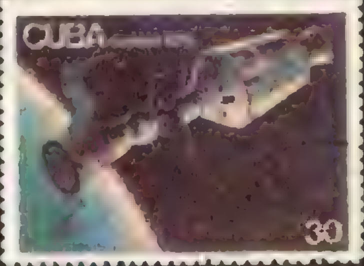
Космонавты успешно выполнили совместные научные исследования, осуществили четыре взаимных перехода экипажей из корабля в корабль. Громадный четырехлетний труд тысяч людей, готовивших этот полет, завершился точно по плану. Прекрасно работали стыковочные системы на каждом корабле. Никаких замечаний не вызвала унифицированная система жизнеобеспечения космонавтов. Уверенно действовали совместные радиосистемы и системы управления полетом одновременно из двух наземных Центров. А главное — была подтверждена возможность совместного решения сложных организационных и технических проблем двумя государствами, лидирующими в области космических исследований. Этот выдающийся научно-технический эксперимент послужил поводом для выпуска большого количества почтовых марок в разных странах. Только за один 1975 год 35 государств выпустили 145 марок и блоков, посвященных программе «Союз» — «Аполлон». Некоторые из них мы воспроизводим на этой странице.

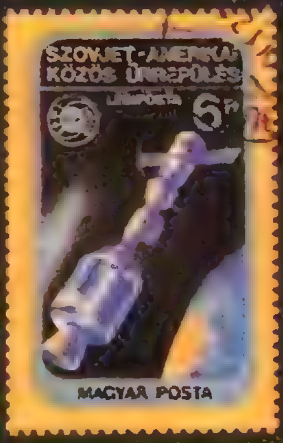
В. Рудов

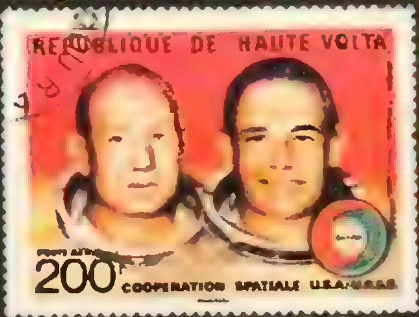


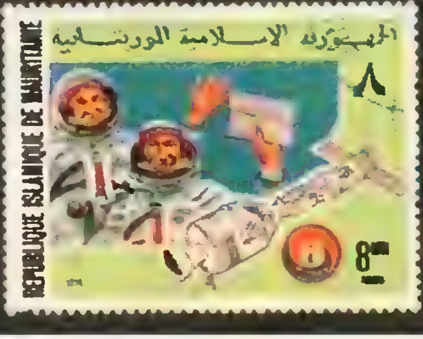


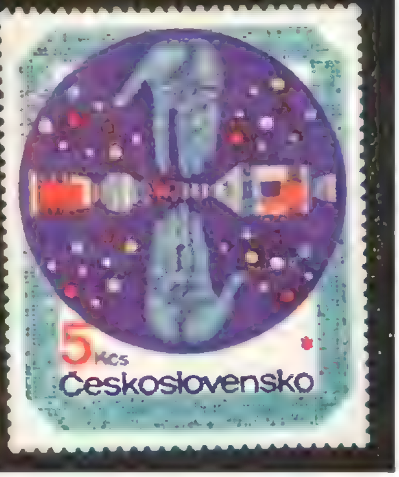

REPUBLIQUE TOGOLAISE
100F

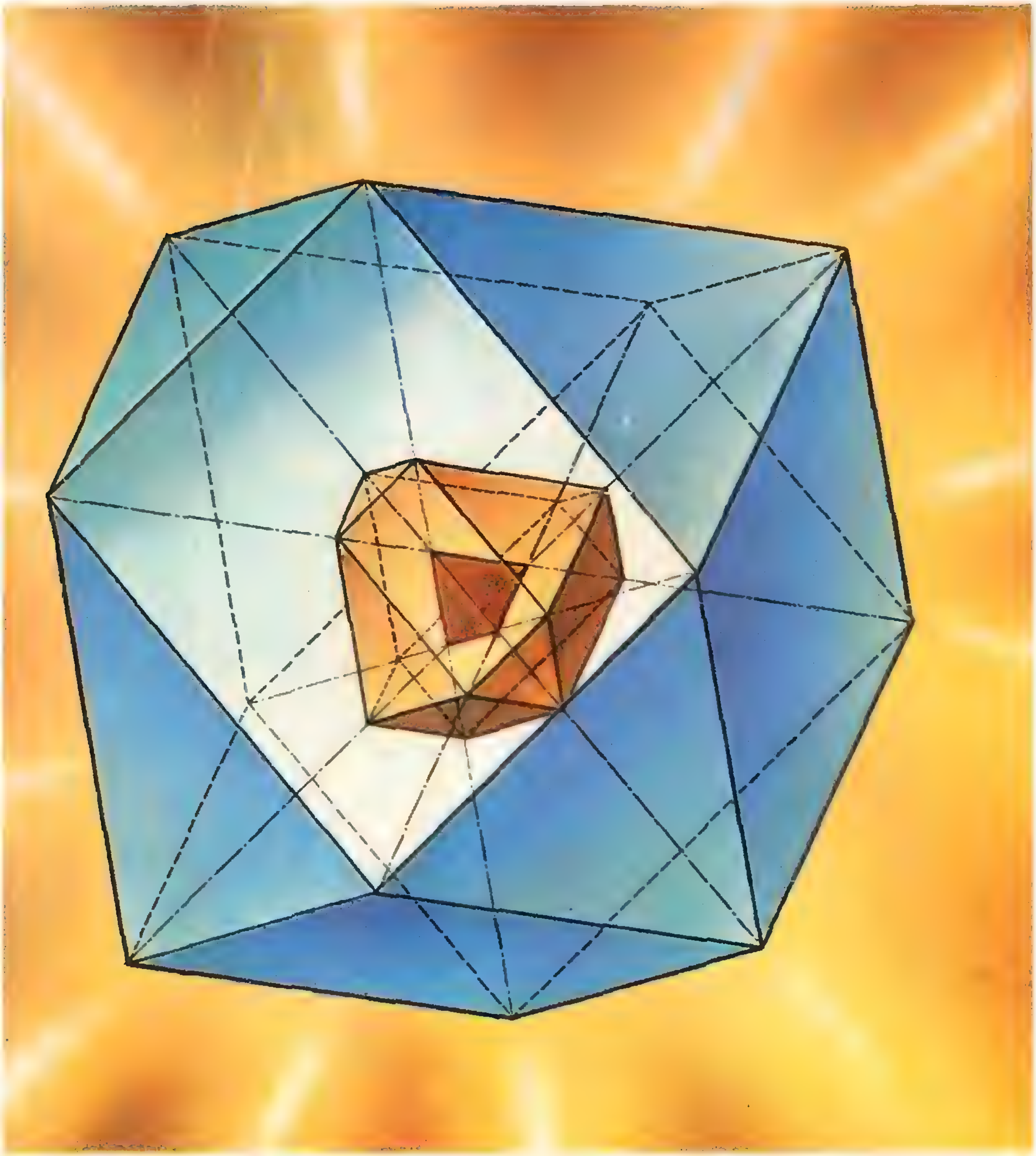



SZOVJET-AMERIKAI
KÖZÖS ŰRREPÜLÉS
5Ft
MAGYAR POSTA


REPUBLIQUE DE HAUTE VOLTA
200F
COOPERATION SPATIALE U.S.A.-U.R.S.S.


REPUBLIQUE ISLAMIQUE DE MAURITANIE
الجمهورية الإسلامية الموريتانية
8UM

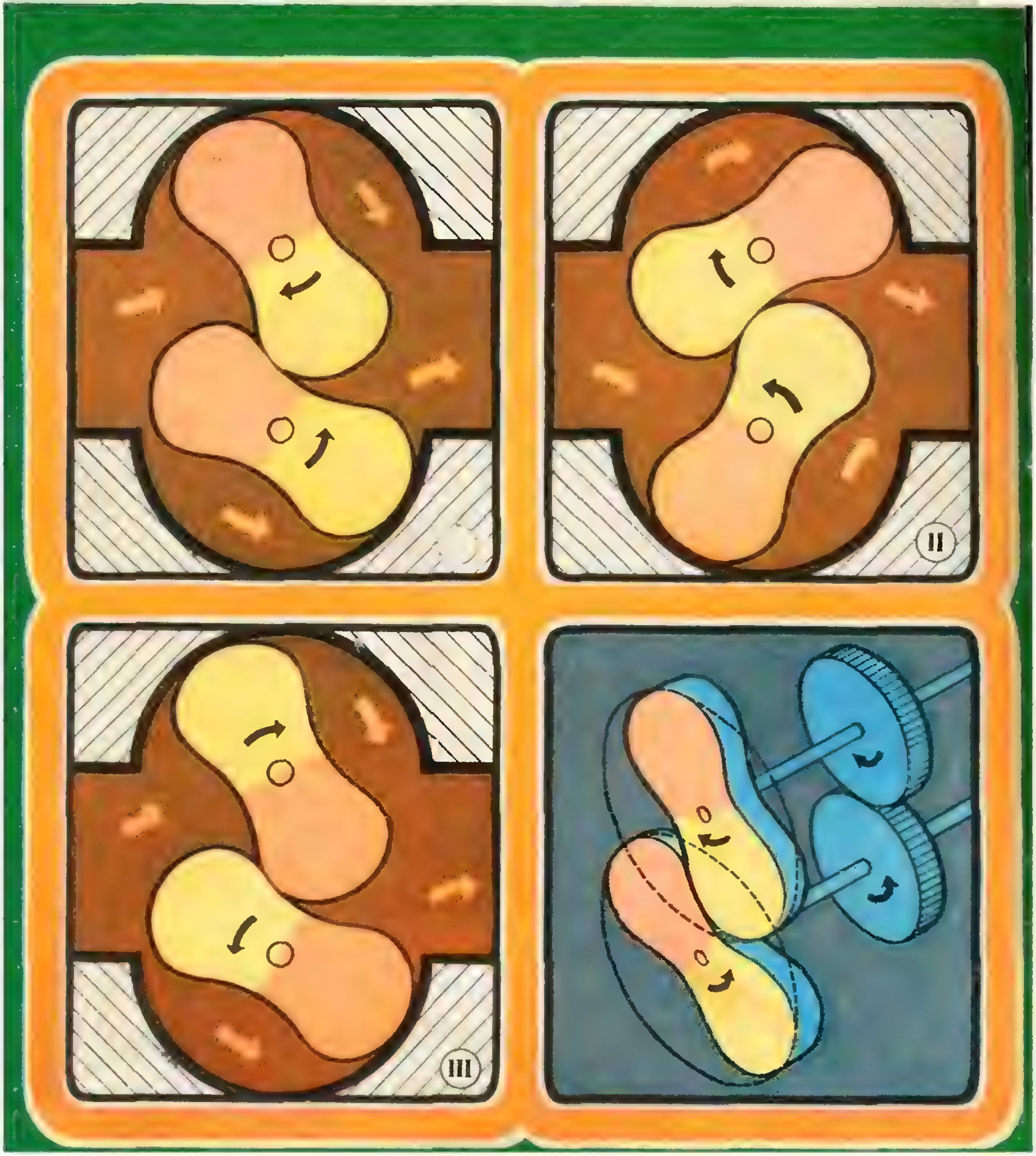

5 Kčs
Československo



На заключительном туре XI Всесоюзной олимпиады школьников по математике была приведена трудная и очень интересная задача (см. с. 33, задача М515). Рисунок, помещенный вверху, поможет вам ее решить.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Здесь изображены последовательные положения работающего роторного насоса. Направления, в которых вращаются роторы, видны из рисунка. Профиль каждого ротора состоит из двух конгруэнтных дуг эпициклоиды и двух конгруэнтных дуг гипоциклоиды. Каждый ротор является своеобразной шестерней с двумя зубьями. Эпициклоиды представляют собой головки зубьев шестерен, гипоциклоиды — пазы между зубьями. Подробнее о геометрии зубьев шестерен читайте на с. 50



НОМЕР
8

Основан в 1970 году

КВАНТ

8
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Рисунок на обложке иллюстрирует метод наименьших квадратов: изображенная на нем поверхность (полученная Ю. Котовым на ЭВМ) аппроксимирует измеряемые величины (красные шарики). Подробнее об этом вы прочтете в следующем номере.

В НОМЕРЕ:

2 *М. Башмаков.* Диофантовы уравнения и рациональные точки
8 *Л. Гольдин.* И снова ускорители
18 *З. Тьмелодзе.* Следствие ведет Ферма
23 *Н. Малов.* Всегда ли отталкиваются противоположно направленные токи?

Лаборатория «Кванта»

26 *В. Майер.* Изгибная волна в пластинках

Математический кружок

28 *Г. Тоноян, И. Яглом.* Теорема Морлея

Задачник «Кванта»

33 Задачи М516—М520; Ф528—Ф532
36 Решения задач М466—М469; Ф482—Ф486
44 *С. Фомин.* Билеты и ящики

Астрономическая страница

48 Полное лунное затмение
48 Возможен звездный дождь!

«Квант» для младших школьников

49 *А. Стариков.* Необыкновенная девочка
50 *Ю. Данилов.* Стомахион

Рецензии, библиография

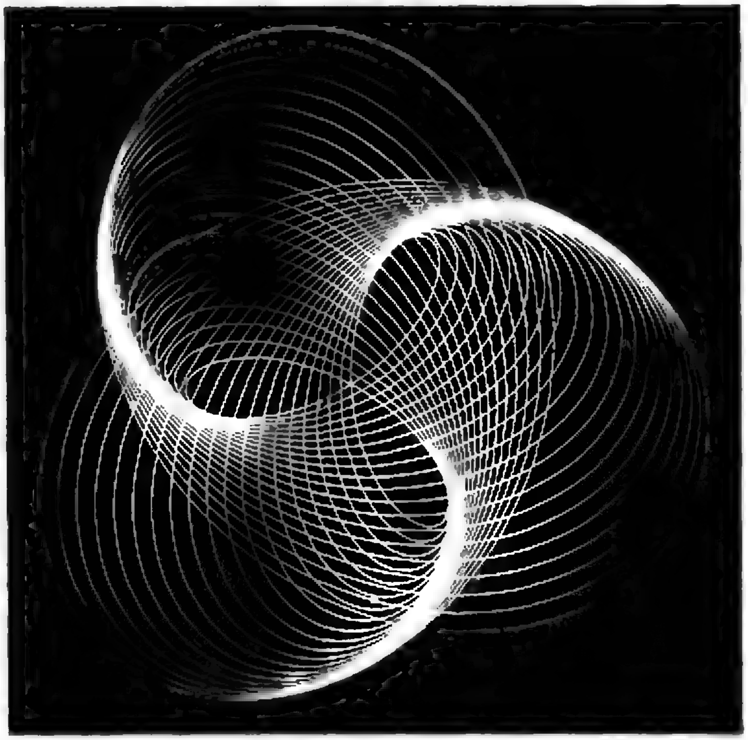
54 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги

Информация

56 *И. Слободецкий.* X Международная олимпиада школьников по физике
61 Заочная физическая школа
62 Вечерняя физическая школа
63 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(47)*

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978



М. Башмаков

Диофантовы уравнения и рациональные точки

Область теории чисел, в которой исследуются целочисленные решения уравнений вида $P(x, y, \ldots)=0$, где $P(x, y, \ldots)$ — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, называется *диофантовым анализом*, а сами эти уравнения — *диофантовыми*.

Названы они так по имени знаменитого греческого математика Диофанта, жившего в III веке и написавшего первый трактат о таких уравнениях.

Несмотря на то, что диофантовы уравнения составляют одну из самых старинных областей математики, общие методы их решения начали создаваться совсем недавно. В классических работах в основном рассматривались линейные и квадратные диофантовы уравнения. Решение более сложных уравнений сильно продвинулось в последние 20—25 лет благодаря широкому привлечению к теории чисел идей из других областей математики, прежде всего — из геометрии и топологии. Говоря словами Н. Бурбаки, «...классическая геометрия... превратилась в универсальный язык всей математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством». Геометрия предлагает не только язык, но и свои построения, свою интуицию.

Посмотрите, как нагляден геометрический язык. Возьмем, например, уравнение Ферма $x^n+y^n=z^n$, поделим обе его части на z^n и обозначим x/z через u, y/z через v. Получим уравнение $u^n+v^n=1$. Каждому решению $(x; y; z)$ уравнения Ферма в целых числах соответствует (при $z \neq 0$) решение уравнения $u^n+v^n=1$ в рациональных числах.

Если мы рассмотрим теперь график этого уравнения на плоскости (u, v), то получим кривую, причем целочисленным решениям уравнения Ферма отвечают точки этой кривой с рациональными координатами. Очевидно и обратное: каждая точка указанной кривой с рациональными координатами даст (после освобождения от знаменателя) целочисленное решение уравнения Ферма. Таким образом, вопрос о решении уравнения Ферма в переводе на геометрический язык превращается в вопрос о нахождении точек с рациональными координатами (мы их будем называть *рациональными*) на кривой $u^n+v^n=1$.

(Заметим, что при делении уравнения Ферма на z^n мы «потеряли» его корни при $z=0$, но их несложно исследовать отдельно.)

В этой статье мы познакомим вас с двумя геометрическими приемами отыскания рациональных точек на кривых.

Начнем для простоты с уравнения $x^2+y^2=z^2$, решения которого в натуральных числах называются *пифагоровыми тройками*. Кривая, соответствующая уравнению $x^2+y^2=z^2$, — это окружность $u^2+v^2=1$. Пифагоровы тройки (3; 4; 5); (5; 12; 13) соответствуют рациональным точкам (3/5; 4/5); (5/13; 12/13) этой окружности (рис. 1).

Некоторые плоские кривые удобно задавать в так называемой *параметрической форме*: указать две функции f и g такие, что при всевозможных значениях параметра t точка $(f(t);\ g(t))$ принадлежит кривой и для каждой точки $(x_0;\ y_0)$ кривой найдется значение t_0 параметра t (возможно, не одно!), для которого $x_0=f(t_0)$; $y_0=g(t_0)$.

Например, если α — угол, соответствующий точке P окружности с координатами $(u;\ v)$, то $u=\cos\alpha$; $v=\sin\alpha$ — мы получили параметрическое задание окружности с помощью функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Можно параметризовать окружность и по-другому. Так, если произвести построение, приведенное на рисунке 2, то из подобия треугольников OAt_0 и QP_0u_0 легко вывести, что

$$u=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad v=\frac{2t}{1+t^2}$$

(для читателей, знающих тригонометрию, заметим, что второе представление получается из первого заменой $\operatorname{tg}\alpha/2$ на t).

Из формул, выражающих координаты u и v через t, видно, что *рациональным значениям t сопоставляются рациональные точки окружности*. Верно и обратное.

Задача 1. Докажите, что если $(u;\ v)$ — рациональная точка окружности, то существует единственное значение параметра t, дающее u и v, причем это t тоже рационально.

Итак, рациональные точки окружности мы поставили во взаимно однозначное соответствие с рациональными точками прямой t. Это соответствие алгебраически записывается указанными выше формулами, а геометрически изображено на рисунке 2. Тем самым задача отыскания рациональных точек на окружности нами решена.

Оказывается, есть много кривых, кроме окружности, которые можно параметризовать дробно-рациональными функциями. Эти кривые называются *рациональными*. К их числу относятся, например, все кривые, яв-

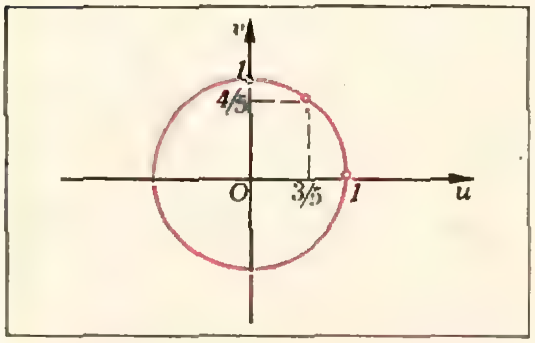


Рис. 1.

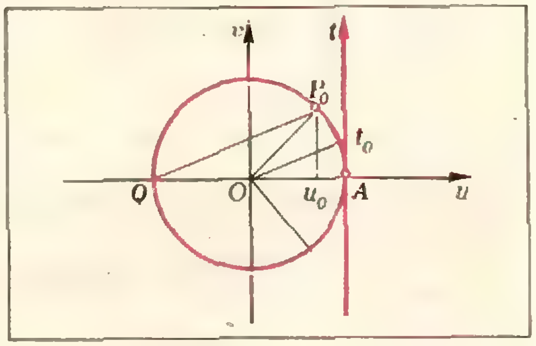


Рис. 2.

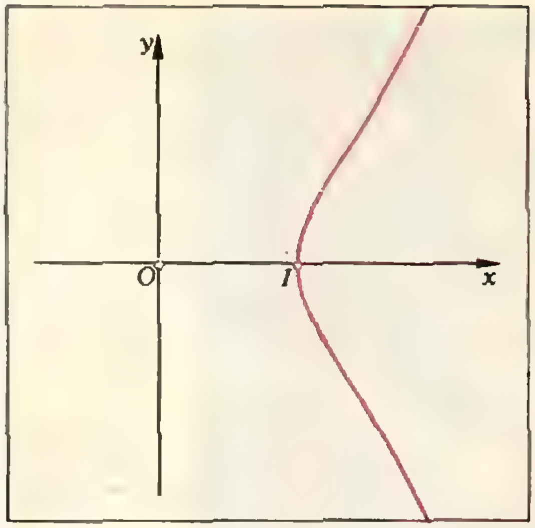


Рис. 3.

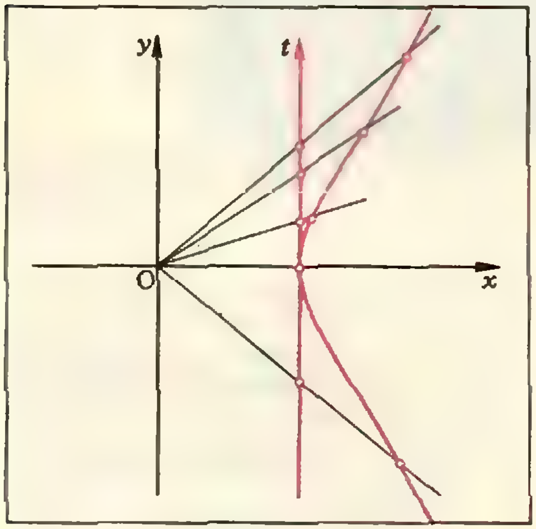


Рис. 4.

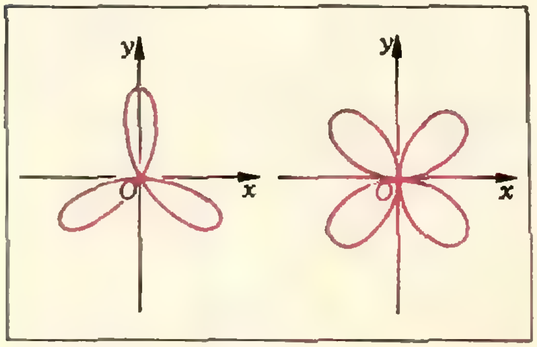


Рис. 5.

ляющиеся графиками уравнений второй степени.

Задача 2. Найдите рациональные параметризации следующих кривых второго порядка:

а) $x^2-y^2=1$ (гипербола);
б) $x^2+xy+y^2=1$ (эллипс).

Рассмотрим теперь кривую, задаваемую уравнением третьей степени, которая тоже оказывается рациональной. Это кривая $y^2=x^3-x^2$. Она изображена на рисунке 3 и состоит из изолированной точки O и ветви, симметричной относительно оси x.

Задача 3. Обосновать рисунок 3.

Проведем через точку O всевозможные прямые $y=tx$. Значения углового коэффициента t можно откладывать на оси t, проведенной через точку $(1, 0)$ (рис. 4). Подставив $y=tx$ в уравнение кривой и сократив на x^2 (мы теряем при этом особую точку O!), мы получим параметризацию

$$\begin{cases} x=t^2+1, \\ y=t(t^2+1), \end{cases}$$

при которой рациональным значениям t соответствуют рациональные точки кривой $y^2=x^3-x^2$.

Задача 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Итак, между рациональными точками кривой $y^2=x^3-x^2$ (без точки $(0, 0)$) и прямой t удается установить взаимно однозначное соответствие. Геометрически оно представляет собой центральное проектирование, изображенное на рисунке 4.

Аналогично можно найти рациональную параметризацию кривой $y^2=x^3+x^2$:

$$x=t^2-1, \quad y=t(t^2-1).$$

Задача 5. Постройте эту кривую и докажите, что если для значений параметра t_1, t_2 и t_3 выполняется соотношение

$$(t_1-1)(t_2-1)(t_3-1)=(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1),$$

то три соответствующие точки лежат на одной прямой.

Итак, для каждой из рассмотренных нами рациональных кривых можно указать такое отображение прямой на кривую, при котором рациональные точки кривой отвечают рациональным точкам прямой. На самом деле это утверждение верно и для произвольной рациональной кривой, получаемой из диофантова уравнения.

Возникают вопросы — бывают ли нерациональные кривые? Как описать все рациональные кривые? Ответ на эти вопросы известен. Например, все кривые первой и второй степени рациональны. Бывают рациональ-

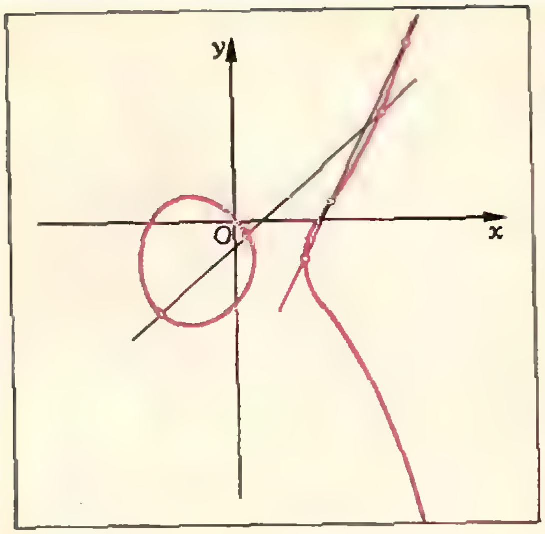


Рис. 6.

ные кривые любой степени, но все такие кривые степени больше двух имеют особенности — точки самопересечения, точки самокасания и т. п. (рис. 5).

При $n>2$ *кривая Ферма* $u^n+v^n=1$ не является рациональной. Докажите, что это эквивалентно утверждению о том, что уравнение Ферма $x^n+y^n=z^n$ не имеет решений среди многочленов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ степени не меньше единицы. (Этот факт доказан в статье Б. Мартынова «Теорема Ферма для многочленов» («Квант», 1976, № 8).)

Второй прием мы снова покажем сначала на примере окружности. Возьмем две рациональные точки на окружности — например, P_1 (3/5, 4/5) и P_2 (5/13, 12/13). Пусть α_1 и α_2 — углы, соответствующие точкам P_1 и P_2. Точка, соответствующая углу $\alpha_1+\alpha_2$, тоже будет рациональной, поскольку

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2)=\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\sin\alpha_1\sin\alpha_2,$$
$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\sin\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\alpha_1\sin\alpha_2.$$

Таким образом, мы можем «складывать» рациональные точки на окружности по формуле $(u_1;\ v_1)\oplus(u_2;\ v_2)=(u_1u_2-v_1v_2;\ u_1v_2+u_2v_1)$ и получать новые рациональные точки. Это свойство окружности лежит в основе многих красивых задач.

Задача 6. а) Пусть P_1 — рациональная точка окружности, соответствующая некоторому углу α. Докажите, что точки P_n, соответствующие углам $n\alpha$ $(n\in\mathbb{Z})$, тоже рациональны.

б) Докажите, что попарные расстояния между точками, построенными в пункте а), рациональны.

в) Постройте n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и попарные расстояния между которыми — целые.

Оказывается есть еще кривые с таким свойством: точки на них можно «складывать», причем «сумма» рациональных точек — рациональная точка. Для таких кривых иногда удается из двух рациональных точек «вытянуть» целую серию новых рациональных точек.

Рассмотрим в качестве примера кривую

$$y^2+y=x^3-x.$$

Задача 7. Докажите, что эта кривая не рациональна.

Возьмем две точки на этой кривой и проведем через них прямую. Эта прямая пересечет нашу кривую еще в одной точке (рис. 6). Действительно, если мы запишем уравнение проведенной нами прямой в виде $y=kx+b$ и подставим y в уравнение кривой, то получим уравнение третьей степени относительно x. Три корня этого уравнения соответствуют абсциссам трех точек пересечения прямой и нашей кубической кривой. Пусть $P_1(x_1;\ y_1)$, $P_2(x_2;\ y_2)$, $P_3(x_3;\ y_3)$ — три точки пересечения прямой $y=kx+b$ и кривой $y^2+y=x^3-x$. Имеет место соотношение

$$x_1+x_2+x_3=\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2. \qquad (*)$$

Для доказательства подставим $y=kx+b$ в уравнение кривой. Получим уравнение $x^3-k^2x^2-(2kb+k+1)x-b^2-b=0$. Можно доказать, что $x^3-k^2x^2-(2kb+k+1)x-b^2-b=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$. Следовательно, $x_1+x_2+x_3=k^2$. Угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $P_1(x_1,\ y_1)$ и $P_2(x_2,\ y_2)$, равен $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. Тем самым мы получим (*).

Учитывая, что $y_3=kx_3+b$, $b=\dfrac{y_2x_1-y_1x_2}{x_1-x_2}$, мы видим, что координаты третьей точки пересечения рациональны, если рациональны координаты первых двух точек. Это дает возможность получать новые решения уравнения $y^2+y=x^3-x$ в рациональных числах.

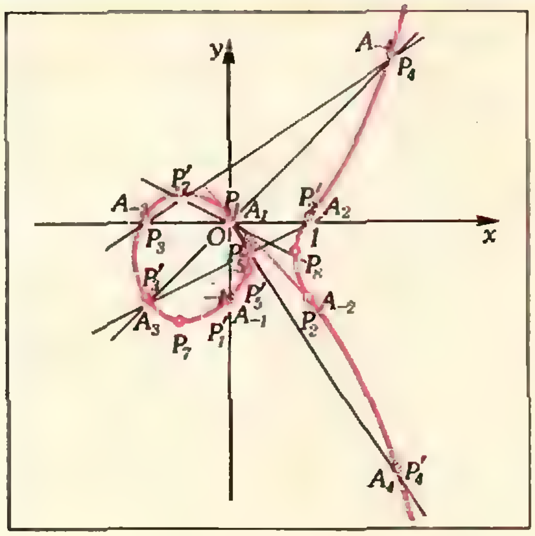


Рис. 7.

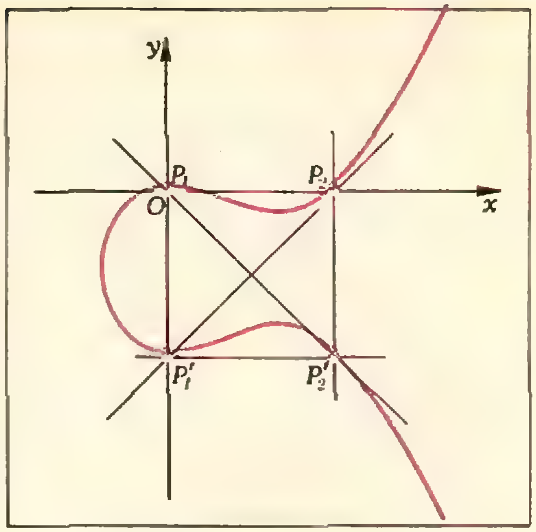


Рис. 8.

Замечание. Рассмотренное выше кубическое уравнение может иметь совпадающие корни. Это будет означать, что прямая и наша кривая касаются.

Мы построим сейчас бесконечную серию рациональных решений уравнения $y^2+y=x^3-x$ с помощью проведения секущих и касательных через известные рациональные точки. Заметим предварительно, что точки нашей кривой расположены парами — вместе с точкой $P\ (x_0;\ y_0)$ на кривой лежит точка $P'\ (x_0;\ -1-y_0)$, симметричная ей относительно прямой $y=-\frac{1}{2}$. Это вытекает из тождества $y^2+y=(-1-y)^2+(-1-y)$. Начнем с очевидной рациональной точки $P_1\ (0;\ 0)$. Симметричная к ней точка — $P_1'\ (0;\ -1)$. Проведем через P_1 касательную (см. замечание). Уравнение этой касательной $y=-x$. Найдем точку ее пересечения с нашей кривой: $P_2\ (1;\ -1)$. Те, кто не умеют находить касательную, могут непосредственной подстановкой проверить, что рациональная точка P_2 лежит на нашей кривой. Из P_2 получаем точку $P_2'\ (1;\ 0)$.

Итак, на нашей кривой лежат четыре рациональные точки:

$$P_1\ (0;\ 0),\qquad P_1'\ (0;\ -1),$$
$$P_2\ (1;\ -1),\ P_2'(1;\ 0).$$

Теперь запускаем «конвейер». Проведем через P_1 и P_2' прямую — это ось x. Она пересекает нашу кривую еще в одной очевидной точке $P_3\ (-1;\ 0)$. Вместе с симметричной точкой $P_3'\ (-1;\ -1)$ мы имеем шесть точек исходной кривой. Теперь соединим точки P_3' и P_1. Получим прямую $y=x$. Третья точка пересечения находится легко: подставив $y=x$, получим кубическое уравнение $x^3-x^2-2x=0$, два корня которого нам известны. При помощи (*) получаем новую точку $P_4\ (2;\ 2)$ — неочевидное решение исходного уравнения. Продолжим этот процесс. Чтобы получить точку P_5, проведем прямую через точки P_4', $(2;\ -3)$ и P_1. Легко проверить, что получится точка $P_5\ (^1/_4;\ -^3/_8)$. По рисунку 7 проследить процесс построения новых точек просто. Вычисления по формуле (*) также несложны. В результате получаем серию точек, приведенную в таблице.

Вряд ли кто-то из читателей скажет, что все найденные нами решения очевидны.

В этом месте статьи у автора даже дух захватило — сколько содержательных вопросов можно поставить, глядя на безобидный рисунок 7. Вот несколько из них:

1. Получим ли мы проведением секущих и касательных бесконечную последовательность различных точек или наш процесс «зациклится»?

2. Все ли рациональные решения исходного уравнения встретятся в нашей последовательности?

	$P_1(0;\ 0)$, $P_1'(0;-1)$ $P_2(1;-1)$, $P_2'(1;\ 0)$
$P_3=P_1\oplus P_2'$	$P_3(-1;\ 0)$, $P_3'(-1;\ -1)$
$P_4=P_1\oplus P_3'$	$P_4(2;\ 2)$, $P_4'(2;\ -3)$
$P_5=P_1\oplus P_4'$	$P_5\left(\frac{1}{4};-\frac{3}{8}\right)$, $P_5'\left(\frac{1}{4};-\frac{5}{8}\right)$
$P_6=P_1\oplus P_5'$	$P_6(6;\ -15)$, $P_6'(6;\ 14)$
$P_7=P_1\oplus P_6'$	$P_7\left(-\frac{5}{9};-\frac{35}{27}\right)$, $P_7'\left(-\frac{5}{9};\frac{8}{27}\right)$
$P_8=P_1\oplus P_7'$	$P_8\left(\frac{21}{25};-\frac{56}{125}\right)$, $P_8'\left(\frac{21}{25};-\frac{69}{125}\right)$

3. Появятся ли еще целочисленные решения (как, например, выскочили точки (6; 14) и (6;—15)) или все последующие решения будут нецелыми?

4. Случайно ли в знаменателях решений стоят квадраты и кубы целых чисел?

5. Из картинки видно, что, например, точку P_5 можно получить иначе — проводя прямую через P_3' и P_2'. Случайно ли это?

6. Почти очевидно, что все точки с нечетными номерами расположены на одной ветви кривой, а с четными — на другой. Как это строго доказать?

Первые три вопроса очень трудны. Сообщу, что наша последовательность точек бесконечна и в ней встретятся все точки с рациональными координатами.

Вместо пояснений я приведу еще один пример. Рассмотрим очень похожую кривую $y^2+y=x^3-x^2$. Конфигурация, аналогичная построенной нами, обрывается на третьем шаге — см. рисунок 8. Интересно, что эта кривая не имеет других рациональных точек, а уравнение $y^2+y=x^3-x^2$ не имеет решений в рациональных числах, кроме четырех тривиальных.

Мы прикоснулись с вами к одному из самых сложных вопросов современной теории чисел.

Известно, что на любой кубической кривой существует конечное число точек, начав с которых описанный процесс, можно получить все ее рациональные точки. Это было доказано около пятидесяти лет назад, однако до сих пор нет общего способа, позволяющего найти эти точки.

Способ узнать, зациклится процесс проведения прямых или даст бесконечную конфигурацию, известен. Совсем недавно было доказано, что конечная конфигурация может иметь не более 11 точек и все случаи (кроме случая 10 точек) встречаются и хорошо изучены.

На большинстве известных кривых число исходных точек для построения всех рациональных точек мало — одна-две. Однако есть гипотеза, что для всякого n существуют кривые, требующие для построения всех решений n точек. Пока примеры построены для $n\leqslant 7$.

И, наконец, последнее замечание: если мы в нашем примере с кривой $y^2+y=x^3-x$ немножко изменим обозначения — напишем A_1 вместо P_1, A_{-1} (вместо A_1', A_k вместо P_k' и A_{-k} вместо P_k (для $k\geqslant 2$), а «сложение» зададим несколько хитрей («суммой» двух точек назовем не третью точку пересечения прямой и кривой, а точку, симметричную ей относительно прямой $y=-\frac{1}{2}$), то получим формулу

$$A_m\oplus A_n=A_{m+n},$$

справедливую для всех целых m, n.

Л. Гольдин

И снова ускорители

В этой статье мы продолжаем беседу об ускорителях, начатую в № 4 за 1977 год. Тогда мы не успели рассказать о гигантских современных ускорителях — синхротронах с жесткой фокусировкой — и о ряде вопросов, играющих важнейшую роль в ускорительной — и не только в ускорительной — физике. Среди них центральное место занимает проблема устойчивости движения. Этим вопросам и будет посвящена наша статья. Но прежде чем перейти к основной теме, мы коротко напомним о том, как устроен и работает простейший циклический ускоритель — циклотрон.

Ускоряемые в циклотроне частицы движутся в вакуумной камере, имеющей форму гигантской консервной банки (рис. 1). Вакуумная камера заключена между полюсами электромагнита, создающего в ней почти однородное вертикально направленное магнитное поле. Траектории частиц лежат в горизонтальной плоскости и, следовательно, перпендикулярны направлению вектора магнитной индукции. На заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная как магнитному полю, так и скорости. Эта сила сворачивает в кольцо траектории частиц (если они движутся с постоянной скоростью).

Частицы в циклотроне ускоряются электрическим полем. Это поле создается расположенными внутри вакуумной камеры электродами — дуантами. Чтобы сделать дуанты, нужно взять еще одну «консервную банку», несколько меньшую по размерам, чем вакуумная камера. Эту банку следует разрезать по диаметру и слегка развести половинки (см. рис. 1). К дуантам подводится высокочастотное напряжение, создающее в зазоре между ними переменное электрическое поле. Попадая в зазор между дуантами в тот момент, когда высокочастотное поле имеет нужное направление, частицы ускоряются. На то время, пока высокочастотное поле уменьшается по величине и начинает менять свое направление на противоположное, частицы прячутся внутрь дуантов и не испытывают действия поля. Они вновь попадают в зазор между дуантами (с другой стороны), когда поле изменит направление и вновь достигнет амплитудного значения, и т. д.

По мере ускорения радиус траектории, описываемой частицей, возрастает, так что траектории частиц в циклотроне представляют собой не окружности, а раскручивающиеся спирали. Период обращения частицы в циклотроне рассчитать несложно. В магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ на частицу с зарядом q, движущуюся со скоростью $\vec{v}$ ($\vec{v} \perp \vec{B}$), действует сила Лоренца $|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|$. Направление этой силы перпендикулярно направлениям $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Следовательно, сила Лоренца сообщает частице массы m центростремительное ускорение $a = v^2/R$:

$$\frac{q|\vec{v}||\vec{B}|}{m} = \frac{v^2}{R}.$$

Период T обращения частицы, движущейся по окружности радиуса R со скоростью $|\vec{v}|$, равен $2\pi R/|\vec{v}|$. Таким образом,

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = \frac{2\pi R}{qR|\vec{B}|/m} = 2\pi\frac{m}{q|\vec{B}|}. \qquad (1)$$

При небольших энергиях (обычные циклотроны) масса частиц постоянна, и период обращения не зависит от энергии частицы. При увеличении энергии (фазотроны) масса частиц возрастает в согласии с формулами теории относительности. Их период обращения при этом увеличивается. Частота ускоряющего электрического поля все время должна быть равна частоте обращения ускоряемых частиц, чтобы частицы проходили зазор между дуантами в тот момент, когда электрическое поле имеет нужную величину и направление. Частота ускоряющего напряжения в циклотронах постоянна, а в фазотронах — пульсирует, уменьшаясь по мере ускорения данной партии частиц и увеличиваясь при захвате следующей.

Проблема поперечной устойчивости

До сих пор мы рассматривали движение частиц в циклотроне так, как если бы они могли двигаться только в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Посмотрим теперь, что произойдет с частицами, скорость которых имеет хотя бы небольшую проекцию на направление магнитного поля. В циклотроне, как мы его себе до сих пор представляли, никаких сил, действующих в вертикальном направлении, нет. Сила Лоренца перпендикулярна полю и, следовательно, направлена горизонтально, а силу тяжести в таких расчетах не следует принимать во внимание из-за крайне малой ее величины. Значит, частицы, отклонившиеся от горизонтальной плоскости, непременно столкнутся со стенками вакуумной камеры и погибнут. А так как у всех частиц есть хотя бы небольшая вертикальная проекция скорости, все они рано или поздно будут потеряны. Вывод, который мы должны сделать, заключается в том, что в работающем ускорителе не просто должна существовать нужная нам — идеальная — траектория. Необходимо также, чтобы частицы, которые с самого начала не смогли попасть на эту траекторию, не отклонялись бы от нее сколь-нибудь существенно в течение всего времени ускорения.

В ходе ускорения частица непрерывно испытывает различного рода возмущения, отклоняющие ее в сторону. Они возникают из-за дефектов (неоднородности) магнитного поля, из-за электрических сил, действующих со стороны других заряженных частиц и стенок камеры, из-за столкновений ускоряемых частиц с молекулами остаточного газа. Эти возмущения изменяют направление движения частицы.

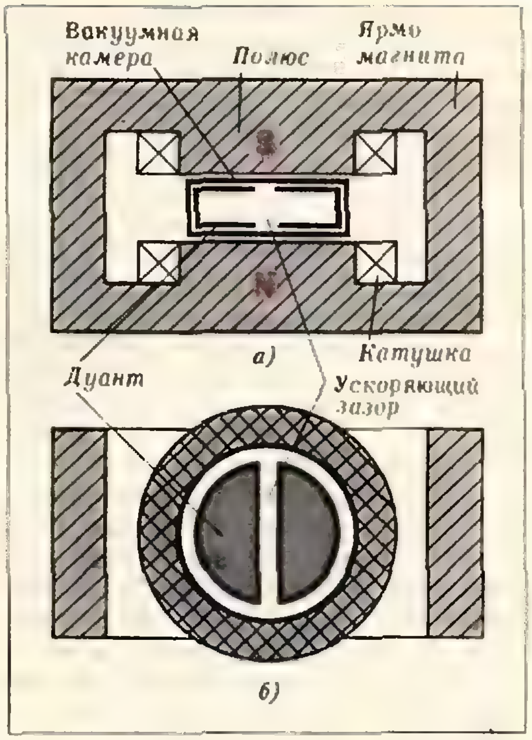


Рис. 1. Схема устройства циклотрона (*а* — вертикальный разрез, *б* — горизонтальный).

В случае циклотрона это означает, что частица «вылетает» из горизонтальной плоскости или «соскакивает» со своего радиуса.

Поэтому ясно, что успешно работать могут лишь такие ускорители, у которых приняты надлежащие меры для того, чтобы а) обеспечить ускорение частиц, которые с самого начала движутся не по расчетной траектории, а вблизи от нее, б) обеспечить ускорение тех частиц, которые по каким-либо причинам отклонились от расчетной траектории в процессе ускорения.

Посмотрим, что это означает применительно к циклотрону. Из сказанного понятно, что использовать однородное магнитное поле нельзя. Рисунок 2, *а* наглядно иллюстрирует, почему это так.

Попробуем использовать неоднородное поле. Силовые линии неоднородного магнитного поля искривлены. Посмотрим, как будут вести себя частицы в поле, силовые линии которого изогнуты так, как показано на рисунке 2, *б*. Из рисунка видно, что такое «вогнутое» поле нас не устраивает — если частица по каким-либо причинам отклонится вверх или вниз от горизонтальной плоскости, в которой лежит ее траектория, то она уже не вернется на нее и «погибнет» на стенках вакуумной камеры. А если сделать поверхности полюсов магнита такими, чтобы силовые линии поля были выпуклыми? Из рисунка 2, *в* видно, что такое поле нас устраивает — сила Лоренца, действующая со стороны поля на частицы, отклонившиеся по вертикали, не только обеспечивает их обращение, но, к тому же, толкает вниз поднявшиеся частицы и поднимает опустившиеся.

Влияние рассмотренных неоднородных магнитных полей на траектории движения заряженных частиц аналогично действию оптических линз на распространение световых лучей.

Действительно, на движущуюся частицу «вогнутое» поле действует так же, как на световые лучи — рассеивающая линза, а «выпуклое» — как собирающая линза. Эта аналогия настолько удачна, что подобные магнитные поля называют магнитными линзами.

Итак, при устойчивом движении на всякую частицу, отклонившуюся от средней горизонтальной плоскости вверх, должна действовать сила, направленная вниз. При той форме поля, которая изображена на рисунке 2, *в*, эта сила равна нулю в средней плоскости и увеличивается при отклонении от нее. На языке формул это можно записать так:

$$f = -az.$$

В этой формуле z — расстояние, на которое частица отклонилась от средней плоскости, a — коэффициент пропорциональности, зависящий от величины индукции поля. Знак минус показывает, что сила всегда «возвращающая» — она направлена к средней плоскости. Силы, подчиняющиеся такому закону, нам хорошо известны. В механике это — сила упругости пружины. Тело на пружине совершает колебания. Так происходит и вертикальное движение ускоряемой частицы: двигаясь по круговой орбите, она совершает колебания около средней плоскости ускорителя. Мы видим теперь, как следует обеспечивать устойчивость вертикального движения, — это движение надо превратить в колебательное.

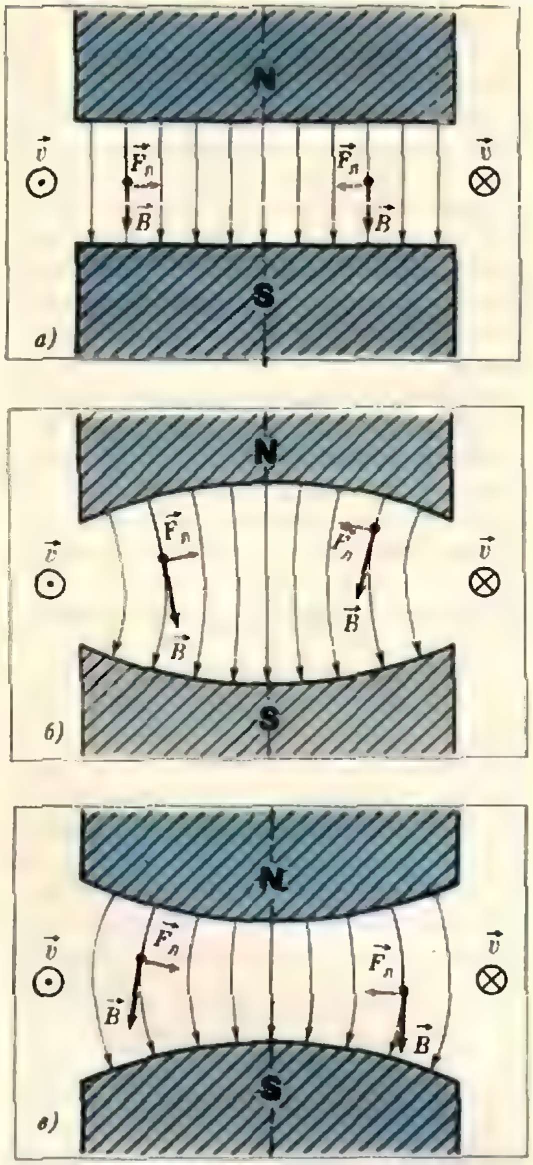


Рис. 2. *а*) Поле однородно; сила Лоренца горизонтальна и вертикальная составляющая скорости $\vec v_в$ остается неизменной; *б*) сила Лоренца «рассеивает» частицы; *в*) сила Лоренца «прижимает» частицы к средней горизонтальной плоскости.

Как сделать, чтобы частицы не доходили до стенок камеры даже при заметном увеличении энергии поперечных (в нашем случае — вертикальных) колебаний? Пользуясь механической аналогией, мы можем ответить так: нужно поставить пружину пожестче. Разумеется, никаких пружин в вакуумной камере ускорителя нет. Что же надо понимать под «пружиной пожестче»? При прочих равных условиях, увеличивая жесткость пружины, на которой колеблется груз, мы увеличиваем частоту колебаний груза около положения равновесия (напомним, что коэффициент жесткости пружины k, масса груза m и частота колебаний ω связаны соотношением $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Этот вывод может быть прямо перенесен в теорию ускорителей. Устойчивость движения обеспечена тем лучше, отклонения от положения равновесия (в нашем случае — от «идеальной» орбиты) тем меньше, чем выше частота колебаний частиц около равновесной орбиты! В ускорительной технике обычно говорят о том, сколько периодов колебаний приходится на один период обращения частицы.

Вернемся еще раз к движению частиц в магнитном поле, силовые линии которого искривлены так, как показано на рисунке 2, *в*. Казалось бы, с точки зрения устойчивости такое «выпуклое» поле нас полностью устраивает. Однако до сих пор мы говорили только о вертикальной устойчивости частиц. А что будет происходить с частицами, которые, оставаясь в горизонтальной плоскости, по каким-либо причинам «соскочат» со своей траектории — отклонятся по радиусу? Будет ли обеспечена радиальная устойчивость?

Чтобы лучше понять существо вопроса, рассмотрим сначала упрощенную задачу — радиальное движение в однородном магнитном поле (которое, как мы выяснили, вертикальной устойчивости не обеспечивает). Отвлечемся также от процесса ускорения — будем рассматривать движение частиц с постоянной энергией. Траектории таких частиц в однородном поле, как мы знаем, — окружности. Выберем одну из них в качестве «основной». Если частица с самого начала движется не по основной окружности, а вблизи нее, то она описывает другую окружность, как это изображено на рисунке 3. Траектория этой частицы не уходит далеко от основной окружности. Радиальная устойчивость, таким образом, обеспечена. За период обращения частица пересекает основную окружность дважды; она находится сначала снаружи, а затем внутри нее (или наоборот). Значит, за один оборот совершается одно радиальное колебание.

Теперь посмотрим, как будет обстоять дело с радиальной устойчивостью при движении в «выпуклом» поле, величина индукции которого спадает к периферии. Качественный ответ на этот вопрос дать нетрудно. В точке A (см. рис. 3) поле будет слабее, чем раньше, траектория отклонившейся частицы будет изгибаться меньше и, следовательно, медленнее приближаться к основной. В точке B, наоборот, величина индукции поля будет больше, чем прежде, траектория круче изогнется и, опять же, медленнее будет приближаться к основной. Следовательно, частота радиальных колебаний, а значит, и устойчивость движения по радиусу, уменьшается.

Оказывается, устойчивости по вертикали и по радиусу связаны друг с другом: одна из них может быть увеличена только за счет второй. И это не только в рассмотренном нами «выпуклом» магнитном поле. Исследование проблемы устойчивости

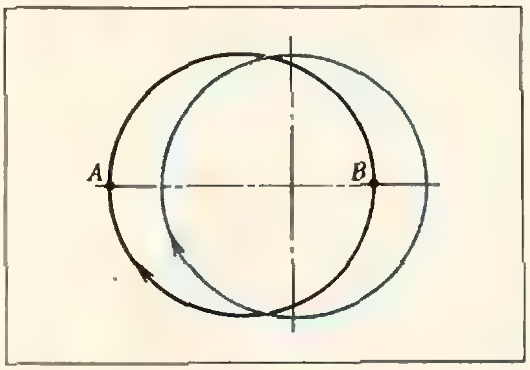


Рис. 3. Синяя окружность — основная траектория. Черная окружность — траектория отклонившейся частицы.

привело в конечном итоге к следующему выводу: при движении заряженных частиц в полях, обладающих осевой симметрией, числа n_z и n_r вертикальных и радиальных колебаний около основной траектории за период обращения связаны соотношением

$$n_z^2 + n_r^2 = 1. \qquad (2)$$

Эта формула имеет очень большое значение в физике ускорителей. Вывод ее сложен; однако понять ее качественно мы теперь уже можем. В однородном поле вертикальных колебаний нет — $n_z=0$, а число радиальных колебаний — $n_r=1$. Ослабляя индукцию магнитного поля к периферии вакуумной камеры, мы увеличиваем устойчивость по вертикали — увеличиваем n_z, или, как говорят, увеличиваем «жесткость фокусировки» по вертикали; вместе с тем мы уменьшаем устойчивость по радиусу — уменьшаем n_r. Что произойдет, если сделать n_z или n_r больше единицы? Тогда уравнение (2) не имеет решений. Физически это означает, что движение приобретает вовсе неустойчивый характер. (Если вновь вернуться к аналогии с пружинкой, то это означает, что на смену притягивающей пружинке придет отталкивающая.)

Таким образом, мы приходим к выводу, что магнитные поля, применяемые в циклических ускорителях, обязательно должны быть такими, чтобы величина индукции спадала по радиусу и при этом не слишком быстро.

Жесткая фокусировка

После того как была получена формула (2), в мире ускорительной физики наступило некоторое уныние. Наличие поперечных колебаний необходимо для устойчивости движения частиц. Кроме того, нужно позаботиться о том, чтобы амплитуда этих колебаний около равновесной орбиты была поменьше. (Большая амплитуда колебаний требует широкой вакуумной камеры и, следовательно, больших магнитов. Больших — значит дорогих в изготовлении и эксплуатации.) Амплитуду колебаний можно уменьшить, только ставя «жесткие пружинки», то есть увеличивая частоту. А на частоту колебаний имеется ограничение (2). Как же, все-таки, строить дешевые ускорители?

Выход из кажущегося тупика был найден американскими физиками Ливингстоном, Курантом и Снайдером, когда они предложили новую систему расположения магнитных полей. Так появились ускорители с жесткой фокусировкой. Чтобы понять принцип работы таких ускорителей, обратимся к конструкции синхротронов.

В синхротроне вакуумная камера имеет вид полой баранки. Камера располагается между полюсами магнитов, поверхность которых имеет форму кольца (рис. 4). Основная траектория частиц в синхротроне в течение всего времени ускорения неизменна — это окружность, проходящая в середине камеры. По мере ускорения энергия частиц возрастает. Чтобы «удерживать» частицы на прежней траектории, нужно все большее магнитное поле. Поэтому в течение цикла ускорения магнитное поле на кольцевой дорожке синхротрона непрерывно возрастает. Увеличивается и частота ускоряющего электрического поля: по мере ускорения частицы тратят все меньше времени для прохождения неизменного пути. Когда ускорение некоторой партии частиц закончено, магнитное поле снижается, частота ускоряющего электрического поля уменьшается — синхротрон готов к приему новой партии частиц. Начинается новый цикл ускорения.

Длина магнитных дорожек крупных синхротронов измеряется километрами. Кольцевой электромагнит собирается из сотен — или даже тысяч — отдельных магнитных блоков. В течение ускорительного цикла частицы проделывают в вакуумной камере сотни тысяч, если не миллионы, оборотов.

В ускорителях с жесткой фокусировкой на магнитной дорожке поочередно располагаются электромагниты, создающие сильно искривленные магнитные поля. Такие поля резко фокусируют пучок в одном из поперечных направлений и столь же сильно дефокусируют в другом. Расположение магнитных полюсов мож-

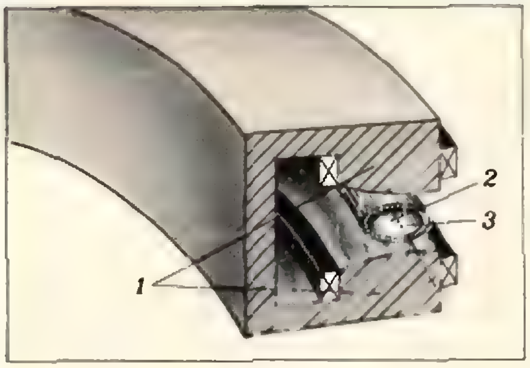


Рис. 4. К устройству синхротрона. 1 — магнитные полюса, 2 — вакуумная камера, 3 — силовые линии магнитного поля.

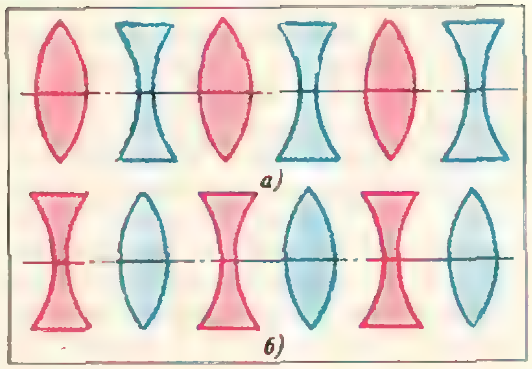


Рис. 6.

но понять из рисунка 5. При рассмотрении этого рисунка нужно представить себе, что частица сначала пролетает через поле, изображенное красным цветом, потом — через «синее» поле, потом снова через «красное» и т. д.

На частицы, отклонившиеся от основной траектории по вертикали, со стороны «синего» поля действуют силы, возвращающие их к средней горизонтальной плоскости. А частицы, отклонившиеся в горизонтальной плоскости, либо увеличивают радиус своей траектории (если они отклоняются к периферии вакуумной камеры и попадают в более слабое поле), либо уменьшают его (если они отклоняются к оси ускорителя и попадают в более сильное поле). Таким образом, «синие» поля, обеспечивая необходимое центростремительное ускорение, фокусируют частицы по вертикали, но дефокусируют их по радиусу. В «красном» поле, наоборот, частицы, отклонившиеся по радиусу, возвращаются к основной траектории, а частицы, отклонившиеся по вертикали, еще больше отдаляются от средней горизонтальной плоскости.

Фокусирующие и дефокусирующие магнитные поля действуют на траектории частиц как собирающие и рассеивающие линзы — на световые лучи (об этой аналогии мы уже говорили). Так что аналогом системы чередующихся «красных» и «синих» полей можно считать оптическую систему, составленную из чередующихся собирающих и рассеивающих линз. Различие состоит в том, что оптические оси в большинстве случаев прямолинейны (или это несколько отрезков, в местах пересечения которых стоят призмы), а основные траектории частиц в синхротронах (оси магнитных линз) замкнуты в кольцо. Мысленно распрямим ось магнитных линз и изобразим магнитные поля в виде последовательности собирающих и рассеивающих линз. На рисунке 6, *а* приведена картина фокусировки в горизонтальной плоскости (фо-

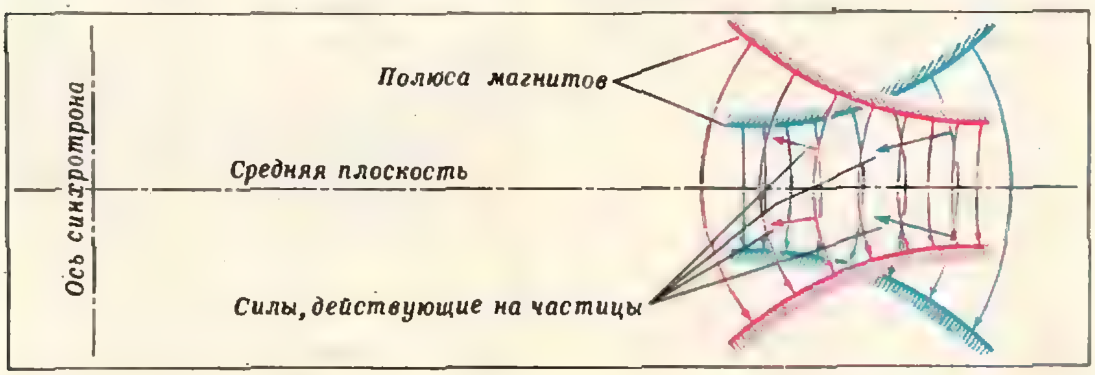


Рис. 5.

кусировка по радиусу), а на рисунке 6, *б* — в вертикальной. Здесь проявляется второе — наиболее существенное отличие фокусировки заряженных частиц магнитными полями от оптической фокусировки. Собирающие оптические линзы сводят лучи к оптической оси в обоих поперечных направлениях одновременно, в то время как магнитные линзы собирают частицы в одном направлении и рассеивают — в другом. В бесконечной последовательности линз (магнитные линзы расположены по окружности) верхняя и нижняя части рисунка 6 ничем не отличаются друг от друга — это одна и та же картинка, сдвинутая на «пол-шага». Какими фокусирующими свойствами обладает такая последовательность собирающих и рассеивающих линз? На первый взгляд, в такой системе не возникает ни фокусировки, ни дефокусировки. На самом деле это совсем не так. Последовательность таких линз обладает заметными «собирающими» свойствами. Покажем это на системе, составленной из двух одинаковых по оптической силе стоящих друг за другом линз (рис. 7). Пусть на эту систему слева падает пучок, параллельный оптической оси. Мнимое изображение этого пучка находится в фокусе рассеивающей (дефокусирующей) линзы. Обозначим через l расстояние между линзами и через F — их фокусные расстояния. Как видно из рисунка, мнимое изображение пучка, создаваемое рассеивающей линзой, находится на расстоянии $F+l$ от собирающей линзы и служит для нее источником. Найдем, на каком расстоянии d от собирающей линзы находится изображение этого источника, то есть на каком расстоянии от нее расположено изображение пучка, прошедшего через всю систему. По формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{F+l}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$d=\frac{F(F+l)}{l}>0.$$

Поскольку d оказалось больше нуля, наша система является фокусирующей.

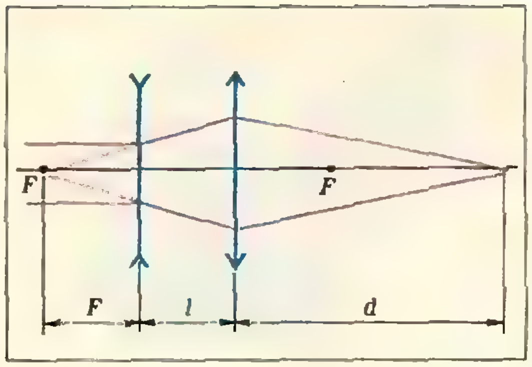


Рис. 7.

Сделаем два замечания. Может показаться, что фокусирующие (или дефокусирующие) свойства системы, составленной из двух «разноименных» линз, зависят от порядка их расположения. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что это не так. Если первой поставить не рассеивающую, а собирающую линзу, то система в целом все равно останется фокусирующей (предполагается, что $F>l$). Второе замечание заключается в следующем. Степень фокусировки в нашей системе зависит от расстояния между линзами. Если уменьшить это расстояние, то фокусировка становится слабее и в пределе при $l\to 0$ вообще пропадает. Попытаемся понять, почему это происходит. Для этого обратимся к рисунку 8. На этом рисунке изображены лучи, проходящие через собирающую линзу. Луч, идущий через центр линзы, не меняет своего направления. Лучи, проходящие сбоку от центрального, отклоняются тем сильнее, чем они дальше от оси линзы. Это утверждение полностью применимо и к рассеивающей линзе. Вернемся к рисунку 7. Из хода лучей ясно, что в рассеивающей линзе лучи проходят существенно ближе к оптической оси системы, чем в собирающей. Это различие в ходе лучей и объясняет, почему система, составленная из собирающей и рассеивающей линз, имеющих одинаковую оптическую силу, в целом оказывается фокусирующей. Легко также видеть, что различие в расстоянии до оптической оси уменьшается при уменьшении дистанции между линзами—вот почему при этом падает фокуси-

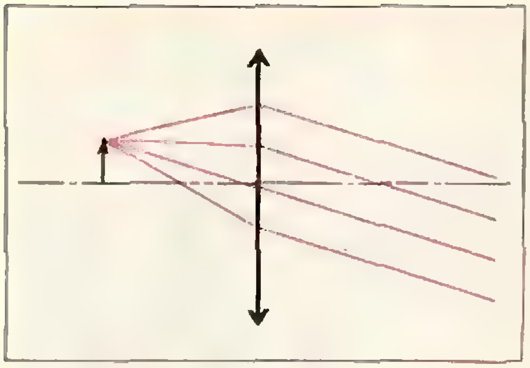


Рис. 8.

рующее действие составленной из них системы.

Вернемся теперь к оптической системе, составленной не из двух линз, а из бесконечной последовательности чередующихся собирающих и рассеивающих линз. Отдельные лучи света (траектории ускоряемых частиц) проходят в оптической системе (в системе магнитных линз) разные пути, зависящие от начальных условий — от расстояния до оптической оси, от угла наклона к оси. Следить за этими отдельными лучами очень трудно и малополезно. Важнее рассматривать «огибающую пучка» — линию, отделяющую заполненную светом область от незаполненной (границу пучка частиц). Понятно, что вид огибающей пучка зависит от начальных условий. Однако по мере прохождения оптической системы всякий пучок становится со временем согласованным — форма его огибающей между любыми двумя последовательными собирающими (или рассеивающими) линзами одна и та же. Аналогично, всякий пучок частиц, достаточно долго крутящийся в ускорителе, со временем становится согласованным. Именно такой пучок (его огибающая) изображен на рисунке 9. В соответствии с нашими ожиданиями, размеры пучка увеличиваются в собирающих линзах и уменьшаются в рассеивающих. Так что суммарное действие системы линз оказывается фокусирующим — она удерживает пучок вблизи от оси в течение всего времени ускорения.

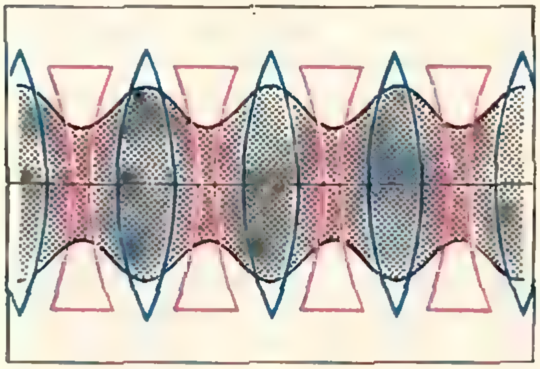


Рис. 9. Огибающая согласованного пучка частиц (вертикальное сечение пучка).

Магнитные фокусирующие системы, состоящие из последовательности фокусирующих и дефокусирующих магнитов, называются жестко-фокусирующими. В таких системах отпадает ограничение (2), величины n_z и n_r могут одновременно принимать большие значения, амплитуда колебаний частиц уменьшается и нет необходимости в широкой вакуумной камере и в больших магнитах. Все крупные современные ускорители основаны на принципе жесткой фокусировки.

На рисунке 10 изображена магнитная система Серпуховского ускорителя на энергию 76 ГэВ (1 ГэВ$=$$=10^9$ эВ). Длина этой системы (а значит, и длина кольцевой вакуумной камеры) составляет 1,5 км. Вакуумная камера в сечении имеет форму эллипса с осями 17 и 11,5 см. Частота поперечных колебаний составляет 9,8 на оборот.

Продольная устойчивость; принцип автофазировки

На рисунке 11 изображен график напряжения в ускоряющем зазоре циклического ускорителя. Напряжение изменяется во времени по синусоидальному закону. Амплитуда напряжения выбирается выше, чем то значение напряжения U_0, которое обеспечивает необходимый прирост энергии (на один период обращения частицы). Из рисунка ясно, что нужный «толчок» получат частицы, пришедшие к зазору в моменты времени t_1 и t_2. Эти частицы называют синхронными. Будем в дальнейшем именовать синхронные частицы A и B. Как будут двигаться частицы, подошедшие к ускоряющему зазору не точно в моменты t_1 и t_2, а с небольшим опережением или запаздыванием? Будут ли эти частицы на следующих оборотах «догонять» синхронные? Иными словами, обладает ли продольное движение частиц необходимой устойчивостью?

Рассмотрим частицу, которая несколько опережает синхронную. Если речь идет о частице A' (будем так именовать частицу, подходящую к зазору в момент времени t_1'), то она приходит к зазору, когда напряжение меньше u_0. Если мы говорим о частице B' (подходящей к зазору в момент времени t_2'), то в момент ее прихода к зазору напряжение окажется выше u_0. Вследствие этого частица A' получит недостаточную, а частица B' — избыточную энергию, а значит, и скорость. Как скажется этот недостаток или избыток энергии на времени следующего прихода частицы к ускоряющему зазору? Если частица будет стремиться приблизиться (по времени) к синхронной частице, то движение окажется устойчивым, а если удалиться — неустойчивым.

В какой же момент времени частица подойдет к ускоряющему зазору в следующий раз? Как мы уже видели, при движении частиц в циклотроне период обращения не зависит от энергии частиц. Этот вывод справедлив для нерелятивистских частиц (скорость которых много меньше скорости света), движущихся в однородном магнитном поле. Ни одно из этих условий в синхротроне не соблюдено. Период обращения T зависит как от длины орбиты L, так и от скорости частиц v: $T = L/v$. У частиц с разными энергиями — различные скорости и различные длины орбит. (Мы отмечали выше, что в синхротроне положение, а следовательно, длина основной орбиты во время ускорения не меняется. Это происходит потому, что в течение ускорительного цикла напряженность магнитного поля возрастает. Но мы сейчас говорим не об этом. Мы рассматриваем частицы с несколько различающимися энергиями в один и тот же момент времени, а значит, при одном и том же магнитном поле. Частицы с разными энергиями проходят в таком поле за полный оборот пути разной длины.)

Оказывается, что в зависимости от конструкции синхротрона частицы с большей энергией могут иметь период обращения как больший, чем синхронные частицы, так и меньший.

Пусть, для определенности, частицы с большей скоростью возвращаются к зазору раньше, а частицы с меньшей скоростью — позже, чем синхронная. В этом случае слишком рано пришедшая частица A', получившая недостаточную энергию при первом прохождении через зазор, в следующий раз придет позже и, значит, приблизится (по времени) к частице A. Частица B', получившая излишнюю энергию, придет еще раньше, еще больше «отстанет» (по времени) от частицы B. Значит, движение частицы A' окажется устойчивым, а частицы B' — неустойчивым. К тому же результату нетрудно прийти, рассматривая запаздывающие частицы A'' и B''

Если же из-за увеличения длины пути частицы с излишней скоростью тратят на совершение оборота больше времени, чем синхронные, движение частиц A окажется неустойчивым, а частиц B — устойчивым.

Сформулируем вывод. Если амплитуда напряжения на ускоряющем зазоре превосходит значение, обеспечивающее необходимый прирост энергии, и если время обращения частиц зависит от их энергии, то существуют два «класса» частиц, для одного из которых движение непременно оказывается устойчивым.

Это утверждение было высказано независимо двумя учеными — советским физиком академиком В. И. Векслером и американским физиком Мак—Милланом — и носит название принципа автофазировки или фазовой устойчивости. На использовании этого принципа основано устройство всех ускорителей, кроме изохронных (ускорителей, у которых время обращения от энергии не зависит).

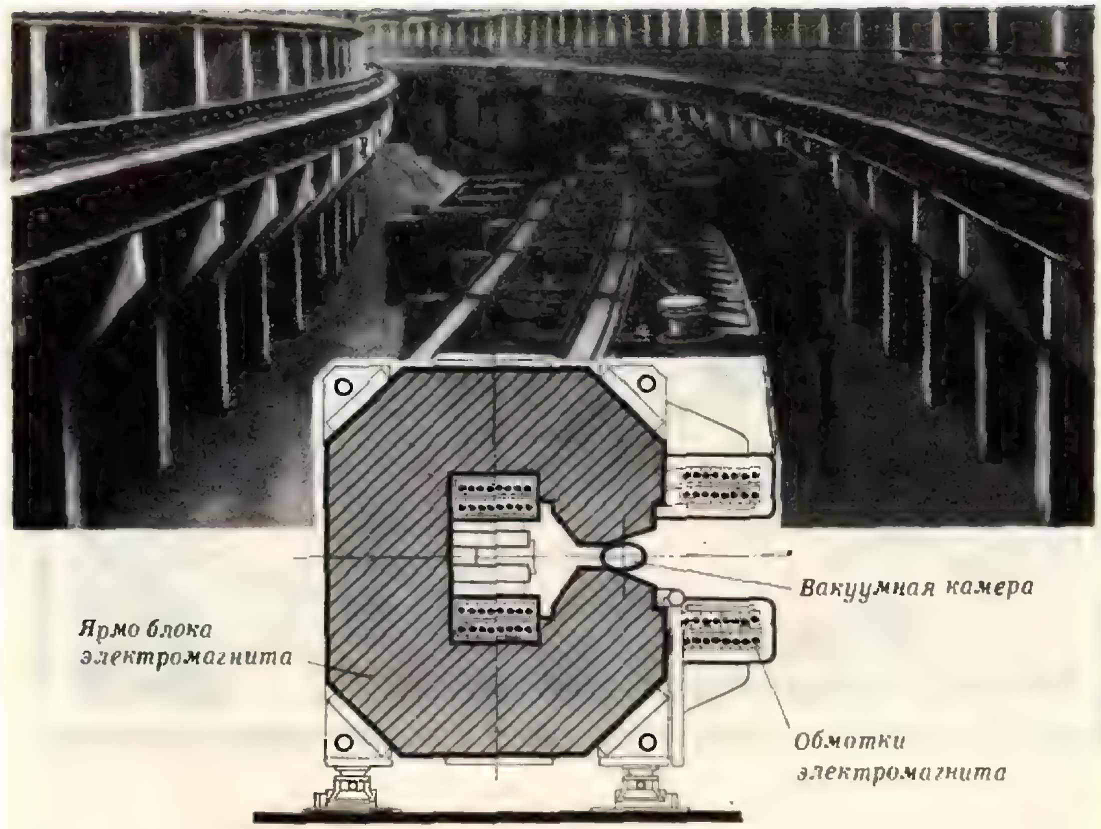


Рис. 10. Устройство магнитной системы Серпуховского ускорителя.

Заключение

Тот, кто кроме этой статьи прочитал уже упоминавшуюся нами статью из четвертого номера «Кванта» за 1977 год и статью об ускорителях на встречных пучках («Квант» № 5, 1978), теперь имеет представление о всех типах современных ускорителей. Остается добавить, что ускорительная техника переживает новый подъем. В процессе сооружения находятся накопительные кольца со встречными электронным и позитронным пучками на энергию 15 ГэВ.

В США начато сооружение первого протонного ускорителя со сверхпроводящими магнитами (на энергию 1000 ГэВ). Проектируются установки со встречными пучками электронов и протонов. Все реальнее становится создание накопительных колец со встречными пучками протонов и антипротонов.

Сооружение крупных ускорителей обходится настолько дорого, что становится не под силу даже большим странам. Государства, входящие в СЭВ (Совет экономической взаимопомощи), участвуют в финансировании работ на ускорителях Объединенного Института Ядерных Исследований в Дубне. Западные страны создали Европейский Центр Ядерных Исследований, построенный на границе Швейцарии и Франции. В этом центре сосредоточены наиболее крупные ускорители в Европе — ускоритель протонов на энергию 400 ГэВ и накопительные кольца со встречными пучками протонов с энергией 2×30 ГэВ.

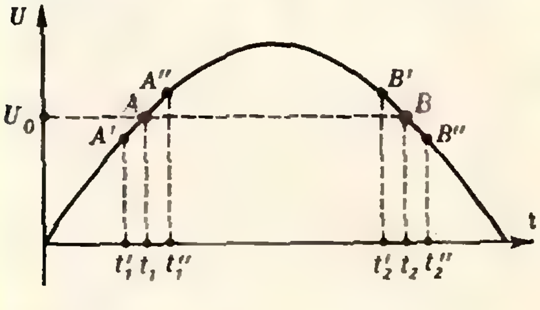
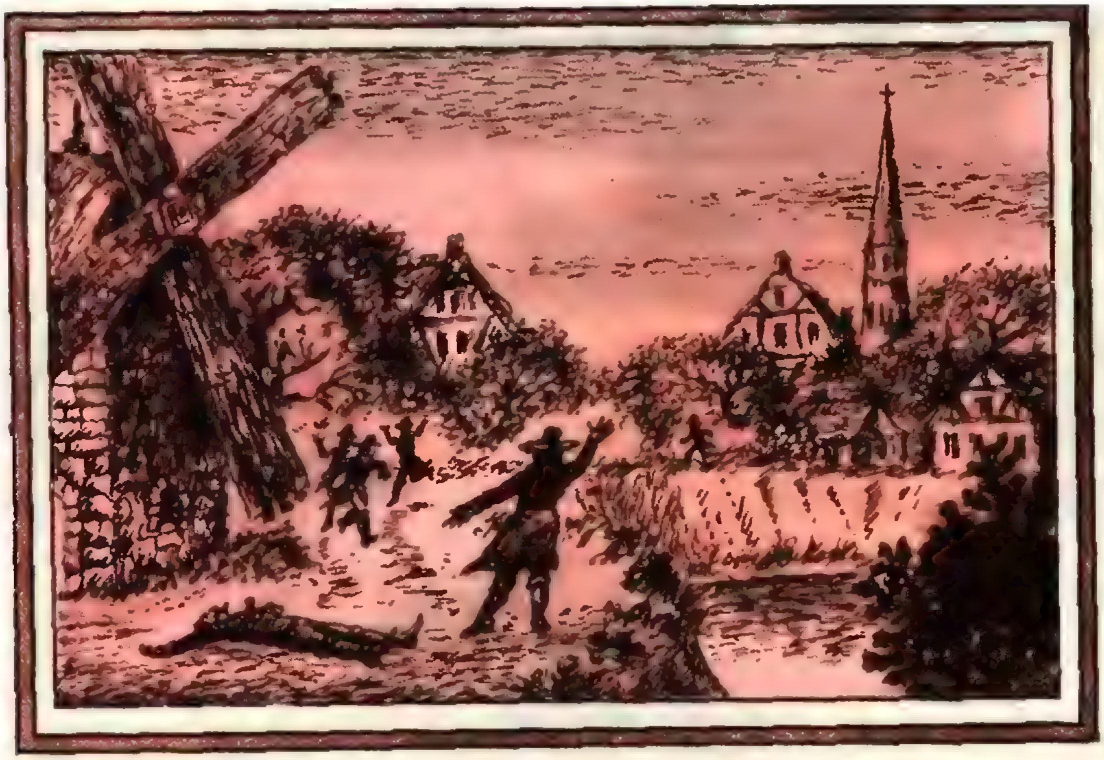


Рис. 11.



З. Тьмеладзе

Следствие ведет Ферма

Удушающий зной не помешал уголовной палате Тулузского парламента в полном составе собраться для слушания дела. Все тринадцать членов палаты с любопытством смотрели на обвиняемого Пьера Крюмона, корыстолюбивого наглеца, недавно вернувшегося из Парижа. Подсудимый даже под пыткой не признал своей вины, но это ничего не меняло. По словам советника де Броваля, в день святого Георгия, в десять часов утра состоятельный крестьянин Жан Морель из деревеньки Амьер, идя в церковь, услышал крик мельника Жака Крюмона. Другой голос, напоминавший голос его сына Пьера, выкрикивал проклятия. Когда Морель подбежал к несчастному, из его груди уже торчал кинжал, принадлежавший Пьеру.

Вот почему сегодня собрались все члены палаты: хотя времена худые — в королевстве неспокойно, лишь недавно опустили головы богоотступники-гугеноты, а на севере уже надвигается чума, — но все же не каждый день доводится видеть отцеубийцу. Есть на что посмотреть: крючковатый нос, плечи чуть не выше головы, а голоса почти не слышно. Жаль, что королевский указ запретил публичное отправление правосудия — для черни было бы полезно взглянуть на эту нечестивую голову, когда палач отделит ее от тщедушного тела. А де Броваль продолжал:

— Сын и раньше жаловался на скупость отца и явно был не прочь поживиться наследством. Совершив злодеяние, негодяй сразу же бросился в трактир в деревню Бенэ, что на другом берегу реки Сот. Посетители трактира, собравшиеся к открытию, к 11 часам, отметили, что он был взволнован и растрепан. Мне кажется, все улики против этого мерзавца.

Все ясно, пора принимать решение. Но нет, господин советник Ферма что-то хочет уточнить. Неужели ему не так жарко, как остальным? Председатель палаты, ценивший Ферма за ученость, благосклонно кивнул.

— Уверены ли вы, что злодеяние случилось ровно в десять?

— Да, — с раздражением подтвердил де Броваль, — люди сбегались на зов Мореля под звон церковного колокола, возвещавшего обедню.

— Кто еще заинтересован в наследстве старика?

— Роншар, его зять.

— Давно ли вы видели Роншара, Пьер Крюмон?

— В тот злополучный день, ваша честь, — едва слышно начал подсудимый, — отец приходил ко мне с ним, чтобы получить с меня долг в два экю. Отец не хотел брать монеты, которые я ему давал, оттого, что одна монета примята с краю, но мосье Роншар сказал, что и так сойдет.

— За сколько времени можно добраться из Амьера в Бенэ?

— У него хорошая лошадь, — ответил де Броваль, — она может делать по четыре лье в час.

— Это верно, — обреченно возразил обвиняемый, — Жази может идти под уклон к Соту со скоростью четыре лье в час, но в гору за рекой она не смогла бы делать больше двух с половиной.

— Тем не менее, — воскликнул де Броваль, — за час вы смогли попасть из Амьера в Бенэ, чтобы запить свой грех пинтой бургундского!

— Прошу прощения, — раздался голос Ферма, — но пока я не убежден, что расстояние от Амьера до Бенэ можно преодолеть за час.

Если бы не строжайший запрет для судей проявлять свои разногласия при подсудимом, де Броваль не смог бы сдержаться. Поэтому он лишь язвительно произнес:

— Я вынужден напомнить Вам, господин Ферма, что срок следствия истек, а новый не может быть назначен. Мы обязаны принять решение.

Ферма выждал, пока стражники по знаку председателя выведут подсудимого, и твердо сказал:

— Я не подпишу приговор, прежде чем не буду уверен, что упомянутое расстояние можно покрыть за час. Кроме того, я хотел бы видеть свидетелей — Роншара и Мореля.

— Но по указу его величества свидетели не участвуют в процессе.

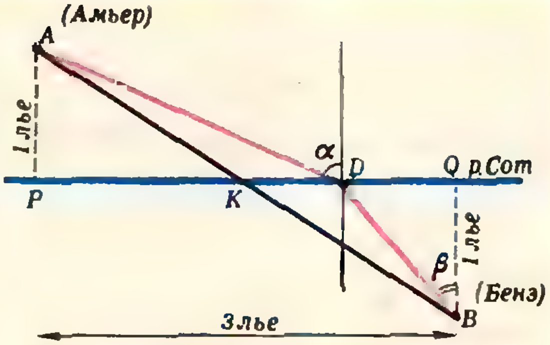


Рис. 1.

Вы еще, чего доброго, пригласите в суд защитника! — раздались протестующие голоса.

Председатель задумался и примирительно сказал:

— Будь по-вашему, господин Ферма, но я могу отложить слушание дела только до завтра.

«Времени у меня мало, а задача не из легких, — подумал Ферма, садясь дома за письменный стол. — Вот передо мною карта местности (рис. 1). Пусть Амьер — это пункт A, а Бенэ — B. Если бы Крюмон поехал напрямик, то ему пришлось бы проделать путь AKB длиной $\sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$ лье. Первую половину пути Крюмон проехал бы со скоростью 4 лье/час, а вторую — 2,5 лье/час. На весь путь он потратил бы $\frac{1{,}8}{4}+\frac{1{,}8}{2{,}5} = 0{,}45+0{,}72=1{,}17$ часа. Стало быть, по прямой за час Крюмон добраться не мог. Но он мог выбрать путь такой, чтобы большая его часть вела по спуску (участок AD) и лишь меньшая часть — в гору (участок DB). Каков же должен быть самый быстрый путь ADB? Я должен найти его — ведь от этого зависит жизнь человека! Если на лошади Пьера Крюмона нельзя преодолеть этот путь за час, то убийца — кто-то другой, и мы можем отправить на эшафот невиновного».

На следующее утро членов палаты несколько удивила черная доска как раз против места председателя. Около доски уже стоял Ферма.

— Господа, — начал Ферма, — сейчас я докажу, что при скоростях движения 4 лье/час под гору и 2,5 лье/час в гору за час попасть из Амьера в Бенэ невозможно.

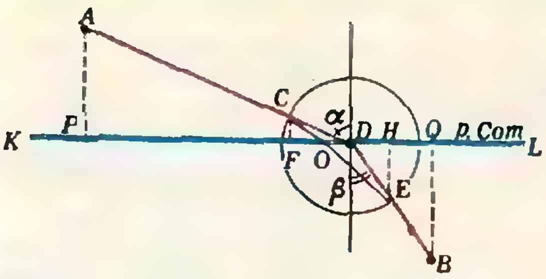


Рис. 2.

Пусть линия ADB на рисунке 2 изображает самый быстрый путь. В точке D этот путь пересекает реку Сот. Проведем окружность с центром в точке D единичного радиуса — она пересекает путь ADB в точках C и E. Путь CDE будет наискорейшим путем между C и E (если бы это было не так, то за счет избрания лучшего пути на участке CDE можно было бы улучшить и весь путь из A в B).

Наискорейший путь вполне определяется углами α и β (рис. 2). Найдем соотношение между этими углами.

Пусть Крюмон проехал путь $|CD|=1$ со скоростью u, а путь $|DE|=1$ со скоростью $v<u$. Таким образом, весь путь CDE он проделал за время $z=\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$.

Сместим теперь на величину ε точку пересечения D пути ADB с Сотом — обозначим новую точку через O. Согласно известной еще Евклиду теореме геометрии,

$$|CO|=\sqrt{1+\varepsilon^2-2b\varepsilon},$$

$$|OE|=\sqrt{1+\varepsilon^2+2a\varepsilon},$$

где для краткости обозначено $|FD|=b$, $|DH|=a$ (рис. 2). Поделив оба эти расстояния на соответствующие скорости, получим время движения по пути COE:

$$\bar{z}=\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2-2b\varepsilon}}{u}+\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2+2a\varepsilon}}{v}.$$

Если величину ε взять очень маленькой, то значения z и $\bar{z}$ почти не будут отличаться. Поэтому приравняем оба времени z и $\bar{z}$:

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2-2b\varepsilon}}{u}+$$

$$+\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2+2a\varepsilon}}{v}.$$

Чтобы избавиться от иррациональности, дважды возведем в квадрат обе части получившегося уравнения—это нелегко, но ведь дело идет о жизни человека!

$$\frac{4}{u^2v^2}(1+\varepsilon^2-2b\varepsilon)(1+\varepsilon^2+2a\varepsilon)=$$

$$=4\left[\frac{1}{uv}+\varepsilon\left(\frac{b}{u^2}-\frac{a}{v^2}\right)\right]^2+$$

$$+\varepsilon^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\left[\varepsilon^2\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)+\right.$$

$$\left.+4\varepsilon\left(\frac{a}{v^2}-\frac{b}{u^2}\right)-\frac{4}{uv}\right].$$

Уничтожим член $\frac{4}{u^2v^2}$, после чего поделим обе части этого уравнения на ε и затем положим $\varepsilon=0$ *); получим: $au(u+v)=bv(u+v)$, или $\frac{b}{a}=\frac{u}{v}$.

А теперь заметим, что $b=\sin\alpha$, $a=\sin\beta$; значит,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{u}{v},$$

то есть синусы углов падения и преломления относятся как скорости движения в верхней и нижней средах, разделенных линией KL...

— Постойте, — прервал Ферма председатель, — причем здесь углы падения и преломления?

— Простите, господа! Я невольно воспользовался здесь физической аналогией. Дело в том, что свет тоже избрал бы путь, который позволил ему быстрее всего достичь цели (и линия KL была бы уже не рекой, а границей раздела двух сред, а величины u и v представляли бы собой скорости распространения света в этих средах) *).

— Но, господин Ферма, к окончанию дела Крюмона Вы ведете нас явно не скорейшим путем — съязвил де Броваль.

---

*) Читатель, знакомый с понятием производной, легко сообразит, что Ферма ищет экстремум функции.

**) Сейчас этот закон движения света называют «принципом Ферма». Его вывод содержится в учебнике «Алгебра и начала анализа 9» (с. 159).

— Осталось немного, господа. Поскольку мы теперь знаем, что для наискорейшего пути синусы углов α и β пропорциональны скоростям движения u и v, можно положить $\sin\alpha = ku$, $\sin\beta = kv$, где k — коэффициент пропорциональности. Зная синусы углов, легко найти их тангенсы:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{ku}{\sqrt{1-k^2u^2}},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{kv}{\sqrt{1-k^2v^2}},$$

а с их помощью совсем просто определить длины отрезков PD и DQ: $|PD| = |AP|\operatorname{tg}\alpha$, $|DQ| = |QB|\operatorname{tg}\beta$. Вспомнив, что $|AP| = |QB| = 1$ лье, $u = 4$ лье/час и $v = 2{,}5$ лье/час, получим:

$$|PD| = \frac{4k}{\sqrt{1-16k^2}},$$

$$|DQ| = \frac{2{,}5k}{\sqrt{1-6{,}25k^2}}.$$

Сумма этих величин равна 3 лье (см. рис. 1); то есть

$$\frac{4k}{\sqrt{1-16k^2}} + \frac{2{,}5k}{\sqrt{1-6{,}25k^2}} = 3\ .$$

Не спрашивайте меня, господа, как мне удалось найти подходящий корень этого уравнения — это увело бы нас в сторону. Его приближенное значение $k \approx 0{,}23$. Тогда $|PD| = 2{,}36$, $|DQ| = 0{,}71$ (невязкой 0,07 при подстановке в уравнение позволительно пренебречь),

$$|AD| = \sqrt{1+(2{,}36)^2} = 2{,}56,$$

$$|DB| = \sqrt{1+(0{,}71)^2} = 1{,}22.$$

Значит, наискорейший путь приведет из Амьера в Бенэ за $\frac{2{,}56}{4} + \frac{1{,}22}{2{,}5} = 1{,}13$ часа. Раньше Крюмон добраться никак не мог, а следовательно, не мог и совершить преступления.

— Вы убедили меня, господин Ферма, — встрепенулся задремавший было председатель. — Введите свидетелей!

Стражник распахнул дверь, и в комнату вошли Роншар и Морель.

— Суд установил, — продолжал председатель, — что у господина Крюмона есть алиби. Припомните, Морель, не походил ли голос убийцы на чей-нибудь еще?

Морель сначала замер, но потом его маленькие глазки забегали по лицам судей. Наконец, он промямлил:

— Мне сдается, ваша честь, что это мог быть и голос господина Роншара.

— Негодяй! — прорычал могучий Роншар густым басом.

Он схватил маленького Мореля за отвороты кафтана и начал его неистово трясти. Морель беспомощно затрепыхался в его ручищах, теряя из карманов трубку, огниво, ключи, монеты. Одна из монет подкатилась к стулу Ферма, и он поднял ее. Стражники едва оторвали Роншара от его жертвы и скрутили ему руки.

— Есть ли у вас еще вопросы, господин Ферма?

— Есть. К обоим... свидетелям — назовем их пока так. Не это ли примятое с краю экю получил несчастный Жак Крюмон в виде возвращенного долга?

Послесловие

Гёрой нашей истории, юрист Пьер Ферма (1601—1665) — один из самых ярких математических талантов Франции XVII века, ближе других сумел подойти к созданию дифференциального исчисления *).

Чтобы точнее представить себе метод, которым пользовался Ферма при отыскании экстремумов, рассмотрим более простой пример, чем тот, который пришлось разобрать Ферма, чтобы спасти от виселицы юношу.

Пусть задана сумма двух чисел x и y, $x+y = C$. Требуется найти такие x и y, чтобы их произведение $z = xy$ было максимальным. Если учесть, что $y = C - x$, то нужно найти такое x, чтобы функция $z = x(C-x)$ принимала наибольшее значение.

Итак, нужно найти такую точку x, чтобы, сдвинувшись из нее на малую величину ε, мы не увеличивали бы z. А если мы сдвинемся на очень малую величину, то изменение функции z

---

*) О жизни и творчестве Ферма см. «Квант», 1976, № 8, с. 3.

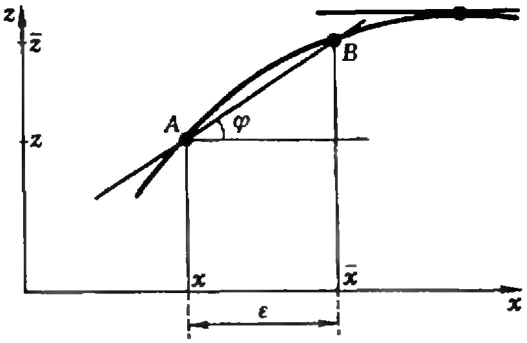


Рис. 3.

должно быть почти неотличимо от нуля.

Ферма рассуждал примерно так. Пусть $\bar{x} = x + \varepsilon$ — новое значение x. Тогда $\bar{z}$, новое значение функции z, выразится формулой

$$\bar{z} = (x + \varepsilon)(C - x - \varepsilon) = Cx - x^2 - 2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Найдем разность $\bar{z}$ и z.

$$\bar{z} - z = -2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Отношение $\bar{z} - z$ к ε есть тангенс угла φ (рис. 3):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\bar{z} - z}{\varepsilon} = \frac{-2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon} = C - 2x - \varepsilon. \qquad (*)$$

Если ε очень мало, то секущая AB становится неотличима от касательной к кривой $z = x(C - x)$ в точке x. А тангенс φ становится тангенсом угла наклона касательной к горизонтали. Чтобы получить тангенс угла наклона этой касательной, положим в последнем выражении $\varepsilon = 0$; мы получим

$$\operatorname{tg}\varphi = C - 2x.$$

Остается приравнять этот тангенс нулю (ведь в точке максимума касательная горизонтальна, — см. рис. 3):

$$C - 2x = 0,$$

— и мы получим решение: $x = C/2$. Действительно, при заданной сумме произведение двух чисел становится максимальным, когда эти числа равны между собой. Или, на языке геометрии, из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

Метод Ферма дает верный результат при отыскании экстремума функции одной переменной. И все-таки в этом методе есть изъян, который не позволяет считать Ферма создателем дифференциального исчисления. С позиций обычной алгебры, за рамки которой не решался выйти Ферма, так поступать нельзя: мы делили на величину ε, а потом положили эту величину равной нулю. Выходит, мы делили на нуль! Чтобы преодолеть это противоречие, Ньютону и Лейбницу пришлось сделать следующий шаг — создать *анализ бесконечно малых*. Но это было сделано лишь спустя полвека после описанных событий, причем Ньютон отмечал заслуги Ферма.

Как же следовало поступить? В формуле (*) следовало перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon} = C - 2x.$$

Величину $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{z} - z}{\varepsilon}$ Лейбниц назвал *производной* функции z; обозначают ее через z'. Приравняв в нашем случае z' к нулю, получаем тот же результат: $x = C/2$. Таким образом, с алгоритмической точки зрения метод Ферма аналогичен приравниванию нулю производной, но этому методу не хватает строгости.

Отыскание минимумов и максимумов функций с помощью дифференциального исчисления используется сейчас в технике, экономике и управлении. При этом удобно пользоваться правилами дифференцирования функций, которые сейчас изучаются в школе. Но в ряде случаев метод Ферма не уступает им: попробуйте найти наискорейший путь из Амьера в Бенэ с помощью производной; вы убедитесь, что в этой задаче прямое дифференцирование функции ведет к успеху, не быстрее.

История Пьера Крюмона — вымышленная: в обширной переписке с друзьями Ферма не уделяет ни слова своей деятельности советника уголовной палаты. Но в этой истории отражены истинные условия судебной процедуры того времени — эпохи кардинала Ришелье, в которую протекала служба Ферма.

Н. Малов

Всегда ли отталкиваются противоположно направленные токи?

В 1820 году великий французский физик Ампер открыл магнитное взаимодействие электрических токов. В частности, он установил, что при пропускании тока по двум параллельным проволокам они притягиваются друг к другу, когда оба тока направлены одинаково, и отталкиваются друг от друга, если направления токов взаимно противоположны.

Это можно увидеть на опыте. Так, в § 114 учебника физики для 9 класса описан соответствующий опыт: два вертикальных параллельных провода нижними концами подключены к источнику тока (аккумулятору), верхние концы замкнуты накоротко, при этом между проводами наблюдается заметное отталкивание (рис. 1).

Там же сказано, что провода не взаимодействуют до замыкания их концов (точнее, не обнаруживается заметного взаимодействия). Однако, так как провода находятся под напряжением, на поверхности должны быть (и действительно есть) электрические заряды, причем — противоположных знаков. Следовательно, между проводами — до замыкания их концов — должно существовать электрическое притяжение.

Что же изменилось после замыкания цепи? Изменилась разность потенциалов: незначительно, если источник обладает малым внутренним сопротивлением (по сравнению с сопротивлением проводов), или сильно, если внутреннее сопротивление относительно велико; кроме того, в цепи возник ток. В соответствии с изменением разности потенциалов изменилась и величина поверхностных зарядов, но они обязательно остались на проводах. Значит, электрическое притяжение должно сохраниться и после замыкания цепи. Почему же оно не проявилось в опытах? Видимо, оно было малым по сравнению с магнитным отталкиванием.

Сам Ампер довольно определенно высказался по этому поводу. Источником тока в опытах Ампера служил вольтов столб — ряд включенных последовательно гальванических элементов, весьма несовершенных с современной точки зрения. К зажимам вольтова столба Ампер присоединял электроскоп. При ненагруженном столбе (при разомкнутой цепи) электроскоп давал заметное отклонение. Когда же к столбу подключались исследуемые провода, в цепи возникал ток, а показания электроскопа резко уменьшались (мы теперь понимаем, что это вызывалось большим внутренним сопротивлением вольтова столба).

Отметив это уменьшение, а также обнаружив взаимодействие проводов с током даже на большом расстоянии от источника, Ампер заключил, что открытое им взаимодействие токов «не имеет отношения» к электрическому взаимодействию. Другими

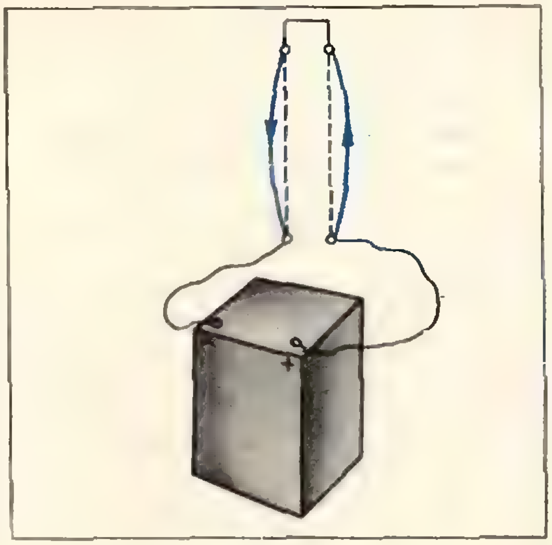


Рис. 1.

словами, он считал, что магнитное взаимодействие присуще движущемуся, а электрическое — покоящемуся электричеству.

Нужно заметить, что в 1820 году не было точных приборов для измерения зарядов, напряжений, токов (кстати сказать, именно Ампер изобрел один из первых гальванометров, основанный на взаимодействии проводника с током и магнитной стрелки). Еще не были определены единицы этих величин, не существовало определенного понятия электрического сопротивления, а закон Ома был открыт пятью годами позже. Поэтому для своего времени высказывание Ампера было, конечно, весьма содержательным. Оно верно отражало соотношение между магнитными и электрическими силами в условиях опытов Ампера: сильное магнитное взаимодействие и слабое электрическое.

Но всегда ли существует такое соотношение? Всегда ли магнитное взаимодействие сильнее электрического? Чтобы ответить на эти вопросы, сделаем небольшие расчеты.

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 2) из двух параллельных проводов длины l, расположенных на расстоянии $h \ll l$ друг от друга и имеющих небольшое сопротивление $R_л$ (сопротивление линии). Левые концы проводов подключены к источнику, дающему напряжение U, а правые концы замкнуты на нагрузочное сопротивление $R_н$. При замыкании цепи токи по параллельным проводам текут в противоположных направлениях. Найдем сначала силу $\vec{F}_м$ их магнитного взаимодействия.

Пусть один из токов, например, ток, текущий по верхнему проводу, создает магнитное поле $\vec{B}$, а другой ток находится в этом поле.

Во-первых, индукция магнитного поля в вакууме всегда пропорциональна создающему поле току I в проводнике. Во-вторых, она уменьшается по мере удаления от проводника. Строгий расчет, проведенный для прямолинейного проводника с током, дает, что индукция магнитного поля в точке, находящейся от проводника на расстоянии h, прямо пропорциональна I и обратно пропорциональна h.

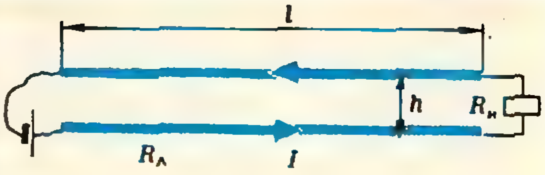


Рис. 2.

Согласно закону Ампера, на малый участок провода длины Δl, по которому течет ток I (другими словами, на элемент тока $I\overrightarrow{\Delta l}$), со стороны магнитного поля $\vec{B}$, составляющего с элементом тока угол α, действует магнитная сила $\vec{F}_м$ такая, что

$$|\vec{F}_м| = |\vec{B}|\,|I\overrightarrow{\Delta l}| \sin \alpha.$$

В нашем случае $\alpha = 90°$, а магнитное поле прямо пропорционально I и обратно пропорционально h, поэтому

$$|\vec{F}_м| = k_1 \frac{I^2}{h} \Delta l, \qquad (1)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, не зависящий от тока.

Направление этой силы определяется правилом левой руки. (Проверьте, что в данном случае провода отталкиваются друг от друга.)

Теперь о силе $\vec{F}_э$ электрического притяжения. Обозначим через λ электрический заряд, приходящийся на единицу длины каждого провода. Заряды на одном проводе являются источником электрического поля, действующего на заряд $\lambda\Delta l$, находящийся на элементе длины Δl другого провода.

Можно показать, что

$$|\vec{F}_э| = k_2 \frac{\lambda^2}{h} \Delta l, \qquad (2)$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности, не зависящий от заряда. Действительно, сила, действующая на заряд в электрическом поле, пропорциональна напряженности электрического поля и величине заряда. Оказывается, что напряженность поля, созданного длинным заряженным проводом, пропорциональна плотности заряда λ и обратно пропорциональна расстоянию от него (расстоянию h в данном случае). Попробуйте это показать самостоятельно.

Поверхностный заряд на проводах, конечно, пропорционален напряжению U, поэтому равенство (2) можно переписать в таком виде:

$$|\vec{F}_э| = k_э \frac{U^2}{h} \Delta l, \qquad (3)$$

где $k_э$ — новый коэффициент пропорциональности (не зависящий от U).

Найдем отношение магнитной и электрической сил, используя равенства (1) и (3):

$$\frac{|\vec{F}_м|}{|\vec{F}_э|} = \frac{k_1 I^2 \Delta l/h}{k_э U^2 \Delta l/h} = k\frac{I^2}{U^2}.$$

Применяя закон Ома, приходим к важному выводу — отношение сил определяется квадратом сопротивления цепи $R = R_л + R_н$:

$$\frac{|\vec{F}_м|}{|\vec{F}_э|} = k\frac{1}{R^2}.$$

Строгий расчет дает для коэффициента k такие значения:

$$k = 10^5 — 5 \cdot 10^5 \text{ (Ом}^2\text{)}.$$

Поэтому очевидно, что при небольших сопротивлениях цепи ($R \ll 500$ Ом) магнитные силы оказываются больше электрических. Именно такие условия были в опытах Ампера, они же создаются при демонстрации взаимодействия проводов с током.

Но при достаточно больших сопротивлениях ($R \gg 500$ Ом) на первый план выступают электрические силы.

Это можно подтвердить опытом, не требующим сложного оборудования. Две тонкие медные проволоки длиной 25—30 см и диаметром около 0,1 мм натягиваются между двумя изолирующими планками (из сухого дерева, гетинакса и т. п.); расстояние между проволоками невелико: 3—5 мм. Все четыре конца проволок припаиваются к зажимам, укрепленным на планках. В средней части подставки, несущей планки, вырезается отверстие диаметром около 1 см.

Провода располагаются вертикально в плоскости магнитного меридиана Земли, то есть в плоскости, где расположится горизонтальная магнитная стрелка, свободно поворачивающаяся вокруг вертикальной оси. При этом магнитное поле Земли практически не будет влиять на магнитное отталкивание проводов.

Параллельно плоскости проволок на расстоянии 3—4 м от них располагается экран. При помощи мощного источника света и собирающей линзы на экран проецируют участок линии, находящийся против упомянутого выше отверстия. На экране, в тех местах, где получается увеличенное изображение проволок, натягивают две черные (или цветные) нити, отмечающие начальное положение проволок.

Затем производят два наблюдения:

1. Один конец линии замыкают на небольшое (несколько ом) сопротивление либо просто замыкают накоротко. Другой конец через амперметр и реостат (10 Ом, 1 А) подключают к аккумулятору (3—6 В). Медленно уменьшая сопротивление реостата, доводят ток до 0,9—1 А. Так как в этом случае электрические силы малы, а магнитные — относительно велики, то на экране наблюдается отталкивание проводов.

2. Один конец линии замыкают на большое сопротивление (3 МОм, 3 Вт). Другой конец, соблюдая осторожность, подключают к маломощному источнику высокого напряжения (2—3 кВ) (например, к школьному преобразователю напряжения «Разряд 1»). При этом в линии получается ток порядка миллиампера; магнитные силы, по сравнению с первым опытом, уменьшаются примерно в миллион раз. Во столько же раз увеличиваются электрические силы. Отталкивание проводов линии сменяется вполне отчетливым притяжением их друг к другу.

Заметим, что в современных мощных высоковольтных линиях передачи электрической энергии электрические силы взаимодействия между проводами бывают больше магнитных. Однако и те, и другие обычно малы по сравнению с силой тяжести, приходящейся на тот же участок длины линии Δl. Поэтому при проектировании линий передачи электрической энергии на электрические, ни магнитные силы во внимание не принимаются.

В. Майер

Изгибная волна в пластинках

Волны, возникающие в пластинках, обладают очень интересными свойствами. С этими свойствами можно познакомиться экспериментально. Но прежде надо научиться возбуждать волну. Это удобно сделать, например, с помощью звучащей стеклянной трубки.

Возьмите тонкую и длинную стеклянную трубку и зажмите ее посередине в лапке штатива. Полотняной тряпочкой, смоченной одеколоном или спиртом, плавно проведите от конца трубки к ее середине — вы услышите довольно сильный звук. Это в трубке возникла стоячая волна. В месте закрепления образовался узел смещений, а на концах — пучности (рис. 1).

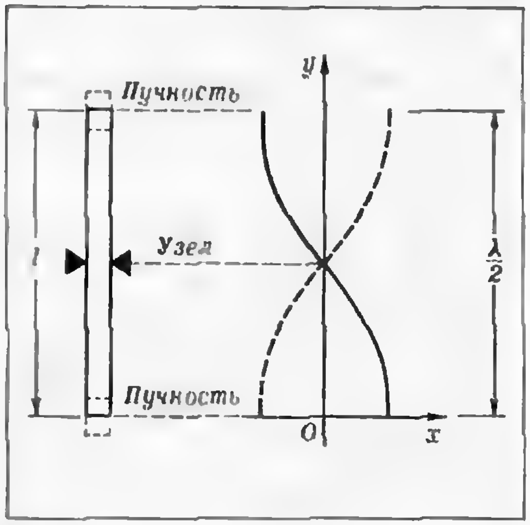


Рис. 1.

Частота колебаний ν и длина λ звуковой волны связаны с длиной l трубки:

$$\nu = \frac{v}{2l} \tag{1}$$

и

$$\lambda = 2l. \tag{2}$$

Здесь v — скорость распространения звука в трубке. Она определяется, прежде всего, материалом трубки и не зависит от частоты колебаний. Таким образом, для получения звуков разных частот следует пользоваться трубками различных длин *). Например, если нужно получить звук вдвое более высокой частоты, стеклянную трубку необходимо укоротить в два раза.

Теперь сделайте следующее. Из дюраля толщиной 1,5—2 мм вырежьте диск диаметром около 100 мм. Положите его горизонтально на слой поролона и равномерно посыпьте порошком марганцовокислого калия. Слегка коснувшись концом стеклянной трубки центра диска, трением возбудите звучание трубки. При этом

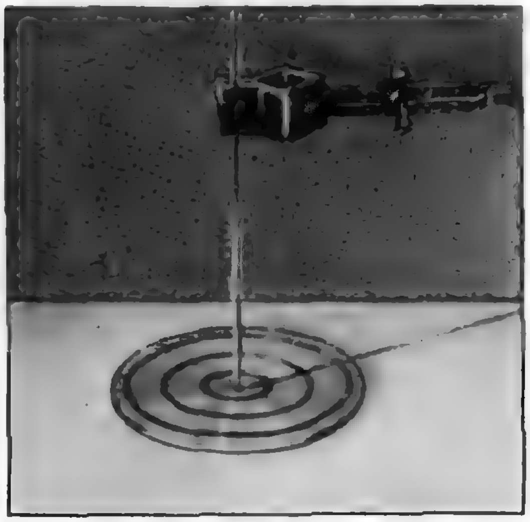


Рис. 2.

---

*) На самом деле, в каждой трубке можно возбудить не одно колебание, а целый набор. Колебание самой низкой частоты, определяемой формулой (1), называют *основным тоном*. Все остальные частоты кратны основной; колебания с кратными частотами называют *обертонами*.

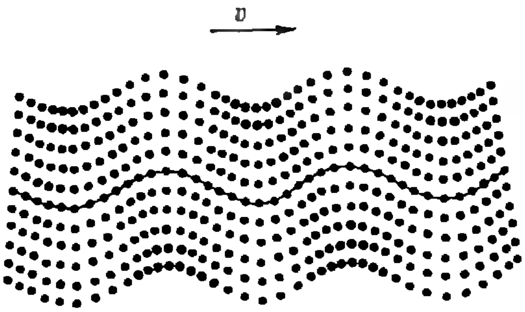


Рис. 3.

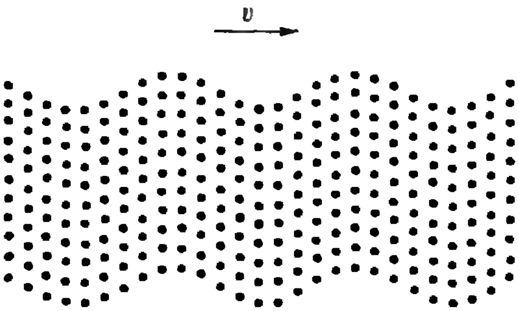


Рис. 4.

порошок соберется в несколько линий в виде концентрических окружностей с центром в точке касания трубки (рис. 2).

Объяснить результат этого опыта несложно. От конца трубки по диску распространяется круговая волна. Дойдя до края диска, она отражается от него — возникает отраженная волна. В результате интерференции падающей и отраженной волн в диске устанавливается стоячая волна, и порошок собирается в ее узлах. Расстояние между двумя соседними узлами, очевидно, равно половине длины волны в диске.

Стоячая волна в стеклянной трубке — продольная. А в диске? Казалось бы, в диске должна распространяться поперечная волна, поскольку источник — конец трубки — колеблется перпендикулярно диску. Оказывается, это не так. Исследования показали, что волна в диске одновременно и продольная, и поперечная (рис. 3). Такую волну называют *изгибной*. Для сравнения на рисунке 4 показана чисто поперечная волна.

Изгибная волна во многом отличается от обычной (продольной или поперечной) волны. Так, скорость $v_{\text{и}}$ изгибной волны не остается постоянной при изменении частоты колебаний. Она изменяется пропорционально корню квадратному из частоты:

$$v_{\text{и}} \sim \sqrt{\nu}.$$

Заметим кстати, что явление зависимости скорости распространения волны от частоты называется *дисперсией*.

Поскольку длина изгибной волны $\lambda_{\text{и}}$, скорость $v_{\text{и}}$ и частота ν связаны соотношением $v_{\text{и}} = \lambda_{\text{и}} \nu$ (общим для волн любой природы), можно записать

$$\lambda_{\text{и}} = \frac{v_{\text{и}}}{\nu} \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Подставив сюда значение для частоты ν из формулы (1), получим

$$\lambda_{\text{и}} \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \sqrt{\frac{2l}{v}},$$

или

$$\lambda_{\text{и}} = k\sqrt{l}, \qquad (3)$$

где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Соотношение (3) можно проверить экспериментально. Приведем результаты одного из наших опытов. Мы использовали дюралевый диск толщиной 1,7 мм и диаметром 120 мм. Изгибные волны в диске возбуждались звучащими стеклянными трубками длиной 60 и 30 см. Внутренний диаметр трубок был равен 0,5 мм, внешний — 4,5 мм.

В опыте с первой трубкой (длиной 60 см) длина изгибной волны оказалась равной $\lambda_{\text{и}1} = 50{,}5$ мм, а в опыте со второй трубкой — $\lambda_{\text{и}2} = 34{,}5$ мм. Отсюда

$$\frac{\lambda_{\text{и}1}}{\lambda_{\text{и}2}} = 1{,}46.$$

Согласно формуле (3), отношение длин волн должно быть равно отношению

$$\frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} = \sqrt{2}.$$

Так как $1{,}46 \approx \sqrt{2}$, опыт, с некоторой степенью точности, подтверждает как сам факт существования изгибных волн, так и справедливость соотношения (3).

Г. Тоноян, И. Яглом

Теорема Морлея

В этой статье мы расскажем об одной геометрической теореме, известной под именем «теорема Морлея».

Френк Морлей (1860—1937) родился в Англии. Однако почти всю свою жизнь он провел в США, хотя и остался английским гражданином. Несколько десятков лет Морлей был профессором математики университета имени Джона Гопкинса в Балтиморе — одного из старейших американских университетов. Наряду с математикой он увлекался и шахматами и однажды сумел выиграть еще у одного видного математика — Эммануила Ласкера (1868—1941), тогдашнего чемпиона мира по шахматам.

Пусть ABC — произвольный треугольник. Хорошо известно, что биссектрисы его углов пересекаются в одной точке (рис. 1). А что произойдет, если *биссектрисы* — то есть прямые, делящие угол пополам, заменить *трисектрисами* — прямыми, делящими угол на три равные части? Френк Морлей рассмотрел конфигурацию, приведенную на рисунке 2, и доказал, что точки X, Y и Z при любом исходном треугольнике ABC являются вершинами равностороннего треугольника. Морлей рассказал об этом поразившем его факте своим друзьям, те — в свою очередь — своим, и вскоре «теорема о трисектрисах треугольника» распространилась по миру в качестве своеобразного математического фольклора.

Доказательство теоремы о трисектрисах Морлей опубликовал в 1914 году — через 15 лет после того, как нашел его. В 1924 году он изложил это доказательство более подробно и существенно усилил первоначальный результат. Доказательство Морлея весьма элегантно, но в то же время и достаточно сложно. Оно базируется на рассмотрении довольно изысканных линий — так называемых *кардиоид* *) (см. вторую страницу обложки). Морлей установил, что множество центров кардиоид, касающихся всех трех сторон треугольника ABC, представляет собой совокупность девяти прямых, разбивающуюся на три тройки параллельных прямых, причем прямые из разных троек пересекаются под углом 60°. Ясно, что при пересечении этих прямых образуется 27 равносторонних треугольников. Один из них и есть «треугольник Морлея», а остальные фигурируют в обобщении теоремы Морлея, в котором рассматриваются трисектрисы и внутренних, и внешних углов треугольника.

Это обобщение обычно связывают с именем знаменитого французского математика Анри Лебега. В 1939 году Лебег опубликовал элементарное доказательство следующего факта, который сам Морлей умел доказывать только с помощью кардиоид. Лебег рассмотрел трисектрисы внутренних и внешних углов треугольника ($3\cdot4=12$ прямых) и установил, что из точек пересечения этих прямых можно выбрать 27 троек точек, являющихся вершинами правильных треугольников. Заметим, что теорема о биссектрисах также допускает похожее обобщение: из шести биссектрис внутренних и внешних углов треугольника можно выбрать четыре тройки прямых, сходящихся в одной точке (рис. 4).

Первые элементарные доказательства теоремы Морлея были получены в 1909 году индусами М. Сатьянарая-

---

*) Кардиоида — это кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса (рис. 3). Центр неподвижной окружности иногда называют центром кардиоиды.

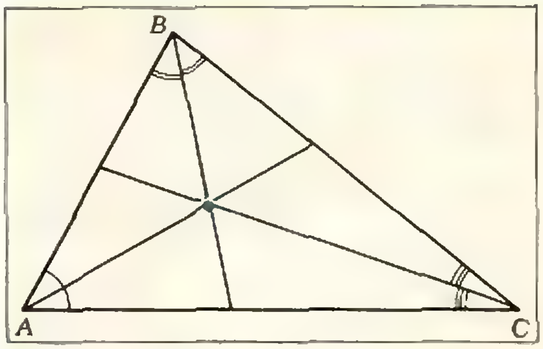


Рис. 1.

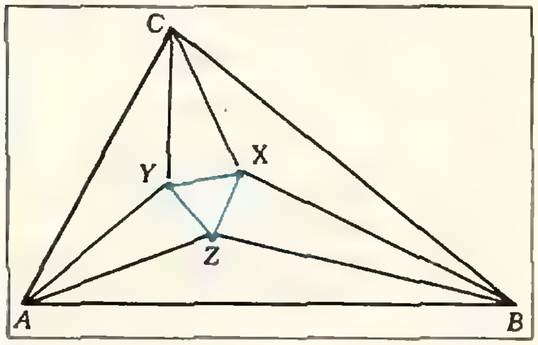


Рис. 2.

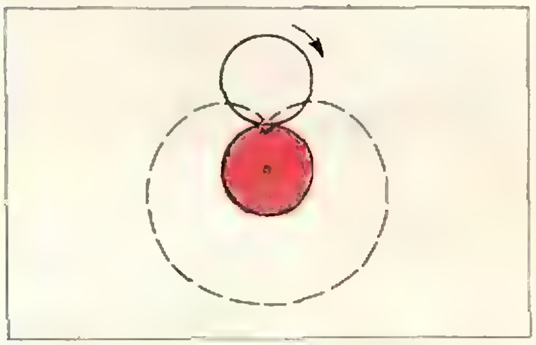


Рис. 3.

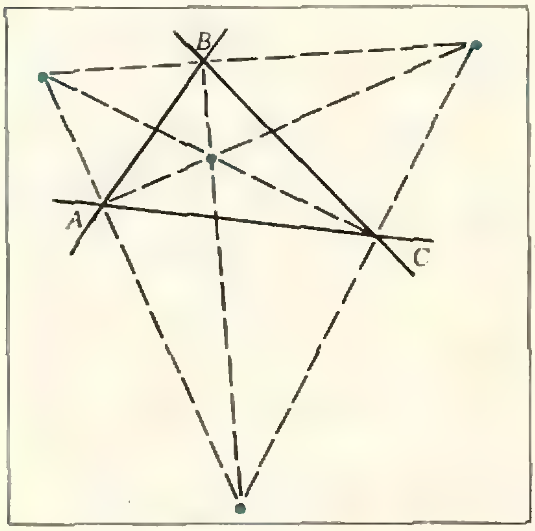


Рис. 4.

ном (вычислительно-тригонометрическое доказательство) и М. Т. Нараньенгаром (чисто геометрическое доказательство; в 1922 году оно было переоткрыто англичанином Дж. М. Чилдом). В настоящее время известно уже, по крайней мере, несколько десятков доказательств теоремы Морлея. Однако интерес к ней не затухает, и все время появляются новые доказательства, обобщения и варианты этого изящного предложения.

Ниже мы приводим два элементарных доказательства теоремы Морлея.

Доказательство первое (геометрическое; оно совпадает, по существу, с доказательством Нараньенгара — Чилда). Обозначим величины углов треугольника ABC через 3α, 3β и 3γ (рис. 5). Так как $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$. Пусть U — точка пересечения трисектрис AY и BX. Так как AZ и BZ — биссектрисы треугольника AUB, то ZU — тоже биссектриса этого треугольника. Поэтому

$$\widehat{AUZ} = \widehat{ZUB} = \frac{1}{2}\widehat{AUB} =$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = 90^\circ -$$

$$-(\alpha + \beta) = 90^\circ - (60^\circ - \gamma) = 30^\circ + \gamma.$$

Построим теперь равносторонний ΔX_1Y_1Z, одна вершина которого совпадает с точкой Z, а вершины X_1 и Y_1 принадлежат соответственно прямым BX и AY (несколько ниже будет доказано, что они совпадают с точками X и Y). Для этого проведем через Z под углом 30° к лучу ZU два луча ZX_1 и ZY_1; через X_1 и Y_1 мы обозначим точки пересечения этих лучей с BX и с AY (т. е. с BU и с AU). Так как, очевидно, $\Delta ZX_1U \cong \Delta ZY_1U$ (эти треугольники имеют равные углы и общую сторону), то $[ZX_1] \cong [ZY_1]$; поэтому ΔZY_1X_1 — равнобедренный треугольник с углом при вершине в 60°, т. е. *равносторонний* треугольник.

Обозначим, далее, через P и Q точки, симметричные точке Z относительно прямых AY и BX. Так как AY и BX — биссектрисы углов ZAC и ZBC, точка P — принадлежит сто-

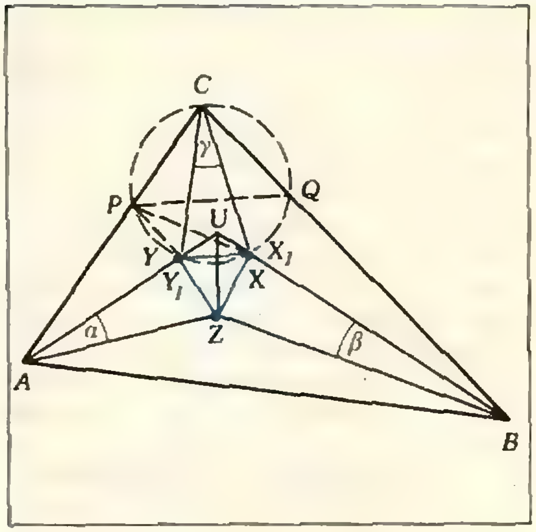


Рис. 5.

роне AC треугольника ABC, а точка Q — стороне BC.

Найдем величины углов PY_1X_1 и QX_1Y_1. Так как $Z\widehat{X}_1Y_1 = 60°$ (угол равностороннего треугольника), $Z\widehat{X}_1B = X_1\widehat{Z}U + X_1\widehat{U}Z = 30° + (30° + \gamma)$ (внешний угол $\triangle ZX_1U$) и $Q\widehat{X}_1B \cong Z\widehat{X}_1B$ (эти углы симметричны относительно прямой BU),

$$Q\widehat{X}_1Y_1 = 360° - 60° - (60° + \gamma) - (60° + \gamma) = 180° - 2\gamma.$$

Точно так же доказывается и равенство $P\widehat{Y}_1X_1 = 180° - 2\gamma$.

Таким образом, $P\widehat{Y}_1X_1 = Q\widehat{X}_1Y_1$; кроме того, $[PY_1] \cong [Y_1Z] \cong [ZX_1] \cong [X_1Q]$ (первые два отрезка симметричны относительно прямой AU, а два последних — относительно прямой BU). Отсюда следует, что четырехугольник PY_1X_1Q является *равнобедренной трапецией* (с углами Y_1 и X_1, равными $180°-2\gamma$, и, значит, с углами P и Q, равными 2γ).

Опишем теперь окружность вокруг трапеции PY_1X_1Q. Так как хорды $[PY_1]$, $[Y_1X_1]$ и $[X_1Q]$ этой окружности конгруэнтны, конгруэнтны и опирающиеся на эти хорды вписанные углы; поэтому $P\widehat{Q}Y_1 = Y_1\widehat{P}X_1 = \widehat{X}_1PQ = \gamma$. Но $P\widehat{C}Q = 3\gamma$; поэтому описанная вокруг PY_1X_1Q окружность S пройдет и через точку C. А теперь из конгруэнтности (стягиваемых конгруэнтными хордами) дуг PY_1, Y_1X_1 и X_1Q окружности S следует, что $P\widehat{C}Y_1 = Y_1\widehat{C}X_1 = X_1\widehat{C}Q = \gamma$, откуда и вытекает совпадение ΔX_1Y_1Z с ΔXYZ.

Этим и завершается доказательство теоремы Морлея.

Доказательство второе (вычислительное — оно близко к доказательству М. Сатьянараяна). Будем по-прежнему считать, что $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$, $\widehat{C} = 3\gamma$; длины сторон BC, CA и AB треугольника ABC обозначим через a, b и c, а диаметр описанной около него окружности — через d (рис. 6).

Попытаемся вычислить длину $|XY| = z$ стороны $[XY]$ треугольника XYZ. Для этого мы найдем, прежде всего, отрезки $|CX| = m$ и $|CY| = n$; после этого $|XY|$ можно будет найти по теореме косинусов из ΔCXY. Для того же, чтобы вычислить m и n, воспользуемся теоремой синусов. Применив эту теорему к ΔAYC со сторонами $|AC| = b$ и $|CY| = n$ и углами $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$ и $\widehat{Y} = 180° - (\alpha + \gamma) = 180° - (60° - \beta) = 120° + \beta$ (здесь мы снова использовали очевидное равенство $\alpha + \beta + \gamma = 60°$), получим

$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(120° + \beta)}$$

или

$$n = b\sin\alpha/\sin(120° + \beta).$$

Но в силу той же теоремы синусов (которую мы теперь будем применять уже к «большому» ΔABC)

$$b/\sin\widehat{B} = d$$

или

$$b = d\sin\widehat{B} = d\sin 3\beta.$$

Поэтому

$$n = d\sin\alpha\sin 3\beta/\sin(120° + \beta) = d\sin\alpha\sin 3\beta/\sin(60° - \beta).$$

Но (вот здесь придется немного запастись терпением!)

$$\sin 3\beta = \sin(2\beta+\beta) =$$
$$= \sin 2\beta \cos\beta + \cos 2\beta \sin\beta =$$
$$= 2\sin\beta\cos^2\beta + (1-2\sin^2\beta)\sin\beta =$$
$$= 2\sin\beta(1-\sin^2\beta) + \sin\beta - 2\sin^3\beta =$$
$$= 3\sin\beta - 4\sin^3\beta.$$

Последнее выражение можно далее преобразовать так:

$$\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta =$$
$$= 4\sin\beta\left[\frac{3}{4} - \sin^2\beta\right] =$$
$$= 4\sin\beta\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\beta\right] =$$
$$= 4\sin\beta[\sin^2 60^\circ - \sin^2\beta] =$$
$$= 4\sin\beta(\sin 60^\circ + \sin\beta)(\sin 60^\circ -$$
$$- \sin\beta) = 4\sin\beta\cdot 2\sin\frac{60^\circ+\beta}{2} \times$$
$$\times \cos\frac{60^\circ-\beta}{2}\, 2\cos\frac{60^\circ+\beta}{2}\sin\frac{60^\circ-\beta}{2} =$$
$$= 4\sin\beta 2\sin\frac{60^\circ+\beta}{2}\cos\frac{60^\circ+\beta}{2} \times$$
$$\times 2\sin\frac{60^\circ-\beta}{2}\cos\frac{60^\circ-\beta}{2} =$$
$$= 4\sin\beta\sin(60^\circ+\beta)\sin(60^\circ-\beta).$$

Подставляя это выражение для $\sin 3\beta$ в формулу для n, получим

$$n = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\beta).$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$m = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin(60^\circ+\alpha).$$

Применим теперь, как мы и собирались, теорему косинусов к $\triangle CXY$:

$$z^2 = |XY|^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma =$$
$$= 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\,[\sin^2(60^\circ+\alpha) +$$
$$+ \sin^2(60^\circ+\beta) - 2\sin(60^\circ+\alpha) \times$$
$$\times \sin(60^\circ+\beta)\cos\gamma].$$

Заметим теперь, что

$$(60^\circ+\alpha) + (60^\circ+\beta) + \gamma =$$
$$= 120^\circ + (\alpha+\beta+\gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ;$$

поэтому существует $\triangle EFG$ с углами $\hat{E} = 60^\circ + \alpha$, $\hat{F} = 60^\circ + \beta$ и $\hat{G} = \gamma$ (рис. 7).

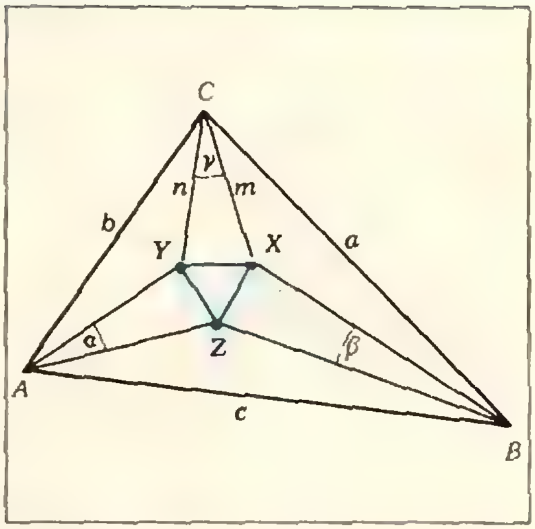


Рис. 6.

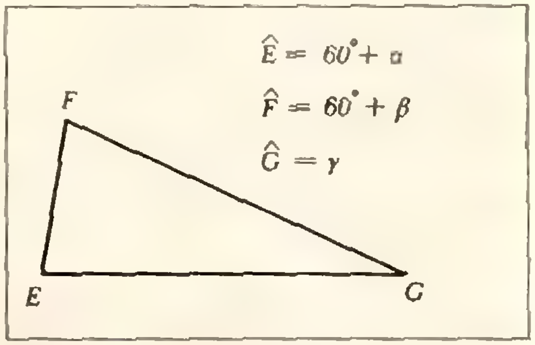


Рис. 7.

Предположим, что диаметр δ описанной вокруг этого треугольника окружности равен 1. Тогда в силу теоремы синусов стороны треугольника будут равны $e = |FG| = \sin(60^\circ+\alpha)$, $f = |EG| = \sin(60^\circ+\beta)$ и $g = |EF| = \sin\gamma$. Применив к этому $\triangle EFG$ теорему косинусов, получаем, что

$$\sin^2(60^\circ+\alpha) + \sin^2(60^\circ+\beta) -$$
$$- 2\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ+\beta)\cos\gamma =$$
$$= e^2+f^2-2ef\cos\gamma = g^2 = \sin^2\gamma.$$

Таким образом, получаем, что

$$z^2 = 16d^2\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$$

и, значит,

$$z = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Но выражения для длин $y = |XZ|$ и $x = |YZ|$ отрезков XZ и YZ получаются из выражения для длины z отрезка $|XY|$ циклической перестановкой углов α, β и γ. А так как углы α, β и γ входят в выражение для z симметрично, то $x = y = z = 4d\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ — и, значит, $\triangle XYZ$ со сторонами длин x, y и z — *равносторонний*.

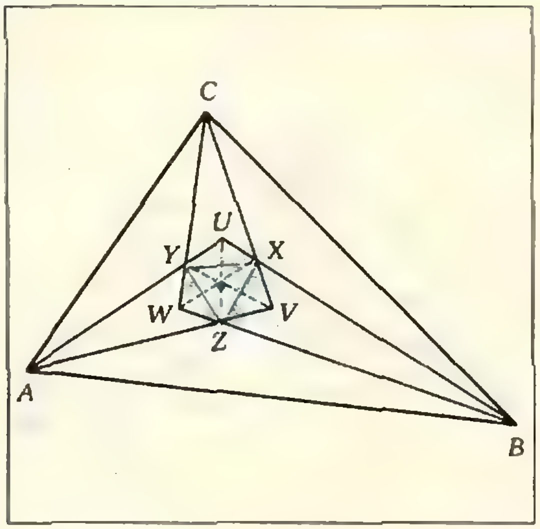


Рис. 8.

Упражнения

1. На рисунке 8 наряду с вершинами X, Y и Z треугольника Морлея изображены также точки U, V и W пересечения (AY) и (BX) (эта точка имеется также на рисунке 5 — она играла большую роль в 1-м доказательстве теоремы Морлея); AZ и CX; CY и BZ. Докажите, что отрезки $[XW]$, $[YV]$ и $[ZU]$ пересекаются в одной точке Q.

2. Докажите, что фигурирующая в задаче 1 точка Q является центром правильного треугольника Морлея XYZ.

3. Докажите, что

а) отрезки $[AX]$, $[BY]$ и $[CZ]$ (где XYZ — «треугольник Морлея» для $\triangle ABC$) пересекаются в одной точке R;

б) прямые AW, BV и CU (рис. 8) пересекаются в одной точке S;

в) точки R, S и точка Q задачи 1 лежат на одной прямой.

4. Пусть $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ — такие точки внутри (произвольного) $\triangle ABC$, что $B\widehat{A}\bar{Z} = C\widehat{A}\bar{Y}$ $(=\alpha)$, $C\widehat{B}\bar{X} = A\widehat{B}\bar{Z}$ $(=\beta)$, $B\widehat{C}\bar{X} = A\widehat{C}\bar{Y}$ $(=\gamma)$. Докажите, что прямые $A\bar{X}$, $B\bar{Y}$, $C\bar{Z}$ пересекаются в одной точке $\bar{R}$ (ср. с задачей 3а).

5. Дополните следующее «косвенное» доказательство теоремы Морлея для треугольника ABC с углами $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$ и $\widehat{C} = 3\gamma$. Пусть XYZ — произвольный *равносторонний* треугольник. На его сторонах построим вне $\triangle XYZ$ равнобедренные треугольники XYU, YZW и ZXV (ср. рис. 8) с углами при основаниях $[XY]$, $[YZ]$ и $[ZX]$, соответственно равными $60°-\gamma$, $60°-\alpha$ и $60°-\beta$. Обозначим, далее, точку пересечения прямых UY и VZ через A; UX и WZ — через B и VX и WY — через C. Докажите, что углы $\triangle ABC$ равны 3α, 3β и 3γ и что прямые AY и AZ; BZ и BX; CX и CY являются трисектрисами этого треугольника. Это доказательство мы назвали «косвенным», так как в нем исходный $\triangle ABC$ строится по его «треугольнику Морлея» XYZ.

6. Дополните следующее доказательство теоремы Морлея; пусть W — такая точка внутри $\triangle ABC$, что $W\widehat{B}A = \frac{1}{3}A\widehat{B}C$ и $W\widehat{C}A = \frac{1}{3}A\widehat{C}B$, и пусть X — центр вписанной окружности $\triangle WBC$, а Y и Z — такие точки отрезков $[CW]$, соответственно $[BW]$, что $Y\widehat{X}W = Z\widehat{X}W = 30°$ (при этом $\triangle XYZ$ — равносторонний). Обозначим через O — центр (правильного) $\triangle XYZ$, а через U и V точки пересечения прямых ZO, соответственно YO, с прямыми BX и CX. Наконец, через A' обозначим точку пересечения прямых UY и VZ. Докажите, что A' совпадает с A и что $\triangle XYZ$ — «треугольник Морлея» для $\triangle ABC$. (Это доказательство теоремы Морлея принадлежит индусу К. Венкаташальенгару.)

7. а) При каких углах $\triangle ABC$ пятиугольник $CPYXQ$ (см. рис. 5) будет правильным?

б) Докажите, что если $\triangle ABC$ правильный, то ломаная $PYXQ$ (см. рис. 5) может быть дополнена до правильного 9-угольника, вершина C которого противоположна стороне XY.

8. Докажите сформулированное на стр. 28 утверждение о 27 правильных треугольниках, образованных точками пересечения трисектрис внутренних и внешних углов данного $\triangle ABC$.

9. Назовем многоугольник $A_1A_2A_3\ldots A_n$ *многоугольником Морлея*, если, проведя «трисектрисы» A_1X_1, A_1X_2; A_2X_2, A_2X_3; A_3X_3, A_3X_4; …; A_nX_n, A_nX_1 его углов (где луч A_1X_1 ближе к стороне A_1A_n, луч A_2X_2 ближе к A_2A_1, …, луч A_nX_n ближе к стороне A_nA_{n-1}), мы придем к правильному многоугольнику $X_1X_2X_3\ldots X_n$. Из теоремы Морлея следует, что каждый треугольник является многоугольником Морлея; очевидно также, что каждый правильный многоугольник — «морлеев» и что, скажем, никакой отличный от квадрата прямоугольник не является многоугольником Морлея (почему?). Можете ли вы указать хоть один «морлеев многоугольник», отличный от треугольника и от правильного многоугольника?

задачник Кванта

Задачи

M516—M520; Ф528—Ф532

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M516, M520» или «Ф531». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на XII Всесоюзной олимпиаде.

M516. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a;\ b)$, выдает новую карточку $(a+1;\ b+1)$; второй, прочитав карточку $(a;\ b)$, выдает карточку $\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$ (он работает только, когда a и b четные); третий по двум карточкам $(a;\ b)$ и $(b;\ c)$ выдает карточку $(a;\ c)$. Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5;\ 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку:
а) $(1;50)$? б) $(1;100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a;\ b)$, $a<b$, а мы хотим получить карточку $(1;\ n)$. При каких n это можно сделать? (8—10 кл.)

В. Гутенмахер

M517. В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$. (8—9 кл.)

В. Дубровский

M518. Числа $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ принадлежат отрезку $[a;\ b]$, где $0<a<b$. Докажите неравенство

$$(x_1+x_2+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(a+b)^2}{4ab}n^2.\quad \text{(9 кл.)}$$

С. Фомин

M519. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m>n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m>2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m>\alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш? (9 кл.)

А. Слинько

М520. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{q_n}. \quad \text{(10 кл.)}$$

И. Бернштейн

Ф528. На рисунке 1 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источнику постоянного напряжения $U=10$ В последовательно с сопротивлением $R=4$ Ом. Определить мощность лампочки. (8 кл.)

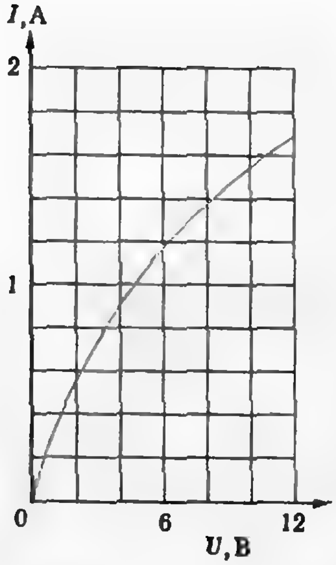


Рис. 1.

Ф529. Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 2), определите: 1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата; 2) на каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании; 3) размер рыбы, пойманной рыбаком; 4) диаметр объектива (предполагая,

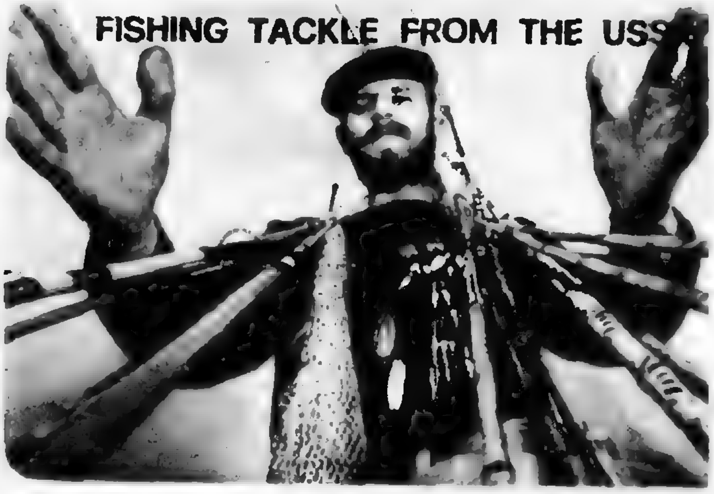

FISHING TACKLE FROM THE USS

Рис. 2.

Внимание! Срок присылки решений задач из «Задачника «Кванта» № 6 (1978)—до 1 сентября.

что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм). Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу. (10 кл.)

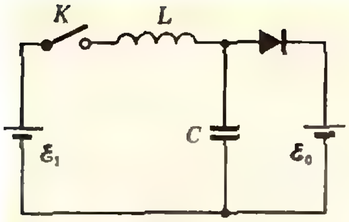


Рис. 3.

Ф530. В схеме, приведенной на рисунке 3, $\mathscr{E}_0 > \mathscr{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею с э. д. с. $\mathscr{E}_0$ при замыкании ключа K, полагая, что внутренние сопротивления батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечности); конденсатор до замыкания ключа был не заряжен. (10 кл.)

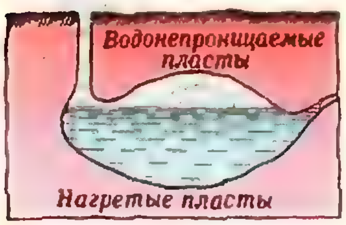


Рис. 4.

Ф531. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и подогреваемые земным теплом (рис. 4). Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h=90$ м; теплота испарения воды $\lambda=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг; теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена на рисунке 5. (9 кл.)

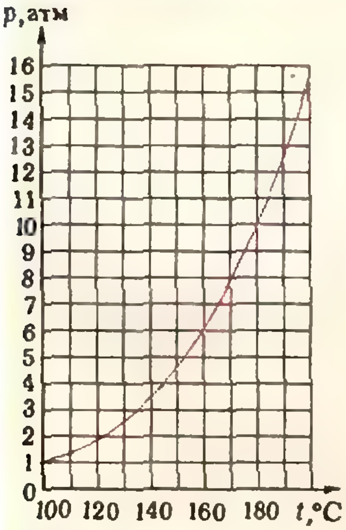


Рис. 5.

Ф532. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массы M на конце. К другому концу стержня прикреплена легкая цилиндрическая втулка a с внутренним радиусом r, надетая на вращающуюся горизонтальную ось b (рис. 6). Коэффициент трения между втулкой и осью равен μ. Определить угол отклонения стержня от вертикали в состоянии равновесия. (8 кл., 10 кл.)

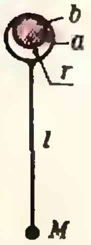


Рис. 6.

Решения задач

М466—М469; Ф482—Ф486

М466. *Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашки. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Как это сделать?*

Пусть вообще имеется $2n+1$ монет, из которых $2k$ фальшивых ($k \leqslant n$), причем каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Пусть масса настоящей монеты равна a граммов. Отложим одну выбранную монету, а из оставшихся $2n$ монет положим n монет на первую чашку весов и n монет — на вторую. Заметим, что при этом масса гирь на каждой чашке весов будет отличаться от na (массы n настоящих монет) на целое число той же четности, что и число фальшивых монет на этой чашке весов.

Если отложенная монета настоящая, то общее число фальшивых монет на чашках — $2k$ (четно), значит, число их на той и другой чашке имеет одинаковую четность, следовательно, разность масс одной и другой чашки будет четна. Если выбранная монета — фальшивая, то число фальшивых монет, лежащих на чашках весов, нечетное — $(2k-1)$; тогда нечетно и показание весов.

Итак, мы видим, что выбранная монета настоящая или фальшивая в зависимости от того, является показание весов четным или нечетным.

И. Клумова

◆

М467. *Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $|AD|:|DC| = |BE|:|EA| = 1:2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC — прямой.*

Рассмотрим точку F на стороне BC такую, что $|BF|:|FC| = 2:1$. Проведем отрезок AF. Треугольник OPQ — правильный (рис. 1). Поэтому нам достаточно доказать, что величина угла AOD равна 30 градусам. Для этого, в свою очередь, нужно убедиться в том, что $|OP| = |AP|$ (поскольку $\widehat{APO} = 120°$). Но $|AP| = |BO|$, поэтому остается проверить, что $|OP| = |BO|$. Выясним, в каком отношении точки O и P делят отрезок BD. Проведем прямые DE_1 и DF_1 параллельно CE и AF соответственно (рис. 2). Ясно, что $|AE_1|:|E_1E| = 1:2$. Поскольку $|AE|:|EB| = 2:1$, из этого следует, что $|E_1E|:|EB| = 4:3$. Значит, и $|DO|:|BO| = 4:3$. Аналогично можно убедиться, что $|BF|:|FF_1| = 6:1$, откуда $|BP|:|DP| = 6:1$. Следовательно, $|DP|:|OP|:|BO| = 1:3:3$. Отсюда $|BO| = |OP|$, и угол AOC — прямой.

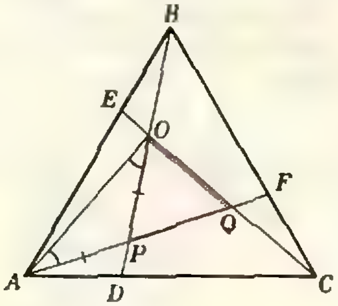


Рис. 1.

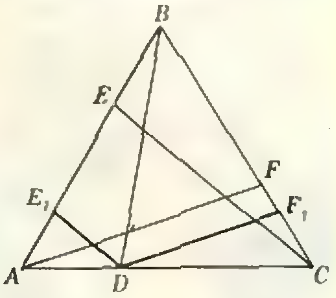


Рис. 2.

Л. Лиманов

◆

М468. *Точки A, B, C и D плоскости таковы, что для любой точки M этой плоскости скалярные произведения векторов $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ и*

Введем в плоскости прямоугольную систему координат, приняв за начало одну из данных точек, скажем, точку A. Пусть при этом точка B имеет координаты $(b_1;\ b_2)$, точка C — координаты $(c_1;\ c_2)$ и точка D — координаты $(d_1,\ d_2)$ (рис. 3).

$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ не равны друг другу. Докажите, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

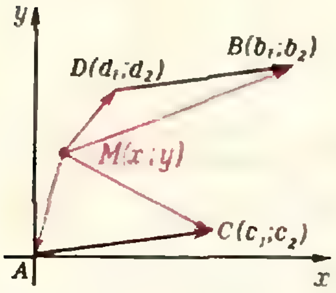


Рис. 3.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x;\ y)$ — ее координаты. Тогда векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$ имеют координаты $(-x;\ -y)$, $(b_1-x;\ b_2-y)$, $(c_1-x;\ c_2-y)$, $(d_1-x;\ d_2-y)$ соответственно. Равенство $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ запишется в координатах так:

$$-x(b_1-x)-y(b_2-y)=$$
$$=(c_1-x)(d_1-x)+(c_2-y)(d_2-y),$$

или

$$(c_1+d_1-b_1)x+(c_2+d_2-b_2)y=c_1d_1+c_2d_2. \qquad (*)$$

Утверждение «*для любой точки M скалярные произведения $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ не равны друг другу*» означает, что равенство $(*)$, рассматриваемое как уравнение с двумя неизвестными x, y, не имеет решений. Это возможно в том и только в том случае, если

$$\begin{cases} c_1+d_1-b_1=0, \\ c_2+d_2-b_2=0, \\ c_1d_1+c_2d_2\neq 0. \end{cases}$$

Переписав первые два равенства в виде

$$\begin{cases} c_1=b_1-d_1, \\ c_2=b_2-d_2 \end{cases}$$

и заметив, что $(c_1;\ c_2)$ — координаты вектора $\overrightarrow{AC}$, а $(b_1-d_1;\ b_2-d_2)$ — координаты вектора $\overrightarrow{DB}$, мы убедимся, что эта система равенств эквивалентна равенству векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$.

Условие $c_1d_1+c_2d_2\neq 0$ означает, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$, то есть векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не являются взаимно перпендикулярными.

Итак, условие «для любой точки M скалярные произведения $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$ не равны друг другу» эквивалентно следующему: «$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$».

Если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, то равенство $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$ означает, что четырехугольник $ACBD$ — параллелограмм, а неравенство $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\neq 0$ означает, что этот параллелограмм не является прямоугольником.

Ю. Ионин

◆

M469. *а) Уравнение $x^4+ax^3+bx+c=0$ имеет четыре различных действительных корня. Докажите, что $ab<0$.*

б) Уравнение $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{k-1}x^{n-k+1}+a_{k+1}x^{n-k-1}+\ldots+a_n=0$ имеет n различных действительных корней. Докажите, что $a_{k-1}a_{k+1}<0$.

Мы приведем для пунктов а) и б) различные доказательства. В основе обоих лежит следующее утверждение: *если все корни многочлена действительны и различны, то все корни производной этого многочлена тоже действительны и различны.* В самом деле, многочлен степени n это непрерывная (и дифференцируемая) функция на прямой. Следовательно, в некоторой внутренней точке интервала, концами которого служат любые два соседних корня исходного многочлена, он принимает или максимальное, или минимальное значение (рис. 4, *а*). В экстремальной точке производная многочлена обращается в нуль. Таким образом, в любом интервале между любыми двумя соседними корнями многочлена имеется корень его производной (рис. 4, *б*). Следовательно, производная многочлена степени n, у которого все корни действительны и различны, имеет ровно $n-1$ действительных корней, причем все они различны.

а) Из доказанного утверждения следует, что уравнение

$$4x^3+3ax^2+b=0$$

имеет три различных действительных корня: x_1, x_2 и x_3. Поэтому

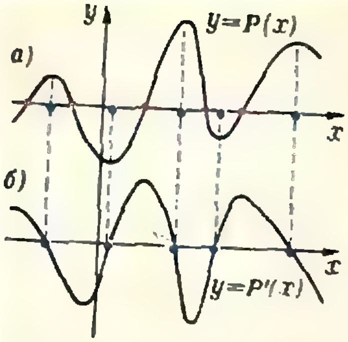


Рис. 4.

$$4x^3+3ax^2+b=4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=4x^3-$$
$$-4(x_1+x_2+x_3)x^2+4(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)x-4x_1x_2x_3.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{3}{4}a, \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=0, \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{1}{4}b \end{cases}$$

(теорема Виета для многочленов третьей степени).

Так как $b\neq0$, из последнего уравнения этой системы следует, что $x_1\neq0$, $x_2\neq0$, $x_3\neq0$. Найдем сумму $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}$:

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{x_3^2}=\frac{(x_2x_3)^2+(x_1x_3)^2+(x_1x_2)^2}{(x_1x_2x_3)^2}=$$
$$=\frac{(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)}{(x_1x_2x_3)^2}=$$
$$=\frac{-2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}a\right)\left(-\dfrac{1}{4}b\right)}{\left(-\dfrac{1}{4}b\right)^2}=-6\cdot\frac{ab}{b^2}.$$

Но $\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}+\dfrac{1}{x_3^2}>0$; следовательно, $ab<0$.

б) Здесь можно провести доказательство, используя схему пункта а). Мы же сейчас докажем более сильное утверждение: *если все корни многочлена*

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,\quad a_0\neq0,$$

действительны и различны, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_1^2-\dfrac{2\cdot n}{1\cdot(n-1)}a_0a_2>0, \\ a_2^2-\dfrac{3\cdot(n-1)}{2\cdot(n-2)}a_1a_3>0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^2-\dfrac{n\cdot2}{(n-1)\cdot1}a_{n-2}a_n>0. \end{cases} \tag{2}$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(y)=y^np\left(\frac{1}{y}\right)=a_0+a_1y+\ldots+a_{n-1}y^{n-1}+a_ny^n.$$

Этот многочлен, а следовательно, его первая, вторая и следующие производные (до $(n-1)$-й) имеют только действительные корни. Рассмотрим его $(n-2)$-ю производную:

$$Q^{(n-2)}(y)=(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot4\cdot3\,[n(n-1)a_ny^2+$$
$$+2(n-1)a_{n-1}y+2a_{n-2}].$$

Поскольку корни этого квадратного трехчлена действительны и различны, его дискриминант положителен, то есть

$$4(n-1)^2a_{n-1}^2-8n(n-1)a_{n-2}a_n=$$
$$=4(n-1)^2\left[a_{n-1}^2-\,-\frac{2n}{n-1}a_{n-2}a_n\right]>0.$$

откуда следует, что

$$a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2} a_n > 0. \qquad (3)$$

Таким образом, если все корни многочлена $P(x)$ действительны и различны, то его коэффициенты a_{n-2}, a_{n-1}, a_n удовлетворяют неравенству (3). Запишем теперь $(n-k-1)$-ю производную многочлена $P(x)$:

$$P^{(n-k-1)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)a_0x^{k+1} + \ldots$$
$$\ldots + (n-k+1)(n-k)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3a_{k-1}x^2 +$$
$$+ (n-k)(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot a_kx +$$
$$+ (n-k-1)(n-k-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_{k+1}.$$

Поскольку корни многочлена $P^{(n-k-1)}(x)$ действительны, применим к его трем последним коэффициентам неравенство (3); мы получим

$$a_k^2 - \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} a_{k-1} a_{k+1} > 0.$$

Тем самым мы доказали все неравенства системы (2). Из неравенств (2) следуют такие неравенства:

$$\begin{cases} a_1^2 - a_0a_2 > 0, \\ a_2^2 - a_1a_3 > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1} > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}^2 - a_{n-2}a_n > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

В самом деле,

$$\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1;$$

поэтому если $a_{k-1}a_{k+1} \geqslant 0$, то

$$a_k^2 - a_{k-1}a_{k+1} \geqslant a_k^2 - \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} a_{k-1}a_{k+1} > 0;$$

если же $a_{k-1}a_{k+1} < 0$, то неравенства (4) очевидны.

Положив в k-м неравенстве системы (4) коэффициент $a_k = 0$, получим утверждение пункта б) нашей задачи.

В. Вавилов

◆

Ф482. *Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны R_1 поверхности капли в ее верхней точке от радиуса кривизны R_2 в нижней точке, если расстояние между этими точками равно $d = 2\cdot 10^{-3}$ м? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7\cdot 10^{-2}$ Н/м.*

Обозначим p_0 атмосферное давление, p — давление в верхней точке падающей капли. Так как разность давлений внутри и снаружи сферической капли радиуса R равна $\frac{2\sigma}{R}$, для верхней точки

$$p_1 - p_0 = \frac{2\sigma}{R_1}. \qquad (*)$$

В нижней точке капли давление равно $p_1 + \rho gd$. Следовательно,

$$p_1 + \rho gd - p_0 = \frac{2\sigma}{R_2}. \qquad (**)$$

Из двух равенств (*) и (**) получаем

$$\rho gd = 2\sigma\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 2\sigma\frac{R_1 - R_2}{R_1R_2}.$$

Так как размеры капли малы ($d = 2$ мм), то радиусы кривизны R_1 и R_2 мало отличаются друг от друга. Поэтому в знаменателе последней формулы можно положить $R_1 = R_2 = \frac{d}{2}$. В результате получим

$$R_1 - R_2 = \frac{\rho g d^3}{8\sigma} \approx 0{,}14 \text{ мм}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф483. *С каким горизонтальным ускорением должен двигаться клин с углом α (рис. 5), чтобы лежащий на нем груз поднимался вверх, если коэффициент трения между грузом и клином равен μ?*

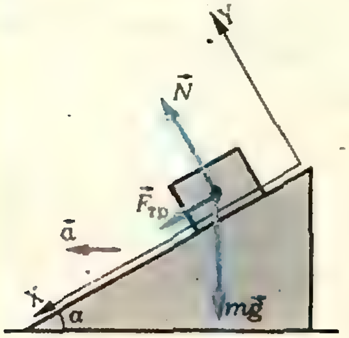


Рис. 5.

Очевидно, что ускорение $\vec{a}$ клина направлено влево (в противном случае груз соскальзывал бы с клина, а не поднимался по нему).

Рассмотрим силы, действующие на груз. Это—сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ такая, что $|\vec{F}_{тр}| = \mu|\vec{N}|$.

Запишем уравнения движения груза в проекциях на оси X и Y. Чтобы груз поднимался вверх по клину, проекция ускорения груза на ось X должна быть меньше или равна соответствующей проекции ускорения клина. С учетом второго закона Ньютона получим

$$\frac{\mu|\vec{N}| + m|\vec{g}|\sin\alpha}{m} \leqslant |\vec{a}|\cos\alpha. \tag{1}$$

Проекция ускорения груза на ось Y такая же, как у клина (груз не отрывается от клина):

$$\frac{|\vec{N}| - m|\vec{g}|\cos\alpha}{m} = |\vec{a}|\sin\alpha. \tag{2}$$

Решая (1) и (2) совместно, найдем

$$|\vec{a}| \geqslant \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}|\vec{g}|.$$

◆

Ф484. *Внутри диэлектрического шара радиуса R_0, равномерно заряженного с объемной плотностью ρ, находится заземленная металлическая сфера радиуса r (рис. 6). Найдите зависимость потенциала электростатического поля этой системы от расстояния до центра сферы.*

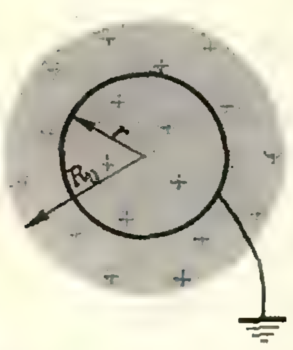


Рис. 6.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность электростатического поля системы равна сумме напряженностей полей, создаваемых зарядами шара и сферы. Аналогично и потенциал поля в каждой точке равен сумме потенциалов полей зарядов сферы и шара.

Обозначим заряд заземленной металлической сферы через q (позже найдем его значение); очевидно, что $q < 0$. Этот заряд вне сферы (при $R \geqslant r$) создает поле такое же, как точечный заряд q, помещенный в центр сферы: проекция напряженности $\vec{E}$ на выбранное направление от центра $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$. Внутри сферы (при $R < r$) поля нет: $E = 0$. График зависимости E от R для поля заряженной сферы показан на рисунке 7 синей линией.

Потенциал φ этого поля вне сферы меняется по закону $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$, а внутри сферы — равен потенциалу поверхности сферы: $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. На рисунке 8 синей линией изображен график зависимости φ от R.

Равномерно заряженный шар вне себя (при $R \geqslant R_0$) создает поле такое же, как точечный заряд, равный заряду шара $Q = \frac{4}{3}\pi\rho R_0^3$, находящийся в его центре: $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 R^2}$. Внутри шара на расстоянии $R < R_0$

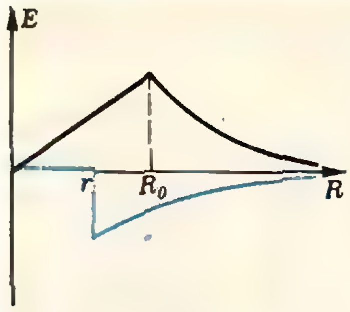


Рис. 7.

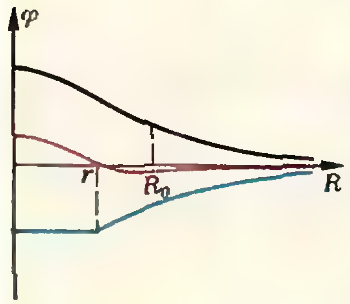


Рис. 8.

от его центра поле создается только тем зарядом, которым обладает шар радиуса R (никакой заряженный слой не создает поля внутри себя). Этот заряд $Q_1 = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ создает поле с напряженностью $E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$. График зависимости E от R для поля заряженного шара показан на рисунке 7 черной линией.

Потенциал поля заряженного шара вне шара равен потенциалу поля точечного заряда Q, помещенного в центр шара: $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho R_0^3}{3\varepsilon_0 R}$.

На поверхности шара $\varphi = \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0}$, а по мере приближения к центру шара потенциал растет: добавляется работа, совершаемая электрическим полем по перенесению единичного заряда из рассматриваемой точки внутри шара на его поверхность. Эта работа равна средней напряженности поля на рассматриваемом участке, умноженной на перемещение единичного заряда. Поскольку внутри шара напряженность меняется линейно,

$$E_{\text{ср}} = \frac{E_R + E_{R_0}}{2} = \frac{\rho(R + R_0)}{6\varepsilon_0}.$$

Тогда потенциал поля внутри шара равен

$$\varphi = \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} + E_{\text{ср}}(R_0 - R) = \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho(R_0^2 - R^2)}{6\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{\rho(3R_0^2 - R^2)}{6\varepsilon_0}.$$

Соответствующий график показан на рисунке 8 черной линией

Для того чтобы построить график зависимости потенциала φ поля системы от R, надо сложить графики, построенные отдельно для полей сферы и шара. На рисунке 8 результирующий график показан красной линией.

Осталось найти величину q заряда на сфере. Так как сфера заземлена, ее потенциал равен нулю. Это означает, что на поверхности сферы, при $R = r$, потенциал поля системы равен нулю:

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\rho R_0^2}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho(R_0^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} = 0.$$

Отсюда

$$q = -\frac{2}{3}\pi\rho r\left(3R_0^2 - r^2\right).$$

◆

Ф485. *Чему равен период малых колебаний четырех одинаково заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины l так, как показано на рисунке 9? На рисунке стрелками указаны направления движения тел при колебаниях в один и тот же момент времени. Масса и заряд каждого тела равны соответственно m и q.*

Рассмотрим простейший пружинный маятник: груз массы M, скрепленный с пружиной жесткости k. При колебаниях такого маятника выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}, \qquad (1)$$

где $\vec{v}$ — скорость, а x — смещение груза. Период таких колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), нетрудно заметить, что под квадратным корнем стоит отношение коэффициентов

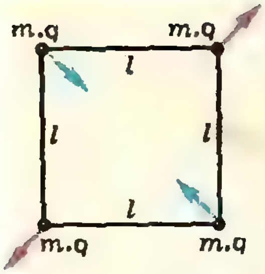


Рис. 9.

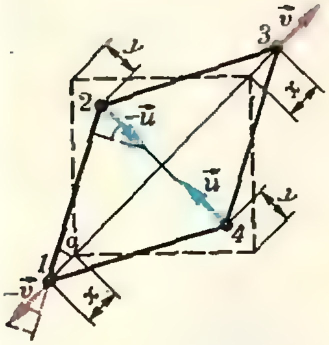


Рис. 10.

при квадрате скорости и квадрате смещения груза. Воспользуемся этим для нахождения периода колебаний системы, изображенной на рисунке 9.

Обозначим через $\vec{v}$ и $-\vec{v}$ скорости удаляющихся друг от друга зарядов, а через $\vec{u}$ и $-\vec{u}$ — скорости приближающихся друг к другу зарядов. Так как нить нерастяжима, для проекций скоростей на нить выполняется равенство:

$$|\vec{v}|\cos\alpha = |\vec{u}|\sin\alpha, \text{ или } |\vec{u}| = |\vec{v}|\operatorname{ctg}\alpha.$$

При малых смещениях зарядов от положения равновесия угол $\alpha \approx 45°$, $\operatorname{ctg}\alpha \approx 1$, поэтому $|\vec{u}| \approx |\vec{v}|$. Так что кинетическая энергия системы равна

$$2\frac{mv^2}{2} + 2\frac{mu^2}{2} \approx 2mv^2.$$

Потенциальная энергия системы равна работе, которую необходимо затратить для создания системы, то есть для перенесения зарядов q из бесконечности в данные положения.

Пусть заряды *1* и *3* смещены от положения равновесия на малое расстояние x (рис. 10). При этом заряды *2* и *4* смещены на расстояние y такое, что

$$\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{2}} - y\right)^2 = l^2 \qquad (3)$$

(поскольку длина нити l не изменяется).

При перенесении первого заряда работа не совершается, так как электрического поля нет; при перемещении второго заряда в поле первого совершается работа

$$A_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l}.$$

Для внесения третьего заряда против поля, созданного первыми двумя зарядами, надо совершить работу

$$A_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}l + 2x)};$$

и при внесении четвертого заряда совершается работа

$$A_3 = 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}l - 2y)}.$$

Таким образом, потенциальная энергия системы равна

$$A_1 + A_2 + A_3 \approx \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 l}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{3q^2x^2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 l^3}$$

(здесь мы воспользовались связью между x и y, задаваемой формулой (3)).

Полная энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий и с течением времени не изменяется:

$$2mv^2 + \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 l}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{3q^2x^2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 l^3} = \text{const}.$$

Перенося постоянные слагаемые в правую часть равенства, получим

$$2mv^2 + \frac{3q^2x^2}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 l^3} = \text{const}. \qquad (4)$$

Если ввести обозначения $4m = M$ и $\dfrac{3q^2}{\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 l^3} = k$, выражения (4) и (1) совпадут. Это означает, что мы свели колебания системы к колебаниям пружинного маятника. Следовательно, период колебаний системы равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 4\pi\frac{l}{q}\sqrt{\frac{\sqrt{2}\,\pi\varepsilon_0 ml}{3}}.$$

◆

Ф486. *На рисунке 11 изображена схема масс-спектрометра. В ионизаторе A образуются ионы, которые ускоряются напряжением $U = 10$ кВ и входят через щель C в магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0{,}1$ Т. После поворота ионы попадают на фотографическую пластинку D и вызывают ее почернение. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на пластинке полосы ионов H^+, $^2H^+$, $^3H^+$, He^+? Какова должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов $^{16}O^+$ и $^{15}N^+$ разделились?*

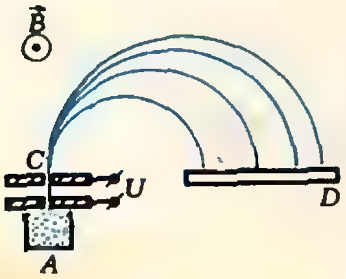


Рис. 11.

Ускоряясь электрическим полем, ионы приобретают кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

где m — масса иона и q — его заряд. Следовательно, в камеру масс-спектрометра ионы попадают со скоростью

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

В этой камере на ионы действует сила Лоренца

$$|\vec{F}| = |\vec{v}|\,|\vec{B}|\,q,$$

благодаря чему ионы движутся по окружности радиуса R. Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = |\vec{v}|\,|\vec{B}|\,q,$$

откуда

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{|\vec{B}|\,q} = \frac{1}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Ионы одного сорта собираются на фотопластинке на расстоянии $l = 2R$ от щели. Расстояние между следами ионов с одинаковыми зарядами q, но разными массами m_1 и m_2 равно

$$\Delta l = 2\Delta R = \frac{2}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2U}{q}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right).$$

Так, для ионов H+ и ^{2}H+

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2U}{q}}\left(\sqrt{2m_p} - \sqrt{m_p}\right) \approx 0{,}12 \text{ м},$$

где $q = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл—заряд одновалентных ионов, $m_p = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг — масса протона.

Для ионов ^{2}H+ и ^{3}H+

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2U}{q}}\left(\sqrt{3m_p} - \sqrt{2m_p}\right) \approx 0{,}09 \text{ м},$$

а для ^{3}H+ и He+

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2U}{q}}\left(\sqrt{4m_p} - \sqrt{3m_p}\right) \approx 0{,}08 \text{ м}.$$

Очевидно, что следы ионов на фотопластинке не будут перекрываться, если ширина щели d будет меньше Δl. В частности, для ионов ^{16}O+ и ^{15}N+

$$d < \frac{2}{|\vec{B}|}\sqrt{\frac{2U}{q}}\left(\sqrt{16m_p} - \sqrt{15m_p}\right) \approx 0{,}04 \text{ м}.$$

И. Слободецкий

С. Фомин

Билеты и ящики

В этой заметке решается задача, предлагавшая в 1977 году на втором (исследовательском) туре XI Всесоюзной олимпиады по математике. Эта задача была помещена в «Задачнике «Кванта» («Квант», 1977, № 9, М465). Напомним ее формулировку.

Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

Пусть вообще имеется 10^k билетов с k-значными номерами от 00...0 до 99...9. Билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычеркиванием некоторых $k-2$ цифр.

г) Докажите, что при $k=4$ все 10 000 четырехзначных билетов можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которые можно разложить k-значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для $k=4, 5, 6, \ldots$

{0, 0, 7}	49
{0, 1, 6}	37
{0, 2, 5}	29
{1, 1, 5}	27
{0, 3, 4}	25
{1, 2, 4}	21
{1, 3, 3}	19
{2, 2, 3}	17

$k=3$
$N=7$

$F(3,7)=17$

Рис. 1.

1. Функция $F(k, N)$

Начнем с вопроса, на первый взгляд, не связанного с нашей задачей.

Пусть k и N — два натуральных числа. Рассмотрим всевозможные наборы из k целых неотрицательных чисел, сумма которых равна N. Для каждого такого набора найдем сумму квадратов входящих в него чисел (рис. 1). Наименьшую из этих сумм обозначим $F(k, N)$. Пусть она соответствует набору $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Лемма. *Каждые два числа, входящих в набор A, отличаются не более чем на 1.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть, скажем, $a_2 > a_1+1$. Рассмотрим набор $A'=\{a_1+1, a_2-1, a_3, \ldots, a_k\}$. Поскольку

$$(a_1+1)^2+(a_2-1)^2=$$
$$=a_1^2+a_2^2-2(a_2-a_1-1)<a_1^2+a_2^2,$$

сумма квадратов чисел, входящих в набор A', меньше аналогичной суммы для A. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь понятно, как вычислять $F(k, N)$. Нужно разделить N на k с остатком и подобрать k чисел так, чтобы каждое из них было либо равно частному, либо на 1 больше его, а сумма этих чисел была бы равна N.

На рисунке 2 приведена таблица значений функции $F(k, N)$ для небольших k и N.

Какова «геометрическая» интерпретация $F(k, N)$? Пусть для простоты $k=3$. Тогда задачу нахождения $F(k, N)$ можно воспринимать следующим образом: *найти в треугольнике ABC, задаваемом в пространстве уравнением $x_1+x_2+x_3=N$ и неравенствами $x_1 \geqslant 0$,*

N \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	9	5	3	3	3	3	3	3	3	3
4	16	8	6	4	4	4	4	4	4	4
5	25	13	9	7	5	5	5	5	5	5
6	36	18	12	10	8	6	6	6	6	6
7	49	25	17	13	11	9	7	7	7	7
8	64	32	22	16	14	12	10	8	8	8
9	81	41	27	21	17	15	13	11	9	9
10	100	50	34	26	20	18	16	14	12	10

F (k, N)

Рис. 2.

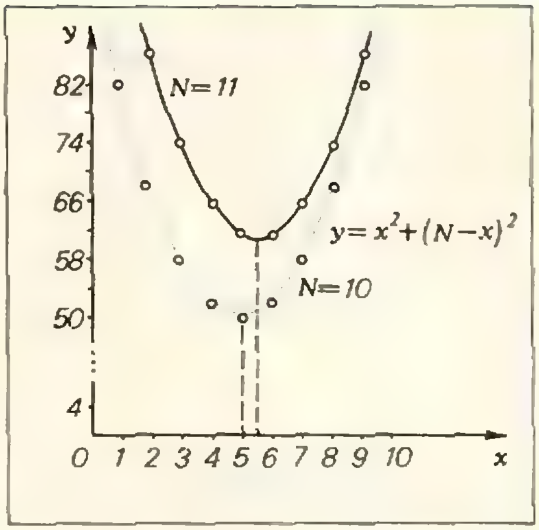


Рис. 4.

$x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$ (*рис. 3*), *точку M с целыми координатами, наименее удаленную от начала координат O* (интересующая нас сумма квадратов есть не что иное, как квадрат расстояния от точки O до M). Естественно, что нужно взять эту точку поближе к основанию перпендикуляра, опущенного из O на плоскость треугольника ABC, то есть к точке $\left(\frac{N}{3};\ \frac{N}{3};\ \frac{N}{3}\right)$.

Для $k > 3$ аналогичные рассуждения возможны с привлечением понятия k-мерного пространства.

Рассмотрим еще одну интерпретацию $F(k, N)$. Пусть для простоты $k = 2$. Тогда рассматриваемые наборы имеют вид $(a, N-a)$ (a — целое неотрицательное), и перед нами стоит задача нахождения минимума функции $x \to x^2 + (N-x)^2$, заданной на множестве целых чисел из интервала $[0, N]$. Эта функция — квадратный трехчлен; минимум достигается в точке $x = \frac{N}{2}$. Поэтому $F(2, N)$ равно $\frac{N^2}{2}$ или $\frac{N^2+1}{2}$ в зависимости от четности N (рис. 4).

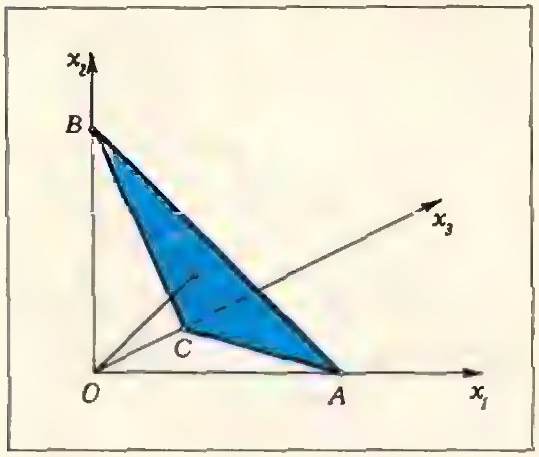


Рис. 3.

Для $k > 2$ нужно рассматривать соответствующую функцию $k - 1$ переменных и находить ее минимум.

2. Решение задач а) и в)

Расположим все ящики в виде квадрата 10×10, как показано на рисунке 5, а. На рисунке 5, б этот квадрат Q_0 нарисован в привычном для нас виде; будем считать, что каждая его клетка — это ящик с соответствующим номером. Строчки и столбцы этого квадрата пронумеруем цифрами от 1 до 9. Поскольку все цифры в условии задачи равноправны, строчки и столбцы квадрата Q_0 можно переставлять.

Нам нужно выбрать некоторое количество ящиков и разложить все билеты в эти ящики. Договоримся клетки, соответствующие выбранным ящикам, закрашивать в Q_0. Пусть минимальное количество кле-

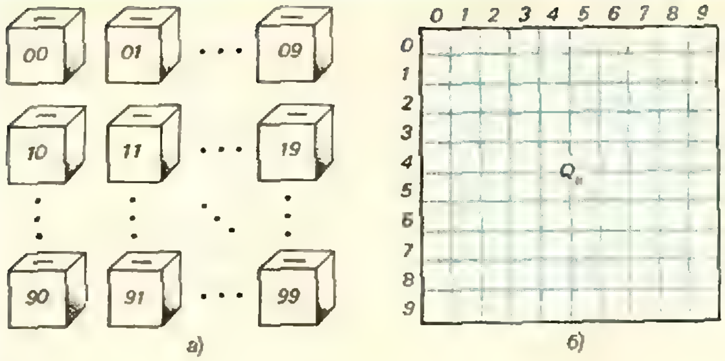


Рис. 5.

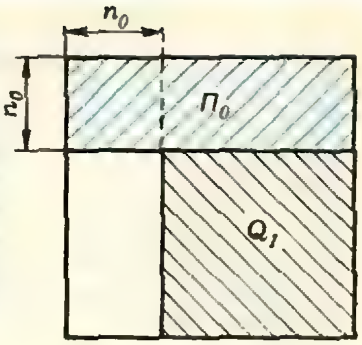


Рис. 6.

ток, а именно n_0, закрашено в нулевой строчке; можно считать, что это первые n_0 клеток строчки. Рассмотрим теперь квадрат Q_1, получающийся из Q_0 вычеркиванием первых n_0 строчек и первых n_0 столбцов (рис. 6). Покажем, что все клетки Q_1 должны быть закрашены. Для этого возьмем ящики с номером xy, где $x \geqslant n_0$, $y \geqslant n_0$. В него обязательно попадает билет $0xy$: его нельзя положить в ящики $0x$ и $0y$, так как соответствующие клетки не закрашены. Значит, клетка с номером xy должна быть закрашена для всех $x \geqslant n_0$, $y \geqslant n_0$.

Посчитаем, сколько же всего клеток закрашено в нашем квадрате Q_0. В каждой строчке прямоугольника $П_0$ (см. рис. 6) закрашено по крайней мере n_0 клеток. В Q_1 закрашены все $(10-n_0)^2$ клеток. Таким образом, в Q_0 закрашено по крайней мере $n_0^2+(10-n_0)^2$ клеток. Наименьшая из этих сумм равна $F(2, 10) = 50$. Так что, во всяком случае, в Q_0 закрашено не менее 50 клеток. С другой стороны, пятидесяти ящиков с номерами, выписанными на рисунке 7, достаточно: вычеркнув в номере каждого билета цифру так, чтобы оставались две цифры одинаковой четности, мы поместим этот билет в соответствующий ящик. Эти два соображения завершают решение пунктов а) и в) задачи.

3. Решение задачи д)

Пусть теперь билеты k-значные. Будем считать, что у нас не 10 цифр, а N, где N — некоторое произвольное натуральное число (так, как если бы у нас была принята N-ичная система счисления).

Строчки квадрата Q_0 занумеруем теперь числами от 0 до $N-1$; таким образом, в Q_0 всего N^2 клеток.

По-прежнему будем считать, что в нулевой строчке — n_0 закрашенных клеток, а в любой другой строчке — не меньше, чем n_0. Аналогично построим квадрат Q_1. Поступим с Q_1 так же, как мы поступали с Q_0, — выберем в нем строчку, в которой меньше всего закрашенных клеток (пусть это его первая строчка, т. е. строчка с номером n_0 в исходном квадрате), обозначим количество закрашенных клеток в ней через n_1 и, выкинув из Q_1 первые n_1 строчек и столбцов, получим квадрат Q_2. С ним поступим так же, и т. д., до квадрата Q_{k-2} (рис. 8). Прямоугольники, аналогичные $П_0$, обозначим через

00	02	04	06	08
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
31	33	35	37	39
40	42	44	46	48
51	53	55	57	59
60	62	64	66	68
71	73	75	77	79
80	82	84	86	88
91	93	95	97	99

Рис. 7.

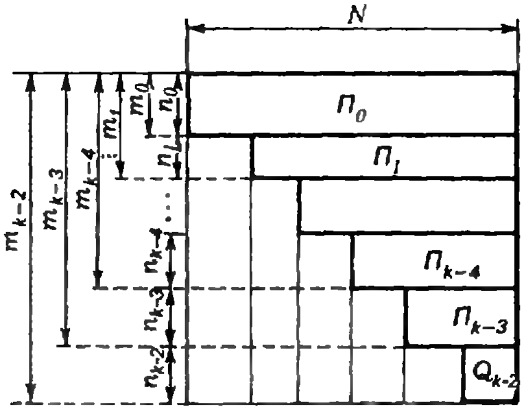


Рис. 8.

$П_1, П_2, П_3, \ldots$. В каждом прямоугольнике $П_i$ ровно n_i строк, в каждой из которых закрашено по крайней мере n_i клеток, так что в Q_0 во всяком случае закрашено $n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{k-3}^2$ клеток. Введем обозначения: $m_0=n_0$, $m_1=n_0+n_1$, $m_2=n_0+n_1+n_2, \ldots$ (см. рис. 8). Рассмотрим билет с номером $[0m_0m_1\ldots m_{k-3}xy]$, где x и y — некие две «цифры», не меньше, чем m_{k-3} (то есть ящик с номером xy «расположен» в Q_{k-2}). Легко видеть, что этот билет можно положить только в ящик с номером xy. Поскольку x и y были выбраны в Q_{k-2} произвольно, мы получаем, что все клетки квадрата Q_{k-2} закрашены (их n_{k-2}^2 штук). Итак, мы имеем по крайней мере $n_0^2+n_1^2+\ldots+n_{k-3}^2+n_{k-2}^2$ закрашенных клеток. Заметим теперь, что $n_0+n_1+\ldots+n_{k-3}+n_{k-2}=N$, и потому закрашенных клеток не меньше, чем $F(k-1, N)$.

Осталось показать, что можно обойтись ровно $F(k-1, N)$ ящиками. Пусть сумма $F(k-1, N)$ соответствует набору $\{a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}\}$. Разобьем наши N цифр на $k-1$ групп: в первой группе a_1 «цифр», во второй — a_2 «цифр», и т. д.

Рассмотрим все ящики с номерами, обе «цифры» которых попали в одну группу. Их как раз $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{k-1}^2=F(k-1, N)$, и каждый билет можно положить в один из этих ящиков, поскольку среди k «цифр» билета найдутся две «цифры» из одной группы.

Для $N=10$ соответствующие значения $F(k-1, 10)$ приведены в таблице на рисунке 2.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что

а) $S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}$;

б) $P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\times\ldots\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Г. Пискарев
(Ярославская обл.)

2. Пусть в треугольнике ABC сторона AC — самая длинная или самая короткая. Доказать, что тогда найдется действительное число x такое, что

$$|AC|^x=|BC|^x+|AB|^x.$$

О. Лемешев
(г. Омск)

3. Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме квадратов 1000 последовательных натуральных чисел?

4. Доказать, что уравнения

а) $(m+1)^3+(m+2)^3+\ldots+(m+n)^3=10^k+2$,

б) $(m+1)^5+(m+2)^5+\ldots+(m+n)^5=10^k+2$

не имеют целочисленных решений.

И. Черепинский
(г. Черкассы)

5. Дан отрезок AD и точка H, принадлежащая этому отрезку, причем $|AH|:|HD|=4:1$. Построить треугольник ABC так, чтобы отрезок AD был его высотой, точка H — ортоцентром, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, был равен $\frac{4}{5}|AD|$.

6. Дан треугольник ABC, $[AD]$ — его медиана, $M\in[AD]$, $|AM|:|MD|=2:3$, $N\in[AB]$, $|AN|:|NB|=5:3$. Найти отношение площадей треугольников AMN и ABC.

А. Пуляев
(г. Донецк)

ПОЛНОЕ ЛУННОЕ ЗАТМЕНИЕ

16 сентября 1978 года произойдет полное лунное затмение. Это затмение будет хорошо видно почти на всей территории Советского Союза кроме Чукотского полуострова. Во время затмения Луна будет находиться в созвездии Рыб вблизи его границы с созвездием Водолея и пройдет сквозь северную зону земной тени.

Ниже приводятся обстоятельства затмения по московскому времени $T_м$ и географическая долгота λ, где в эти моменты Луна будет наблюдаться в верхней кульминации

Явление	$T_м$	λ
начало частного затмения	$20^{ч}20^{м}$	97°39′
начало полного затмения	$21^{ч}24^{м}$	82°10′
середина затмения	$22^{ч}04^{м}$	72°37′
конец полного затмения	$22^{ч}44^{м}$	63°00′
конец частного затмения	$23^{ч}48^{м}$	47°46′

Общая продолжительность затмения составит 3 часа 28 минут, а полного затмения — 1 час 20 минут. Наибольшая фаза полного затмения $Ф_m = 1{,}33$.

Наблюдать лунное затмение можно в любой оптический инструмент и невооруженным глазом. При наблюдениях в небольшой школьный телескоп или в бинокль полезно отмечать по выверенным часам моменты времени, в которые земная тень касается края лунного диска и крупных лунных кратеров (расположение их указано в школьном учебнике по астрономии). Обратите внимание на изменение цвета участков лунной поверхности на протяжении затмения

Умеющие фотографировать могут заснять на цветную фотопленку различные фазы затмения. Для этого нужно прикрепить фотоаппарат со снятым объективом к школьному телескопу-рефрактору.

Результаты ваших наблюдений присылайте во Всесоюзное астрономо-геодезическое общество по адресу: Москва К-9, аб/я 918, Астрономическая секция ВАГО.

ВОЗМОЖЕН ЗВЕЗДНЫЙ ДОЖДЬ!

Вокруг Солнца движется множество метеорных потоков, порожденных кометами. Когда Земля встречается с обильным метеорным потоком, мириады мельчайших частиц обрушиваются на нее, вспыхивают в земной атмосфере, и с Земли наблюдается великолепное зрелище — метеорный дождь, который называют еще звездным дождем. Тысячи и десятки тысяч блестящих метеоров «вылетают» из сравнительно небольшого участка неба.

По теоретическим расчетам известного советского исследователя комет Ю. В. Евдокимова 9 октября 1978 года возможно сближение Земли с плотной частью метеорного потока Драконид, названного так потому, что вспышки метеоров этого потока происходят на фоне созвездия Дракона. Весьма вероятно, что в ночь с 8 на 9 октября или в ночь с 9 на 10 октября будет звездный дождь Драконид, наблюдать который в высшей степени интересно.

Самые простые наблюдения звездного дождя могут быть проведены невооруженным глазом. Они состоят в подсчете метеорных вспышек в выбранном небольшом участке неба за равные промежутки времени длительностью 5—10 минут. Такие наблюдения полезно проводить группами из 4—5 человек, каждый из которых следит за своим выбранным участком.

Главное внимание при наблюдениях должно быть уделено области неба вокруг звезды ζ Дракона, которая находится между Трапецией из звезд γ, β, ξ и ν Дракона (Голова Дракона) и Полярной звездой.

Даже те простые наблюдения, которые мы описали, имеют большое значение в изучении метеорных потоков. Результаты ваших наблюдений (с указанием участка неба, в котором они проводились, времени начала наблюдений, длительности промежутков времени, в течение которых велся счет, интервалов между этими промежутками) присылайте, пожалуйста, в Астрономическую секцию ВАГО.

М. Дагаев

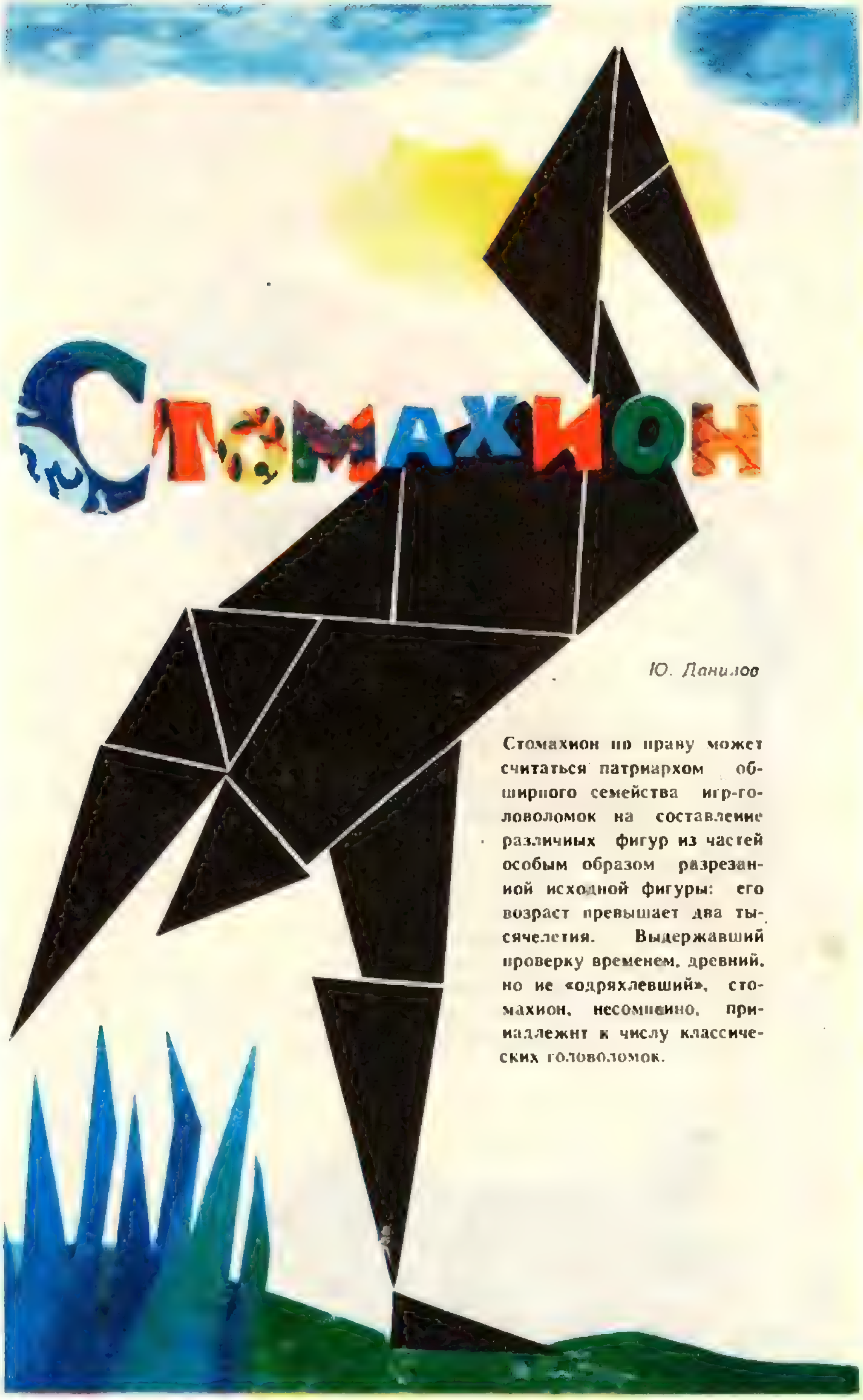
Это стихотворение-загадку прислал нам А. Стариков из Кривого Рога. Прочитайте его и постарайтесь понять, почему девочка оказалась такой необыкновенной.

А. Стариков

НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Стомахион



Ю. Данилов

Стомахион по праву может считаться патриархом обширного семейства игр-головоломок на составление различных фигур из частей особым образом разрезанной исходной фигуры: его возраст превышает два тысячелетия. Выдержавший проверку временем, древний, но не «одряхлевший», стомахион, несомненно, принадлежит к числу классических головоломок.

Приступим к игре

На рисунке 1 приведен раскрой наиболее часто встречающейся «заготовки» для игры в стомахион — прямоугольника $ABCD$ с соотношением сторон 1 : 2. Вместо такого прямоугольника иногда берут квадрат и даже произвольный параллелограмм. Способ разбиения исходной фигуры во всех случаях остается одинаковым.

Пусть $ABCD$ произвольный параллелограмм. F и E — середины сторон AD и BC. Проведя отрезок EF, разобьем исходный параллелограмм на параллелограммы $ABEF$ и $FECD$. Проведем диагонали AC, BF и FC. Пусть L и R — точки пересечения диагонали AC с диагональю BF и отрезком EF. Через середину G отрезка BE и проведем прямую, параллельную стороне AB исходного параллелограмма, до пересечения с диагональю BF в точке H и отрезок GK прямой GA (K — точка пересечения прямой GA и диагонали BF). Наконец, соединив отрезком прямой вершину B с серединой M отрезка AL, мы разобьем параллелограмм $ABEF$ на 7 частей.

Пусть N и O середины отрезков CD и FC. Проведем отрезки ON и OE. Пусть Q точка пересечения отрезка OE с диагональю AC, а P — точка пересечения прямой BO со стороной CD исходного параллелограмма. Проведем отрезок OP. Параллелограмм $FECD$ тоже оказался разделенным на семь частей.

Таким образом, исходный параллелограмм $ABCD$ разбит на 14 частей.

При составлении новых фигур части исходной фигуры можно переворачивать «лицевой» стороной вниз. Необходимо лишь следить за тем, чтобы составленная фигура содержала полный набор деталей стомахиона — все его 14 частей. С соблюдением этого непременного правила составлены фигурки, изображенные на рисунках 2—4. Овладев секретами «стомахионной мозаики» (разгадав, как устроены эти фигурки), вы научитесь составлять и свои собственные композиции.

Немного истории

Среди геометрических головоломок стомахион выделяется не только почтенным возрастом, но и своим происхождением.

Игра «стомахион» была известна еще до нашей эры. Упоминание о ней мы находим также в трудах некоторых римских авторов IV—VI веков. Создателем стомахиона считали Архимеда, однако долгое время никаких документальных подтверждений найти не удавалось.

В 1899 году швейцарский историк Генрих Зютер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись с фрагментами сочинения, озаглавленного «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся к ней в рациональных отношениях». Вы-

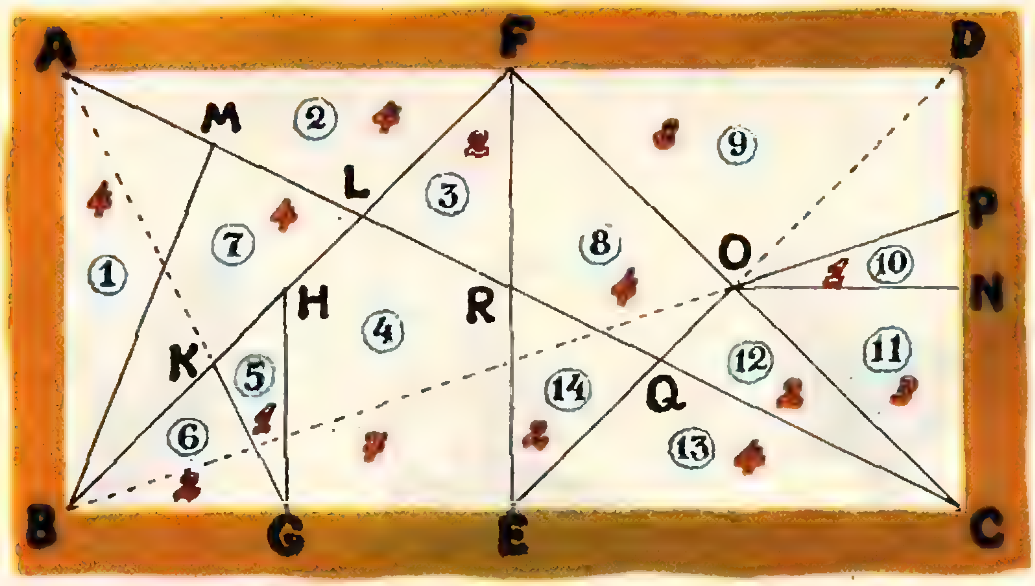


Рис. 1.

сказывались сомнения в принадлежности этого сочинения Архимеду. Однако все сомнения рухнули, когда известный датский историк математики И. Гейберг обнаружил древнегреческий оригинал некоторых фрагментов сочинения Архимеда, причем совершил свое открытие, не выходя из кабинета.

Внимание Гейберга привлекла опубликованная в 4-м томе (за 1899 год) каталогов Иерусалимской библиотеки заметка приват-доцента Петербургского университета Пападопуло-Керамевса об одной рукописи из константинопольского монастыря св. Успения. Большая часть рукописи представляла собой так называемый палимпсест, то есть была написана на пергаменте, с которого смыт первоначальный текст. По свидетельству известного советского историка С. Я. Лурье «ввиду своего невежества в математике и в истории точных наук Пападопуло заинтересовался только верхним, христианским, текстом, а из нижнего, смытого, который тем не менее можно было без большого труда прочесть, привел в каталоге Иерусалимской библиотеки только небольшую выдержку. Однако для знаменитого датского историка математики Гейберга выдержка была достаточной, чтобы определить, что смыт был текст Архимеда».

Оригинал рукописи Гейберг смог увидеть в 1906 году. Лишь на 29 из 177 листов не удалось обнаружить никаких следов первоначального текста. Еще на 9 листах ранний текст был безнадежно испорчен при смывании и разобрать можно было лишь отдельные слова. На остальных листах «нижний» текст был вполне разборчив.

Исследуя оригинал рукописи и ее фотокопию, Гейберг сумел установить содержание основной части рукописи.

Научный подвиг Гейберга сделал достоянием науки восстановленные почти из небытия сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре» (бóльшая часть), «О спиралях» (почти полностью), «Измерение круга» и «О равновесии плоских фигур» (фрагменты), «О плавающих телах» и «Послание Эратосфену» (значительная часть). Среди восстановленных текстов были и две теоремы из книги Архимеда о стомахионе.

Находка Гейберга положила конец давнему спору о том, как правильно называть «архимедову игру»: стомахион («приводящая в ярость»), остомахион («битва костяных пластинок») или синтемахион («собрание обрезков») — в найденном Гейбергом фрагменте значилось «стомахион»

Отрывок из «Книги Архимеда о стомахионе»

«Поскольку так называемый стомахион содержит ряд исследований о перекладывании фигур, из которых тот состоит, то относительно частей стомахиона я счел необходимым прежде всего объяснить, из скольких частей он состоит и какой фигуре подобна каждая из них. Затем я изложил, какими должны быть углы, чтобы, взяв их попарно, можно было составить прямой угол. Далее я вознамерился обстоятельно рассмотреть все мыслимые случаи, когда части стомахиона могут прилегать друг к другу, и определить, лежат ли стороны примы-

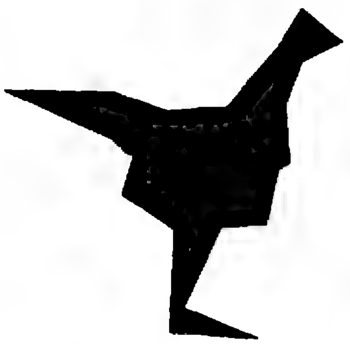


Рис. 2. Курица.

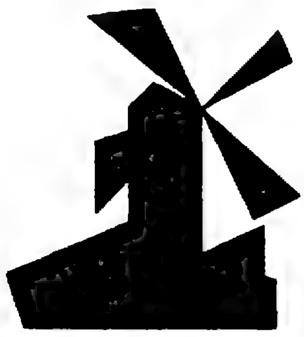


Рис. 3. Мельница.

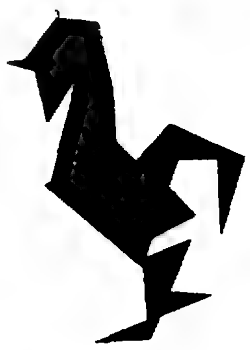


Рис. 4. Петух.

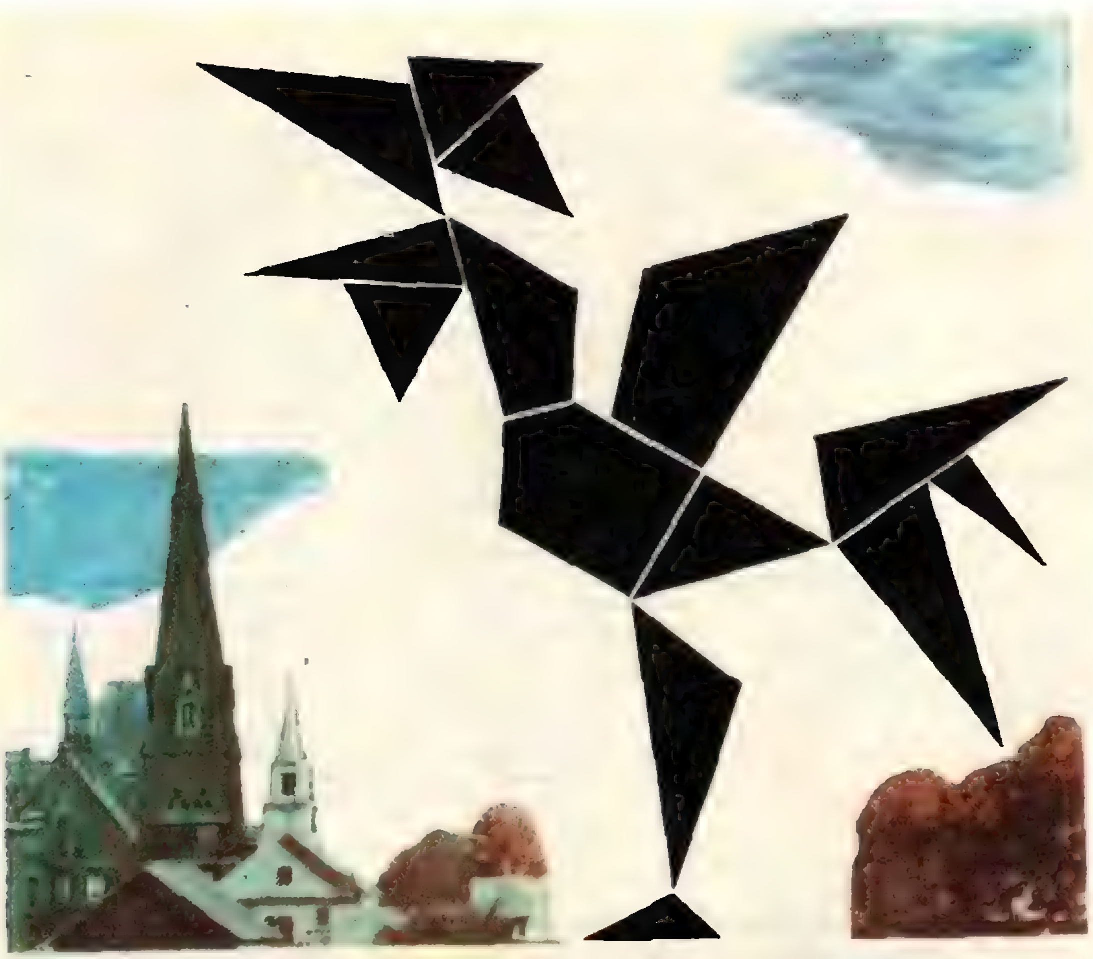


Рис. 5.

кающих частей на одной прямой или отклонение от прямой столь мало́, что не заметно глазу. Эти вопросы требуют тщательных доказательств, и если отклонение от прямой мало́ и поэтому не заметно глазу, то такого рода неполное примыкание следует считать допустимым.

Поскольку одну часть можно заменять другой, равной ей и имеющей равные с ней углы, то можно составить множество различных фигур... Иногда две фигуры, взятые вместе, равны и подобны одной фигуре, или две фигуры, взятые вместе, равны и подобны двум фигурам, что и позволяет при перекладывании частей образовывать много фигур».

Архимедовы задачи

Предложенное Архимедом разбиение «фигуры стомахиона» (рис. 1) обладает таким свойством: площади всех 14 частей находятся в рациональном отношении к площади исходной фигуры.

Задача 1. Доказать, что площади отдельных частей исходного параллелограмма, выраженные в сорок восьмых долях его площади, имеют величины, показанные на рисунке 1 красными цифрами.

Следующая задача заимствована из книги Эмиля Фурре «Геометрические головоломки и паралогизмы» (Одесса, изд-во «Mathesis», 1912 г.):

Задача 2. Сгруппировать элементы стомахиона так, чтобы площади вновь полученных частей выражались (в сорок восьмых долях площади исходного параллелограмма):

а) тремя равными целыми числами,

б) тремя последовательными целыми числами,

в) целыми числами от 1 до 8 и числом 12.

Заметим, что все три пункта задачи можно решить не рассыпая исходный параллелограмм, а проводя разделительные линии между элементами.

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на доступные и интересные нашим читателям книги по математике и физике, выходящие в III квартале 1978 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Замечательные кривые.* Издание 3-е, дополненное. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 7 к.

Эта брошюра — переиздание одного из первых выпусков серии «Популярные лекции по математике». В ее основу положена лекция, прочитанная автором для московских школьников седьмых и восьмых классов. В своей брошюре автор исходит из определения: *кривая есть след движущейся точки.* Рассматриваются *прямая* и *окружность* — две наиболее простые и вместе с тем наиболее замечательные по своим свойствам кривые. После этого автор переходит к рассказу об *эллипсе, гиперболе, параболе*; оказывается, все эти три кривые можно получить, рассекая конус плоскостью: эллипс, гипербола и парабола являются коническими сечениями. Наконец, рассказывается о *лемнискате* и *циклоиде*, о замечательном свойстве циклоиды, из-за которого она заслужила название «брахистохрона». В настоящем издании добавлены сведения о *цепной линии*, по которой располагается цепь, подвешенная за два конца, и о *спирали Архимеда* (ее описывает жучок, ползущий по равномерно вращающейся линейке). Большинство сведений о кривых излагается без доказательств.

Брошюра предполагает подготовку в объеме 7—8 классов средней школы.

2. Боголюбов А. Н. *Гаспар Монж (1746—1818).* Объем 12 л., тираж 15 000 экз., цена 80 к.

Эта книга (из серии «Научные биографии») рассказывает о жизни и деятельности замечательного французского ученого, внесшего важный вклад в создание начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии. Гаспар Монж был видным деятелем французской революции, морским министром. Он создавал оборонную промышленность и принимал деятельное участие в организации науки и высшего образования во Франции.

Издательство «Просвещение»

3. Сираждинов С. Х., Матвиевская Г. П. *Абу Райхан Беруни и его математические труды.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

В книге рассказывается о жизни и о математическом творчестве Абу Райхана Беруни — великого ученого-энциклопедиста Средней Азии, тысячелетний юбилей со дня рождения которого недавно отмечался по инициативе ЮНЕСКО во всех странах мира. Беруни определил радиус земного шара. За пять веков до Коперника им была высказана мысль о возможности вращения Земли вокруг Солнца. Беруни обладал исключительной широтой научных интересов — математика, астрономия, минералогия, география, геодезия, история, лингвистика и другие; историки науки называют первую половину XI века эпохой Беруни.

Издательство «Мир»

4. Бизам Д., Герцег Я. *Многоцветная логика.* Объем 21 л., тираж 50 000 экз., цена 2 р.

Новая книга венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега (их первая книга «Игра и логика» в переводе на русский язык вышла в издательстве «Мир» в 1975 году) знакомит читателя более чем со 150 логическими задачами. Яркие и занимательные, эти задачи в шутливой игровой форме сообщают важные сведения, необходимые для решения серьезных задач. Чтение книги не требует специальных знаний, достаточно лишь умения (или готовности научиться) логически мыслить.

Оригинально оформленная, снабженная рисунками, «Многоцветная логика» доступна самому широкому кругу читателей.

5. Страшевич Ст., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады.* Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Эта книга — перевод юбилейного сборника избранных задач, выпущенного к 25-летию польских математических олимпиад (1950—1975). Сборник дополнен задачами, предлагавшимися на третьем туре олимпиад 1976—1977 годов.

Книга продолжает серию «Задачи и олимпиады», выходящую в издательстве «Мир» с 1975 года. Она будет полезна школьникам старших классов, абитуриентам, студентам, преподавателям математики школ и вузов, руководителям математических кружков, а также всем любителям нестандартных задач.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Образованный ученый.* Сборник переводов с английского. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 40 к.

Сборник посвящен вопросам подготовки молодых физиков в Англии. В нем рассказывается о знаменитой Кавендишской лаборатории в Кембридже и о некоторых проблемах университетского образования в Англии. Основная часть сборника — это задачи по общей физике, которые предлагались студентам на экзаменах в Кавендишской лаборатории, и задачи английских технических вузов. Всего в сборнике около 400 задач.

Книга послужит превосходным пособием для преподавателей физики и учащихся старших классов.

2. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика для поступающих в вузы.* Объем 30 л., тираж 500 000 экз., цена 1 р.

Книга представляет собой учебное пособие для поступающих в вузы. Наряду с изложением программного материала большое внимание уделено разбору решений физических задач. Используемый математический аппарат полностью соответствует школьной программе.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

3. Майер В. В. *Простые опыты с ультразвуком.* (Библиотечка физико-математической школы.) Объем 5 л., тираж 200 000 экз., цена 22 к.

В книге рассматриваются методы получения ультразвука частотой 20—150 кГц с помощью самодельных генераторов. В ней описаны опыты, иллюстрирующие основные физические свойства и возможности практического применения ультразвуковых волн. Предлагаемые приборы и опыты отличаются максимальной простотой, доступностью и в большинстве своем могут быть воспроизведены в домашних условиях. Цель книги — научить читателя продумывать, ставить и анализировать опыты по физике, способствовать развитию творческих способностей школьников в области физического эксперимента.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средних школ. Она может быть использована в работе физико-технических кружков.

4. Китайгородский А. И. *Физика для всех. Электроны.* Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Эта книга является естественным продолжением книги Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского «Физика для всех» (см. «Квант», 1978, № 6, с. 83).

В книге излагаются основные факты, касающиеся электрического тока и электромагнитного поля. Большое внимание уделено механизму прохождения тока через жидкости, металлы и полупроводники и современным представлениям о диэлектриках и магнетиках.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

5. Дагаев М. М. *Солнечные и лунные затмения.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге в доступной для школьников форме рассказывается о движении Земли и Луны, условиях видимости Луны и причине смены ее фаз, о причинах солнечных и лунных затмений. Даются рекомендации к простейшим астрономическим наблюдениям.

Книга рассчитана на школьников десятых классов и преподавателей физики и астрономии.

6. Максимачев Б. А., Комаров В. И. *В звездных лабиринтах (ориентирование по небу).* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

Книга в популярной форме знакомит читателя с картиной звездного неба и методом ориентировки по небесным светилам. Она написана на основе опыта изучения звездного неба, накопленного в Московском планетарии в процессе занятий с авиационными штурманами и космонавтами. В ней описывается звездное небо не только северного, но и южного полушарий Земли. Заключительные разделы книги посвящены вопросам астрономической ориентировки в условиях космического полета, на Луне, на соседних планетах Солнечной системы.

Книга рассчитана на широкий круг любителей астрономии.

Издательство «Мир»

7. Левитт И. *За пределами известного мира; от белых карликов до квазаров.* Перевод с английского. Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Книга известного популяризатора науки американского астронома И. Левитта рассказывает об одной из новейших областей астрономии — астрофизике высоких энергий. Она знакомит читателя с такими загадочными объектами, как белые карлики, нейтронные звезды, черные дыры.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

8. Васильев М. В., Станюкович К. П., Климонтович П. Ю. *Сила, что движет мирами.* Издание 2-е, переработанное и дополненное. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

Тяготение... С этой силой мы сталкиваемся с детских лет, но природа ее еще недостаточно изучена. Авторы книги описывают в популярной форме различные теории тяготения, сообщая и о самых последних исследованиях этой проблемы. Исторический материал, показанный очень живо и интересно, охватывает все этапы развития теории тяготения: от Гука и Ньютона до Эйнштейна и современных ученых.

Стиль книги — непринужденная беседа с читателем, разговор с приведением огромного количества интересных физических примеров, иллюстраций. Авторы делают попытку популярно рассказать читателю о той глубокой связи, которая намечается между современной теорией гравитации и теорией элементарных частиц.

Книгу с большим интересом прочтут школьники старших классов.

И. Клумова, М. Смолянский

И. Слободецкий

X Международная олимпиада школьников по физике

В июле прошлого года в Чехословакии в городе Градец Кралове проходила X Международная физическая олимпиада. В ней приняли участие школьники из 12 европейских стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии. Команда каждой страны состояла из пяти участников.

В состав команды СССР вошли победители XI Всесоюзной олимпиады школьников

Андрей Ганопольский — выпускник средней школы № 88 г. Минска,

Владимир Решетов — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ,

Константин Третьяченко — выпускник средней школы № 145 г. Киева,

Руслан Шарипов — выпускник средней школы № 18 п. Каракуль Бухарской обл. УзССР.

Виталий Щукин — выпускник физико-математической школы № 45 при ЛГУ.

Руководителями команды были заведующий лабораторией научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин и инспектор Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

Перед олимпиадой члены советской команды побывали на трехнедельных тренировочных сборах, проходивших в экспериментальной школе № 82 АПН СССР в п. Черноголовка Московской области. Во время сборов ребятам читались лекции, в основном, по тем вопросам, которые входят в программу Международной олимпиады, но не изучаются в школах СССР. Они также решали задачи, выполняли лабораторные работы.

X Международная олимпиада была организована Министерством школ Чешской социалистической республики совместно с Министерством школ Словацкой социалистической республики, Социалистическим союзом молодежи, Обществом чехословацких математиков и физиков. Непосредственным проведением олимпиады руководили Организационный комитет и Международная комиссия (в состав которой входили руководители команд). Председателем Оргкомитета и Международной комиссии был член-корреспондент Академии наук ЧССР М. Матыаш.

8 июля состоялось торжественное открытие олимпиады, 9 и 11 июля участники олимпиады решали задачи теоретического и экспериментального туров. На теоретическом туре предлагалось решить три задачи (на них давалось пять часов), а на экспериментальном — одну задачу (за четыре часа). Вот эти задачи.

Теоретический тур

1. Отношение ε максимального и минимального объемов цилиндра четырехтактного двигателя равно 9,5. На рисунке 1 показана pV-диаграмма работы этого двигателя. В двигатель поступает наружный воздух при температуре $t = 27°C$ и давлении $p_0 = 0{,}1$ МПа. В момент зажигания горючей смеси давление в цилиндре возрастает в два раза.

а) Какие процессы происходят с газом на участках *0—1*, *2—3*, *4—1* и *1—0*? Процессы *1—2* и *3—4* — адиабатные (показатель адиабаты $\gamma = 1{,}4$).

б) Определить давление p и температуру T газа в точках *1*, *2*, *3* и *4*.

в) Найти к.п.д. двигателя.

г) Обсудить реальность полученых результатов.

2. Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон $a = 0{,}020$ м и $b = 0{,}030$ м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого $\alpha = 30°$, пленка кажется зеленой ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м).

а) Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора $\rho = 10^3$ кг/м^3, показатель преломления пленки $n = 1,33$.

б) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет отражаться перпендикулярно пленке?

3. Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежуток, напряжение на котором $U = 10^3$ В. Вылетев из пушки в точке T, электроны движутся затем по прямой TT' (рис. 2). В точке M на расстоянии $a = 5,0$ см от точки T находится мишень, причем прямая TM образует угол $\alpha = 60°$ с прямой TT'.

а) Какой должна быть индукция $\vec{B}$ однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

б) Какой должна быть индукция $\vec{B}_1$ однородного магнитного поля, параллельного прямой TM, чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что $|\vec{B}|$ и $|\vec{B}_1|$ не превышают 0,030 Т.

Экспериментальный тур

С помощью RC-генератора гармонических колебаний и двух измерительных приборов раскройте тайну «черного ящика» с тремя контактными гнездами A, B и D (рис. 3). Известно, что внутри находятся два конденсатора и одно сопротивление, включенные звездой (рис. 4).

1. Соберите схему, изображенную на рисунке 5*), и сделайте необходимые измерения**). По измеренным величинам токов и напряжений рассчитайте полные сопротивления (импедансы) Z_{AB}, Z_{AD} и Z_{BD} в интервале частот от 0,1 до 10 кГц.
2. На логарифмической бумаге нанесите графики зависимости импедансов от частоты.
3. Докажите теоретически, что по величинам импедансов при данных частотах можно определить R, C_1 и C_2.
4. На основании полученных результатов определите, к какому гнезду подключено сопротивление, а к каким — конденсаторы.
5. Вычислите сопротивление R и емкости C_1 и C_2. Для этого воспользуйтесь величинами импедансов, найденными при частотах 1 и 10 кГц.
6. Разберите, какое влияние на точность измерений имеет пренебрежение током, протекающим через вольтметр.

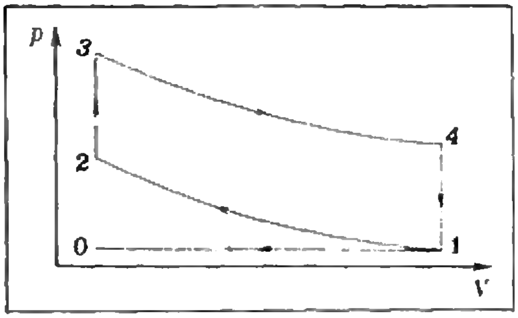


Рис. 1.

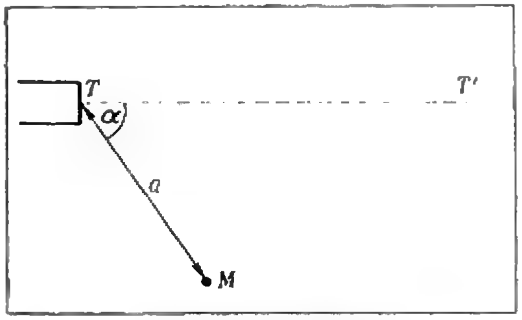


Рис. 2.

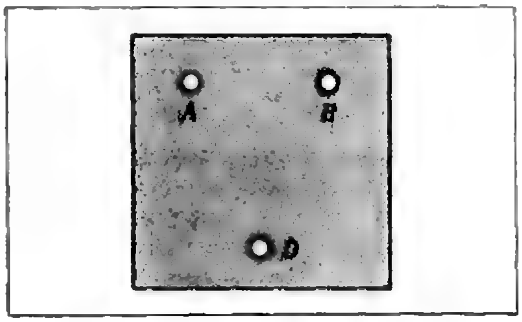


Рис. 3.

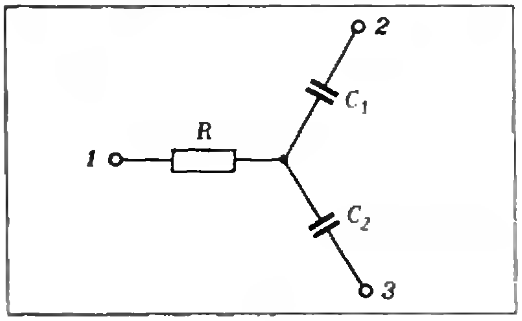


Рис. 4.

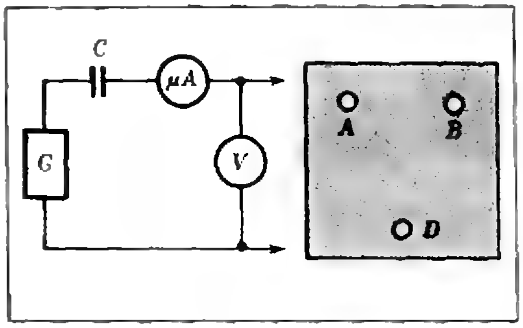


Рис. 5.

---

*) Конденсатор емкости C используется в схеме в связи с тем, что напряжение на гнездах генератора имеет постоянную составляющую.

**) Далее шло описание измерительных приборов.

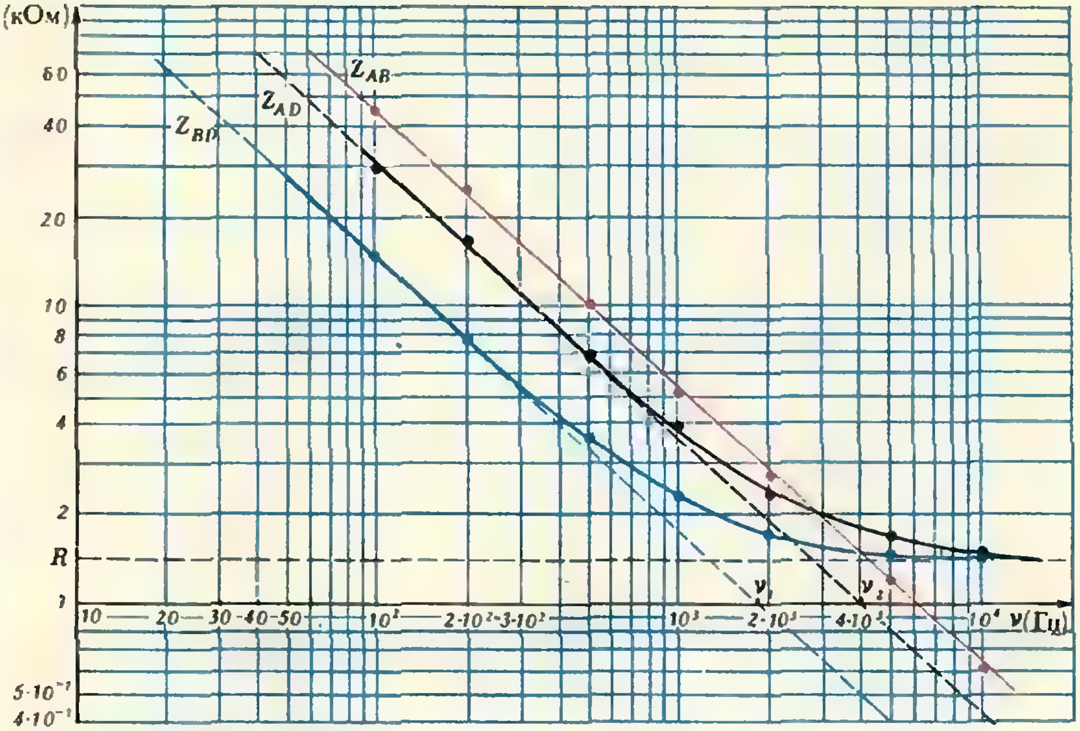


Рис. 6.

Как обычно на Международных олимпиадах, правильное решение теоретической задачи оценивалось 10 баллами, а экспериментальной — 20 баллами. Результаты каждого участника определялись суммированием набранных им баллов.

Мы не будем приводить здесь решения теоретических задач, так как две из них — вторая и третья — помещены в Задачнике «Кванта» (Ф488 и Ф489)*). Отметим только, что участники олимпиады довольно успешно справились с третьей и первой задачами. Средний балл за решение третьей задачи был равен 8,1, а за решение первой — 6. Наиболее трудной оказалась вторая задача: более половины участников получили за ее решение меньше 3 баллов (средний балл составил только 3,8 балла). При решении этой задачи многие не смогли правильно определить разность хода интерферирующих лучей. Лучше других справились с этой задачей чехословацкие (41 балл из 50) и советские (32 из 50) школьники.

С экспериментальной задачей участники олимпиады справились очень хорошо: 19—20 баллов за решение задачи набрали треть участников (в то время как в прошлом году с экспериментальной задачей успешно справились лишь 8 % участников).

Остановимся подробнее на решении экспериментальной задачи. Как видно из ее условия, содержимое «черного ящика» не было тайной. Требовалось только определить, к каким клеммам ящика подключены какие элементы цепи и каковы параметры этих элементов. Для решения задачи была предложена измерительная схема и указана последовательность измерений и обработки полученных данных. Основная трудность заключалась в теоретическом осмыслении полученных графиков зависимости импедансов от частоты.

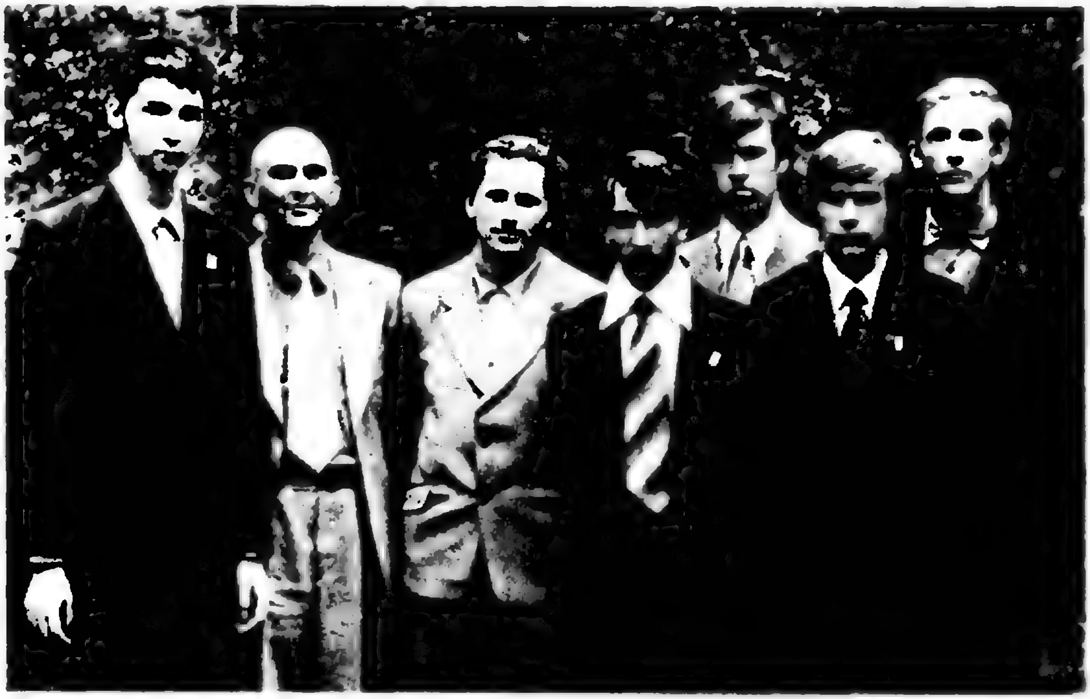
На рисунке 6 приведены графики зависимости импедансов Z_{AB}, Z_{BD} и Z_{AD} от частоты ν. Графики построены в логарифмическом масштабе. Точками отмечены конкретные результаты измерений. Как с помощью этих кривых решить оставшиеся пункты задачи?

Рассмотрим схему, находящуюся в черном ящике (см. рис. 4). Если она включается в цепь точками *2* и *3*, то

$$Z_{23}=\frac{1}{\omega C_{\text{общ}}}=\frac{1}{2\pi\nu}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right).$$

---

*) Ответы к первой задаче: а) процессы *0—1* и *1—0* изобарические, *2—3* и *4—1* изохорические; б) $p_1=0{,}1$ МПа, $T_1=300$ К, $p_2=2{,}34$ МПа, $T_2=740$ К, $p_3=4{,}68$ МПа, $T_3=1480$ К, $p_4=0{,}2$ МПа, $T_4=600$ К; в) $\eta=59{,}4\%$.



Советская команда на X Международной физической олимпиаде школьников. Слева направо: Р. Шарипов, О. Ф. Кабардин и М. В. Грабиленков (руководители команды), К. Третьяченко, В. Щукин, А. Гонопольский и В. Решетов.

Отсюда

$$\lg Z_{23} = \lg\left(\frac{C_1 + C_2}{2\pi C_1 C_2}\right) - \lg\nu.$$

Это означает, что $\lg Z_{23}$ зависит от логарифма частоты ν линейно. Такой зависимости Z от ν соответствует красная линия на рисунке 6.

Для импедансов Z_{12} и Z_{13} имеем:

$$Z_{12}^2 = R^2 + \frac{1}{(2\pi\nu)^2 C_1^2},$$

$$Z_{13}^2 = R^2 + \frac{1}{(2\pi\nu)^2 C_2^2}.$$

При малых частотах, когда $2\pi\nu \ll \frac{1}{RC_1}$ и $2\pi\nu \ll \frac{1}{RC_2}$,

$$Z_{12} \approx \frac{1}{2\pi\nu C_1} \text{ и } Z_{13} \sim \frac{1}{2\pi\nu C_2},$$

откуда

$$\lg Z_{12} \approx \lg\frac{1}{2\pi C_1} - \lg\nu,$$

$$\lg Z_{13} \approx \lg\frac{1}{2\pi C_2} - \lg\nu.$$

Таким образом, при малых частотах логарифмы импедансов Z_{12} и Z_{13} зависят от логарифма частоты тоже линейно. Соответствующие графики должны быть параллельны графику зависимости Z_{23} от ν.

При больших частотах, когда $\nu \to \infty$ $\left(\frac{1}{2\pi\nu} \to 0\right)$,

$$Z_{12} \to R \text{ и } Z_{13} \to R,$$

или

$$\lg Z_{12} \to \lg R \text{ и } \lg Z_{13} \to \lg R.$$

Следовательно, при больших частотах графики зависимости Z_{12} и Z_{13} от ν должны иметь общую асимптоту $Z = R$.

Такой зависимости Z от ν соответствуют черный и синий графики на рисунке 6. Отсюда можно сделать вывод, что точка *1* схемы подключена к выводу D ящика, а точки *2* и *3* — к выводам A и B.

Значения емкостей конденсаторов и сопротивления резистора можно найти разными способами. Например, достаточно определить Z_{AB}, Z_{AD} и Z_{BD} при известной частоте ν. Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} Z_{AD}^2 - Z_{BD}^2 = Z_{12}^2 - Z_{13}^2 = \\ = \frac{1}{(2\pi\nu)^2 C_1^2} - \frac{1}{(2\pi\nu)^2 C_2^2}, \\ Z_{AB} = Z_{23} = \frac{1}{2\pi\nu} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \end{cases}$$

нетрудно найти C_1 и C_2. Затем из выражения

$$Z_{AD} = Z_{12} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi\nu)^2 C_1}}$$

можно найти R.

Удобно воспользоваться графическим способом определения параметров схемы.

Как мы уже говорили, при малых частотах графики зависимости Z_{AD} от ν и Z_{BD} от ν параллельны графику зависимости Z_{AB} от ν.

Поэтому, если провести асимптоты первых двух графиков, параллельные третьему графику (черная и синяя пунктирные прямые), они пересекут ось ν в точках ν_1 и ν_2, для которых справедливы приближенные равенства

$$\lg Z_0 = \lg \frac{1}{2\pi C_1} - \lg \nu_1$$

и

$$\lg Z_0 = \lg \frac{1}{2\pi C_2} - \lg \nu_2,$$

где $Z_0 = 1$ кОм (см. рис. 6). Отсюда найдем C_1 и C_2.

Чтобы определить R, надо провести общую асимптоту графиков зависимости Z_{AD} от ν и Z_{BD} от ν при $\nu \to \infty$. Эта асимптота пересечет ось Z в точке $Z = R$.

Нужно ли было учитывать ток, текущий через вольтметр (см. рис. 5)? Если его не учитывать, получаются значения импедансов, несколько заниженные по сравнению с истинными. Однако сказываться это должно только при таких значениях частоты ν при которых ток, потребляемый «черным ящиком», сравним с током, идущим через вольтметр. Ток, потребляемый вольтметром при полном отклонении стрелки прибора, был известен из условия, поэтому было нетрудно оценить влияние этого тока на точность измерений. Оказывается, существенным наличие тока через вольтметр было лишь при очень малых частотах ($\nu \leqslant 0{,}5$ Гц).

13 июля все участники и организаторы олимпиады переехали в столицу Чехословакии — Прагу. 15 июля в старинном здании одного из первых университетов в Европе, Карлова университета, состоялось торжественное закрытие олимпиады, вручение призов и грамот.

I премию

получили 7 участников олимпиады: *Р. Гласер* (ГДР), *П. Динев* (Болгария), *Я. Матена* (ЧССР), *Р. Мейнель* (ГДР), *Ф. Пардо* (Франция), *Ю. Свобода* (ЧССР), *Р. Шарипов* (СССР).

II премию

получили 16 участников олимпиады; среди них советские школьники: *А. Ганопольский*, *В. Решетов*, *К. Третьяченко* и *В. Щукин*.

III премию

получили тоже 16 участников. Еще 12 участников награждены грамотами.

На олимпиаде были вручены и специальные призы. Так, *А. Ганопольский* получил приз за лучшее решение второй теоретической задачи, а *Р. Шарипов*—как самый юный участник олимпиады.

Приятно отметить, что организаторы олимпиады сделали все для того, чтобы олимпиада прошла максимально организованно. С первого дня работы между членами Международной комиссии и Организационного комитета установились отношения взаимного доверия и доброжелательности, что, без сомнения, помогло правильно оценить решения задач и подвести итоги олимпиады.

Встречаясь между собой, руководители команд обсуждали различные вопросы проведения олимпиад в их странах. Такой обмен мнениями очень важен; он помогает заимствовать лучший опыт и использовать его в своей работе.

Не менее важны и первые профессиональные встречи участников олимпиады — будущих инженеров и физиков. Во время таких встреч школьники обменивались сувенирами, обсуждали различные задачи.

И участники олимпиады, и руководители команд уезжали из Праги с чувством благодарности к организаторам олимпиады, сумевшим сделать олимпиаду праздником научного творчества школьников.

Без сомнения, Международные олимпиады школьников — важный пример сотрудничества различных стран в области народного образования, помогающий разработать методы развития творческой активности школьников.

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до **20 сентября** по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. К. Либкнехта д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*Школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 1 ноября 1978 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается учащемуся (для этого каждый раз вместе с решенным контрольным заданием учащийся должен высылать конверт с написанным домашним адресом). Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

9 класс

1. С каким ускорением нужно двигать плиту A, чтобы тела с массами m_1 и m_2, установленные на ней, как показано на рисунке 1, не двигались относительно плиты? Коэффициент трения между телами и плитой равен μ.

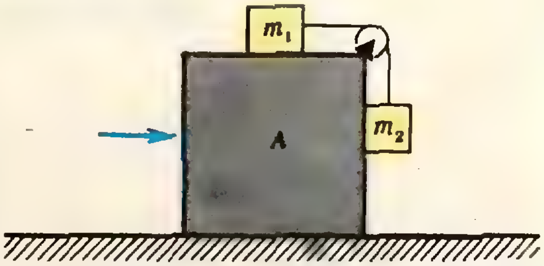


Рис. 1.

2. Пробирка массой M лежит на горизонтальной плоскости. В пробирке на расстоянии l от края находится поршень, прикрепленный с помощью пружины к стене (рис. 2). Газ в пробирке медленно нагревают. Какую работу надо совершить газу, чтобы вытолкнуть поршень из пробирки? Начальное давление газа в пробирке равно атмосферному, жесткость пружины k, коэффициент трения между пробиркой и плоскостью μ.

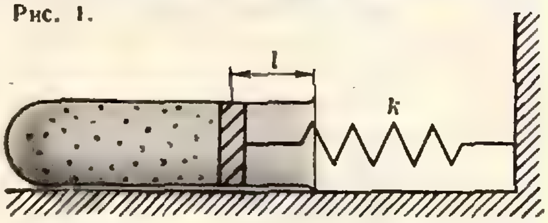


Рис. 2.

3. На высоте h над поверхностью воды шарнирно закреплен конец палочки длиной l (рис. 3). Плотность материала палочки ρ, плотность воды ρ_0. Какая часть палочки будет погружена в воду? При каком значении h палочка будет висеть вертикально?

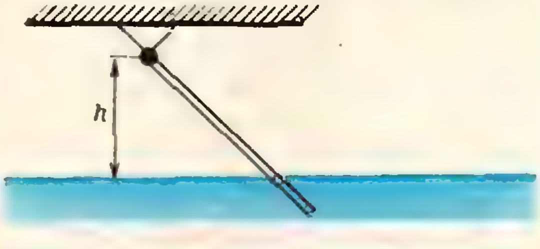


Рис. 3.

10 класс

1. Пружинная пушка стреляет пластилиновым снарядом из одного конца платформы в другой (рис. 4). Снаряд прилипает к краю платформы. Какое минимальное количество

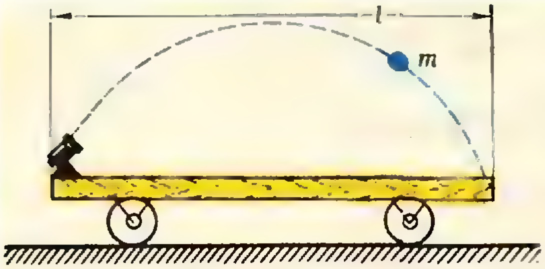


Рис. 4.

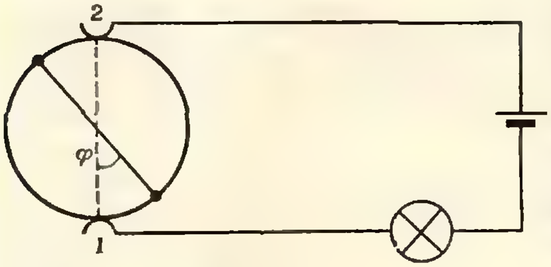


Рис. 5.

теплоты может выделиться при прилипании снаряда к платформе? Масса платформы с пушкой M, масса снаряда m, длина платформы l. Трением между платформой и рельсами пренебречь. Пушка жестко соединена с платформой и может стрелять под различными углами и с разными начальными скоростями снаряда.

2. N одинаковых мыльных пузырей радиуса r каждый сливаются в один пузырь радиуса R. Атмосферное давление p_0. Чему равен коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки?

3. Дана цепь, состоящая из электрической лампочки, источника э.д.с., двух скользящих контактов (1 и 2), касающихся проволочного однородного кольца в диаметрально противоположных точках, и проволочной перемычки, включенной между диаметрально противоположными точками кольца (рис. 5). Кольцо медленно вращается вокруг оси. Определить, при каких значениях угла φ лампа будет гореть ярче всего.

Вечерняя физическая школа

На физическом факультете МГУ для учащихся 8—10 классов Москвы и Подмосковья уже в течение трех лет работает Вечерняя физическая школа (ВФШ). Обучение в школе очное. Три раза в неделю проводятся семинарские занятия с разбором задач по основным разделам школьного курса физики. Семинары проводят аспиранты и студенты старших классов. Наиболее сложные вопросы обсуждаются на лекциях, которые читаются преподавателями физического факультета.

Для учащихся ВФШ организуются экскурсии в лаборатории физического факультета МГУ, Научно-исследовательского института ядерной физики и Государственного астрономического института им. Штернберга. Экскурсии по научным лабораториям университета дают школьникам возможность ознакомиться с методикой современного физического эксперимента, представить себе основные направления научно-исследовательской работы на физическом факультете МГУ.

Очередной конкурсный набор в ВФШ состоится в сентябре этого года. Участвовать в конкурсе могут школьники 8—10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе необходимо **до 20 сентября** подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотографии размером 3×4 см.

Прием заявлений будет проходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 часов ежедневно (кроме воскресенья) в комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2—47).

Зачисление в школу производится по результатам собеседования. Требования, предъявляемые на собеседовании, не выходят за рамки школьной программы.

Адрес школы: Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.

Проезд: метро до станции «Университет», затем автобусами 103, 119, 130, троллейбусами 4, 34, 49 до остановки «ул. Лебедева».

Задачи наших читателей

(см. с. 47)

1. Указание. а) $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-0,5} - \frac{1}{k+0,5}$; б) $\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2} > \frac{2k-1,5}{2k+0,5}$. 2. Указание. Найти область значений функции $f(x) = (c^x + a^x)^{1/x}$. 3. Указание. Рассмотреть остатки от деления чисел на 5. 4. Указание. Рассмотреть остатки от деления чисел на а) 4; б) 25. 5. Указание. Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности. 6. 1/8.

Задача о трех кувшинах

(см. «Квант» № 7, с. 43)

1. Один из способов таков: (12, 0, 0), (7, 5, 0), (7, 0, 5), (2, 5, 5), (2, 1, 9), (11, 1, 0), (11, 0, 1), (6, 5, 1), (6, 0, 6).

2. Вначале нужно наполнить сосуды, вмещающие 11 и 5 унций. Тогда во флаконе останется 8 унций, которые вместе с флаконом отдаются одному из них. После этого оставшиеся двое должны решить задачу деления 16 унций на две равные части в ситуации [16; 13, 11, 5]. Это проделывается с помощью четырех переливаний.

3. Опустите перпендикуляры PC_1 и PB_1 на стороны AB и AC, а также перпендикуляры $P'C_2$ и $P'B_2$ на те же стороны и докажите подобие четырехугольников AC_1PB_1 и $AB_2P'C_2$. Затем проведите аналогичные рассуждения относительно четырехугольников с вершинами в точках B и C.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. $X = 2$, $Y = 8$; $X = 4$, $Y = 2$; $X = 1$, $Y = 5$; $X = 2$, $Y = 4$.

По вине типографии второй, третий и четвертый примеры набраны неправильно. Они должны выглядеть так:

$$\begin{array}{r} XYZ \\ XYZ \\ \hline \cdot\cdot\cdot Z \\ \cdot\cdot Y \\ \cdot\cdot\cdot X \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{r} XYZ \\ XYZ \\ \hline \cdot\cdot\cdot X \\ \cdot\cdot Y \\ \cdot\cdot\cdot \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array} \qquad \begin{array}{r} XYZ \\ XYZ \\ \hline \cdot\cdot\cdot Y \\ \cdot\cdot X \\ \cdot\cdot\cdot \\ \hline \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{array}$$

2. S, то есть площади треугольника, поскольку из теоремы Пифагора следует, что сумма площадей полуокружностей, построенных на катетах, равна площади полуокружности, построенной на гипотенузе.

3. См. рисунок 1.

4. Куб числа x, задуманного Аней, не меньше

$$(((7 \cdot 10 + 1) \cdot 7 + 0) \cdot 7 + 1) \cdot 7 + 1 = 24\,361$$

и не больше

$$(((7 \cdot 10 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6 = 26\,410$$

Следовательно, $24\,361 < x^3 < 26\,410$.

Существует единственное натуральное число x, удовлетворяющее этим условиям: $x = 29$. Его нетрудно найти подбором.

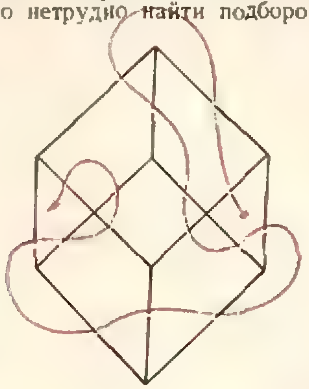


Рис. 1.

Многоугольники на клетчатой бумаге

(см. «Квант» № 6)

1. Предположим, что нам удалось вписать правильный треугольник в целочисленную решетку (рис. 2). Найдем площадь треугольника ABC двумя способами. С одной стороны $S_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} \times \sin \hat{A} = \frac{|AB|^2}{2} \sin 60^\circ = |AB|^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Но $|AB|^2$ — число целое ($|AB|^2 = |AC'|^2 + |C'B|^2$ по теореме Пифагора), а значит, $S_{\Delta ABC}$ — число иррациональное. А с другой стороны, «описав» вокруг ΔABC прямоугольник $CB'C'A'$ (рис. 2), получим:

$$S_{\Delta ABC} = S_{CB'C'A'} - S_{\Delta AB'C} - S_{\Delta AC'B} - S_{\Delta A'BC}$$

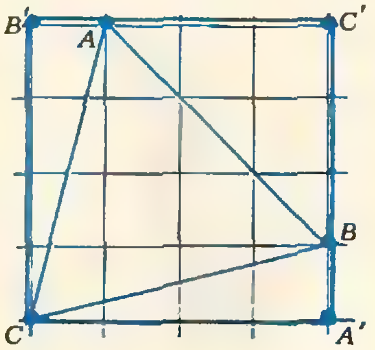


Рис. 2.

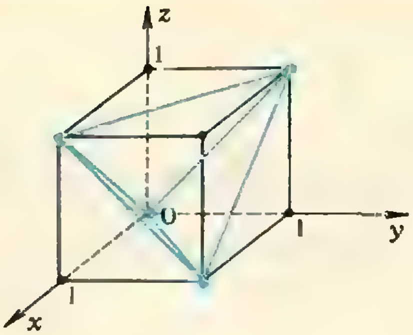


Рис. 3.

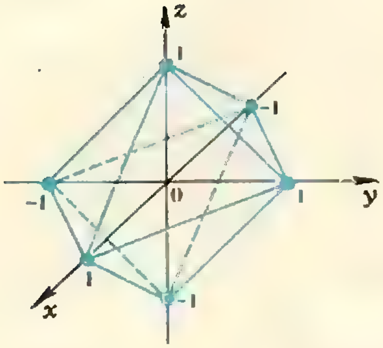


Рис. 4.

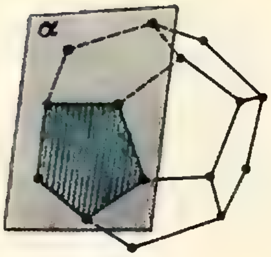


Рис. 5.

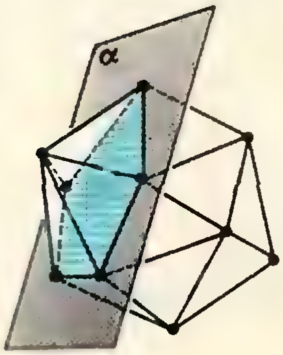


Рис. 6.

— рациональное число, так как все площади, записанные в правой части равенства, рациональны. Мы получим, что число $S_{\Delta ABC}$ одновременно рационально и иррационально — противоречие.

2. Указание. Свести к предыдущей задаче.

3. См. «Квант», 1974, № 12, с. 29.

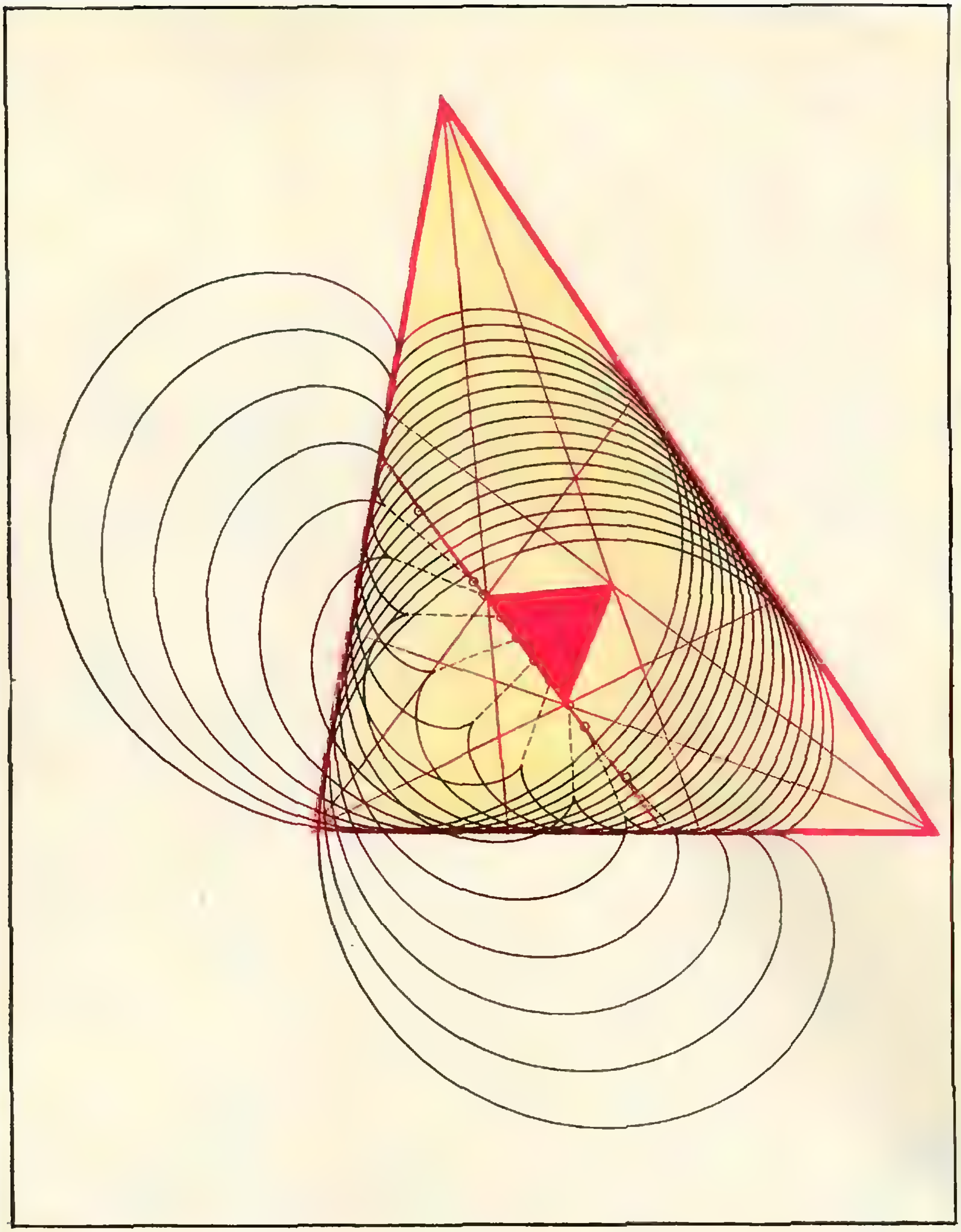
4. Для куба это очевидно, тетраэдр можно вписать в куб (рис. 3), а вершины октаэдра можно расположить в точках (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0), (0; 0; —1), (0; —1; 0), (—1; 0; —0) (рис. 4).

5. Указание. Докажите такую лемму: если Π — решетка в пространстве, α — плоскость, проходящая через три не лежащих на одной прямой узла решетки Π, то узлы Π, лежащие в α, образуют *на ней плоскую решетку. Затем сведите* задачу 5 к задаче 3 (см. рисунки 5 и 6).

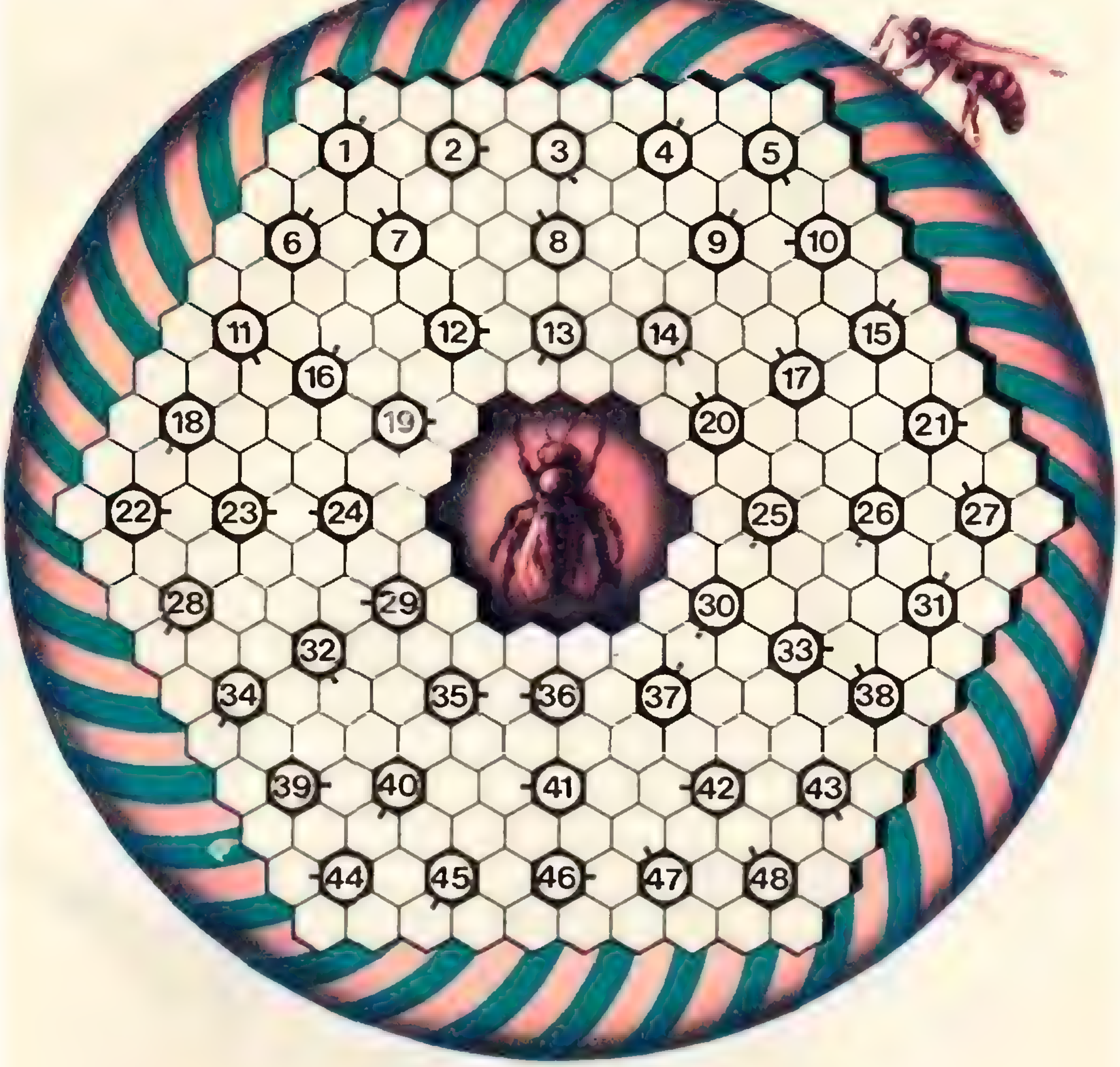
6. Указание. При некоторых поворотах додекаэдр переходит в себя в то время, как плоскости перемещаются (то же самое относится к икосаэдру). Свести таким путем задачу к задаче о вписывании в решетку. См. также «Квант», 1975, № 7, с. 42, М299.

7. Доказательство аналогично доказательству основной теоремы.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихановnatural



На этом рисунке проиллюстрировано доказательство теоремы Морлея, принадлежащее самому Морлею. На нем изображено семейство кардиоид, касающихся всех трех сторон треугольника. Центры всех этих кардиоид лежат на прямой, проходящей через некоторые точки пересечения трисектрис треугольника. Подробности см. на с. 28. Рисунок выполнен ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым.



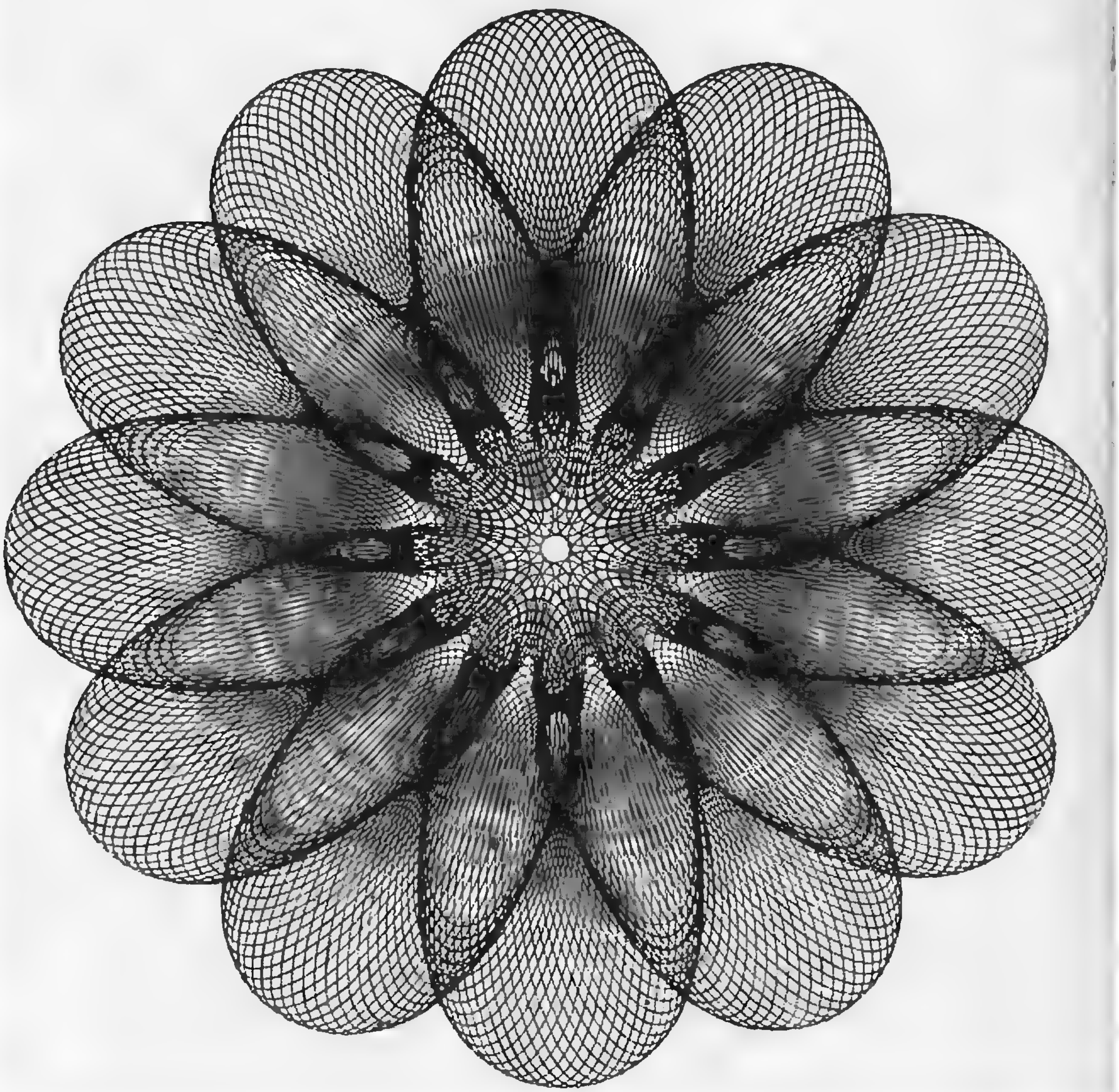
КРОССВОРД «СОТЫ»

Напишите вокруг каждого числа, начиная с отмеченной ячейки по часовой стрелке слово из шести букв.

1. Деформация балки. 2. Искусственное волокно. 3. Древнегреческий математик. 4. Единица электрической емкости. 5. Русский физик, изобретатель трансформатора. 6. 37. Американские меры объема жидкости. 7. Раздел физики, изучающий свойства света. 8. Направленный отрезок. 9. Величина, определяемая только численным значением. 10. Русский металлург, мастер доменного дела. 11. Абсолютная величина. 12. Советский радиофизик, ближайший помощник А. Попова. 13. Элементарная частица. 14. Единица работы. 15. Кадка для лотлиня. 16. Цифра. 17. Процесс перехода одного вида энергии в другой. 18. Один из пионеров русского планеризма. 19. Метод. 20. Прибор, воспринимающий воздействие и преобразующий это в сигнал. 21. Выдающийся итальянский физик. 22. Керамика с высокой диэлектрической проницаемостью. 23. Единица напряженности магнитного поля. 24. Пластмасса. 25. Манера писать. 26. Советский математик, механик, судостроитель. 27. Скопление мельчайших капелек влаги в атмосфере. 28. Американский изобретатель. 29. Часть токарного станка и музыкальный инструмент. 30. Магнитный прибор. 31. Советский исследователь центральной Азии. 32. Оптическое явление в природе. 33. Постоянный ветер в тропиках. 34. Выдающийся советский физик. 35, 40. Планеты. 36. Часть круга, ограниченная радиусами. 37. (см. 6). 38. Состояние вещества. 39. Французский математик, профессор Политехнической школы. 40. (см. 35). 41. Электрический предохранитель. 42. Положительно заряженный ион. 43. Многогранник. 44. Советский физик, ведущий телепередачи «Очевидное — невероятное». 45. Советский математик. 46. Группа экваториальных созвездий. 47. Метод исследования. 48. Путь, по которому движется небесное тело.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Эта замечательная картинка «сделана», как и картинка на второй странице обложки, вычислительной машиной по программе, составленной Ю. Котовым. Получена она с помощью движущегося эллипса, большая ось которого все время проходит через фиксированную точку — центр симметрии картинки. Центр эллипса перемещается по некоторой кривой. Постарайтесь найти эту кривую.



НОМЕР

9

Основан в 1970 году

Квант

9
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В номере:

2 С новым учебным годом!
4 *В. Беляков.* Каналирование частиц в кристаллах
13 *В. Залгаллер.* Непрерывно изгибаемый многогранник

Лаборатория «Кванта»

20 *В. Майер.* Реакция вытекающей и втекающей струй

Математический практикум

22 *В. Вавилов.* Сетчатые номограммы
30 *И. Клумова.* Номограммы из выравненных точек

Математический кружок

33 *А. Тоом.* Решения задач ВЗМШ
35 **Премии «Кванта»**

Задачник «Кванта»

36 Задачи М521—М525; Ф533—Ф537
38 Решения задач М471—М474; Ф487—Ф490, Ф492

По страницам школьных учебников

45 *Р. Мешойрер.* Комбинаторные доказательства формулы Ньютона

«Квант» для младших школьников

47 Задачи
48 *Е. Семенов.* Расстояние Степы Мошкина (из писем другу)

◆

51 *А. Строгова* Метод наименьших квадратов

Практикум абитуриента

53 *В. Литвиненко, А. Мордкович.* Пределы

Рецензии, библиография

59 *М. Смолянский.* Математика на шахматной доске
60 *И. Зорич.* Мир, лишенный очертаний
62 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 19, 21, 29, 32, 34, 58, 64*)

На первой странице обложки вы видите фотографию различных кристаллов (фото Б. Раскина). Об одном из современных методов изучения кристаллических структур вы можете прочитать в статье В. Белякова (с. 4)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». «Квант», 1978

С новым учебным годом!

Редакция поздравляет наших юных читателей с новым, 1978/79 учебным годом!

Прошлый учебный год был насыщен крупными событиями, которые послужили своеобразным напутствием наступающему учебному году.

Это был год, когда советский народ и все прогрессивное человечество торжественно отмечали шестидесятилетие Великой Октябрьской социалистической революции, открывшей новую эру в истории человечества.

Непосредственное отношение к вам, как и ко всем гражданам нашей Родины, имеет еще одно важнейшее событие истекшего года — принятие новой Конституции Советского Союза.

Минувший год был также годом XVIII съезда Ленинского комсомола, молодежной организации, членами которой состоит подавляющее большинство читателей «Кванта». Нашим читателям особенно близка яркая речь Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР Л. И. Брежнева на XVIII съезде ВЛКСМ. В ней были изложены задачи, решение которых коммунистическая партия возлагает на комсомол, выразив уверенность в том, что они ему по плечу.

А в самом конце прошлого учебного года в Москве состоялся Всесоюзный съезд учителей — наставников и друзей учащейся молодежи. На этом съезде рассматривались проблемы, непосредственно касающиеся всех учащихся. Выступления участников съезда были проникнуты заботой об учащейся молодежи, о том, как лучше и эффективнее подготовить ее к будущей самостоятельной жизни. Нашей молодежи многое дано. Ни одно государство в мире не предоставляет юношам и девушкам таких возможностей для обучения, какие имеются в Советском Союзе.

С первых же дней после победы Октября Советское государство считало одной из важнейших задач организацию дела народного образования. Надо помнить, что в это время подавляющее большинство населения нашей страны было неграмотным. С тех пор мы прошли огромный путь от кружков по ликвидации неграмотности до всеобщего среднего образования. Вот, к примеру, несколько цифр только по одной союзной республике, взятых из юбилейного статистического издания «Народное хозяйство Узбекской ССР за 60 лет Советской власти»: в 9498 общеобразовательных школах в 1976/77 учебном году занималось 3 789 900 учащихся, которых обучали 203 600 учителей; в 42 вузах получали образование 254 300 студентов.

В нашей стране все виды обучения как в средней школе, так и в высшей — бесплатны. А принятое в прошлом году Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР обеспечит и бесплатное пользование учебниками. Большинство школьников пионерского возраста в летнее время бесплатно пользуется оздоровительными учреждениями. А детям дошкольного возраста предоставлена возможность почти бесплатного воспитания в яслях и детских садах. На все это Советское государство расходует огромные материальные средства.

Партия и правительство постоянно заботятся об учащейся молодежи, о повышении качества ее обучения. Свидетельством этому служит целый ряд документов, принятых в последнее время, которые имеют огромное значение для развития народного образования в нашей стране. Среди них — Постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР о завершении перехода ко всеобщему среднему образованию, о сельской школе, о совершенствовании обучения и воспитания учащихся системы профессионально-технического образования, о совершенствовании обучения, воспитания и подготовки к труду учащихся общеобразовательных школ. Верховный Совет СССР утвердил «Основы законодательства Союза ССР и союзных республик о народном образовании».

Все это — воплощение одного из основных прав советского человека, гарантированного Конституцией, — права на образование. Но, кому много дано, с того много и спрашивается. Долг каждого школьника, каждого учащегося ПТУ достойно ответить на внимание и заботу партии и Советского правительства, в полной мере использовать представленные народом возможности для обучения, для получения образования.

XVIII съезд ВЛКСМ обратил особое внимание на эту задачу. В резолюции, принятой съездом, сказано: «Ленинский комсомол призван вносить конкретный вклад в осуществление решений XXV съезда партии, постановлений ЦК КПСС и Советского правительства о дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания, подготовки к жизни и труду молодежи...».

XXV съезд нацелил всех тружеников нашей страны на борьбу за повышение эффективности и качества работы. Эта задача имеет самое непосредственное отношение к учащимся. Ведь качество знаний сегодня — это высокая эффективность труда завтра. Вот почему XVIII съезд ВЛКСМ обратился к учащимся с призывом объявить войну «серeньким тройкам». Необходимо увлечь ребят ученьем, пробудить в них жажду знаний, «угадать» и развить их таланты. Для этого надо максимально использовать возможности внешкольных занятий, кружков, научных обществ учащихся и т. д.

Помочь решению этой задачи призван и наш журнал «Квант». Его основная цель — пробуждать интерес учащихся к физике и математике — наукам, лежащим в основе современной техники. Мы надеемся, что публикуемые на страницах журнала интересные материалы, доступные широкому кругу читателей, будут способствовать повышению уровня преподавания физики и математики в школе. Журнал и впредь будет знакомить своих читателей с достижениями физико-математических наук и применением их в технике и народном хозяйстве.

Среди читателей «Кванта» много юношей и девушек, серьезно интересующихся математикой и физикой, отлично знающих эти предметы, регулярно занимающихся в кружках и успешно выступающих на олимпиадах. Мы хотели бы, чтобы они стали первыми помощниками учителей физики и математики, чтобы они считали своим долгом объяснять трудные вопросы товарищам, увлекать их красотой и радостью научного познания. Опыт показывает, что, объясняя тот или иной вопрос, усваиваешь его лучше и глубже. Помощь товарищам по школе оказывается таким образом взаимной. «Ни одного отстающего рядом!» — этот лозунг ударников производства должен стать девизом учащихся.

Школьное образование в нашей стране связано с трудовым воспитанием. Такая политика, проводимая партией и правительством, помогает учащимся выбрать себе будущую трудовую профессию. Поясняя эту политику, Л. И. Брежнев подчеркнул: «Если, например, раньше говорилось о праве на труд, то теперь это дополняется правом на выбор профессии, рода занятий и работы в соответствии с призванием, способностями, профессиональной подготовкой и образованием гражданина, а также — что не менее важно — и с учетом общественных потребностей».

Совершенно иначе обстоит дело с трудоустройством молодежи в капиталистическом мире. Вот типичная история, о которой 30 мая 1978 года рассказала «Комсомольская правда»:

«...Способности к математике у него проявились в раннем детстве. В четыре года он уже умел считать до тысячи. В семь лет его освободили в школе от уроков математики... В восемь он мог давать консультации выпускникам школы... В двенадцать лет его допустили к занятиям на факультете математики Мюнхенского университета, а в тринадцать он делал доклады в педагогическом институте своего родного города.

Все это заставило говорить об Элмаре Эдере как о вундеркинде...

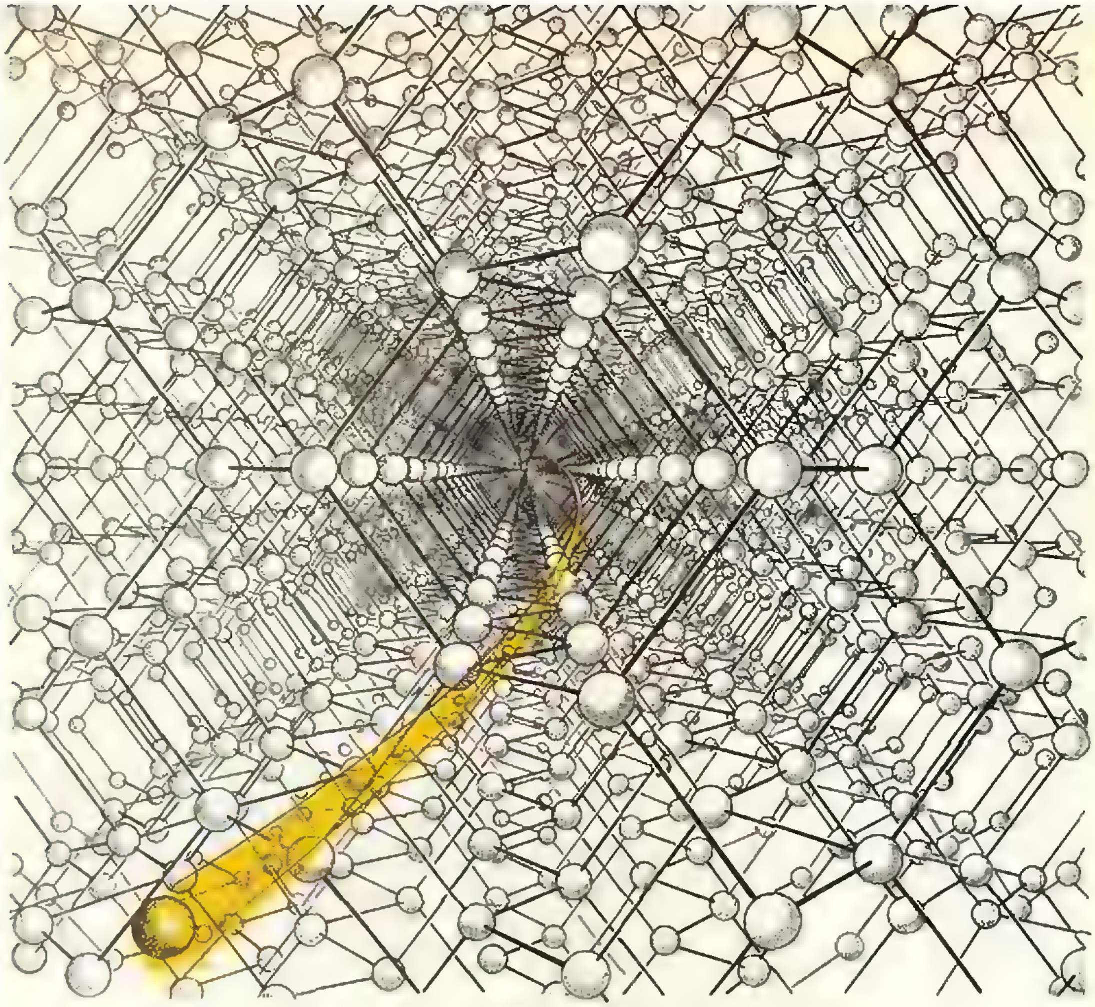
Вундеркинда направили учиться в специальную математическую школу в Англии, которую он с блеском окончил в пятнадцать лет. Через три года он получил диплом об окончании математического факультета Мюнхенского университета, а еще через два года ему была присвоена степень доктора.

Годы обучения остались позади, и перед двадцатилетним математиком встал вопрос о месте работы. Университеты, институты и научно-исследовательские центры, в которые молодой математик обращался с просьбой предоставить ему работу, давали один ответ: свободных мест нет.

Эту фразу в ФРГ неоднократно получали в ответ и 40 тысяч других выпускников высших учебных заведений страны...».

К сожалению, у нас все еще встречаются юноши и девушки, которые не хотят познавать производство, не привыкли уважать людей труда. Они пытаются отложить приобретение трудовых навыков до окончания школы и прикрыть отсутствие интереса к труду различными отговорками. Таким учащимся следует напомнить слова первого секретаря ЦК ВЛКСМ Б. Н. Пастухова, который в своем докладе XVIII съезду ВЛКСМ отметил: «Общественно полезный труд — это активное постижение мира, познание самого себя. Он не препятствует, а содействует сознательному выбору профессии, углублению знаний. Лауреат Ленинской премии, академик Рем Викторович Хохлов начал работать после школы автослесарем, затем стал студентом Московского университета, а спустя годы — его ректором. Выдающийся советский физик всегда тепло вспоминал школу рабочего коллектива. Такие университеты не забываются».

Старшеклассники, учащиеся профессионально-технических училищ, как и все советские люди, испытывают законную гордость за те выдающиеся успехи, которых достигла наша Родина под руководством родной Коммунистической партии, ясно осознают, что стартовая площадка всех этих успехов — социалистический общественный строй. Мы убеждены, что учащаяся молодежь Страны Советов сделает все, чтобы начавшийся учебный год — год 60-летия ВЛКСМ — был достойно отмечен новыми успехами в учебе и труде.



В. Беляков

Каналирование частиц в кристаллах

Во втором номере нашего журнала за этот год была опубликована статья А Китайгородского «Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах». В этой статье рассказывалось об основном методе исследования кристаллических структур — рентгеноструктурном анализе.

Теперь мы предлагаем вашему вниманию рассказ еще об одном, совсем недавно появившемся, методе изучения кристаллов.

Немного истории

Тот, кто видел модель кристалла, выполненную из шариков и тонких стержней (см. заставку к статье), конечно же, обратил внимание на ее интересное свойство. Если, медленно вращая, разглядывать такую модель на просвет, можно видеть, что в некоторых направлениях она почти прозрачна, в других — практически непрозрачна. Прозрачной модель оказывается тогда, когда открываются отверстия (или, как говорят, каналы), образованные рядами атомов — шариков, или щели между плоскостями, образованными шариками; непрозрачной — когда все поле зрения полностью перекрывается шариками.

Это свойство модели кристалла еще в 1912 году (на заре развития атомной физики и физики твердого тела) побудило немецкого ученого Штарка задуматься над тем, имеет ли отношение описанное свойство модели к реальным кристаллам. Штарк пришел к выводу, что имеет. В частности, он предсказал, что, если кристалл облучать положительно заряженными частицами, то глубина их проникновения в глубь кристалла зависит от угла, под которым пучок частиц падает на кристалл. Так, если направление пучка совпадает с направлением одного из описанных выше каналов, то частицы проникают в кристалл более глубоко, чем в других случаях.

Однако теоретическое предсказание Штарка тогда проверить не удалось, и оно было надолго забыто. Прошло более пятидесяти лет, прежде чем ученые занялись экспериментальным исследованием зависимости глубины проникновения заряженных частиц в кристаллы от ориентации образцов кристаллов относительно пучков этих частиц. Оказалось, что, действительно, если направление движения частицы совпадает с направлением кристаллического канала или близко к нему, то частица при своем движении в кристалле теряет энергию значительно медленнее, чем при движении в других направлениях. В результате длина ее пробега оказывается значительно больше в этом направлении, чем в других (рис. 1). В таком случае говорят, что происходит захват частицы в кристаллический канал, а само явление называют *каналированием частиц*.

Интерес к этому явлению пробудило «второе открытие» каналирования, сделанное в начале шестидесятых годов (как и в первый раз, теоретически) при моделировании на электронно-вычислительной машине движения ионов в монокристалле. Оказалось, что каналирование и сопутствующие ему явления представляют большой интерес для физики твердого тела и ядерной физики, так как являются эффективным методом исследования свойств кристаллов и некоторых ядерных явлений. Обнаружились и широкие возможности технического использования каналирования, в частности, в полупроводниковой технике. Но обо всем этом речь пойдет несколько позже.

Об описании кристаллических структур

Как известно, в кристаллах атомы расположены в пространстве регулярным образом и образуют так называемую кристаллическую решетку.. Атомы кристаллов (как и всех других тел) совершают тепловое движение, но это движение сильно ограничено. Атомы колеблются вблизи равновесных положений, называемых узлами кристаллической решетки, с очень малой амплитудой ($\sim 10^{-9}$ см). Поэтому для описания ряда свойств кристаллических структур можно считать, что атомы вообще не движутся. Во всяком случае, модель кристалла с неподвижными атомами является, как говорят физики, хорошим нулевым приближением для описания многих свойств кристаллов. В дальнейшем мы будем пользоваться таким представлением о строении кристаллов.

Надо оговориться, что нарисованная выше идеальная картина, в которой атомы во всем объеме кристалла находятся строго на своих местах, в природе реализуется весьма редко. Такие идеальные образцы называют монокристаллами. Обычные кристаллические тела далеки от такого совершенства. Они состоят из совокупности большого числа кристаллитов — очень малых областей, в которых существует совершенный порядок в расположении атомов, но при переходе от одного кристаллита к другому порядок нарушается. Обсуждаемое нами явление каналирования лучше всего проявляется в экспериментах именно с монокристаллами, поэтому в дальнейшем под термином «кристалл» будем понимать «монокристалл».

В связи с тем, что в кристалле (монокристалле) существует строгий порядок в расположении атомов, для изучения кристаллов достаточно исследовать расположение атомов в минимальном объеме кристалла, полностью отражающем все его структурные свойства. Такой минимальный объем называют элементарной ячейкой кристалла. Размеры элементарной ячейки порядка (1—10) 10^{-8} см.

На рисунке 2 приведены примеры элементарных ячеек (для определенности — кубических). Простейшая ячейка представляет собой куб, в вершинах которого расположено по атому. Более сложной структурой обладают объемноцентрированная, гранецентрированная и базоцентрированная ячейки (их устройство очевидно из рисунка 2).

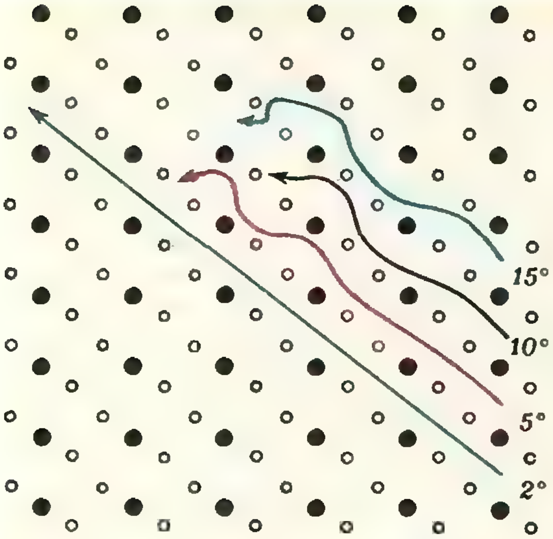


Рис. 1. Иллюстрация зависимости пробега иона от начального направления его скорости относительно оси канала на примере двумерной модели кристаллической решетки. Около траектории частиц указано значение угла, образуемого начальной скоростью частицы с осью канала.

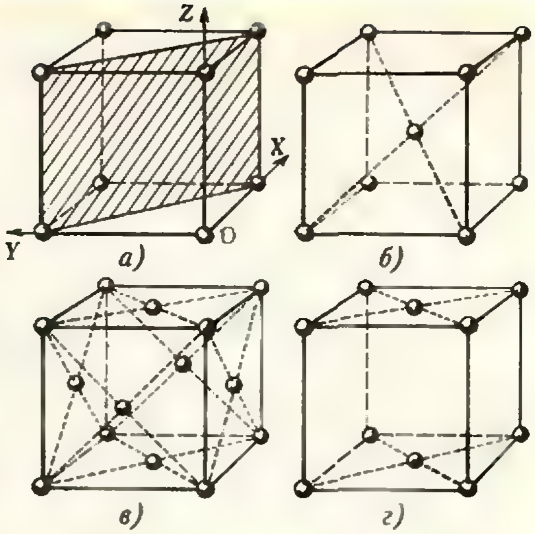


Рис. 2. Примеры кубических элементарных ячеек: *а*) примитивная, *б*) объемноцентрированная, *в*) гранецентрированная, *г*) базоцентрированная. На рисунке показан выбор системы координат, связанный с элементарной ячейкой; штриховкой показана одна из кристаллических плоскостей (110).

Как уже говорилось, не все направления в кристалле равноправны. Для того чтобы в этом убедиться, удобно (как это принято в кристаллофизике) связать систему координат с элементарной ячейкой. Обычно начало координат выбирают в одной из вершин ячейки, а оси координат направляют вдоль ее ребер, при этом длину ребер условно считают единичной. Направление вдоль оси X обозначают [100], вдоль оси Y — [010], вдоль оси Z — [001]. Плоскости, совпадающие с гранями куба и перпендикулярные осям X, Y и Z, обозначают соответственно (100), (010), (001). Направления вдоль диагоналей граней обозначают [110], [101], [011], а кристаллические плоскости, перпендикулярные этим направлениям, — (110), (101), (011). Наконец, направление пространственной диагонали обозначают [111], а перпендикулярные ей кристаллические плоскости — (111).

Рассматривая изображение элементарной ячейки, легко видеть, что например, направления [100], [010], [001] кристалла эквивалентны друг другу и не эквивалентны направлению [111].

Выше мы перечислили так называемые главные кристаллографические направления и кристаллографические плоскости. Другие направления и плоскости обозначаются аналогично: $[hkl]$ для направления и (hkl) для перпендикулярных этому направлению плоскостей. Величины h, k, l принимают целочисленные значения и называются кристаллографическими индексами (или индексами Мюллера). Для направлений и плоскостей, отличных от главных, хотя бы один из индексов отличается от 0 или 1.

Символ (hkl) обозначает не одну какую-то плоскость, а совокупность параллельных плоскостей, проходящих через узлы (атомы) кристаллической решетки. При этом в плоскостях, соответствующих малым кристаллографическим индексам, плотность атомов оказывается больше, чем в плоскостях с более высокими индексами, а расстояния между этими плоскостями больше, чем расстояния между плоскостями с высокими кристаллографическими индексами. Например, для кристалла с простейшей кубической ячейкой расстояние между плоскостями (100) равно 1, а между плоскостями (110), соответствующими более высоким индексам, расстояние равно $\sqrt{2}/2$ (см. рис. 2).

Познакомившись со способом описания кристаллографических направлений и плоскостей, приступим к более детальному ознакомлению с явлением каналирования.

Что же такое каналирование?

Основное проявление эффекта каналирования состоит в аномально глубоком проникновении заряженных частиц в глубь кристалла в случае, когда их скорость или совпадает с направлениями кристаллических каналов или близка к ним. (Из предыдущего раздела следует, что направления каналов совпадают с основными кристаллографическими направлениями решетки.) В чем физическая причина аномально больших пробегов частиц в этих направлениях? На первый взгляд может показаться, что в канале, образованном рядами атомов, частица просто прямолинейно движется, не сталкиваясь с атомами кристалла, и как результат — большие пробеги. Это предположение легко проверить, наблюдая прохождение заряженных частиц через очень тонкие образцы кристаллов. Очевидно, что частица сможет пройти вдоль канала, не столкнувшись с его стенками, если угол наклона скорости частицы к оси канала не превышает величины $\psi_c \sim \frac{d}{L}$, где L — толщина образца, d — поперечник канала. Таким образом, если сделанное предположение верно, предельный угол ψ_c отклонения частицы от оси канала, при котором еще происходит каналирование, должен зависеть от толщины образца! Однако эксперименты показали, что предельный угол каналирования (или, как говорят специалисты, критический угол) от толщины кристалла не зависит и одинаков как для толстых, так и для тонких образцов. Видимо, наше предположение о том, что каналирование — это прямолинейный пролет частицы вдоль канала без столкновений с атомами кристалла, неправильно. Как показали исследования, движение частицы в канале может быть весьма сложным и существенно отличаться от прямолинейного. Характер этого движения целиком определяется взаимодействием частицы с атомами, образующими кристаллический канал. Поэтому, чтобы ответить на поставленный в заголовке этого раздела вопрос, познакомимся с некоторыми экспериментальными фактами.

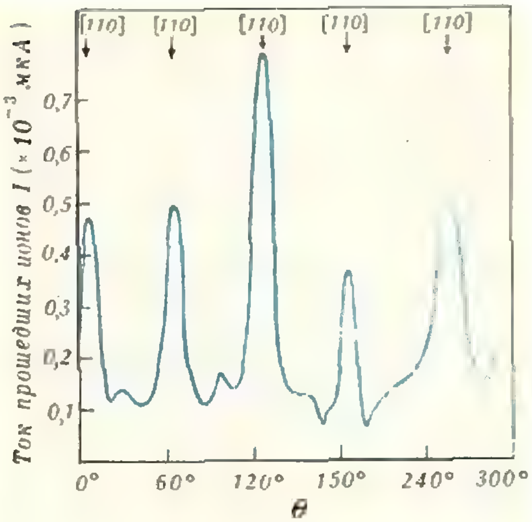


Рис. 3. Изменение тока прошедших ионов при вращении кристалла вокруг оси [111].

Прохождение частиц через монокристаллы

Эксперименты, в которых непосредственно фиксируются частицы, испытавшие каналирование, проводятся на тонких монокристаллических пленках. Узкий параллельный почти не расходящийся пучок (как говорят, коллимированный пучок) ионов направляется на кристалл, и исследуется зависимость числа прошедших через пленку ионов от ориентации пленки относительно пучка. Вращая кристалл вокруг оси, перпендикулярной его поверхности, можно изменять ориентацию образца, не влияя на толщину слоя кристалла, проходимого ионами. Поэтому изменения величины тока (созданного прошедшими через образец ионами) при вращении кристалла должны быть связаны с его структурными свойствами.

На рисунке 3 представлены результаты одного из экспериментов, в котором протоны с энергией 50 кэВ проходили через монокристалл золота. Угол падения пучка протонов был выбран так, чтобы при вращении образца направления самых широких кристаллических каналов последовательно совпадали с направлением пучка, при этом наблюдалось резкое увеличение тока (то есть числа прошедших через образец протонов).

Влияние каналирования на ядерные процессы. Эффект блокировки

Очень интересны результаты экспериментов по изучению ядерных реакций в условиях каналирования частиц, вызывающих ядерную реакцию. Оказалось, что каналированные частицы вступают в реакцию менее охотно, чем частицы, не испытавшие каналирования. Рассмотрим, например, такую реакцию. Если ядра изотопа кремния ^{28}Si бомбардировать протонами, то в результате возникают ядра фосфора ^{29}P и гамма-кванты:

$$^{28}\mathrm{Si} + p \rightarrow {}^{29}\mathrm{P} + \gamma.$$

О числе актов реакции можно судить по числу испущенных γ-квантов.

В эксперименте, в котором в качестве мишени использовался кристалл кремния, а пучок протонов направлялся на кристалл под различными углами к направлению [110], выявилась резкая зависимость числа γ-квантов от ориентации пучка (рис. 4). При совпадении направления пучка протонов с направлением [110] наблюдается минимум в числе актов реакции, о чем говорит уменьшение скорости счета γ-квантов.

Аналогичные результаты были получены и для ряда других ядерных реакций.

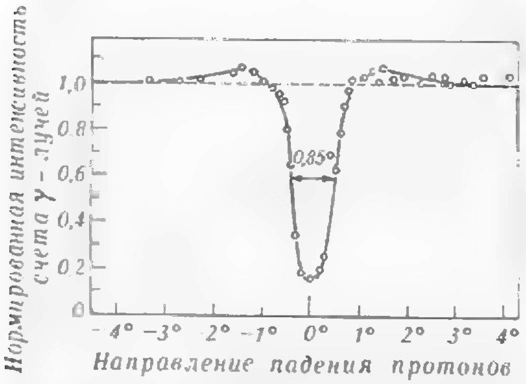


Рис. 4. Ориентационная зависимость выхода ядерной реакции $^{28}\mathrm{Si} + p \rightarrow {}^{29}\mathrm{P} + \gamma$ при изменении направления падения пучка протонов вблизи оси [110].

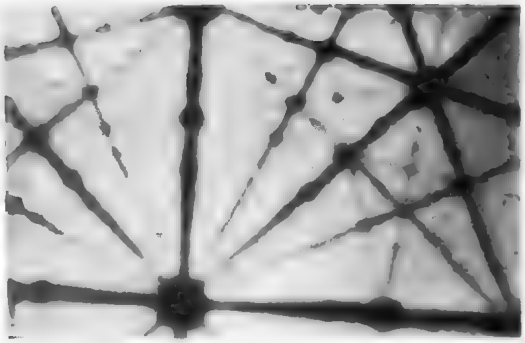


Рис. 5.

Явлением, тесно связанным с каналированием, является так называемый эффект блокировки. Он заключается в том, что выход из кристалла заряженных частиц, возникающих в процессе радиоактивного распада ядер в монокристалле, резко зависит от угла между направлением их скорости и оси кристаллического канала. Причем, в направлении оси канала число вышедших из кристалла частиц оказывается минимальным. Это связано с тем, что радиоактивный распад ядра происходит в узле кристаллической решетки, и движению частицы, испущенной в направлении, параллельном оси канала, препятствуют атомы, образующие стенки канала.

Рассеяние на большие углы

Близким к эффекту блокировки — по наблюдаемым результатам — является отражение (или рассеяние назад) ионов от монокристаллических мишеней. Действительно, для того чтобы произошло отражение иона назад (рассеяние на большой угол), необходимо, чтобы ион почти вплотную приблизился к какому-нибудь ядру атома кристалла. Только в этом случае электростатическое отталкивание положительно заряженного иона и атомного ядра будет достаточно сильным, чтобы изменить направление движения иона на противоположное. Таким образом, рассеяние иона назад практически аналогично рассмотренному выше вылету заряженной частицы из ядра в процессе радиоактивного распада. Эксперименты полностью это подтверждают.

Например, если рядом с кристаллом, облучаемым протонами, поместить со стороны пучка протонов фотопластинку, то после ее проявления получается изображение, аналогичное представленному на рисунке 5. Более темные участки (круговые области и пересекающиеся линии) соответствуют областям пониженной интенсивности рассеянных протонов — кристаллическим каналам. На изображении получается как бы проекция главных кристаллографических плоскостей и направлений на плоскость фотопластинки.

Рентгеновское излучение, сопровождающее каналирование

В предыдущих разделах мы познакомились с различными проявлениями каналирования. Теперь поговорим немного о самом явлении. Как показывают эксперименты, частица захватывается в кристаллический канал в том случае, если угол ψ, составляемый ее скоростью с осью канала, меньше критического угла ψ_c. А как происходит движение частицы, захваченной в кристаллический канал, внутри канала? Оказывается, информацию об этом можно получить, изучая рентгеновское излучение, сопровождающее каналирование частицы.

Как известно, рентгеновские лучи испускаются возбужденным атомом, в котором какой-то из его электронов выбит со своего обычного уровня и переведен в более высокое энергетическое состояние. При возвращении электрона на свой уровень энергия возбуждения атома уносится квантом электромагнитного излучения — фотоном. Если в атоме был возбужден электрон внутренней оболочки, то энергия возбуждения атома велика, и фотон, уносящий эту энергию, оказывается рентгеновским квантом.

Исследуя зависимость выхода рентгеновского излучения от угла ψ, обнаружили, что при углах, гораздо меньших критического угла ψ_c, выход рентгеновского излучения мал. При увеличении угла ψ до величины порядка ψ_c происходит резкое возрастание выхода рентгеновского излучения. Наконец, при $\psi > \psi_c$ возникает гамма-излучение, связанное с возбуждением бомбардируемыми частицами атомных ядер.

Такая зависимость выхода рентгеновского излучения от угла связана с различными траекториями движения частиц в кристалле. При малых углах ψ (траектория *1* на рисунке 6) частица движется в канале, очень мало отклоняясь от его оси, и все время находится в области валентных электронов. Валентные электроны, выбиваемые частицей со своих оболочек, не дают рентгеновского излучения, так как соответствующие энергии возбуждений малы. В области углов порядка критических (траектория *2*) частица при своем движении в кристаллическом канале проходит через области внутренних электронных оболочек. Выбивание частицей электронов внутренних оболочек приводит к возникновению рентгеновского излучения. Наконец, при $\psi > \psi_c$ (траектория *3*) частица так близко подходит к атомному ядру, что становится возможным возбуждение ядра, следствием чего является возникновение гамма-кванта. Сама же частица при этом рассеивается на большой угол и выходит из кристаллического канала.

Таким образом, исследуя рентгеновское излучение, вызываемое заряженной частицей в кристалле, можно получить представление о характере ее движения в канале.

О теории каналирования

Познакомившись с некоторыми экспериментальными фактами, вернемся к вопросу о том, что же такое каналирование. Теория этого явления была в основном разработана датским физиком Линдхардом. Оказывается, в основе каналирования лежит кулоновское взаимодействие положительно заряженных ионов с атомными ядрами кристалла. Вы обратили внимание, что во всех описанных выше опытах использовались положительно заряженные частицы?

За счет кулоновских сил положительно заряженный ион при своем движении в кристаллическом канале испытывает отталкивание от положительно заряженных атомных ядер,

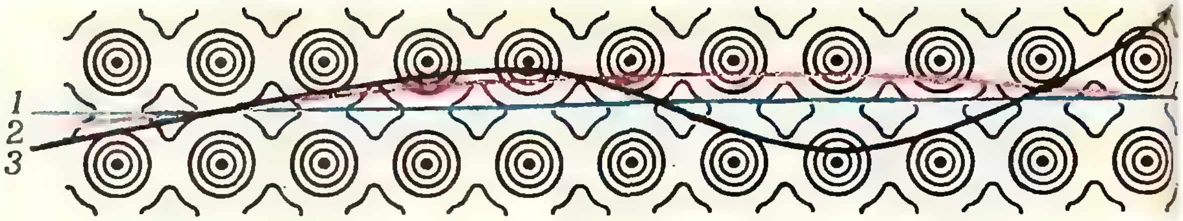


Рис. 6. Схематическая иллюстрация зависимости траектории частицы в кристаллическом канале от начального угла, образуемого ее скоростью с осью кристаллического канала.

как бы образующих стенки канала. Если составляющая скорости иона, перпендикулярная оси канала, мала, силы отталкивания не позволят иону выйти из канала. В этом случае ион, «оттолкнувшись» от одной стенки канала, будет приближаться к противоположной его стенке, одновременно перемещаясь вдоль оси канала. Затем он точно так же «оттолкнется» от противоположной стенки. В целом движение иона вдоль кристаллического канала будет сопровождаться его «колебаниями» между стенками канала.

Если поперечная составляющая скорости иона слишком велика, сил кулоновского отталкивания оказывается недостаточно, чтобы удержать ион в кристаллическом канале; ион выходит за пределы канала, то есть каналирования не происходит.

Наглядной моделью такого поведения иона может служить движение шарика в желобе (рис. 7). Если мы, пуская шарик вдоль оси желоба, одновременно придадим ему небольшую скорость, перпендикулярную оси желоба, то его движение по желобу будет сопровождаться колебаниями от стенки к стенке. Если же перпендикулярная оси составляющая скорости будет слишком велика, шарик просто выскочит из желоба. Существование предельной поперечной скорости шарика, при которой он еще не выскакивает из желоба, соответствует введенному выше критическому углу ψ_c для каналирования.

На первый взгляд, аналогия между движением каналированной частицы и движением шарика в желобе может вызвать удивление. Действительно, «стенки» кристаллических каналов гораздо ближе к рыболовной сети с крупной ячейкой или волейбольной сетке, чем к сплошным стенкам желоба. Аналогия оказывается хорошей только потому, что при движении вдоль оси канала частица совершает одно колебание от стенки к стенке на длине пробега, приблизительно равной сотне межатомных расстояний, так что дискретность стенки оказывается несущественной. Если же частица резко меняет направление своего движения за счет взаимодействия с одним ядром, аналогия с движением шарика в желобе не работает. Но при этом, как мы видели, не происходит и каналирования частиц. Так что пока частица каналируется, аналогия с желобом вполне хороша.

Заметим, что движение частицы в кристалле наиболее близко к движению шарика в желобе, когда речь идет о межплоскостном каналировании частицы, при котором частица совершает колебания между кристаллическими плоскостями, ограничивающими канал. В случае осевого канала движение частицы оказывается более сложным (см., например, заставку к статье).

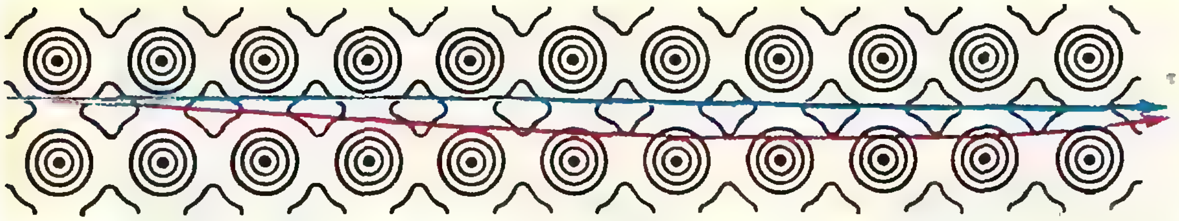
Приведенное выше качественное описание поведения каналированной частицы в кристалле позволяет получить зависимость критического угла ψ_c от энергии частицы. Обозначим через $\vec{v}$ скорость движения частицы, а через $\vec{v}_c$ — критическое значение ее поперечной скорости. Для частицы, движущейся под малым углом к оси канала, поперечная скорость

$$\left|\vec{v}_c\right| = \left|\vec{v}\right| \sin\psi_c \approx \left|\vec{v}\right| \psi_c,$$

откуда

$$\psi_c = \frac{\left|\vec{v}_c\right|}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Выражая скорость частицы через ее



энергию E, получим

$$\psi_c = \frac{|\vec{v}_c|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{{}^1/_2 m v_c^2}}{\sqrt{{}^1/_2 m v^2}} = \sqrt{\frac{U}{E}},$$

где m — масса каналируемой частицы, а U — предельная энергия поперечного движения частицы, при которой частица еще не может выйти за пределы канала. Таким образом, чем больше энергия частицы, тем меньше критический угол ψ_c, при котором еще происходит захват частицы в канал.

Такая зависимость критического угла от энергии частицы хорошо выполняется на опыте. Так, например, для протонов с энергией 50 кэВ в [110] канале кристалла меди $\psi_c = 3°$, а для энергии 200 кэВ $\psi_c = 1{,}5°$. Как видно, величины угла ψ_c очень малы. А это обусловливает многие экспериментальные трудности, которые приходится преодолевать при изучении каналирования. Действительно, чтобы изучать угловые зависимости каналирования, необходимо создавать пучки ионов, обеспечивая их угловую расходимость по крайней мере в десятки раз меньше, чем ψ_c.

Теперь немного о научном и техническом применениях явления каналирования.

Имплантация ионов

Термин, использованный в заголовке этого раздела, обозначает процесс введения в кристалл примесных ионов или атомов. Кристаллы, содержащие примесные атомы и притом в строго контролируемом количестве, широко используются в радиоэлектронике. Это так называемые примесные полупроводники.

В последнее время для введения примесей в полупроводниковый кристалл стал использоваться метод, состоящий в бомбардировке кристалла ионами нужного химического элемента. Вот здесь-то и оказались полезными свойства обсуждаемого нами эффекта каналирования. Введение примесей в кристаллы путем облучения их пучками ионов обладает рядом преимуществ по сравнению с другими используемыми методами введения примесей. Этот метод позволяет вводить в кристаллы самые разнообразные примеси, и притом в точно контролируемых количествах, иногда даже превышающих те, которых можно достигнуть другими путями. С помощью облучения ионами примеси легко вводятся в нужные места образца и на требуемую глубину. Важно также, что, применяя ионы малых энергий, удается добиться их проникновения достаточно глубоко в кристалл. Вспомните, — пробеги в кристаллах каналированных частиц значительно больше, чем не испытавших каналирование.

В связи с этим явление каналирования широко используется для изучения имплантации примесей путем ионной бомбардировки. И, очевидно, уже в ближайшее время каналирование будет использовано для промышленного выпуска высококачественных полупроводниковых кристаллов.

Измерение времени ядерных процессов

Совершенно неожиданное применение каналирования, точнее, эффекта блокировки, оказалось возможным в ядерной физике. С помощью эффекта блокировки удается измерять времена некоторых ядерных процессов, длящихся 10^{-18}—10^{-16} с. Как раз в этой области длительности процессов не существует других надежных методов измерения времени.

Предложение использовать эффект блокировки для измерения времен ядерных процессов выдвинул советский физик А. Ф. Тулинов, внесший также большой вклад в открытие и изучение самого эффекта блокировки.

Этот метод подходит для измерения времен ядерных процессов (реакций), сопровождаемых испусканием заряженных частиц. Ход таких реакций может быть разбит на два этапа. Первый этап — захват ядром атома кристалла одной из частиц, которыми облучается образец. Второй этап — распад ядра, захватившего частицу.

Время, прошедшее с момента захвата частицы до распада ядра, может быть определено по тому, как проявляется эффект блокировки на выходе заряженных продуктов распада из кристалла. Идея метода проста и изящна и состоит в следующем. Ядро, захватившее частицу (как говорят физики, компаунд-ядро), восприняв импульс поглощенной частицы, оказывается выбитым из занимаемого им кристаллического узла и начинает двигаться в кристалле с очень большой скоростью, порядка 10^8—10^9 см/с. Если время жизни компаунд-ядра очень мало и оно до распада практически не успевает отойти от занимаемого им узла, при выходе заряженных продуктов распада из кристалла в полной мере проявляется эффект блокировки.

Если же за время жизни ядро успевает отойти от своего узла, то проявляется ослабление эффекта блокировки, так как в этом случае движению продукта распада вдоль оси кристалла не препятствуют атомы, образующие стенки канала. По степени ослабления блокировки определяют расстояния, на которые смещается компаунд-ядро, и, зная его скорость, находят время жизни компаунд-ядра.

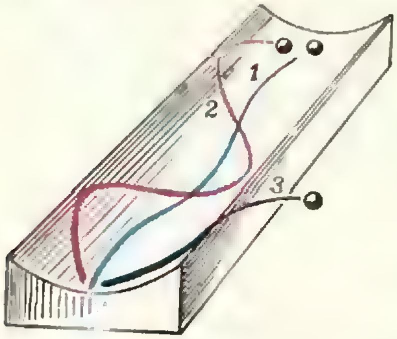


Рис. 7. Траектории шарика в желобе при различных значениях его поперечной скорости. Траектории *1*, *2* и *3* относятся, соответственно, к малой, близкой к предельной и большей предельной поперечным скоростям шарика.

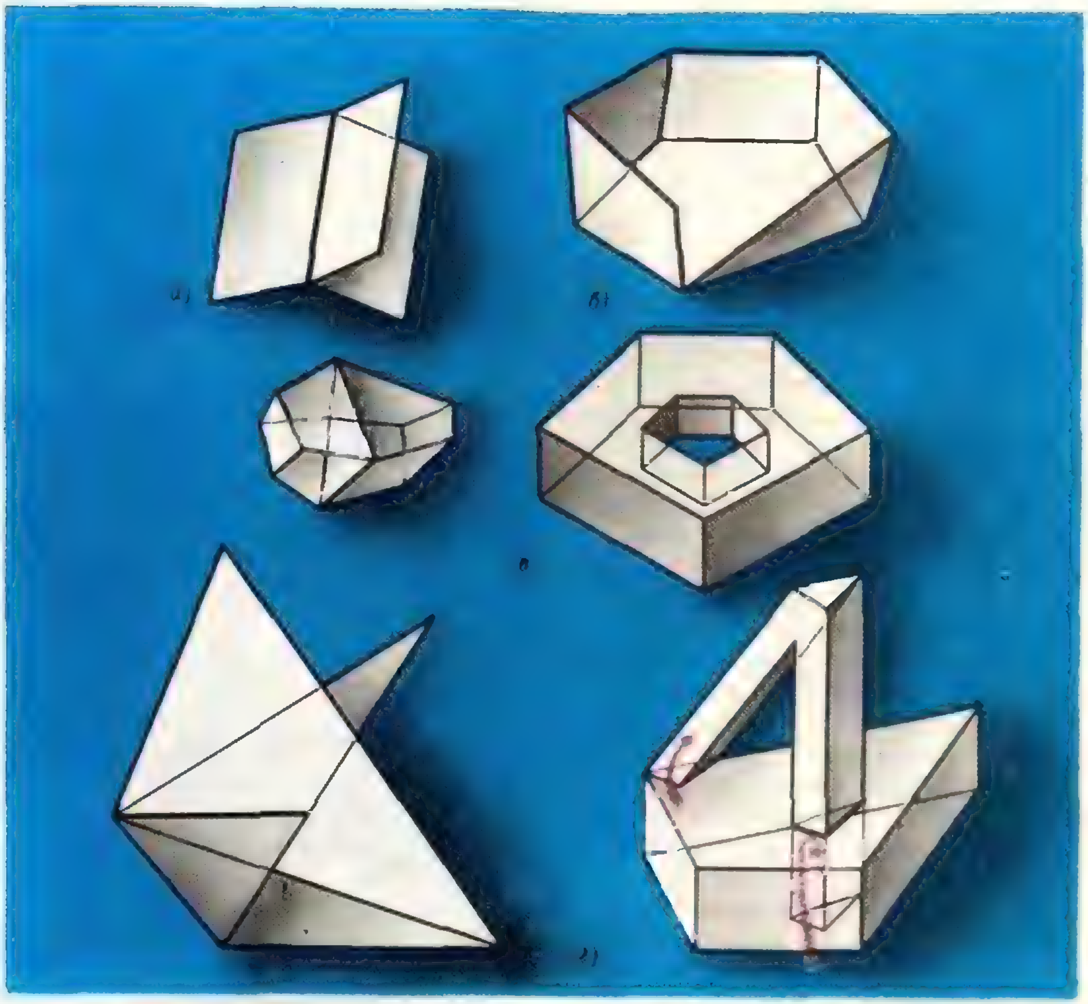
Например, таким способом было определено время распада ядра изотопа ^{238}U, захватившего протон с энергией 10 МэВ. Оно оказалось равным $1{,}4 \cdot 10^{-16}$ с.

Заключение

Прочитав эту статью, вы познакомились с бурно развивающейся областью исследований, лежащей на стыке ядерной физики и физики твердого тела. Высокий уровень развития ядерной физики и физики твердого тела позволили за короткий срок — десять с небольшим лет — получить огромное количество информации о каналировании заряженных частиц в монокристаллах и определить наиболее многообещающие приложения этого явления.

Однако не надо думать, что все интересное в этой области исследований уже позади. Скорее наоборот. Так, в данной статье рассказывалось только о каналировании частиц, движение которых может быть описано на основе законов классической механики Ньютона (это — протоны и более тяжелые ионы). Для описания движений в кристалле более легких частиц (электронов, позитронов и т. п.) требуется применение законов квантовой механики. Кроме того, рассказ ограничивался случаем положительно заряженных частиц и предполагалось, что их энергия невелика. Оказывается, очень интересные явления разыгрываются при прохождении через кристаллы положительных и отрицательных частиц высоких энергий (так называемых релятивистских). Но рассказ об этом выходит за рамки данной статьи.

К сожалению, в настоящее время еще отсутствует полное понимание особенностей движения этих частиц в монокристаллах. Тем не менее ясно, что в руках физиков появился новый удивительно тонкий метод исследования кристаллов. Следует ожидать, что в недалеком будущем каналирование станет таким же рабочим методом исследования кристаллов, каким в настоящее время является рентгеноструктурный анализ.



В. Залгаллер

Непрерывно изгибаемый многогранник

1. Многогранник

Многогранником мы будем здесь называть поверхность (не тело!), составленную из конечного числа многоугольников. Эти многоугольники — грани многогранника. Стороны граней — *ребра* многогранника. Предполагается, что по каждому ребру прилегают друг к другу не более двух граней. (Так, поверхность, изображенная на рисунке *а*) на заставке не многогранник.) Многогранник должен состоять из одного куска: от любой его грани можно перейти к любой другой, переходя от грани к грани последовательно через ребра, по которым соседние грани прилегают.

Если у многогранника есть ребро, принадлежащее всего одной грани, то это — *многогранник с краем* (рис. *б*). Если же каждое ребро принадлежит двум граням, многогранник называют *замкнутым* (рис. *в*). У замкнутого многогранника края нет.

Многогранник будем называть *выпуклым*, если он является границей выпуклого тела. Такой многогранник — обязательно замкнутый. Как правило, мы будем рассматривать только многогранники, чьи грани пересекаются лишь по общим ребрам. Если же это условие нарушено и грани как бы проходят одна сквозь другую, то мы будем говорить о многограннике с *самопересечением* (рис. *г* на с. 13).

2. Изгибание многогранника

Будем считать, что форму и размеры каждой грани многогранника изменять запрещено, т. е. грани будем рассматривать как твердые материальные пластинки. Двугранные углы при ребрах разрешим изменять. Если изменением углов при ребрах исходный многогранник можно перестроить так, чтобы при сохранении порядка прилегания граней его форма изменилась, то говорят, что новый многогранник получается из исходного *конечным изгибанием*.

Изгибание многогранника с краем представить себе легко. Например, у многогранника, составленного из двух треугольников, можно произвольно изменить угол при общем ребре.

Приведем пример конечного изгибания замкнутого многогранника. Многогранник на рисунке 1, *а* составлен из пяти граней куба, шестая же грань заменена боковой поверхностью невысокой правильной четырехугольной пирамиды, поставленной на куб. Многогранник на рисунке 1, *б* построен аналогично, только теперь та же пирамида входит внутрь куба. В этом примере при изгибании многогранника двугранные углы при некоторых ребрах не только изменили свою величину, но стали из выступающих — входящими. Интересный пример конечного изгибания многогранника изображен на рисунке 2 *). Здесь при изгибании выступающие двугранные углы остаются выступающими, а входящие — входящими.

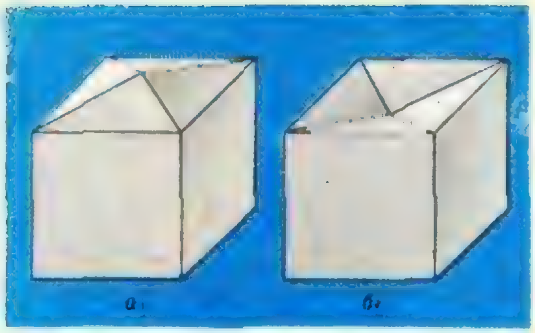


Рис. 1.

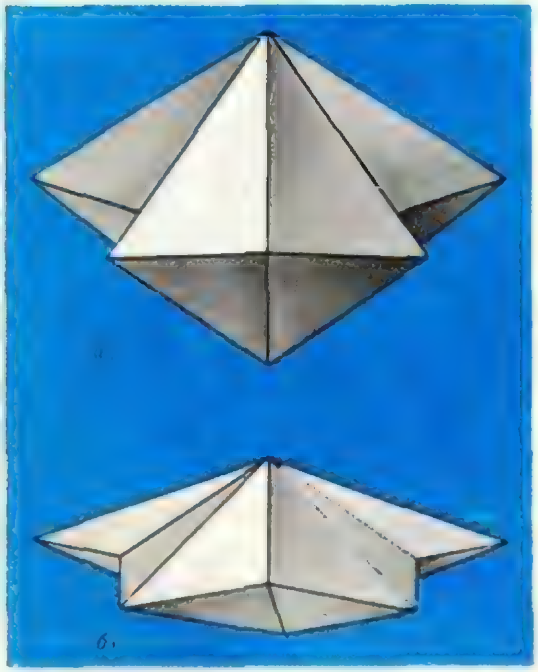


Рис. 2.

В обоих примерах изгибание осуществлялось скачком, не непрерывно. Если, например, склеить многогранник, изображенный на рисунке 2, *а*, из бумаги, то он будет жестким. Однако, если его с некоторым усилием сжать по вертикали, то он «щелчком» примет форму, показанную на рисунке 2, *б*. Но это вовсе не означает, что рассматриваемый многогранник допускает непрерывное изгибание: переход из состояния 2, *а* в состояние 2, *б* оказывается возможным только потому, что бумажные грани и ребра являются не абсолютно жесткими, а обладают некоторой эластичностью. (Многогранник 2, *а* вы можете склеить сами из плотной чертежной бумаги и «пощелкать» им, переводя его в состояние 2, *б* и обратно. Он состоит из двадцати одинаковых треугольных граней со сторонами длины

---

*) Этот пример заимствован из заметки А. Д. Александрова и С. М. Владимировой («Вестник Ленинградского университета», 1962, № 13).

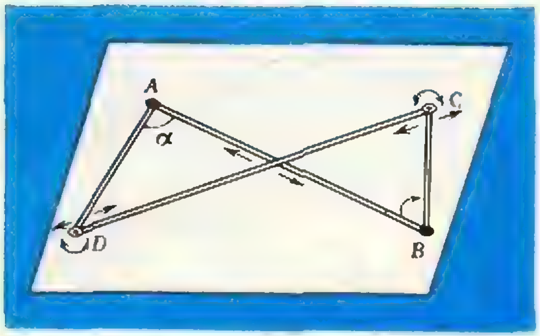


Рис. 3.

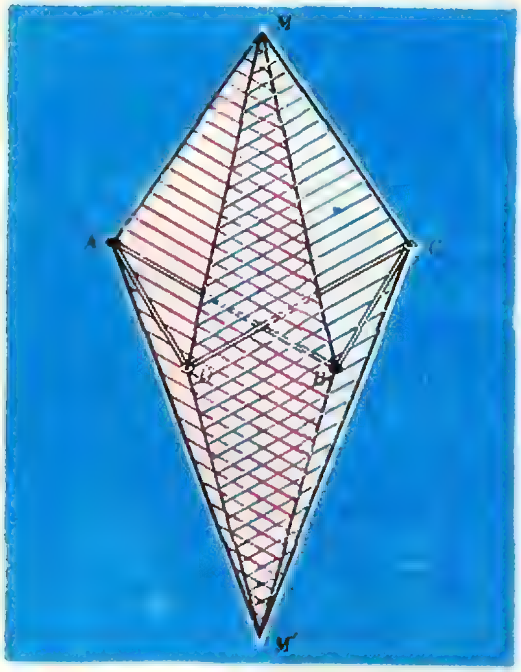


Рис. 4.

$a\approx5{,}3752$ см; $b\approx5{,}9103$ см; $c\approx$ $\approx9{,}0935$ см. К центру звезды подходят ребра b и c.)

В дальнейшем мы будем считать, что в замкнутом многограннике все грани абсолютно твердые, а по ребрам соседние грани соединены шарнирно, подобно пластинам дверной петли. *Допускает ли хоть один такой замкнутый многогранник непрерывное изгибание?*

3. Немного истории

Еще в 1813 году известный французский математик Огюстен Коши доказал, что *выпуклый многогранник вообще не допускает изгибаний с сохранением выпуклости* (если не считать изгибанием его зеркальное отражение) *). Пытаясь ответить на вопрос, может ли непрерывно изгибаться замкнутый невыпуклый многогранник, Р. Брикар в 1897 году построил примеры такого рода многогранников. Но это были многогранники с самопересечениями. Ниже мы опишем две конструкции Брикара.

Вопрос о существовании непрерывно изгибаемого замкнутого многогранника без самопересечений оставался открытым. Многие геометры предполагали, что такого многогранника не существует. Однако в 1977 году американский математик Р. Конелли **) такой многогранник построил! Его построение опирается на результаты Брикара.

4. Первый октаэдр Брикара

Рассмотрим на плоскости P четырехзвенный механизм $ABCD$ (рис. 3). Вершины A, C, B, D, в которых размещены шарниры, служат вершинами равнобочной трапеции. Четырехугольник $ACBD$ подвижен: угол α можно менять в некоторых пределах; при этом звенья AB и CD свободно скользят друг по другу. При изменении α вершины четырехугольника продолжают составлять равнобочную трапецию. Поэтому вокруг четырехугольника $ACBD$ в каждый момент можно описать окружность.

Зафиксируем теперь на плоскости P положение ребра AB. Тогда радиус $R(\alpha)$ описанной окружности непрерывно зависит от α. Центр окружности $O(\alpha)$ также непрерывно зависит от α (в том смысле, что малое изменение α приводит к малому сдвигу точки $O(\alpha)$).

Проведем через точку $O(\alpha)$ перпендикуляр к плоскости и отложим на этом перпендикуляре вверх и вниз от плоскости P отрезки $O(\alpha)M$

---

*) Остроумное доказательство Коши изложено, например, в книге Адамара «Элементарная геометрия», том 2 (Учпедгиз, 1952).

**) R. Connelly, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra (Publ. Math., IHES, 1978, v. 47, c. 333—338).

и $O(\alpha)M'$ длины $h(\alpha)=\sqrt{L^2-R^2(\alpha)}$, где L — некоторая постоянная. На каждом из звеньев AB, BC, CD, DA, как на основании, построим по два треугольника: с вершиной M и с вершиной M'. Все боковые стороны этих треугольников имеют длину L (независимо от α!). Эти восемь треугольников составляют *первый самопересекающийся октаэдр Брикара* (рис. 4). С изменением α он непрерывно изгибается.

К сожалению, даже если мы сумеем изготовить шарнирный механизм $ABCD$, построить из бумаги действующую модель первого октаэдра Брикара нам не удастся: смоделировать переменное пересечение треугольников (AMB и DMC, $AM'B$ и $DM'C$) листами бумаги нельзя! Однако, если эти треугольники построить, натянув на их боковые стороны горизонтальную сеть нитей, то на полученной модели будет видно, как треугольники непрерывно проскальзывают друг сквозь друга (рис. 4).

5. Зарубка Конелли

Рассмотрим двугранный угол QlQ', состоящий из прямолинейного ребра l и полуплоскостей Q и Q' (рис. 5). Его биссекториальную плоскость обозначим через P. Построим первый октаэдр Брикара так, чтобы звено AB лежало на прямой l, четырехугольник $ACBD$ — в плоскости P, а треугольники AMB, $AM'B$ — в полуплоскостях Q и Q'. После этого удалим из ребра l участок AB, а из граней Q и Q' — треугольники AMB и $AM'B$. Эти же два треугольника удалим и из октаэдра Брикара. Останется фигура, изображенная на рисунке 5. Будем говорить, что на ребре двугранного угла сделана *зарубка Конелли*.

Многогранник с краем, изображенный на рисунке 5, допускает непрерывное изгибание: с изменением α изгибается октаэдр Брикара и, одновременно с этим, непрерывно меняется расстояние MM', а также (в некоторых пределах) изменяется величина двугранного угла QlQ'.

В отличие от первого октаэдра Брикара, изготовить действующую модель зарубки Конелли из плотной чертежной бумаги (или тонкого картона) совсем несложно. Для этого из листа бумаги следует вырезать ромб $AMBM'$ и заменить его тремя изогнутыми четырехугольниками ($AMDM'$, $DMCM'$, $CMBM'$) так, как показано на рисунке 5. При сгибании и разгибании двугранного угла «клюв» зарубки Конелли причудливо высовывается и втягивается.

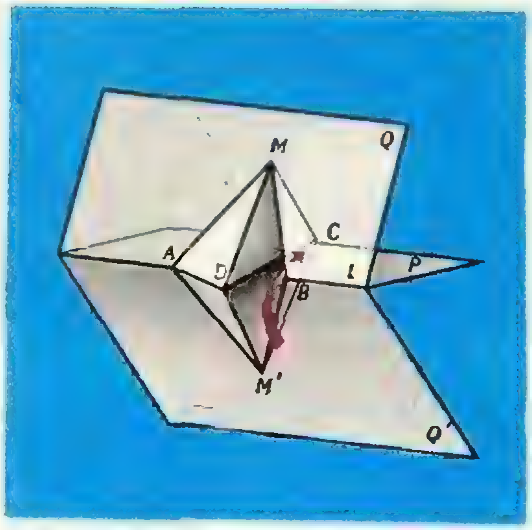


Рис. 5.

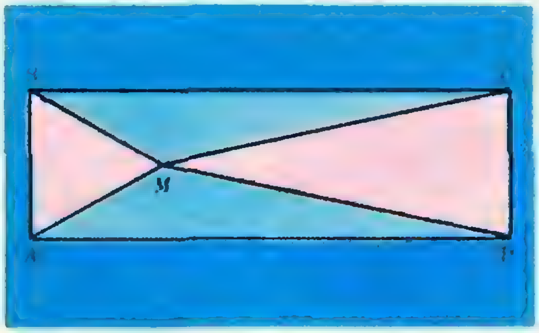


Рис. 6.

6. Второй октаэдр Брикара

Рассмотрим вытянутый прямоугольник $ABCD$. Внутри него отметим точку M и соединим ее с вершинами A, B, C, D. Точку M выберем для определенности так, чтобы треугольник ABM был равносторонним (рис. 6). Разрежем полученную фигуру по линии BMD. Часть $ABMD$ переломим по ребру AM и будем изменять двугранный угол α при ребре AM в пределах, скажем, $179° \leqslant$

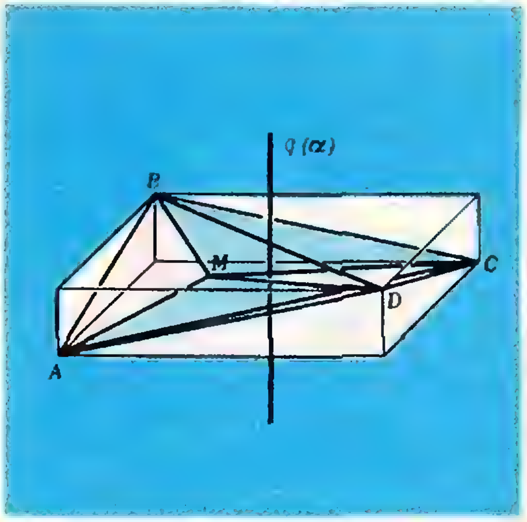


Рис. 7.

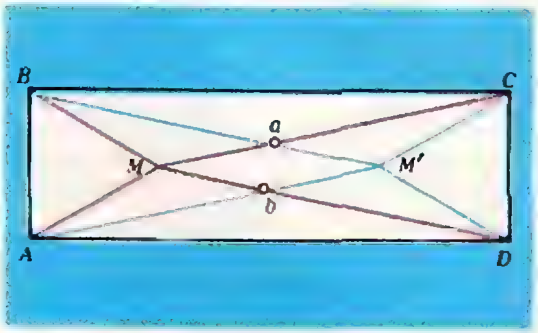


Рис. 8.

$\leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$. Часть $CDMB$ соответственно переломим по ребру MC, при котором образуем угол $\beta(\alpha)$, выбираемый для каждого α так, чтобы угол между отрезками BM и MD в обеих частях оказывался одинаковым. После этого приложим эти две части друг к другу по линии BMD.

Зафиксируем положение одной грани (например, грани ABM) в пространстве. Тогда изменению α в пределах $179^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$ соответствует непрерывное изгибание четырехгранного многогранника с краем. Если считать, что в ходе этого изгибания двугранные углы при ребрах AM, MC направлены ребром вниз, то хотя бы один из углов при ребрах AM, MD будет направлен ребром вверх (рис. 7). При $\alpha = 180^\circ$ все эти углы распрямляются, и мы приходим к плоскому положению четырехгранника, показанному на рисунке 6.

При каждом $179^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$ край $ABCD$ четырехгранника представляет собой замкнутый пространственный четырехугольник (не лежащий в одной плоскости), противоположные стороны которого попарно конгруэнтны. Докажите, что у такого четырехугольника прямая $q(\alpha)$, проходящая через середины диагоналей AC и BD, является общим перпендикуляром для этих не пересекающихся диагоналей (рис. 7).

Рассмотрим теперь при каждом α точку M', симметричную точке M относительно прямой $q(\alpha)$. Четырехгранник, составленный из треугольников с основаниями AB, BC, CD, DA и вершиной M', симметричен ранее рассмотренному относительно прямой $q(\alpha)$. Поэтому с изменением α он тоже будет непрерывно изгибаться. При $\alpha = 180^\circ$ он перейдет в плоский четырехугольник, ребра которого обозначены на рисунке 8 синими линиями.

Восьмигранник, составленный из двух указанных четырехгранников, представляет собой *второй самопересекающийся октаэдр Брикара*. Он также допускает непрерывное изгибание.

7. Многогранник Конелли

Рассмотрим второй октаэдр Брикара в том его положении, когда $\alpha = 180^\circ$ и он выродился в дважды покрытый прямоугольник. Заменим каждую из его восьми треугольных

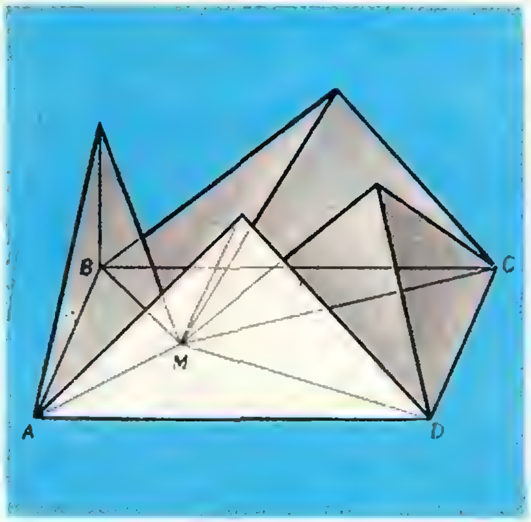


Рис. 9.

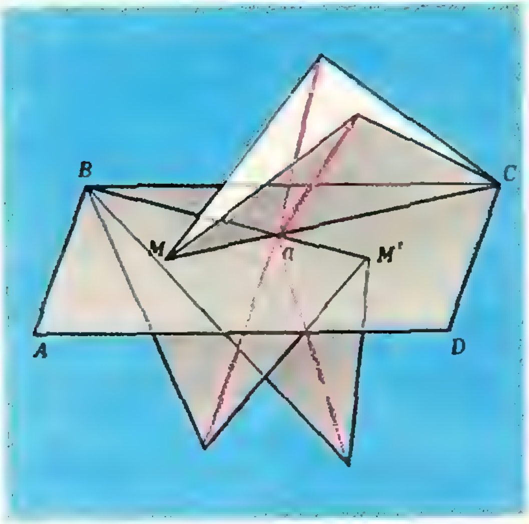


Рис. 10.

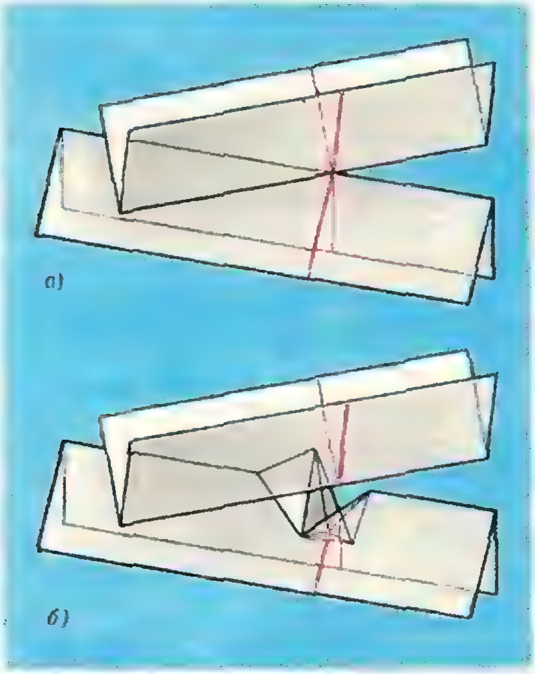


Рис. 11

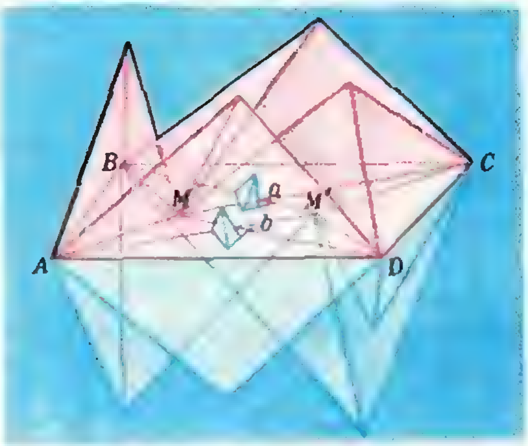


Рис. 12.

«граней» боковой поверхностью треугольной пирамиды, поставленной на эту грань. При этом пирамиды, основаниями которых служат треугольники с вершиной M, поместим над плоскостью $ABCD$ (рис. 9), а пирамиды с треугольными основаниями, имеющими вершину M', — под этой плоскостью.

Полученный многогранник (составленный боковыми поверхностями всех восьми пирамид) уже «почти» не имеет самопересечений: его части, расположенные над и под плоскостью $ABCD$, соприкасаются (кроме контура $ABCD$) всего в двух «лишних» точках (точки a и b на рисунке 8). На рисунке 10 изображено это соприкосновение вблизи точки a (оно имеет вид внешнего одноточечного соприкосновения ребер двух двугранных углов).

Устраним теперь самоприкосновение многогранника в точке a, сделав на ребре BM' зарубку Конелли. Аналогично вблизи точки b сделаем зарубку на ребре DM'.

Многогранник Конелли готов: он, очевидно, допускает непрерывное изгибание! Его общий вид показан на рисунке 12; его можно изготовить из чертежной бумаги.

У критически настроенного читателя могут возникнуть сомнения в том, что с помощью зарубки Конелли действительно можно устранить соприкосновения в точках a и b; это, однако, будет очевидно тем, кто изготовит модель зарубки Конелли или внимательно изучит рисунок 11. Дотошный читатель сумеет дать и строгое доказательство этого факта.

В заключение отметим, что в процессе изгибания объем многогранника Конелли не меняется (он сможет изгибаться, даже если его наполнить несжимаемой жидкостью!). Попробуйте это доказать самостоятельно.

* * *

Пока эта заметка готовилась к печати, геометр из Харькова А. Д. Милка прислал нам сделанную им и его товарищами модель многогранника Конелли. При изготовлении модели харьковчане пользовались следующими дополнительными «конструкторскими» соображениями.

1) Положение точки M в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 6) произволь-

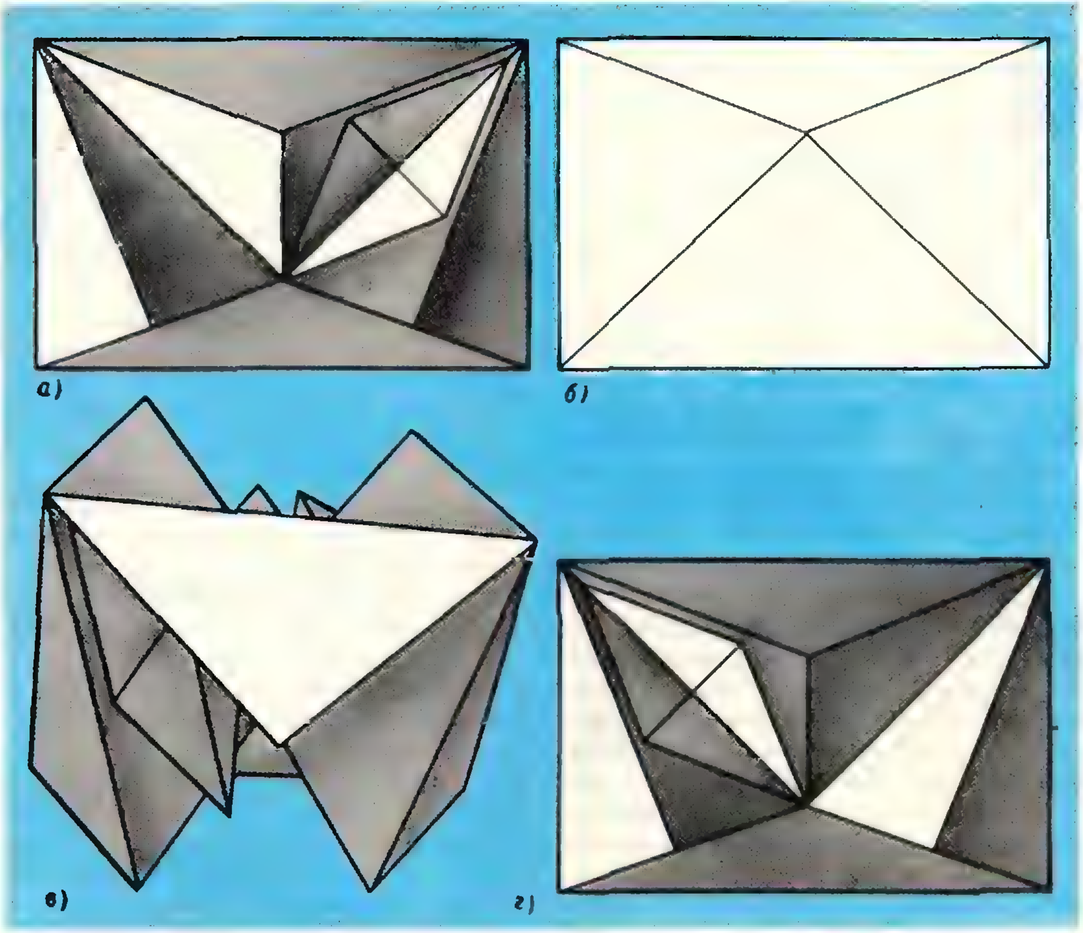


Рис. 13.

но. Важно только, чтобы она не была в центре прямоугольника. Точку M они расположили, как показано на рисунке 13, *б*). Поэтому ребра двугранных углов встречаются в точках a и b (рис. 11) почти под прямым углом, что облегчает вхождение в зарубку. Кроме того, выбор точки M позволил не строить пирамиды над гранями AMD и $BM'D$, что уменьшило общее число граней многоугольника.

2) Пирамиды над треугольниками AMB, BMC, CMD авторы из эстетических соображений сделали одинаковой высоты, чуть большей, чем половина стороны DC. Прилегающая к ребру DC треугольная грань для удобства построений сделана равнобедренной (равные ребра сходятся в вершине C).

3) Зарубки Конелли размещены на ребрах MC и AM'; зарубки довольно большие и сильно сплюснутые. На рисунке 13, *а*), *в*), *г*) показан вид модели «сверху», «сбоку» и «снизу» — модель поворачивается вокруг оси симметрии прямоугольника $ABCD$.

Поправка. В «Кванте», 1978, № 7 в условии задачи М511 допущена опечатка. Последнюю строчку условия следует читать так: *Докажите, что если* $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$, *то* $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$.

Срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 ноября.

В. Майер

Реакция вытекающей и втекающей струй

Представьте себе, что на плоту находится сосуд с поршнем, заполненный водой, причем из бака выведена за борт труба (рис. 1). Если поршень опустить, из трубы выйдет струя воды, и плот, очевидно, начнет двигаться в направлении, противоположном направлению движения воды в струе. А что произойдет, если поднять поршень так, чтобы струя воды вошла в сосуд?

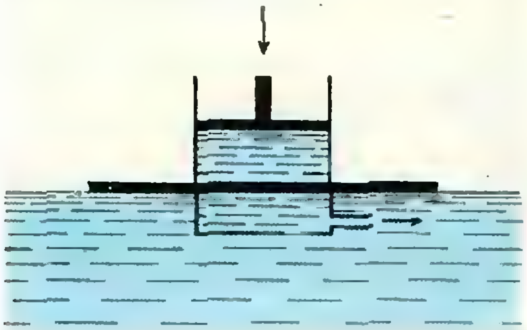


Рис. 1.

В порядке физико-психологического эксперимента этот вопрос задавался школьникам, учителям физики, преподавателям вузов. В большинстве случаев отвечающие были единодушны и говорили, что, конечно, плот начнет двигаться навстречу входящей по трубе в сосуд струе жидкости. Правильно ли это?

Чтобы вы почувствовали нетривиальность поставленного вопроса, заметим, что в конце прошлого века он привлек внимание выдающегося русского ученого Н. Е. Жуковского. Более того, Жуковский отнюдь не сразу решил проблему: вначале он приближенно показал, что реакция втекающей в сосуд жидкости очень мала, и лишь затем строго доказал, что она равна нулю! Разработанная Жуковским теория непроста, и нет смысла здесь ее рассматривать.

Можно придумать немало красивых опытов, позволяющих наблюдать реакцию вытекающей и втекающей струй. Некоторые из них описал еще Жуковский.

«Опыты подтверждают найденный нами результат о незначительности обратной реакции. Мы устраивали сосуды (рис. 2 и 3), которые поддерживались на воде с помощью пробковых поплавков и сообщались гуттаперчевыми трубками с небольшим воздушным насосом. Вдувая и вытягивая воздух, мы заставляли вытекать воду из сосуда или вбегать в него. При этом обнаружилось, что сосуд остается неподвижным, как бы сильно в него ни втягивали воду, и сейчас же приходит в движение, как скоро вода выталкивается. Таким об-

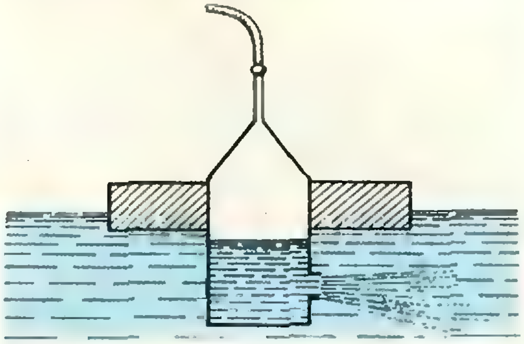


Рис. 2.

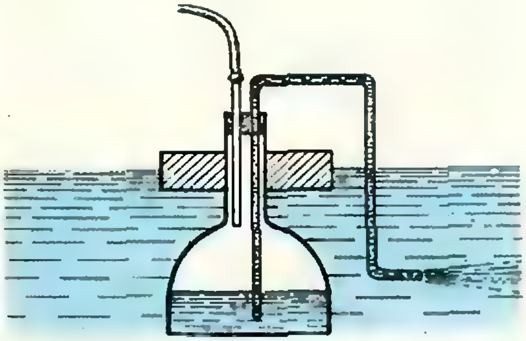


Рис. 3.

разом, совершая последовательное втягивание и выталкивание воды, можно получить быстрое движение сосуда в сторону, обратную выталкиванию воды.

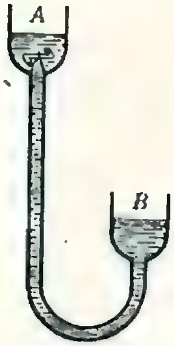


Рис. 4.

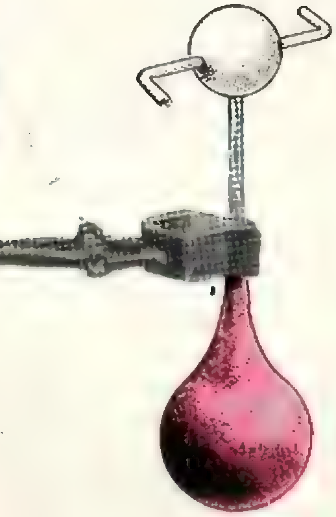


Рис. 5.

Слабость обратной реакции подтверждается также на опыте с сегнеровым колесом. Два сосуда (рис. 4) *A* и *B* соединены гуттаперчевой трубкой. В дне сосуда *A* установлено маленькое сегнерово колесо, через которое трубка сообщается с сосудом *B*. В оба сосуда налито некоторое количество воды. Если поставить сосуд *B* выше сосуда *A*, то вода начнет переливаться из *B* в *A*, и сегнерово колесо придет во вращательное движение; но если сосуд *B* поставить значительно ниже сосуда *A*, то вода будет переливаться из *A* в *B*, а сегнерово колесо будет оставаться неподвижным» *).

Опыт с сегнеровым колесом можно провести самостоятельно с помощью прибора, изображенного на рисунке 5. В шарике для пинг-понга аккуратно просверлите три отверстия диаметром 4—5 мм так, чтобы их центры совпадали с концами двух взаимно перпендикулярных диаметров шарика. В два отверстия, лежащие на одной линии, вставьте изогнутые над горячей плиткой полихлорвиниловые трубочки (они часто используются для изоляции проводов). В третье отверстие введите металлический стержень от шариковой авторучки, в верхней части которого (находящейся внутри шарика) сделано несколько отверстий. Чтобы шарик для пинг-понга устойчиво держался на конце стержня, в шарике изнутри тупым шилом нужно сделать небольшое углубление. На нижний конец стержня наденьте резиновую грушу.

При нажатии на грушу из изогнутых трубок сегнерова колеса выходит воздух, и колесо начинает вращаться. При втягивании воздуха грушей сегнерово колесо остается неподвижным. Периодически нажимая и отпуская грушу, можно заставить вращаться сегнерово колесо с довольно большой скоростью.

Подумайте, какие еще опыты, в которых проявляются реакции втекающей и вытекающей струй, можно было бы поставить.

---

*) Н. Е. Жуковский. Собрание сочинений. Том 3. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

Еще одна демонстрация невесомости

В четвертом номере нашего журнала была помещена статья А. Дозорова «Демонстрация невесомости», в которой описывался несложный прибор, позволяющий наглядно убедиться в отсутствии веса у свободно падающих тел. После этой публикации редакция получила письмо, в котором читатель Ю. Смирнов из Тулы пишет, что «продемонстрировать невесомость гораздо легче и проще, если использовать полиэтиленовый мешочек с небольшой дыркой, наполненный водой».

Вот какие несложные наблюдения предлагает Ю. Смирнов. Когда мешочек удерживается неподвижно на весу, из дырки вытекает струя воды. Если, удерживая наполненный водой мешочек за края, поднимать его ускоренно, струя становится более сильной. Если опускать мешочек, опять же удерживая его за края, струя воды ослабевает. Если же отпустить мешочек, предоставив ему возможность падать свободно, вода через дырку не вытекает.

Эти несложные опыты демонстрируют не только невесомость, но и возникновение перегрузок («положительных» и «отрицательных»)

В. Вавилов.

Сетчатые номограммы

На этом занятии вам будет предложено несколько заданий. Экспериментальная часть (выполнение чертежей) доступна всем, а обоснование требует знания производной. Наш совет — начните с чертежной работы, а потом займитесь доказательствами.

Отметим, что номограммы, изображенные на рисунках, не могут быть достаточно эффективно использованы на практике (из-за полиграфических трудностей они слишком мелки и не точны).

> *Математики, как французы: все, что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.*
>
> *И. В. Гёте*

1. Квадратные трехчлены и фазовая плоскость

Рассмотрим семейство квадратных трехчленов $\{x^2+px+q\}$ (p и q — действительные числа). На некоторой плоскости π — назовем ее *фазовой* — поставим в соответствие квадратному трехчлену x^2+px+q точку с координатами p и q. Например, трехчлену x^2+x+1 соответствует точка $(1;\ 1)$, а точка $(0;\ 0)$ соответствует трехчлену x^2.

Выясним, какие точки фазовой плоскости соответствуют трехчленам, имеющим совпадающие корни. Для этого приравняем дискриминант трехчлена к нулю; получим равенство

$$q=\frac{1}{4}p^2. \qquad (1)$$

Равенство (1) определяет в плоскости π так называемую *дискриминантную параболу* (рис. 1); эта парабола состоит из точек, соответствующих трехчленам вида $(x-x_0)^2 = x^2-2x_0x+x_0^2$.

Неравенство $q>\frac{1}{4}p^2$ задает в плоскости π область, лежащую «внутри» параболы (синяя область на рисунке 1). Точки этой области соответствуют трехчленам, не имеющим действительных корней. Квадратным трехчленам, имеющим два различных действительных корня, соответствуют точки, координаты которых удовлетворяют соотношению $q<\frac{1}{4}p^2$. Это — розовая область на рисунке 1.

Рассмотрим на плоскости π прямую

$$ap+q+a^2=0 \qquad (2)$$

(здесь p, q — переменные, a — фиксированное число). Легко сообразить, что точки, лежащие на прямой (2), соответствуют трехчленам, имеющим корень a. Прямая (2) называется *корневой прямой*. (Разумеется, корневых прямых много — каждому потенциальному корню a отвечает своя прямая.)

Как расположена корневая прямая по отношению к дискриминантной параболе? Ясно, что они касаются друг друга. Действительно, корневая прямая не пересекается с синей областью и имеет одну общую точку с границей этой области, а именно точку, соответствующую трехчлену $(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$. Этот вывод легко проверить непосредственным решением системы

$$\begin{cases} q=\frac{1}{4}p^2, \\ ap+q+a^2=0. \end{cases}$$

Поскольку точка $(-2a;\ a^2)$ принадлежит и прямой (2), и параболе (1), прямая (2) и парабола (1) касаются друг друга в этой точке.

Проведя рассуждение в обратном порядке, можно доказать, что *всякая прямая, касающаяся дискриминантной параболы, является корневой прямой* (докажите сами!).

Итак, через каждую точку дискриминантной параболы проходит

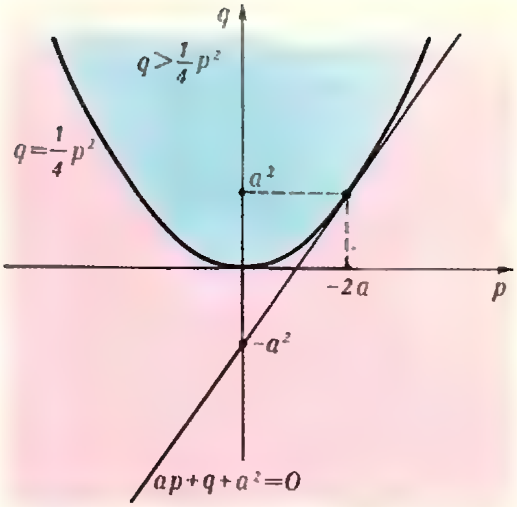


Рис. 1.

ровно одна корневая прямая (касательная к параболе). Через точки синей области не проходит ни одной корневой прямой. Это согласуется с тем, что из «внутренности» параболы нельзя провести к ней ни одной касательной. Наконец, поскольку каждой точке, лежащей в розовой области, соответствует уравнение, которое имеет два различных действительных корня, через каждую такую точку можно провести две различные корневые прямые. Это также согласуется с тем, что через точку, лежащую во «внешности» параболы, можно провести к ней ровно две касательные.

Взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости π и квадратными уравнениями позволяет наглядно описать все уравнения с заданными свойствами корней, указав соответствующие множества точек фазовой плоскости.

Для примера опишем все такие точки плоскости π, которые соответствуют квадратным уравнениям $x^2+px+q=0$ с двумя различными корнями, принадлежащими интервалу $]-2;\ 1[$.

Легко сообразить, что *квадратное уравнение* $x^2+px+q=0$ *тогда и только тогда имеет различные действительные корни, принадлежащие заданному интервалу, когда трехчлен* x^2+px+q *имеет положительный дискриминант, на концах интервала принимает положительные значения и абсцисса вершины параболы* $y=x^2+px+q$ *принадлежит заданному интервалу.*

Для интересующего нас интервала $]-2;\ 1[$ таким образом получается система:

$$\begin{cases} q<\frac{1}{4}p^2, \\ 4-2p+q>0, \\ 1+p+q>0, \\ -2<-\frac{p}{2}<1. \end{cases} \qquad (3)$$

На плоскости π система (3) задает множество точек, закрашенное на рисунке 2 розовым цветом. Таким образом, квадратным трехчленам, имеющим различные действительные корни, принадлежащие интервалу $]-2;\ 1[$, соответствуют внутренние точки этого криволинейного треугольника.

Корневые прямые $-2p+q+4=0$ и $p+q+1=0$ (отвечающие корням -2 и 1) делят внешность дискриминантной параболы на шесть областей: α_1, α_2, β_1, β_2, γ и δ (рис. 2). Число корней уравнения $x^2+px+q=0$, попадающих в интервал $]-2;\ 1[$, зависит от того, в какой из перечисленных областей плоскости π находится соответствующая этому уравнению точка $(p;\ q)$. Эта зависимость отражена в таблице, приведенной на рисунке 2 (проверьте!).

Задание 1

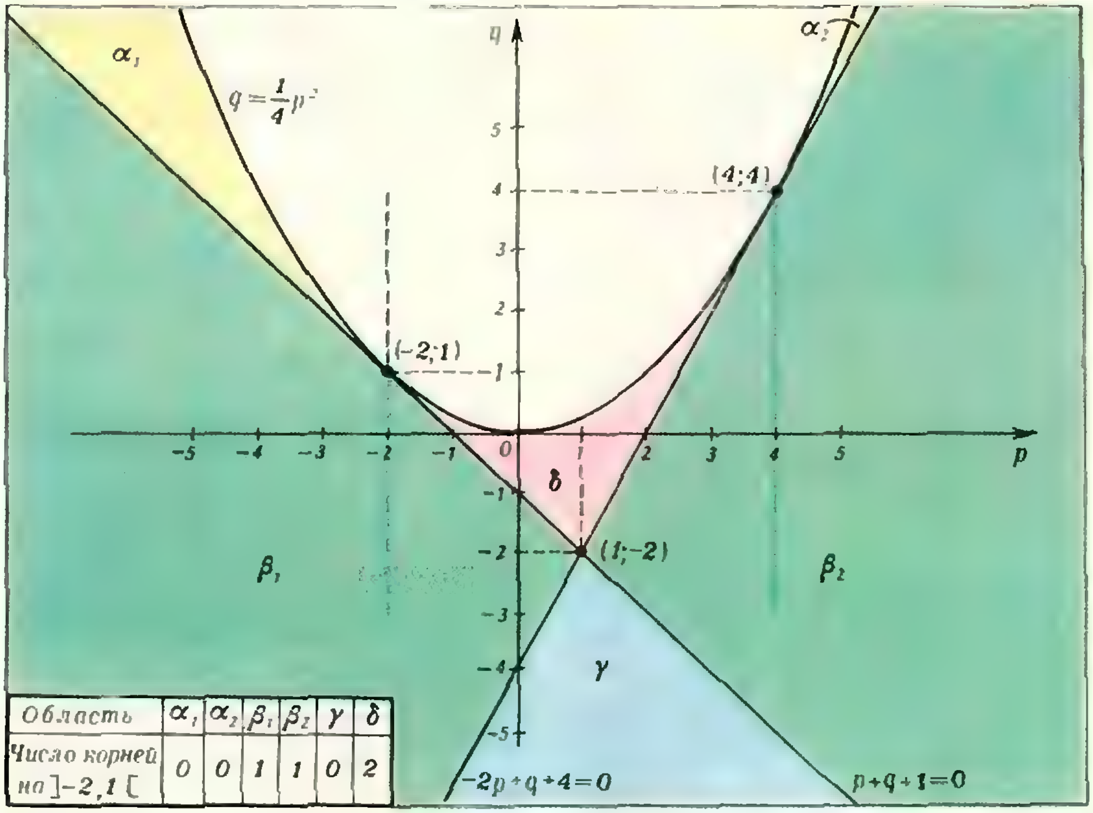
1. а) *Найдите множество всех таких точек* $(p;\ q)\in\pi$, *для которых уравнение* $x^2+px+q=0$ *имеет два действительных корня* x_1, x_2, *причем* $a<x_1<b$, $c<x_2<d$ *и* $a<b\leqslant c<d$.

б) *Составьте таблицу, при помощи которой по положению точки* $(p;\ q)$ *на плоскости* π *можно было бы ответить на вопрос, сколько корней уравнения* $x^2+px+q=0$ *попадает в интервалы* $]a,\ b[$ *и* $]c,\ d[$ *(для заданных* a, b, c *и* d*).*

Рассмотрите, например, случай, когда $a=-3$, $b=0$, $c=1$, $d=3$.

Следующая задача — для самостоятельного исследования.

2. Рассмотрим на отрезке $[0;\ \pi]$ семейство функций $\{\cos^2x+p\cos x+q\}$. Как и раньше, каждой функции



Область	α_1	α_2	β_1	β_2	γ	δ
Число корней на $]-2,1[$	0	0	1	1	0	2

Рис. 2.

этого семейства поставим в соответствие точку $(p;\ q) \in \pi$.

а) *Исследуйте функцию* $\cos^2 x + p\cos x + q$ *на возрастание и убывание в зависимости от положения точки* $(p;\ q)$ *на плоскости* π.

б) Пусть $M_0=(p_0;\ q_0)$ — фиксированная точка плоскости π, $M=(p;\ q)$ — переменная точка; $f_0(x)=\cos^2 x+p_0\cos x+q_0$, $f(x)=\cos^2 x+p\cos x+q$. Для заданных точек M и M_0 положим

$$d(M,\ M_0)=\max_{[0;\ \pi]}|f(x)-f_0(x)|.$$

Найдите множество точек $M=(p;\ q)\in\pi$ *таких, что*

1) $d(M,\ M_0)=1$;

2) $d(M,\ (2;\ 2))=d(M,\ (-2;\ -2))$.

2. Номограмма для решения уравнений $x^2+px+q=0$

Проведем на фазовой плоскости π достаточно много корневых прямых $ap+q+a^2=0$, придавая параметру a, например, значения 0; ±0,5; ±1; ±1,5; ±2; ±2,5; ±3; ±3,5. Возле каждой проведенной прямой напишем соответствующее значение a (рис. 3). Получившаяся «сеть» из прямых называется *сетчатой номограммой* (для решения квадратных уравнений).

Чтобы при помощи построенной номограммы найти корни данного уравнения $x^2+px+q=0$, нужно установить, какие корневые прямые проходят через соответствующую ему точку $(p;\ q)\in\pi$.

Решим, например, уравнение $x^2+0{,}5x-3=0$. Через точку $(0{,}5;\ -3)$ проходят корневые прямые с пометками $a=-2$ и $a=1{,}5$; следовательно, числа -2 и $1{,}5$ являются корнями нашего уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение $x^2+x-3=0$. Ему на фазовой плоскости соответствует точка $(1;\ -3)$. Корневые прямые, проходящие через эту точку, на нашей номограмме не нанесены. В этом случае поступим так. Заметим, что точка $(1;\ -3)$ лежит внутри четырехугольника $ABCD$, образованного корневыми прямыми при $a=-2{,}5$; $a=-2$; $a=1$ и $a=1{,}5$ (рис. 3).

Точкам этого четырехугольника соответствуют уравнения с двумя действительными корнями, один из которых попадает в интервал]1; 1,5[, а другой — в интервал]—2,5; —2[. Следовательно, корни уравнения x^2+ $+x-3=0$ также лежат в указанных интервалах. Взяв их середины, мы получим приближенные значения искомых корней:

$$x_1 \approx \frac{1,5+1}{2} = 1,25,$$

$$x_2 \approx \frac{-2-2,5}{2} = -2,25.$$

Подставив эти значения x_1 и x_2 в данное уравнение, получим:

$$(1,25)^2 + 1,25 - 3 = -0,1875,$$
$$(-2,25)^2 - 2,25 - 3 = -0,1875$$

— результат довольно грубый. Чтобы с помощью номограммы получить более точные значения корней, нужно, очевидно, увеличить на ней число корневых прямых, т. е. увеличить частоту изменения параметра a.

Для приближенного решения уравнений с совпадающими корнями удобно проградуировать дискриминантную параболу $q=\frac{1}{4}p^2$. Уравнению с корнями $x_1=x_2=a$ соответствует на ней точка $(-2a;\ a^2)$. Придавая параметру a различные значения и помечая этими значениями точки $(-2a;\ a^2)$ дискриминатной параболы, получаем на ней шкалу для решения уравнений с совпадающими корнями (рис. 3).

Задание 2

Начертите на миллиметровой бумаге сетчатую номограмму для решения уравнений $x^2+px+q=0$.

3. Номограмма для решения уравнений $x^3+px+q=0$

Рассмотрим теперь семейство кубических трехчленов $\{x^3+px+q\}$. Каждому трехчлену поставим в соответствие на фазовой плоскости π точку $(p;\ q)$.

Выясним, какие точки фазовой плоскости соответствуют кубическим трехчленам, имеющим совпадающие корни.

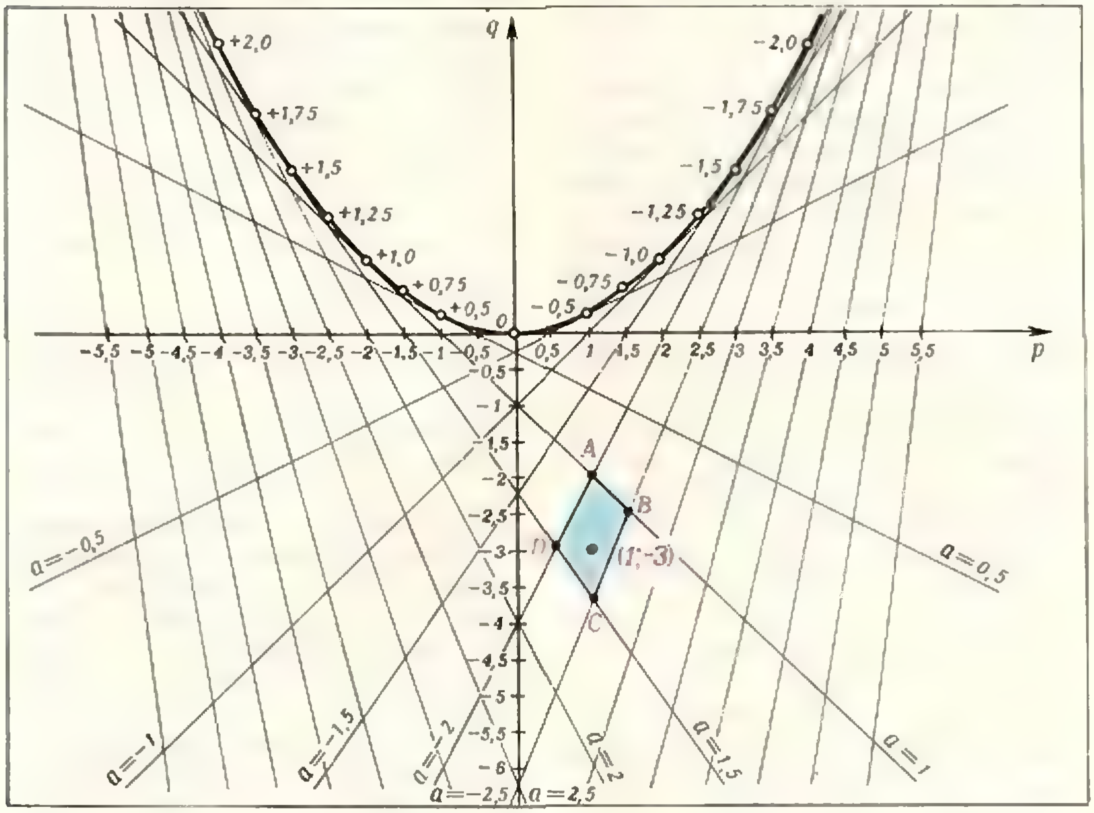


Рис. 3.

Пусть a — кратный корень кубического трехчлена x^3+px+q, т. е. $x^3+px+q=(x-a)^2(x-b)$, где b не обязательно отлично от a. Раскрыв скобки, получим тождество

$$x^3+px+q=x^3-(2a+b)x^2+(a^2+2ab)x-a^2b.$$

Отсюда $2a+b=0$, $a^2+2ab=p$, $a^2b=-q$. Исключив из этих уравнений b, получим $p=-3a^2$, $q=2a^3$; наконец, исключив a, получим искомое соотношение

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0, \qquad (4)$$

являющееся необходимым и достаточным условием для совпадения по крайней мере двух корней трехчлена x^3+px+q. Множество точек $(p; q)\in\pi$, координаты которых удовлетворяют уравнению (4), это кривая, изображенная на рисунке 4. Кривая (4) называется *дискриминантной кривой уравнения* $x^3+px+q=0$.

Прямая

$$ap+q+a^3=0, \qquad (5)$$

соответствующая трехчленам, имеющим корень a, как и раньше, называется *корневой*.

Каково взаимное расположение кривой (4) и прямой (5) на фазовой плоскости π? Имеют ли они точки пересечения, и, если имеют, то сколько?

Чтобы ответить на эти вопросы, заметим, что, поскольку в уравнении $x^3+px+q=0$ член с x^2 отсутствует, сумма его корней x_1, x_2 и x_3 равна нулю: $x_1+x_2+x_3=0$ (докажите это). Точке пересечения $(p; q)$ кривой (4) с прямой (5) соответствует кубический трехчлен x^3+px+q, у которого a либо кратный корень, либо — нет. В первом случае $x_1=x_2=a$ и $x_3=-2a$. Во втором случае $x_1=a$ и $x_2=x_3=-\frac{a}{2}$. Значит, кривая (4) и прямая (5) имеют две общие точки $(p_1; q_1)$ и $(p_2; q_2)$: одна из них отвечает трехчлену $x^3+p_1x+q_1=(x-a)^2\times(x+2a)$, другая — трехчлену $x^3+p_2x+q_2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2(x-a)$. Эти две точки совпадают в том и только в том случае, когда $a=0$.

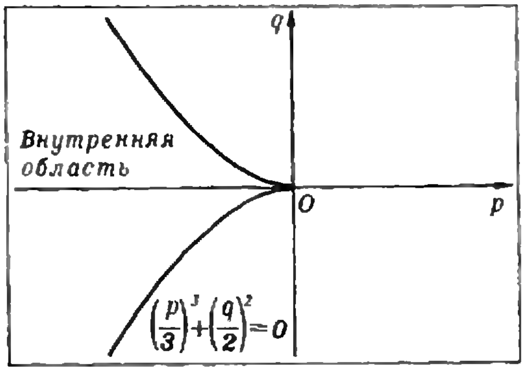


Рис. 4.

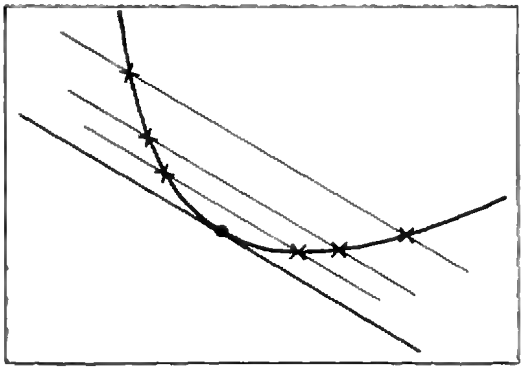


Рис. 5.

Найдем теперь точки пересечения прямой (5) и кривой (4) чисто алгебраически. Для этого из (5) выразим q через p и подставим в (4). Мы получили для определения p кубическое уравнение

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{a^3+pa}{2}\right)^2=0. \qquad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{a^3+pa}{2}\right)^2=\frac{1}{27}(p+3a^2)^2\left(p+\frac{3a^2}{4}\right).$$

Отсюда следует, что числа $p_1=-3a^2$ и $p_2=-\frac{3a^2}{4}$ — корни уравнения (6), причем p_1 — кратный корень.

Кратному корню уравнения (6) соответствуют «совпадающие» точки пересечения кривой (4) и прямой (5). В этой «сдвоенной» точке пересечения корневая прямая касается дискриминантной кривой (строгого доказательства этого утверждения мы здесь, к сожалению, привести не можем; интуитивная идея доказательства ясна из рисунка 5).

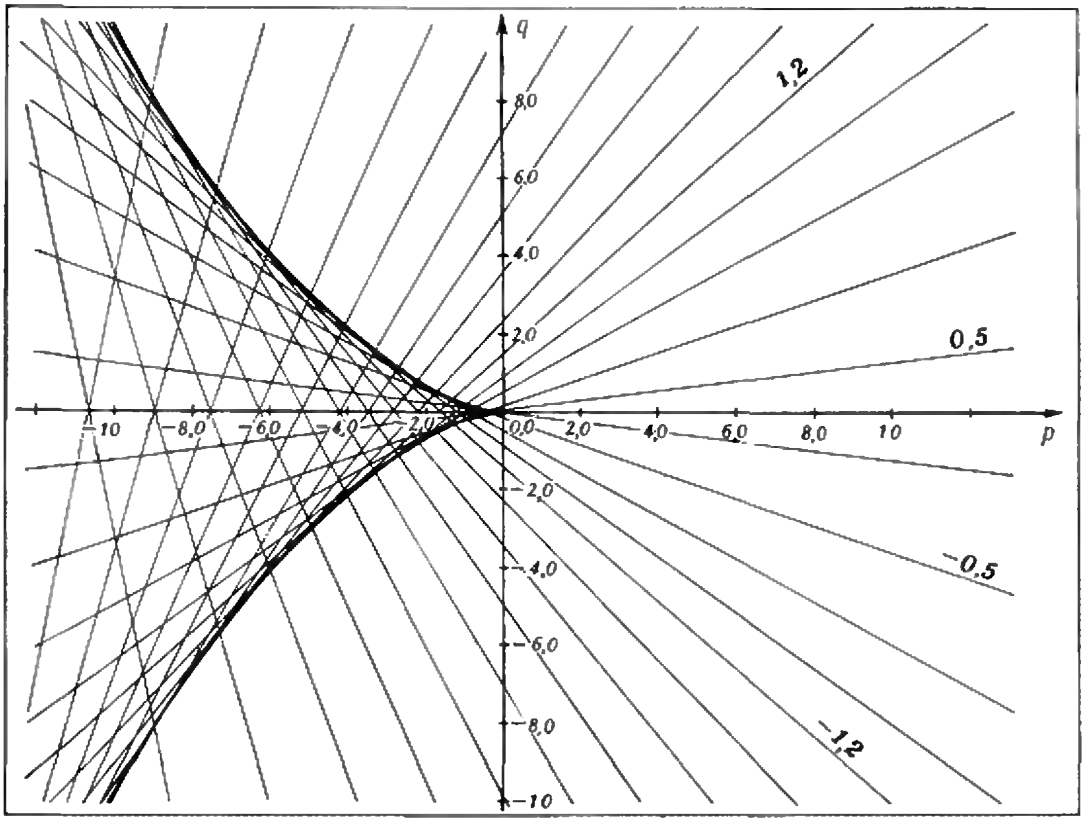


Рис. 6.

Проведя все рассуждения в обратном порядке, мы получим, что *всякая касательная к дискриминантной кривой является корневой прямой.*

Начертив на плоскости π достаточно много корневых прямых (5), мы получим сетчатую номограмму для решения кубических уравнений $x^3+px+q=0$. Такая номограмма изображена на рисунке 6.

Число корней конкретного уравнения $x^3+px+q=0$ зависит от того, сколько касательных можно провести из точки $(p;\ q) \in \pi$ к дискриминантной кривой (4) (каждая касательная является корневой прямой, а каждой корневой прямой отвечает свое значение корня).

Дискриминантная кривая делит плоскость π на две части: *внутреннюю* (содержащую отрицательную полуось изменения p) и *внешнюю.*

Так как дискриминантная кривая состоит из двух симметричных *выпуклых* дуг *), то через любую точку внешней области можно провести только одну касательную к ней (рис. 7, *а*): если точка $(p;\ q)$ лежит выше оси Op, то к нижней дуге, а если ниже оси Op, то к верхней; сама ось Op касается кривой (4) в ее особой точке $(0;\ 0)$. Таким образом, точки внешней области соответствуют тем кубическим уравнениям, которые имеют только один (действительный) корень. В этой области

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2>0. \qquad (7)$$

Неравенство (7) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение $x^3+px+q=0$ имеет в точности один действительный корень.

В любой точке внутренней области выполняется противоположное неравенство

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2<0. \qquad (8)$$

С другой стороны, из любой точки внутренней области можно провести три различные касательные к кривой (4) (рис. 7, *б*). Действительно, для точек, расположенных на оси Op, это следует из симметричности кривой (рис. 7, *в*); число же касательных не может изменяться, если переходить к другим точкам, не пересекая при этом кривой. Таким образом, неравенство (8) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение $x^3+px+q=0$ имеет три различных действительных корня.

---

*) Дуга гладкой кривой называется *выпуклой*, если она лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее внутренней точке.

Если точка $(p;\ q)$ лежит на верхней дуге кривой (4), то через нее можно провести касательную к кривой в самой этой точке и, кроме того, еще касательную к нижней дуге (рис. 7, *г*). Аналогично — для точек нижней дуги. Следовательно, в случае $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0$ $(p\neq 0,\ q\neq 0)$ уравнение $x^3+px+q=0$ имеет один корень кратности 2 и один корень кратности 1.

Точка (0; 0) — исключительный случай; ей отвечает уравнение $x^3=0$ с тремя совпадающими корнями.

Задание 3

1. *Начертите на миллиметровой бумаге сетчатую номограмму для решения уравнений* $x^3+px+q=0$.

2. *Найдите множество всех таких точек* $(p;\ q)\in\pi$, *для которых уравнение* $x^3+px+q=0$ *имеет три различных действительных корня, принадлежащих заданному интервалу* $]a;\ b[$. *Составьте таблицу, при помощи которой по положению точки* $(p;\ q)$ *на плоскости* π *можно было бы определить, сколько корней уравнения* $x^3+px+q=0$ *попадает в заданный интервал* $]a;\ b[$.

Рассмотрите, например, случай, когда $a=-2$, $b=4$.

В качестве задачи для самостоятельного исследования предлагаем построить (и обосновать) сетчатые номограммы для решения следующих уравнений четвертой степени:

а) $x^4+px+q=0$,
б) $x^4+x^2+px+q=0$,
в) $x^4-x^2+px+q=0$.

Сделать это вам помогут книги:

1. А. Н. Колмогоров и др.. *Летняя школа на Рубском озере* (М., «Просвещение», 1971).
2. Ф. Клейн. *Элементарная математика с точки зрения высшей* (М. — Л., Гостехтеориздат, 1933).

Приложение

(для читателей, знающих, что такое комплексные числа).

Здесь мы рассмотрим квадратные уравнения $x^2+px+q=0$ с действительными p и q и отрицательным дискриминантом, т. е. уравнения, для которых $q>\frac{1}{4}p^2$ (этим уравнениям на фазовой плоскости π соответствует «внутренность» дискриминантной параболы). Такие уравнения имеют два сопряженных корня: $a+bi$ и $a-bi$. По теореме Виета

$$\begin{cases} 2a=-p, \\ a^2+b^2=q, \end{cases} \tag{9}$$

откуда

$$q=\frac{p^2}{4}+b^2. \tag{10}$$

Найдем все точки $(p;\ q)\in\pi$, соответствующие уравнениям с комплексными корнями вида $a+ni$ $(n\in Z)$.

Из соотношения (10) следует, что уравнениям с корнями такого вида соответствуют точки плоскости π, лежащие на параболах

$$q=\frac{p^2}{4}+1,\ q=\frac{p^2}{4}+4,\ q=\frac{p^2}{4}+9,\ \ldots$$

(рис. 8); эти параболы получаются парал-

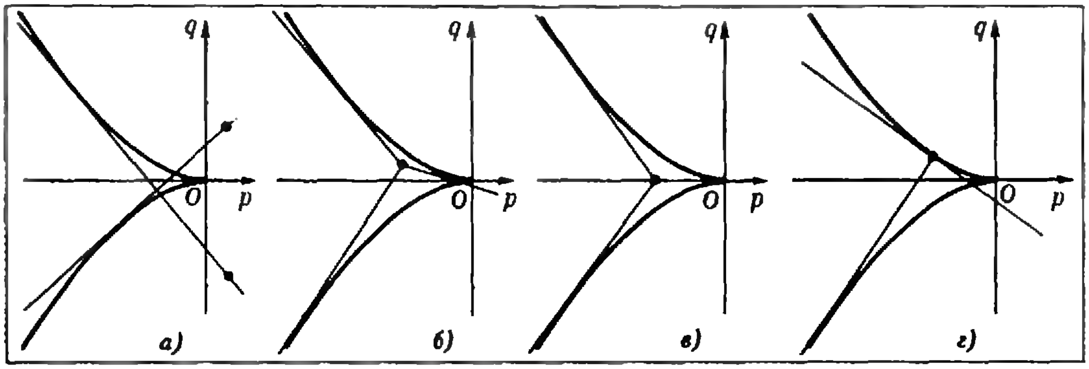


Рис. 7.

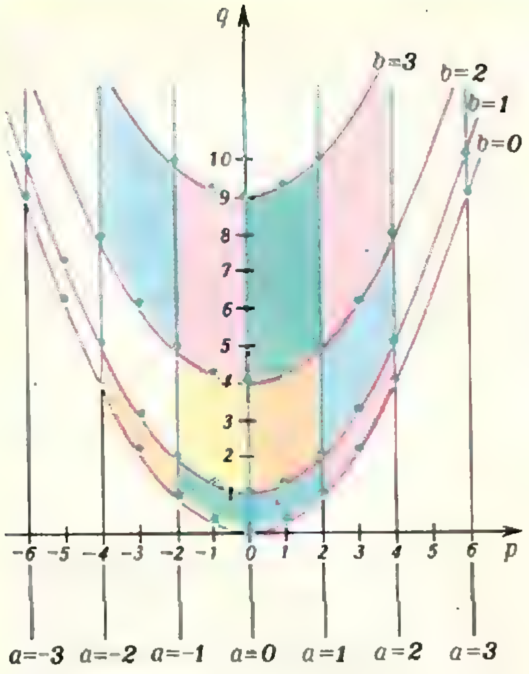


Рис. 8.

лельным переносом дискриминантной параболы.

Из (9) видно, что уравнениям с корнями вида $n+bi$ (n — целое число) соответствуют на плоскости π точки лучей $p=-2n$ с вершинами на дискриминантной параболе (рис. 8).

Поэтому уравнениям $x^2+px+q=0$, имеющим комплексный корень $a+bi$, удовлетворяющий, например, условиям:

$$1<a<2, \qquad 1<b<2,$$

на плоскости π соответствуют точки $(p;\, q)$, координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} q>\frac{1}{4}p^2, \\ -4<p<-2, \\ \frac{1}{4}p^2+1<q<\frac{1}{4}p^2+4. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы при помощи сетчатой номограммы, изображенной на рисунке 8, решить конкретное уравнение $x^2+px+q=0$, у которого $q>\frac{1}{4}p^2$, надо посмотреть, между какими лучами и между какими параболами на плоскости π лежит точка $(p;\, q)$.

Заинтересовавшимся читателям мы предлагаем рассмотреть в плоскости π области комплексных корней для уравнений $x^3+px+q=0$ и $x^4-x^2+px+q=0$.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что

а) $7^{444}-1$ делится на 1976;

б) $7^{n!}-1$ делится на 1976 при $n \geqslant 4$.

С. Майзус
(г. Запорожье)

2. Существуют ли натуральные числа, куб которых оканчивается (в десятичной записи) цифрами 1976?

И. Гопенгауз
(г. Москва)

3. У некоторого целого числа подсчитали сумму цифр, у полученного числа вновь подсчитали сумму цифр и т. д. Всего эту операцию проделали 1978 раз. В результате получили число 1979. Может ли исходное число иметь 1978 различных делителей (включая само число, но не единицу)?

А. Альтшулер
(г. Москва)

4. Если записать число 1978 словами и подсчитать количество букв в такой записи (*тысяча девятьсот семьдесят восемь*), то получится число 30. Для него та же операция даст число 8 и так далее. Получится последовательность
1978, 30, 8, 6, 5, 4, 6, 5, 4,...

а) Доказать, что, чем бы ни начиналась подобная последовательность, она с некоторого номера начнет циклически повторяться.

б) Найти все циклы, которые могут здесь возникнуть.

М. Штеренберг
(г. Саратов)

Н. Клумова

Номограммы из выравненных точек

В статье В. Вавилова (с. 22) рассказывается о приближенном решении уравнений второй и третьей степени с помощью сетчатых номограмм. На с. 83 «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса тоже изображена номограмма для приближенного решения уравнений $x^2+px+q=0$ (таблица XXII). Однако это — не сетчатая номограмма, а так называемая номограмма из выравненных точек. Что это такое, как она получается и как пользоваться такой номограммой, объясняется в настоящей заметке.

Нарисуем две вертикальные параллельные прямые — ось p с началом отсчета A и ось q с началом отсчета B (рис. 1; на этом рисунке отрезок AB перпендикулярен осям p, q, но это вовсе не обязательно). Возьмем произвольные числа α, β и положительное число a. На оси p возьмем точку C с координатой $-a^{\alpha-\beta}$, на оси q — точку D с координатой $-a^{\alpha}$. Пусть $[AD]\cap[BC]=E$.

Проведем через E произвольную прямую, не параллельную осям p, q. Обозначим координату пересечения M этой прямой с осью p через p_0, пересечения N с осью q — через q_0. Тогда

$$a^{\alpha}+p_0a^{\beta}+q_0=0, \qquad (1)$$

т. е. *число a является корнем уравнения*

$$x^{\alpha}+p_0x^{\beta}+q_0=0. \qquad (2)$$

Прямая MN может пересекаться с осями p, q одним из трех способов: $p_0<0$, $q_0>0$ (рис. 1); $p_0>0$, $q_0<0$ (рис. 2); $p_0<0$, $q_0<0$ (рис. 3). Докажем равенство (1) для случая, изображенного на рисунке 1 (остальные два случая рассматриваются аналогично).

Из подобия треугольников AEC и BED имеем $\frac{|BD|}{|AC|}=\frac{|DE|}{|AE|}$, откуда $\frac{|DE|}{|AE|}=\frac{a^{\alpha}}{a^{\alpha-\beta}}=a^{\beta}$. Далее из подобия треугольников AEM и NED следует $\frac{|DN|}{|AM|}=\frac{|DE|}{|AE|}$, то есть $\frac{a^{\alpha}+q_0}{-p_0}=a^{\beta}$ (рис. 1), что и дает (1).

Зафиксируем произвольные α, β и рассмотрим всевозможные урав-

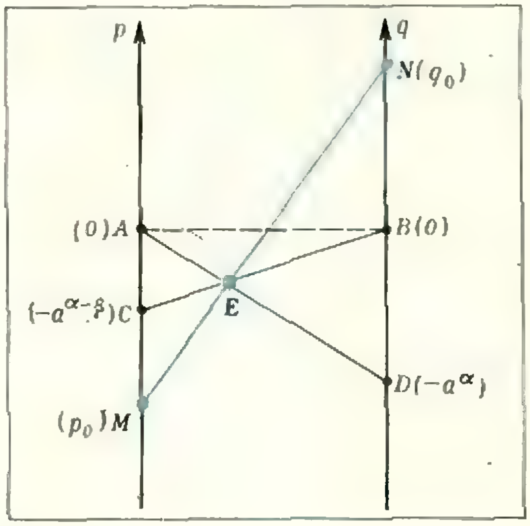


Рис. 1.

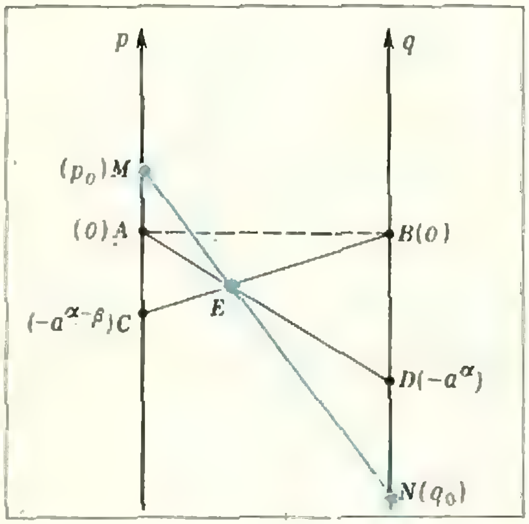


Рис. 2.

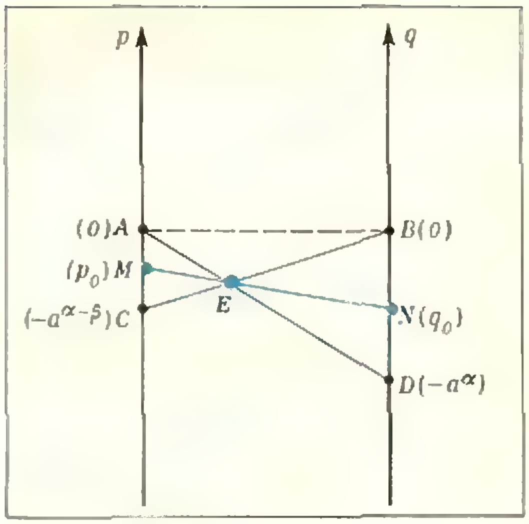

p
q
(0)A
B(0)
$(p_0)M$
E
$N(q_0)$
$(-a^{\alpha-\beta})C$
$D(-a^{\alpha})$

Рис. 3.

нения

$$x^{\alpha}+px^{\beta}+q=0. \qquad (3)$$

Номограмма для отыскания положительных корней таких уравнений рисуется следующим образом: параметру a придаются разные положительные значения и для каждого из них строится точка E так, как рассказано выше; полученные точки, помеченные соответствующими значениями параметра, соединяются плавной кривой Г (рис. 4).

Если мы хотим теперь при помощи этой номограммы приближенно найти положительные корни конкретного уравнения $x^{\alpha}+p_0x^{\beta}+q_0=0$, надо на оси p взять точку M с координатой p_0, на оси q — точку N с координатой q_0 и провести прямую MN. Каждая точка пересечения прямой MN с кривой Г дает, в силу (1), положительный корень уравнения (2).

Теперь понятно, почему так построенная номограмма называется *номограммой из выравненных точек*: точки, соответствующие коэффициентам p, q уравнения, и точки, соответствующие искомым положительным корням уравнения $x^{\alpha}+px^{\beta}+q=0$, лежат на одной прямой.

Упражнения

1. Построите номограммы из выравненных точек для нахождения положительных корней уравнений

$$x^{m}+px^{n}+q=0,$$

если $m=3$, $n=2$; $m=4$, $n=1$; $m=4$, $n=2$; $m=4$, $n=3$.

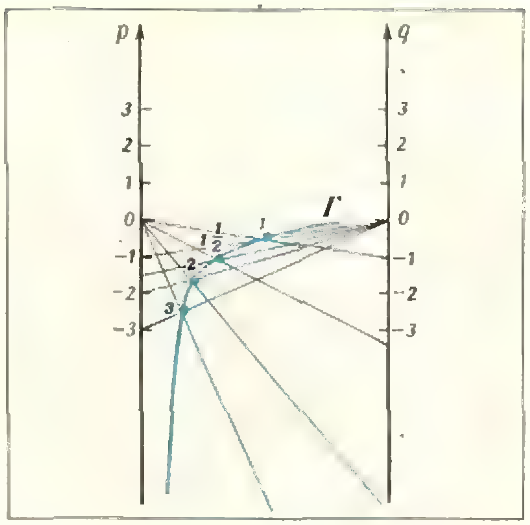

p
q
3
2
1
0
−1
−2
−3
Г
1
$\frac{1}{2}$
1
2
3

Рис. 4.

2. Постройте номограммы из выравненных точек для нахождения положительных корней уравнений

$$x^{\alpha}+px^{\beta}+q=0,$$

если $\alpha={}^1/_2$, $\beta={}^1/_3$; $\alpha={}^1/_3$, $\beta={}^1/_4$; $\alpha=1$, $\beta={}^1/_3$; $\alpha={}^1/_4$, $\beta={}^2/_3$; $\alpha={}^3/_2$, $\beta={}^1/_4$; $\alpha={}^3/_4$, $\beta={}^1/_3$.

На рисунке 5 приведена номограмма из выравненных точек для

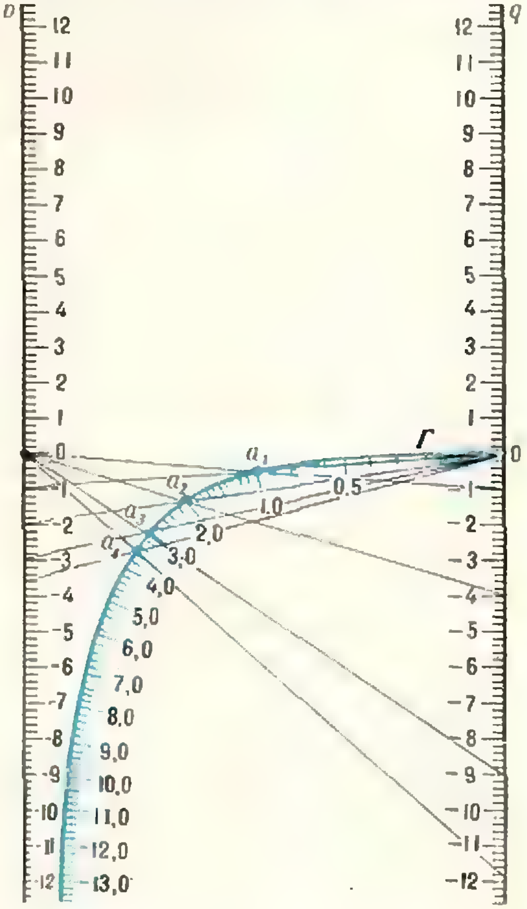

p
q
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−8
−9
−10
−11
−12
Г
a_1
a_2
a_3
a_4
0,5
1,0
2,0
3,0
4,0
5,0
6,0
7,0
8,0
9,0
10,0
11,0
12,0
13,0

Рис. 5.

решения уравнений (3) при $\alpha=2$, $\beta=1$. Эта номограмма взята из «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса.

Точки на осях p и q имеют на рисунке координаты от $-12{,}6$ до $+12{,}6$. Поэтому, если значения коэффициентов p_0 и q_0 данного конкретного уравнения $x^2+p_0x+q_0=0$ не превосходят по модулю 12,6 и отличны от 0, то для нахождения положительных корней этого уравнения нужно проделать то, что описано выше. Построенная прямая MN может пересекаться с кривой Г в двух точках (в этом случае оба корня данного уравнения $x^2+p_0x+q_0=0$ положительны), в одной точке (в этом случае второй корень уравнения отрицателен), может касаться кривой (в этом случае у уравнения $x^2+p_0x+q_0=0$ — кратный положительный корень); наконец, она может не иметь с кривой Г ни одной общей точки (в этом случае либо оба корня уравнения отрицательны, либо у него вообще нет действительных корней).

Для получения отрицательных корней уравнения $x^2+p_0x+q_0=0$ надо, сделав замену переменной $x=-t$, искать на той же номограмме положительные корни уже для уравнения $t^2-p_0t+q_0=0$.

Если значения коэффициентов p и q по модулю превосходят 12,6, то следует сделать замену переменной $x=kt$ и перейти от уравнения $x^2+px+q=0$ к уравнению $t^2+(p/k)t+q/k^2=0$; число k выбирается так, чтобы числа p/k и q/k^2 были уже в указанных на номограмме интервалах.

В случае, если оба корня уравнения $x^2+px+q=0$ близки к нулю, также выгодно сделать замену переменной $x=kt$. Так, для уравнения $x^2-0{,}89\,x+0{,}16=0$ значения корней по номограмме найти трудно. Положив $x=0{,}2\,t$, получим уравнение $t^2-4{,}45\,t+4=0$; его корни $t_1=1{,}2$; $t_2=3{,}2$, откуда $x_1=0{,}24$, $x_2=0{,}64$.

Упражнение 3

Используя таблицу XXII из «Таблиц» Брадиса, решите следующие квадратные уравнения:

а) $x^2-2{,}4x+1{,}5=0$; б) $x^2-6x+9=0$;
в) $x^2-6x+8{,}99=0$; г) $x^2-13x+17=0$;
д) $x^2-0{,}3x+0{,}2=0$; е) $x^2-17x+0{,}8=0$.

Задачи наших читателей

1. Доказните неравенство

$$\sqrt{2}+\sqrt{4-2\sqrt{2}}+\sqrt{6-2\sqrt{6}}+\ldots+\sqrt{2n-2\sqrt{(n-1)n}}\geqslant\sqrt{n(n+1)}.$$

О. Бабаев
(г. Нахичевань)

2. Назовем натуральное число A *интересным*, если при вычитании из него числа, состоящего из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, получается натуральное число, состоящее из тех же цифр, что и A. Таковым, например, является число 1980, так как $1980-891=1089$ (подразумевается, что $0891=891$).

а) Существует ли 1978-значное интересное число, состоящее только из единиц, четверок и семерок?

б) Найдите все трехзначные интересные числа.

в) Существуют ли четырехзначные интересные числа, отличные от 1980?

г) Сколько существует интересных чисел, цифры которых образуют арифметическую прогрессию?

д) Докажите, что 1979-значных интересных чисел будет больше 10^{100}.

е) Для какого натурального N существует N-значное интересное число?

В. Батырев
(г. Москва)

3. Докажите без помощи таблиц, что $\operatorname{tg} 34^\circ>2/3$.

С. Майзус
(г. Запорожье)

4. Постройте бесконечную последовательность чисел, в которой первый член равен a $(a\neq 1)$ и сумма любого числа первых членов равна их произведению.

И. Суев
(г. Кишинев)

А. Тоом

Решения задач ВЗМШ

В этой статье приводятся решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1978 года («Квант», 1978, № 1).

3. *Какие значения может принимать a, если*

$$|a+b| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad |a-3b| \leqslant 2?$$

Ответ: $-\frac{5}{4} \leqslant a \leqslant \frac{5}{4}$.

Проще всего решать эту задачу графически. Возьмем на плоскости систему координат и найдем область, состоящую из точек $(a; b)$, удовлетворяющих неравенствам. Легко сообразить, что это параллелограмм с вершинами $(^5/_4; -^1/_4)$, $(^1/_4; ^3/_4)$, $(-^5/_4; ^1/_4)$ и $(-^1/_4; -^3/_4)$.

4. *На плоскости дан квадрат с центром в точке O. В этой точке расположен прожектор, который освещает угол величиной 90°. В начальный момент времени прожектор освещал угол, стороны которого проходили через две вершины квадрата. Затем прожектор начал вращаться вокруг точки O. В какой момент времени площадь освещенной части квадрата будет больше: когда прожектор повернется на 45° или на 72°?*

Площадь освещенной части все время одинакова и составляет четверть площади квадрата. Действительно, стороны угла в 90° с вершиной в центре квадрата вместе с их продолжениями делят квадрат на 4 конгруэнтные части, переходящие друг в друга при поворотах на 90°, 180°, 270°.

5. *Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали 30 000 курьеров. Известно следующее: если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, то общее число курьеров было бы четвертой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьеров было прислано Хлестакову в каждый день? (Приведите все возможные ответы.)*

Пусть в первый день прислали x, во второй y, в третий z курьеров. Из условия следует, что

$$2x+y+z=(z-y)^4.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$30\,000 \leqslant 2x+y+z \leqslant 60\,000,$$

откуда

$$30\,000 \leqslant (z-y)^4 \leqslant 60\,000.$$

Подсчетом убеждаемся, что в этом промежутке лежат только

$$14^4=38\,616 \quad \text{и} \quad 15^4=50\,625.$$

В каждом из этих случаев легко найти ответ:

$$\begin{cases} x=8\,616, \\ y=10\,685, \\ z=10\,699 \end{cases} \text{и} \quad \begin{cases} x=20\,625, \\ y=4\,680, \\ z=4\,695. \end{cases}$$

7. *Найти все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению*

$$x^2-xy-2y^2=18.$$

Левую часть можно разложить:

$$(x+y)(x-2y)=18.$$

Заметим, что разность множителей, стоящих в левой части, равна $3y$ и потому делится на 3. Итак, 18 надо разложить на 2 множителя, разность которых делится на 3. Это можно сделать четырьмя способами, каждый из которых дает свой ответ:

$$18=3\cdot 6, \quad 18=(-3)\cdot(-6),$$
$$18=6\cdot 3, \quad 18=(-6)\cdot(-3),$$

$$\begin{cases} x=4 \\ y=-1 \end{cases} \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases} \begin{cases} x=-5 \\ y=-1. \end{cases}$$

8. *Дан прямоугольник ABCD. Внутри него берется произвольная точка и через нее проводятся две прямые, параллельные сторонам AB и BC. Эти прямые разбивают прямоугольник на 4 меньших прямоугольника. Доказать, что площадь хотя*

бы одного из прямоугольников, содержащих точки A или C, не больше четверти площади исходного прямоугольника.

Пусть сторона AB разрезана на куски, составляющие части k и $1-k$ от нее, а сторона BC разрезана на куски, составляющие части l и $1-l$ от нее. Нам надо доказать, что $kl\leqslant\frac{1}{4}$ или $(1-k)(1-l)\leqslant\frac{1}{4}$ при всех k, l от 0 до 1.

Для этого достаточно убедиться, что $kl(1-k)(1-l)\leqslant\frac{1}{16}$. Но $k(1-k)\leqslant\frac{1}{4}$ и $l(1-l)\leqslant\frac{1}{4}$ (эти неравенства выводятся из неравенств $\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$ и $\left(l-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$).

Поэтому $kl(1-k)(1-l)$ действительно не больше $^1/_{16}$.

9. *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} 1+x_1^2=2x_2, \\ 1+x_2^2=2x_3, \\ 1+x_3^2=2x_4, \\ 1+x_4^2=2x_1. \end{cases}$$

Сложив все уравнения, получим

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+(x_3-1)^2+(x_4-1)^2=0.$$

Это равенство возможно только, если

$$x_1=x_2=x_3=x_4=1,$$

что и дает единственный ответ.

10. *Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную — минус 5 баллов; если же он задачу не решил, ему ставят 0 баллов. В результате ученик получил 13 баллов. Сколько задач решал ученик?*

Пусть ученик правильно решил x задач и неправильно решил y задач. Тогда

$$8x-5y=13,$$

откуда $5y+13$ должно делиться на 8.

Ясно, что y нечетно. Пробуем нечетные значения y подряд и находим подходящие: $y=7$ и $y=15$. Подходит только первое: $y=7$, $x=6$. (При $y=15$, $x=11$ и $x+y=24>20$.)

Советуем купить!

Математика

Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа.* Ц. 22 к.

Перельман Я. И. *Живая математика. Математические рассказы и головоломки.* Ц. 30 к.

Постников М. М. *Теорема Ферма.* Ц. 20 к.

Солодовников А. С. *Системы линейных неравенств.* Ц. 15 к.

Физика, астрономия

Бутенин Н. В. *Введение в аналитическую механику.* Ц. 56 к.

Бутиков Е. И. и др. *Физика для поступающих в вузы.* Ц. 1 р.

Китайгородский А. И. *Введение в физику.* Ц. 1 р. 41 к.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике.* Ц. 69 к.

Кресин В. З. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть.* Ц. 35 к.

Майер В. В. *Простые опыты с ультразвуком.* Ц. 20 к.

Сборник задач по общему курсу физики (Механика). Ц. 67 к.

Сборник задач по общему курсу физики (Термодинамика и молекулярная физика) Ц. 32 к.

(Окончание см. с. 58)

Премии «Кванта»

В 1977/78 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала — подпиской на «Квант» на 1979 год.

1. **БАЛИНСКИЙ АЛЕКСАНДР** (с. Дубляны Львовской обл.)
2. **БАРЗЫКИН АЛЕКСАНДР** (пос. Черноголовка Московской обл.)
3. **БАТЫРЕВ ВИКТОР** (г. Москва)
4. **ГАВРИЛОВ МИХАИЛ** (пос. Черноголовка Московской обл.)
5. **ГРИШЕЧКИН СЕРГЕЙ** (г. Москва)
6. **ГУБА ВИКТОР** (г. Вологда)
7. **ИЗМАЙЛОВ РАУФ** (г. Баку)
8. **КУЛЕСКО АЛЕКСАНДР** (г. Донецк)
9. **ЛАШКИН ВЛАДИМИР** (г. Киев)
10. **ЛЮДМИРСКИЙ ДМИТРИЙ** (г. Киев)
11. **МИНДЛИН ДМИТРИЙ** (г. Ташкент)
12. **МИРЛИН АЛЕКСАНДР** (г. Ленинград)
13. **НЕНАШЕВ АЛЕКСАНДР** (г. Ленинград)
14. **ОПАРИН АНДРЕЙ** (г. Горький)
15. **РОЖАНСКИЙ ЛЕВ** (г. Москва)
16. **ТРОФИМОВ ВЛАДИМИР** (г. Москва)
17. **ФИРСОВА ГАЛИНА** (г. Ленинград)
18. **ШВЕЙДЕЛЬ ВЛАДИМИР** (г. Великие Луки)

За успешное участие в XII Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1979 год награждаются:

1. **АБДУГАНИЕВ АБДУВАЛИ** (Ташкентская обл.)
2. **БРАТЧЕНКО СВЕТЛАНА** (х. Бойко-Понура Краснодарского края)
3. **ИРМАТОВ АНВАР** (г. Наманган)
4. **ЛУЧКО ЮРИЙ** (д. Словатичи Гродненской обл.)
5. **ФАЙСМАН АЛЕКСАНДР** (г. Ташкент)
6. **ЩЕРБАКОВ СЕРГЕЙ** (г. Ленинград)

задачник Кванта

Задачи

M521—M525; Ф533—Ф537

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 ноября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М521, М522» или «Ф533». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М521. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}. \quad (8,9 \text{ кл.})$$

Г. Гуревич

М522. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать? (8 кл.)

В. Произволов

М523. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним? (8 кл.)

Н. Нецветаев

М524. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$. (8 кл.).

С. Конягин

М525. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$. (10 кл.).

А. Берзиньш

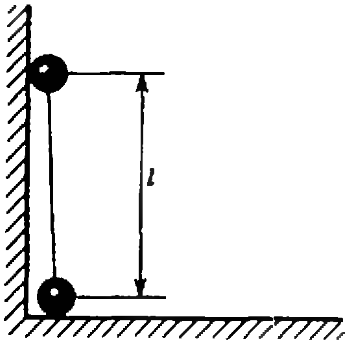


Рис. 1.

Ф533. Гантелька длины l стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 1). Нижний шарик гантельки смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

А. Зильберман

Ф534. Астронавты «Скайлэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров (см., например, журнал «Наука и жизнь», 1976, № 9). Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить наличием под дном океана шаровой полости, заполненной водой, оценить радиус этой полости. Глубина океана $h=6$ км, средняя плотность земных пород $\rho=3\times10^3$ кг/м^3.

А. Стасенко

Ф535. Потенциальная энергия взаимодействия двух одинаковых заряженных маленьких шариков с зарядами q_1 и q_2 равна $W_1=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 l}$, где l — расстояние между центрами шариков. Если шарики соединить проволокой, заряды шариков станут одинаковыми, и потенциальная энергия взаимодействия шариков станет равной $W_2=\frac{(q_1+q_2)^2}{16\pi\varepsilon_0 l}$. Так как $(q_1+q_2)^2>4q_1q_2$ (при $q_1\neq q_2$), то $W_2>W_1$, то есть потенциальная энергия взаимодействия зарядов возрастает! Откуда берется дополнительная энергия?

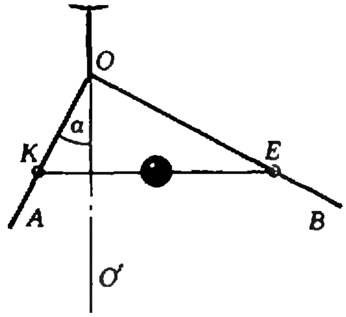


Рис. 2.

Ф536. Жесткая прямоугольная конструкция AOB ($\widehat{AOB}=90°$) вращается вокруг вертикальной оси OO', так что $\widehat{AOO'}=\alpha$ (рис. 2). С помощью колец, которые могут свободно скользить по сторонам AO и OB, на конструкцию надет легкий стержень KE длины $2a$. К середине стержня прикреплен небольшой массивный шарик. При какой угловой скорости вращения конструкции стержень займет горизонтальное положение?

С. Кротов

Ф537. Полировкой металлической пластины ее можно сделать зеркальной. Оценить, какова может быть максимальная высота шероховатостей, оставшихся после полировки, чтобы пластина зеркально отражала пучок света с длиной волны $\lambda=5\cdot10^{-8}$ м, падающий на нее под углом $\alpha=45°$.

Решения задач

М471—М474; Ф487—Ф490, Ф492

М471. *Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трех областей.*

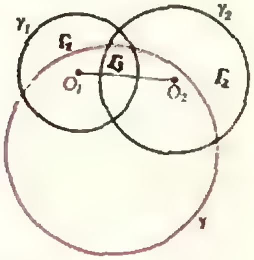


Рис. 1.

В решении мы будем использовать следующее почти очевидное соображение: *если каждая из двух кривых делит площадь данной фигуры пополам, то они обязательно пересекаются.* Предположим, что нужная окружность нашлась. Проведем прямую O_1O_2, соединяющую центры данных окружностей γ_1 и γ_2 (рис. 1). Она делит площадь фигуры Γ_1 пополам. Но и γ делит эту площадь пополам. Значит, внутри Γ_1 у γ и (O_1O_2) есть точка пересечения. Аналогично, у них есть точки пересечения внутри Γ_2 и внутри Γ_3. Мы получили, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках — противоречие. Значит, такой окружности γ быть не может.

Предлагаем вам подумать над задачей с аналогичной формулировкой (эту задачу нам прислал читатель *В. Калмыков* из г. Воронежа).

Две концентрические окружности ограничивают две области: кольцо и круг меньшего радиуса. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих двух областей.

С. Фомин

◆

М472. *Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней куба совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше 1/3 объема куба.*

На каждом ребре куба K должна существовать по крайней мере одна точка, принадлежащая многограннику T,— иначе проекция T в направлении этого ребра куба не совпала бы с соответствующей гранью куба. Выберем на каждом ребре куба K по точке многогранника T (некоторые из них могут оказаться вершинами куба). Пусть C — их выпуклая оболочка (рис. 4). Из выпуклости многогранника T следует, что $C \subset T$. Полагая длину ребра куба равной 1, подсчитаем объем дополнения $K\setminus C$ многогранника C до куба K.

$K\setminus C$ — это объединение восьми треугольных пирамид при восьми вершинах куба K (рис. 2). Разобьем эти пирамиды на пары — по паре пирамид при каждом из четырех вертикальных ребер куба. Сумма объемов каждой пары пирамид не превосходит $\frac{1}{3}hS_1+\frac{1}{3}(1-h)S_2$ (см. рис. 2).

Поскольку $S_1\leqslant\frac{1}{2}$, $S_2\leqslant\frac{1}{2}$, получаем

$$\frac{1}{3}hS_1+\frac{1}{3}(1-h)S_2\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(h+(1-h))=\frac{1}{6}.$$

Итак, *объем* $(K\setminus C)\leqslant 4\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$, следовательно,

объем $T\geqslant$ *объем* $C\geqslant 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

Заметим, что оценка $1/3$ — точная: объем тетраэдра, вершины которого — четыре несмежных вершины куба, составляет $1/3$ объема куба.

В. Прасолов

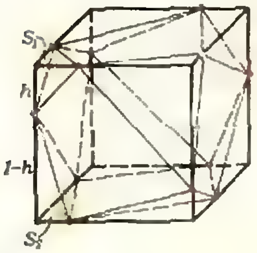


Рис. 2.

◆

М473. *Имеется две группы по n гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что*

а) $2n-1$ взвешиваниями можно расположить и все $2n$ гирь в порядке возрастания их масс;

Рассмотрим более общую задачу: *имеется две группы гирь, в одной группе — m штук, в другой — n. В каждой группе гири расположены в порядке возрастания их масс. Требуется найти число $\varphi(m, n)$ такое, что*

а) проведя $\varphi(m, n)$ взвешиваний, можно расположить все $m+n$ гирь в порядке возрастания их масс;

б) меньшим чем $\varphi(m, n)$ числом взвешиваний этого сделать, вообще говоря, нельзя.

Задача М473 состоит в том, чтобы доказать, что $\varphi(n, n)=2n-1$.

б) меньшим 2n — 1 числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя.
(За одно взвешивание сравниваются массы двух гирь; массы всех 2n гирь попарно различны.)

Докажем вначале, что

$$\varphi(m, n) \leqslant m + n - 1. \qquad (1)$$

Обозначим массы гирь через $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$ так, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$, $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$.

Первым взвешиванием сравним m-ю гирю первой группы с n-й гирей второй группы. Если $a_m < b_n$, то очевидно, масса b_n — самая большая, и остается упорядочить группу из m упорядоченных гирь и $n - 1$ упорядоченных гирь. Если же $a_m > b_n$, то самая большая масса — a_m, и остается упорядочить группу из $m - 1$ упорядоченных и n упорядоченных гирь. Поэтому $\varphi(m, n) \leqslant 1 + \max(\varphi(m-1, n), \varphi(m, n-1))$.

Заметим теперь, что $\varphi(m, 0) = \varphi(n, 0) = 0$. После этого неравенство (1) доказывается индукцией.

Теперь докажем, что

$$\varphi(n, n) \geqslant 2n - 1. \qquad (2)$$

Пусть

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n. \qquad (3)$$

Докажем, что в этом случае, выясняя порядок гирь, необходимо сравнить a_i с b_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В самом деле, пока не осуществлено такое сравнение, невозможно отличить порядок гирь (3) от порядка, который отличается от него перестановкой a_i и b_i.

Точно так же доказывается необходимость сравнения всех a_i с b_{i-1} для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Для описанных сравнений необходимо осуществить $n + (n - 1) = 2n - 1$ взвешиваний, так что $\varphi(n, n) \geqslant 2n - 1$.

Из неравенств (1) и (2) следует пункты а) и б) задачи М473.

Аналогичным методом нетрудно доказать, что $\varphi(n, n + 1) = 2n$. Применяя более тонкие рассуждения, можно показать, что $\varphi(n, n + 2) = 2n + 1$ $(n \geqslant 1)$ и $\varphi(n, n + 3) = 2n + 2$ $(n \geqslant 4)$.

Вычисление же числа $\varphi(m, n)$ в общем случае — по-видимому, очень трудная задача. Попробуйте доказать, например, что $\varphi(5, 9) = 12$.

В. Гринберг

◆

М474. *Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (кроме самого себя); таковы, например, числа $6 = 1 + 2 + 3$ и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Докажите, что число N несовершенно, если известно, что оно*
а) при делении на 4 дает остаток 3;
б) при делении на 6 дает остаток 5.
(До сих пор неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.)

а) Пусть N — совершенное число, остаток от деления которого на 4 равен 3. Очевидно, можно считать, что N — составное. Если $N = a \cdot b$, то поскольку N нечетно, a и b также — нечетные числа. Остаток от деления любого нечетного числа на 4 равен либо 1, либо 3. Легко проверить, что если этот остаток для a равен 1, то для b он равен 3 (и наоборот).

Пусть теперь $a_1, \ldots, a_n$ — все попарно различные и не равные 1 делители числа N, дающие при делении на 4 остаток 1: $a_i = 4k_i + 1$. Тогда числа $b_i = N/a_i$ также все попарно различны, ни одно из них не совпадает с N, и каждое из них при делении на 4 дает остаток 3: $b_i = 4l_i + 3$. Кроме того, набор чисел $1, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ исчерпывает все попарно различные, не равные N, делители числа N.

Предположим теперь, что N — совершенное число, т. е.

$$N = 1 + a_1 + b_1 + \ldots + a_n + b_n.$$

Тогда $N = 4l + 1$ — противоречие с условием.

б) Пусть остаток от деления N на 6 равен 5. Легко проверить, что если $N = a \cdot b$, то остаток от деления на 6 одного из чисел a, b равен 1, а другого — 5.

Дальнейшее рассуждение проводится как в задаче а).

Задача М474 возникла из вопроса, ответ на который до сих пор неизвестен: существуют ли нечетные совершенные числа? (Проверено, что среди чисел, меньших 10^7, таких чисел нет.) Из М474 вытекает, что если нечетное число N является совершенным, то при делении на 4 оно дает остаток 1, а при делении на 6 — либо остаток 1, либо 3.

Пусть $N = 6l + 1$. Если l — нечетно, то остаток от деления N на 4 равен 3. Поэтому нечетные числа, дающие при делении на 6 остаток 1, должны иметь вид $12k+1$.

Если же $N = 6l + 3$, то аналогично можно показать, что N может быть совершенным только тогда, когда оно имеет вид $12k + 9$.

Таким образом, мы доказали, что если нечетное совершенное число существует, то оно либо имеет вид $N = 12k + 1$, либо $N = 12k + 9$. Полученный результат можно еще усилить. Как нам сообщили авторы задачи *К. Сатаркулов* и *С. Югай*, в 1952 году английский математик Тушар доказал, что *если нечетные совершенные числа существуют, то они либо имеют вид $N = 12k + 1$, либо $N = 36k + 9$.* Результат Тушара немедленно вытекает из следующих двух утверждений:

1. *Нечетное совершенное число может иметь либо вид $3^{2n}(4k+1)$, либо $3^{2n+1}(4k+3)$.*

3. *Совершенных чисел вида $3^{2n+1}(4k+3)$ не существует.*

Попробуйте доказать эти утверждения самостоятельно.

И. Клумова

◆

Ф487. *Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния $d_1 = 3F$, где F — фокусное расстояние объектива, и с расстояния $d_2 = 5F$. Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше F.*

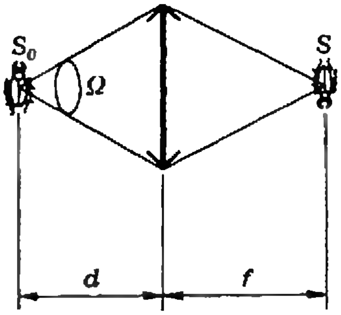


Рис. 3.

Обозначим через B световой поток, испускаемый единицей площади поверхности жука внутри единичного телесного угла (поверхностная яркость). Тогда с площади S_0 (рис. 3) на объектив фотоаппарата падает световой поток

$$\Phi = BS_0\Omega = BS_0\frac{S_д}{d^2}.$$

Здесь $\Omega = \frac{S_д}{d^2}$ — телесный угол (на самом деле это равенство не точное, а приближенное), $S_д$ — площадь диафрагмы объектива, d — расстояние от фотоаппарата до жука.

После объектива световой поток попадает на фотопленку, создавая на ней изображение. Освещенность этого изображения

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{BS_0S_д}{d^2S},$$

где S — площадь изображения выделенного участка поверхности жука. Найдем ее.

Поскольку линейное увеличение линзы равно f/d (f — расстояние от линзы до изображения), отношение площадей изображения и предмета

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{f}{d}\right)^2.$$

Согласно формуле линзы, $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, откуда

$$f = \frac{Fd}{d-F}, \quad и \quad \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Следовательно, освещенность изображения

$$E = \frac{BS_д}{d^2}\,\frac{S_0}{S} = \frac{BS_д(d-F)^2}{d^2F^2}.$$

По условию задачи при фотографировании жука в двух масштабах освещенность изображения должна быть одной и той же: $\frac{BS_{д1}(d_1-F)^2}{d_1^2F^2} = \frac{BS_{д2}(d_2-F)^2}{d_2^2F^2}$. Отсюда

$$\frac{S_{д2}}{S_{д1}} = \frac{(d_1-F)^2d_2^2}{(d_2-F)^2d_1^2} = \frac{25}{36}, \quad и \quad \frac{D_{д2}}{D_{д1}} = \frac{5}{6}.$$

Ф488. *Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон $a = 0{,}020$ м и $b = 0{,}030$ м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого равен $\alpha = 30^\circ$, пленка кажется зеленой ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м).*

1). Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора $\rho = 10^3$ кг/м³, показатель преломления пленки $n = 1{,}33$.

2) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет падать на нее и затем отражаться перпендикулярно пленке?

Указание. Учесть, что при отражении света от более плотной среды фаза волны скачком меняется на π.

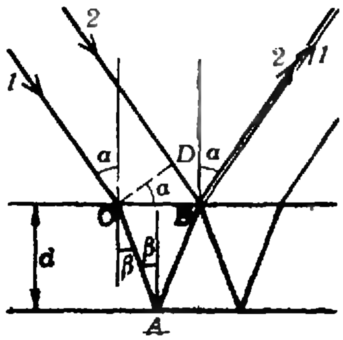


Рис. 4.

То, что пленка кажется в отраженном свете зеленой, означает, что световые лучи 1 и 2 (рис. 4), соответствующие длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, интерферируя, дают максимум. Следовательно, оптическая разность хода этих лучей равна целому числу длин волн.

Длина волны в пленке равна

$$\lambda_п = \frac{\lambda}{n}$$

(λ — длина волны в вакууме, n — показатель преломления пленки). На пути OAB луча 1 (см. рис. 4) укладывается

$$k_1 = \frac{OA + AB}{\lambda_п} \text{ длин волн.}$$

Так как $OA = AB = \dfrac{d}{\cos\beta}$, то

$$k_1 = \frac{2d}{\lambda_п \cos\beta} = \frac{2dn}{\lambda \cos\beta}.$$

Число длин волн, укладывающихся на пути DB луча 2, равно

$$k_2 = \frac{DB}{\lambda} = \frac{OB \sin\alpha}{\lambda} = \frac{2d \operatorname{tg}\beta \sin\alpha}{\lambda} = \frac{2d \sin\alpha \sin\beta}{\lambda\cos\beta}.$$

Так как $\sin\alpha = n\sin\beta$, то $k_2 = \dfrac{2dn\sin^2\beta}{\lambda\cos\beta}$.

Учитывая, что при отражении луча 2 (в точке B) происходит изменение фазы волны на π, то есть теряется полволны, найдем, что оптическая разность хода лучей 1 и 2 после отражения от пленки равна

$$\Delta = \left[k_1 - \left(k_2 + \frac{1}{2}\right)\right]\lambda = 2dn\cos\beta - \frac{\lambda}{2}.$$

Для того чтобы лучи, интерферируя, давали максимум, должно выполняться условие $\Delta = k\lambda$ (k — целое):

$$2dn\cos\beta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Различные значения k (при неизменных n и λ) соответствуют разным толщинам пленки:

$$d = \frac{(2k+1)}{2n\cos\beta}\frac{\lambda}{2} = \frac{2k+1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\frac{\lambda}{4}$$

(так как

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}\Bigg).$$

Толщина самой тонкой пленки ($k = 0$) равна

$$d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\frac{\lambda}{4} \approx 10^{-7} \text{ м}.$$

Масса такой пленки равна

$$m_{\min} = abd_{\min}\rho = 0{,}06 \text{ мг}.$$

Для более толстых пленок

$$d_k = (2k+1)\,d_{\min},$$
$$m_k = (2k+1)\,m_{\min} = (2k+1) \cdot 0{,}06 \text{ мг}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Массу пленки можно измерить с помощью весов, точность которых 0,1 мг, в том случае, если $m > 0{,}1$ мг (то есть $(k > 2)$. При этом ошибка измерения будет составлять

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}1 \text{ мг}}{(2k+1) \cdot 0{,}06 \text{ мг}} \approx \frac{1{,}67}{2k+1} \cdot 100\%.$$

При нормальном падении света ($\alpha = 0$) на пленку минимальной возможной толщины ($d_{\min} \approx 10^{-7}$ м) условие интерференционного максимума выполняется для световых волн, длина которых удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{n}\,\frac{\lambda}{4} \approx 10^{-7}\ \text{м}.$$

Отсюда

$$\lambda \approx 5\cdot10^{-7}\ \text{м}.$$

В отраженном свете пленка будет казаться зеленой.

◆

Ф489. *Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежуток, напряжение на котором $U = 10^3$ В. Вылетев из пушки в точке T, электроны движутся затем по прямой TT' (рис. 5). В точке M на расстоянии $d = 5{,}0$ см от точки T находится мишень, причем прямая TM образует угол $\alpha = 60^\circ$ с прямой TT'.*

1) Какой должна быть индукция $\vec{B}$ однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

2) Какой должна быть индукция $\vec{B}$ однородного магнитного поля, параллельного прямой TM, чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что $|\vec{B}|$ не превышает 0,030 Т.

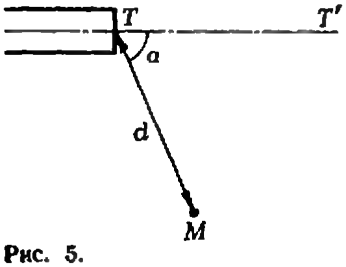


Рис. 5.

Электроны попадают в магнитное поле, имея кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU$$

($e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона), то есть со скоростью

$$|\vec{v}| = \sqrt{2U\frac{e}{m}}.$$

1) Если магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка, то электроны движутся по окружности, которая касается прямой TT' в точке T. Так как центростремительное ускорение электронам сообщает сила Лоренца, то радиус R этой окружности таков, что

$$|\vec{F}_{\text{л}}| = e\,|\vec{v}|\,|\vec{B}| = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$|\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|}{eR} = \frac{1}{R}\sqrt{2U\frac{m}{e}}.$$

Из рисунка 6 видно, что электроны будут попадать в точку M, если $R = \dfrac{d}{2\sin\alpha}$, то есть при

$$|\vec{B}| = \frac{2\sin\alpha}{d}\sqrt{2U\frac{m}{e}} \approx 3{,}4\cdot10^{-3}\ \text{Т}.$$

2) Если магнитное поле направлено вдоль прямой TM, то электроны будут двигаться по спирали, ось которой параллельна прямой TM (рис. 7). Действительно, проекция скорости электрона на прямую TM $v_1 = |\vec{v}|\cos\alpha$ не будет изменяться. В плоскости же, перпендикулярной прямой TM, электроны будут двигаться по окружности с постоянной по абсолютной величине скоростью, равной $v_2 = |\vec{v}|\sin\alpha$.

Сделав целый оборот вокруг своей оси, электроны пересекут прямую TM. Если бы проекция v_1 скорости электрона на прямую TM была равна нулю, то, сделав полный оборот по окружности радиуса R_1, электроны возвращались бы в точку T. В нашем случае они будут пересекать прямую TM в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $l = v_1\tau$, где τ — время, за которое электроны делают один оборот:

$$\tau = \frac{2\pi R_1}{v_2}.$$

Для того чтобы электрон попал в точку M, необходимо, чтобы длина $|TM|$ была равна целому числу l, то есть

$$d = kl = kv_1\tau = 2\pi kR_1\frac{v_1}{v_2} = 2\pi kR_1\,\mathrm{ctg}\,\alpha\ \ (k\text{ — целое}).$$

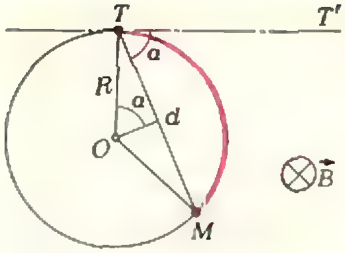


Рис. 6.

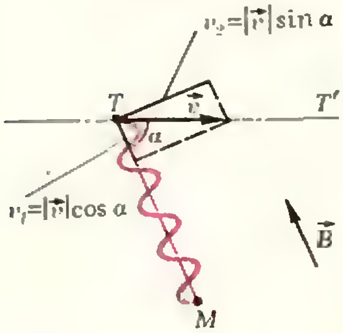


Рис. 7.

Запишем уравнение движения электрона в плоскости, перпендикулярной прямой TM:

$$\frac{mv_2^2}{R_1}=e\,|\vec{B}|\,v_2.$$

Отсюда

$$R_1=\frac{mv_2}{e\,|\vec{B}|}=\frac{1}{|\vec{B}|}\sqrt{2U\frac{m}{e}}\sin\alpha.$$

Следовательно, электроны попадут в точку M, если

$$d=\frac{2\pi k}{|\vec{B}|}\sqrt{2U\frac{m}{e}}\cos\alpha,$$

то есть если

$$|\vec{B}|=\frac{2\pi k\cos\alpha}{d}\sqrt{2U\frac{m}{e}}=k\cdot 6{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{Т}.$$

Возможные значения k и $|\vec{B}|$:

при $k=1$ $|\vec{B}|=6{,}6\cdot 10^{-3}$ Т;

при $k=2$ $|\vec{B}|=13{,}2\cdot 10^{-3}$ Т;

при $k=3$ $|\vec{B}|=19{,}8\cdot 10^{-3}$ Т;

и, наконец, при $k=4$ $|\vec{B}|=26{,}4\cdot 10^{-3}$ Т.

◆

Ф490. *При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной в 1 мм количество частиц уменьшается на 15%, а их скорость не изменяется. Какая доля потока нейтронов проходит через пластинку из кадмия толщиной 10 мм?*

Разделим пластинку мысленно на слои толщиной в 1 мм. Если всего на пластинку падает N нейтронов, то первый слой проходит число нейтронов

$$N_1=(1-\alpha)\,N,$$

где $\alpha=0{,}15$. Аналогично, второй слой проходит число нейтронов

$$N_2\,(1-\alpha)\,N_1=(1-\alpha)^2\,N.$$

Очевидно, после n-го слоя в потоке останется

$$N_n=(1-\alpha)^n\,N \quad \text{нейтронов.}$$

Число нейтронов, прошедших пластинку из кадмия толщиной 10 мм, равно

$$N_{10}=(1-0{,}15)^{10}\,N=0{,}85^{10}\,N.$$

Таким образом,

$$\frac{N_{10}}{N}=0{,}85^{10}\approx 0{,}2.$$

◆

Ф492*). *На шероховатой плоскости лежат два круглых цилиндра с диаметрами D и d (рис. 8). Вокруг большого цилиндра обмотан шнур, к концу которого приложена горизонтальная сила $\vec{F}$. Определить, при каком одинаковом для всех*

В тот момент, когда большой цилиндр оторвался от плоскости, система не скользит вправо, если сила $\vec{F}$ равна по абсолютной величине силе $\vec{F}_2$ трения системы о плоскость в том месте, где ее касается маленький цилиндр. При минимально возможном коэффициенте трения сила трения $\vec{F}_2$ в этот момент равна по абсолютной величине $\mu\,|\vec{N}_2|$ (рис. 9). Следовательно,

$$\mu\,|\vec{N}_2|\geqslant|\vec{F}|. \tag{1}$$

Для равновесия системы в этот момент необходимо также равенство моментов сил $-\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно центра меньшего цилиндра, то есть

$$|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|=|\vec{F}|. \tag{2}$$

---

*) Задача Ф491 уже была опубликована в нашем журнале (Ф385). Решение см. «Квант», 1976, № 12.

соприкасающихся поверхностей коэффициенте трения μ большой цилиндр может быть перетащен через малый. Каким должно быть абсолютное значение силы $\vec{F}$ для того, чтобы это можно было сделать?

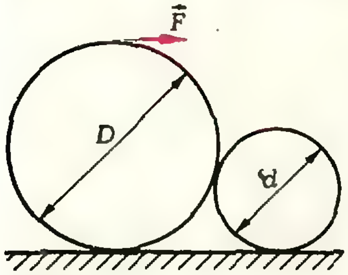


Рис. 8.

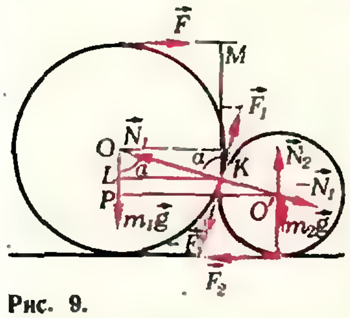


Рис. 9.

Так как $|\vec{F}_1| = \mu |\vec{N}_1|$, то должно выполняться условие

$$\mu |\vec{N}_1| \geqslant |\vec{F}|. \qquad (3)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (2) большой цилиндр не проворачивается относительно малого. Для того чтобы большой цилиндр не проворачивался, сумма моментов всех сил относительно его оси должна быть равна нулю. Это как раз и означает, что модуль силы трения между цилиндрами должен быть равен $|\vec{F}|$.

Найдем теперь, каковы силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Так как большой цилиндр находится в равновесии, то сумма горизонтальных проекций сил $\vec{F}_1$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}$ должна быть равна нулю:

$$|\vec{N}_1| \sin\alpha - |\vec{F}| - |\vec{F}| \cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{N}_1| = \frac{|\vec{F}|(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Подставляя это значение $|\vec{N}_1|$ в неравенство (3), получаем, что должно выполняться условие

$$\mu \geqslant \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (4)$$

Для того чтобы найти $\vec{N}_2$, достаточно приравнять нулю сумму вертикальных проекций всех сил, действующих на систему в целом. Это дает

$$|\vec{N}_2| = (m_1 + m_2)|\vec{g}|.$$

Так как при равновесии большого цилиндра должна быть также равна нулю сумма моментов всех сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точку K, то

$$m_1 |\vec{g}|\, |KL| = |\vec{F}|\, |KM|,$$

или

$$m_1 |\vec{g}| R \sin\alpha = |\vec{F}| (R + R\cos\alpha).$$

Отсюда

$$|\vec{F}| = m_1 |\vec{g}| \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (5)$$

Подставляя это выражение для $|\vec{F}|$ и найденное выше выражение для $|\vec{N}_2|$ в неравенство (1), получим

$$\mu \geqslant \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \qquad (6)$$

Значение μ должно быть больше наибольшего из выражений, стоящих справа в неравенствах (4) и (6). Очевидно, что для этого должно выполняться условие (4), то есть

$$\mu \geqslant \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Так как $\cos\alpha = \frac{OP}{OO'} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{D-d}{D+d}$ и $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{Dd}}{D+d}$, то

$$\mu \geqslant \frac{2\sqrt{Dd}}{\left(1+\frac{D-d}{D+d}\right)(D+d)} = \sqrt{\frac{d}{D}},$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{\frac{d}{D}}\, m_1 |\vec{g}|.$$

И. Слободецкий

Вот и пролетели каникулы, начались школьные будни. В нашем разделе журнала — тоже новый учебный год, уже третий по счету. За прошедшие два года в статьях этого раздела разбирались наиболее трудные и важные вопросы, непосредственно связанные с школьной программой. Мы хотим обратить ваше внимание на уже опубликованные статьи — к ним полезно обращаться по мере изучения школьных учебников:

Алгебра и начала анализа

«Как возникло и развивалось понятие функции» (1977, № 7),
«Четные и нечетные функции» (1977, № 4),
«Периодические функции» (1976, № 12),
«Осторожно: максимум!» (1976, № 10),
«Геометрический смысл производной» (1977, № 2),
«Как выглядит парабола?» (1978, № 3),
«Комбинаторное доказательство формулы Ньютона» (1978, № 8),
«Сложение гармонических колебаний» (1976, № 11),
«Площадь и интеграл» (1977, № 5),
«Производная показательной функции» (1977, № 12),
«Анализ помогает алгебре» (1978, № 6),
«Вопросы по алгебре и анализу» (1978, № 2),
«17 задач по анализу» (1977, № 1),

Геометрия

«Осевая симметрия» (1976, № 9),
«Композиция двух осевых симметрий» (1978, № 2),
«Гомотетия и замечательные точки в треугольнике» (1977, № 10),
«Шесть доказательств теоремы о медианах» (1978, № 4),
«Расстояние от точки до плоскости» (1977, № 3),
«Что значит «больше»?» (1977, № 11),
«В поисках определения площади поверхности» (1978, № 5),

* * *

«Задачи на повторение» (1977, № 9),
«Вопросы для выпускников» (1978, № 7)

В этом учебном году мы будем больше уделять внимания приложениям анализа к решению математических и практических задач. Предполагается глубже показать приложения производной, полностью осветить вопросы об определениях длины окружности и площади искривленной поверхности, разобрать методику построения сечений многогранников.

Р. Мешойрер

Комбинаторные доказательства формулы Ньютона

Начался учебный год. Учащиеся девятых классов скоро познакомятся с такими понятиями как индукция, комбинаторика, бином Ньютона. Оригинальное доказательство формулы Ньютона прислал в редакцию прошлогодний девятиклассник, ученик 444-й Московской школы Роман Мешойрер. К его статье мы добавили еще два (более известных) комбинаторных доказательства.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9» в пункте 9 приводится вывод формулы Ньютона.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n, \qquad (1)$$

основанный на методе математической индукции. Здесь мы приводим комбинаторное доказательство этой формулы (правда, лишь для натуральных a и b).

Рассмотрим такую задачу: *сколькими способами можно раскрасить n* *ящиков, если имеется a оттенков красной краски и b оттенков синей.*

С одной стороны, таких способов $(a+b)^n$: первый ящик можно раскрасить в любой из $a+b$ оттенков, второй (независимо от первого!) — тоже в любой из $a+b$ оттенков, значит, для первых двух ящиков существует $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$ возможных раскрасок и т. д.

С другой стороны, число раскрасок равно правой части равенства (1). Покажем это, сосчитав это число иначе. Сначала найдем число раскрасок, при которых все n ящиков — красные (их, очевидно, — a^n); затем найдем число раскрасок, при которых ровно один ящик — синий (их nba^{n-1}, ибо имеется n способов выбрать ящик, который мы будем красить синей краской, для него имеется b оттенков, и a^{n-1} раскрасок — для оставшихся $n-1$ ящиков); ...; далее найдем число раскрасок, при которых k ящиков — синие (их $C_n^k b^k a^{n-k}$, ибо имеется C_n^k способов выбрать из n ящиков k ящиков, которые мы будем красить синей краской *), для этих k ящиков имеется b^k раскрасок, для оставшихся $n-k$ ящиков существует a^{n-k} раскрасок); ...; наконец, найдем число раскрасок, при которых все n ящиков — синие (их b^n). Таким образом, общее число раскрасок равно

$$a^n + nba^{n-1} + \ldots + C_n^k b^k a^{n-k} + \ldots + b^n,$$

а эта сумма совпадает с правой частью формулы (1), которая тем самым доказана.

Если вы хорошо поняли это доказательство, то вы сумеете доказать обобщение формулы Ньютона на случай m (натуральных) слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n = a_1^n + \ldots + N^n_{k_1 k_2 \ldots k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + a_m^n,$$

где

$$0 \leqslant k_i \leqslant n \ (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$$

и

$$N^n_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

(это число называется числом перестановок с повторениями из k_1 элементов первого типа, k_2 — второго типа, и т. д., k_m — m-го типа).

Приведенное выше доказательство не является единственным комбинаторным доказательством формулы Ньютона. Читатель без труда проверит, что эту формулу (для натуральных a и b) можно получить, решая такую комбинаторную задачу: *сколькими способами можно разложить n (различных) шаров по a красным и b синим ящикам?*

Приведем теперь известное комбинаторное доказательство формулы Ньютона, пригодное для любых a и b. Для этого распишем выражение $(a+b)^n$ в виде произведения n скобок

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)$$

и раскроем скобки, не приводя пока подобные члены. Рассмотрим все слагаемые $a^{n-k}b^k$. Сколько их? Каждое такое слагаемое получается, когда из k каких-то скобок мы берем букву b, и из остальных $n-k$ скобок берем a. Выбрать k скобок из n скобок можно C_n^k способами; значит, слагаемых $a^{n-k}b^k$ будет C_n^k штук. Приводя подобные члены, получим $n+1$ слагаемых вида $C_n^k a^{n-k} b^n$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, k)$, то есть правую часть равенства (1).

Эти же рассуждения позволяют доказать и обобщение формулы Ньютона для произвольных $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

---

*) «Алгебра и начала анализа 9», п. 6.

«Квант» для младших школьников

Задачи

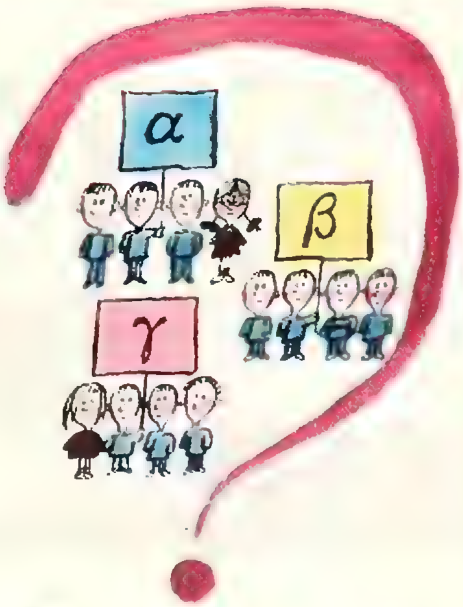
1. В финале школьной математической олимпиады участвовали три команды — «Альфа», «Бета» и «Гамма». Каждая команда должна была составить пять задач и дать их решать своим соперникам. При подведении итогов выяснилось, что команда «Альфа» смогла решить только одну из задач, предложенных командой «Бета», и четыре задачи «Гаммы». Команда «Бета» решила три задачи, предложенные «Гаммой», и две задачи «Альфы». «Гамма» нашла решения всех пяти задач «Альфы», но не смогла решить ни одной задачи «Беты».

Общее место присуждалось по итогам двух конкурсов:

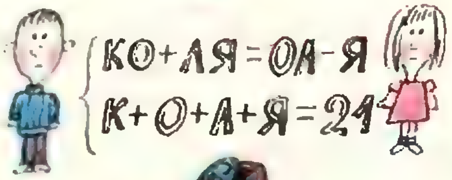
1) конкурса на сложность (трудность) составленных задач;

2) конкурса на умение решать задачи.

За первое место в каждом конкурсе присуждалось 2 балла, за второе — 1 балл; третье место не оценивалось. Определите, сколько баллов получила каждая команда в обоих конкурсах и каково итоговое распределение мест.

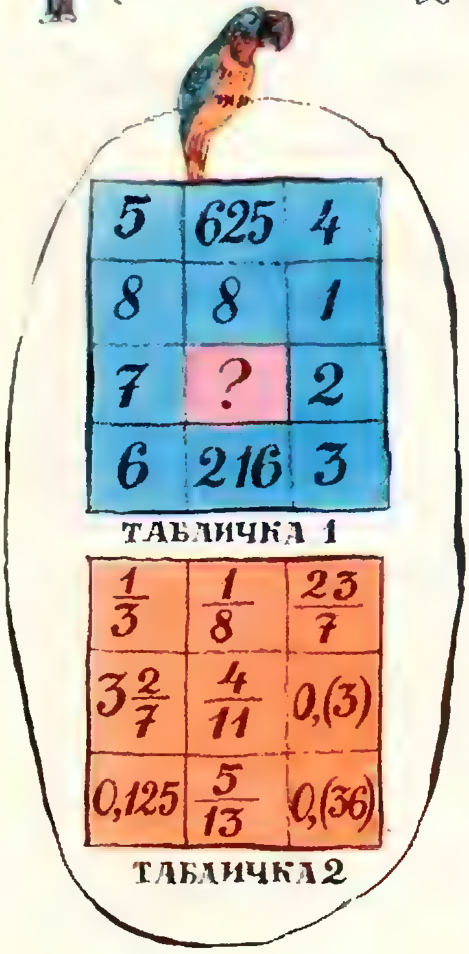


2. Решите изображенную на рисунке систему (здесь буквы К, О, Л, Я нужно заменить цифрами так, чтобы оба равенства сохранились: разные буквы должны соответствовать разным цифрам, одинаковые — одинаковым). Сколько решений имеет задача?



$$\begin{cases} КО+ЛЯ=ОЛ-Я \\ К+О+Л+Я=21 \end{cases}$$

3. Угадав, по какому принципу составлена первая табличка чисел, вставьте недостающее число. Сделав то же со второй табличкой, уберите лишнее число.



5	625	4
8	8	1
7	?	2
6	216	3

ТАБЛИЧКА 1

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{7}$
$3\frac{2}{7}$	$\frac{4}{11}$	0,(3)
0,125	$\frac{5}{13}$	0,(36)

ТАБЛИЧКА 2

Е. Семенов

Расстояние Степы Мошкина

(из писем другу)

Ура! Придумал свое расстояние!

(письмо первое)

Мишка, привет! В прошлом году, когда я был в шестом классе, наш учитель Петр Иванович сказал нам, что расстоянием можно называть не только то, что получается при измерении линейкой, но и вообще все, что обладает свойствами 1—3 из пункта 4 «Геометрии 6».

Решил я придумать свое собственное расстояние. Вспомнил я «телефонную модель», при помощи которой Петр Иванович доказал нам, что третье свойство расстояния нельзя вывести из первых двух *). Вспомнил и подумал: когда я хочу комунибудь позвонить, я снимаю трубку, набираю номер — и уже разговариваю. Значит, «телефонное расстояние» от меня до всех, кому я звоню, — одно и то же, скажем, 1 минута. Минута, затрачиваемая на набор номера телефона. А себе я, конечно, не звоню: спрашиваю — и сразу отвечаю. Стало быть, расстояние от меня до меня равно нулю! Другие, конечно, в аналогичном случае рассуждают так же, как я. Вот и пришло мне в голову: *расстояние между любыми двумя точками плоскости считать равным нулю, если эти точки совпадают, и равным единице, если они различны* (рис. 1).

А является ли мое «расстояние» расстоянием? Обладает ли оно нужными свойствами?

Первое свойство для моего расстояния, конечно, выполняется: для

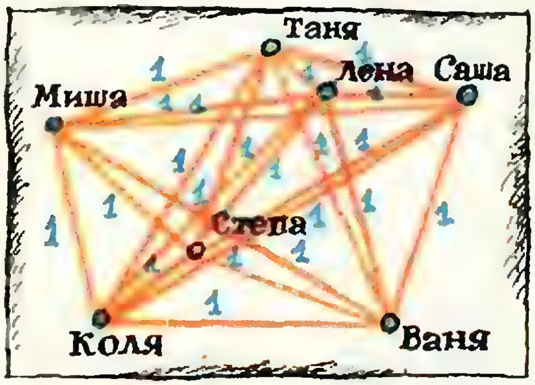


Рис. 1.

---

*) По-видимому, Степа имеет в виду разговор, изложенный в статье «Доказать можно? — Доказать нельзя!» («Квант», 1978, № 1).

различных точек A и B у меня $|AB| = 1$, а $1 > 0$; для совпадающих же точек A и B у меня $|AB| = 0$.

Второе свойство тоже, конечно, выполняется: для различных точек $|AB| = 1$ и $|BA| = 1$ — значит, $|AB| = |BA|$; а для совпадающих точек $|AB| = 0$ и $|BA| = 0$ — опять $|AB| = |BA|$.

Вот с третьим свойством мне пришлось немножко повозиться — пришлось рассмотреть несколько случаев.

Если все три точки A, B, C совпадают, то $|AC| = |AB| = |BC| = 0$. Значит, в этом случае $|AC| = |AB| + |BC|$, что можно записать и как $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$.

Пусть теперь из трех точек совпадают две. Если $A = C$, то $|AC| = 0$, а $|AB| = |BC| = 1$. Следовательно, $|AC| < |AB| + |BC|$, что опять-таки можно переписать в виде $|AC| \leqslant |AB| + |BC|$. Если $A = B$, то $|AB| = 0$, а $|AC| = |BC| = 1$. В этом случае $|AC| = |AB| + |BC|$. (Не буду я каждый раз переписывать равенство и строгое неравенство в виде $\leqslant$, хорошо?) Наконец, при $B = C$ имеем $|BC| = 0$, $|AB| = |AC| = 1$ и снова $|AC| = |AB| + |BC|$.

А когда все три точки различны, то $|AB| = |BA| = |AC| = 1$ и $|AC| < |AB| + |BC|$.

Ты понимаешь, что получается? Мое «телефонное расстояние» оказывается таким же серьезным, как и то, о котором говорится в школе! Все (понимаешь, все!) три свойства расстояний для него выполняются. Значит, расстояния могут быть разными? Таким, как в учебнике, и таким, как придумал я? А может, они могут быть еще какими-нибудь?

Во всяком случае, с моим расстоянием еще стоит повозиться.

Степа.

Бывает же такое!

(*письмо второе*)

Мишка! Что-то неладно в моей геометрии с отрезками.

В учебнике сказано, что отрезок AB — это множество, состоящее из различных точек A, B и точек, лежащих между ними. Хорошо, а в каком случае считается, что точка X лежит между точками A и B? *Если точки A, X, B различны и* $|AX| + |XB| = |AB|$. Но при моем расстоянии для различных точек A, X и B имеем $|AX| = |XB| = |AB| = 1$. Тогда $|AX| + |XB| \neq |AB|$, то есть не существует такой точки X, для которой выполнялось бы равенство $|AX| + |XB| = |AB|$. Значит, в моей геометрии точек, лежащих между двумя различными точками, не существует! Другими словами, множество точек, лежащих между точками A и B, — пустое! Но тогда отрезок в моей геометрии — это множество, состоящее из двух точек: $[AB] = \{A, B\}$.

Ну, как тебе это нравится? Наверное, это еще не все сюрпризы моего расстояния.

Степа.

Еще одна независимость!

(*письмо третье*)

Мишка, я сделал открытие! Решил я посмотреть, нормально ли расположены точки на прямой в моей геометрии. В «Геометрии 6» (п. 5) сказано, что любая точка O на прямой разбивает множество остальных точек на два таких непустых множества, что точка O лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным множествам (свойство 1а).

Чтобы разобраться в этом свойстве, я сделал рисунок (рис. 2). Вот прямая a. Вот точка O на ней — красная. Вот два множества, на которые точка O разбила прямую a: одно — синее, другое — зеленое. Выбрал я точки A и B, принадлежащие этим разным множествам. Точка O должна лежать между точками A и B...

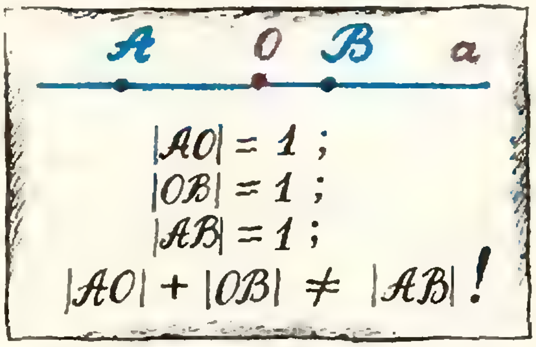


Рис. 2.

Но ведь в моей геометрии она *не* лежит между ними (см. предыдущее письмо).

Тут же я убедился, что свойство 1б также не выполняется (сделай это сам, глядя на мой рисунок).

Выходит, в моей геометрии свойства расположения точек на прямой не выполняются. Значит, логически их нельзя вывести из свойств расстояния. Другими словами, они *независимы*!

Степа.

Давай, еще что-нибудь придумаем!

(*письмо четвертое*)

Мишка! Роясь в старых «Квантах», я недавно прочел, что точками и прямыми можно назвать любые объекты, для которых выполняются свойства, указанные в аксиомах *). Тогда я понял, что и расстояние — это любое число **), обладающее указанными в учебнике свойствами 1—3.

И в разных геометриях расстояние может определяться по-разному: в школьной геометрии — одним способом, в геометрии Лобачевского — другим, а у меня — третьим. Важно только, чтобы выполнялись три его свойства. Так сказал Петр Иванович.

А вчера в книге Карла Левитина «Геометрическая рапсодия» я нашел такое место. Великий физик Эйнштейн объясняет своему девятилетнему сыну, чем он прославился в науке: «Когда слепой жук ползет по поверхности шара, он не замечает, что пройденный им путь изогнут, мне же посчастливилось заметить это». Давай и мы с тобой что-нибудь заметим, придумаем.

P. S. Кажется, с расстоянием у меня намечается новое «сумасшествие». Жди, напишу.

Твой вечный друг Степа Мошкин.

Послесловие

Вероятно, «Степино расстояние» показалось вам очень непривычным. Но что же делать? Раз для него выполняются все три свойства (аксиомы) расстояний, его полагается называть расстоянием.

А нельзя ли добавить какую-нибудь аксиому и расстоянием называть только то, что удовлетворяет расширенному списку аксиом? Например, на плоскости для любого числа найдется пара точек, расстояние между которыми равно этому числу. Может, включить это свойство в качестве четвертого свойства расстояний? Но тогда перестанет быть расстоянием то, что считают таковым на сфере, земном шаре или листе бумаги (объясните, почему).

Какая польза от фантазий, аналогичных степиным? Заранее и для каждого случая на этот вопрос ответить невозможно. Но для своего случая Степа дал ответ сам: *одно из свойств расположения точек на прямой не может быть выведено из свойств расстояний.*

Еще один вывод из поисков Мошкина: когда мы вводим некоторое понятие, мы исходим из одной или нескольких моделей (например, вводя понятие расстояния, мы исходим из модели, в которой расстояние измеряется с помощью масштабной линейки на плане или на листе бумаги). Но после того как мы это понятие ввели, мы должны быть готовыми к тому, что у него могут быть и совсем неожиданные, непривычные модели.

---

*) Степа имеет в виду статью «Точка, прямая... — что это такое?» («Квант», 1975, №№ 11—12).

**) Здесь Степа выражается не очень грамотно. *Расстояние* — это не «число», а числовая функция, определенная на парах точек.

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется при обработке измерений для сглаживания «шума» эксперимента: этот метод позволяет исправить случайные ошибки, неизбежно возникающие при измерениях, в том случае, когда характер зависимости измеряемой величины от независимой переменной задан.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда измеряемая величина y зависит линейно от одной переменной x. Пусть произведено n измерений и для значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ переменной x получены замеры $y_1, y_2, \dots, y_n$. Задача состоит в *проведении прямой $y=ax+b$, наилучшим образом прилегающей к точкам $P(x_1; y_1)$, $P(x_2; y_2), \dots, P(x_n; y_n)$.*

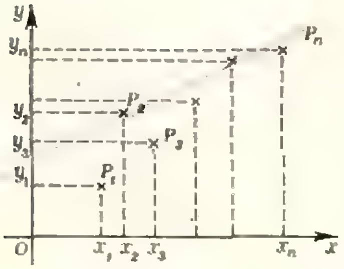
Решение задачи, разумеется, зависит от того, что понимается под словами «наилучшим образом прилегающей». Суть метода наименьших квадратов (его называют также методом Гаусса) состоит в том, что «наилучшей» считается та *прямая, для которой принимает наименьшее значение сумма квадратов отклонений*, т. е. выражение

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(ax_i+b))^2. \qquad (1)$$

На рисунке изображена искомая прямая $y=ax+b$ и точки $P_1, \dots, P_n$. Разность $y_i-(ax_i+b)$ показывает отклонение (вдоль оси ординат) экспериментальной точки $P_i\,(x_i, y_i)$ от искомой прямой.

Как найти значение a и b, минимизирующие выражения (1)? Предположим, что такие значения существуют, и параметр a нами уже найден. Чтобы найти b, перепишем A_n в виде

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2-\sum_{i=1}^{n}2b(y_i-ax_i)+\sum_{i=1}^{n}b^2=nb^2-2b\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)+\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2.$$



Рассмотрим A_n как (квадратичную) функцию от b. Она достигает минимума при

$$b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i-\frac{a}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Положив

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

можно написать $b=\bar{y}-a\bar{x}$, откуда для A_n получим

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}((y_i-\bar{y})-a(x_i-\bar{x}))^2=a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2-2a\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2.$$

Рассмотрим теперь A_n как квадратичную функцию от a. Она очевидно достигает минимума при

$$a=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})\Big/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

Наилучшей оказалась прямая $y=ax+b$, где

$$a=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},$$

$$b=\bar{y}-\frac{\bar{x}\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}.$$

Задачи

1. Решить задачу о сглаживании шума методом Гаусса для следующих не линейных функций от одной переменной

а) $y=ax^2+bx+c$;

б) $y=a\cdot\cos x+b\cdot\sin x$.

2. Как «работает» метод Гаусса в пространстве (для двух независимых переменных)? Рассмотрите задачу для плоскости $z=ax+by+c$ *).

3. Найти точку, для которой

а) сумма расстояний от трех заданных точек (не лежащих на одной прямой) минимальна;

б) задача 3а) — для n точек, не лежащих на одной прямой;

в) сумма расстояний от трех заданных окружностей минимальна.

А. Строгова

---

*) Геометрическая иллюстрация к этой задаче дана на первой полосе обложки «Кванта» № 8.

В этом номере, после летних каникул, мы возобновляем традиционную рубрику «Практикум абитуриента».

Читатели найдут в ней статьи, разъясняющие наиболее важные и сложные вопросы школьных курсов математики и физики, и предостерегающие будущих абитуриентов от характерных, типичных ошибок. Изложение теоретических положений, как правило, сопровождается разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов в высшие учебные заведения.

Конечно, статьи «Практикума абитуриента» не могут заменить собой школьные учебники. Да они и не ставят такой цели: эти материалы рассчитаны на тех, кто уже усвоил содержащиеся в учебнике факты. Намечая темы статей, редакция использовала опыт вступительных экзаменов и учла предложения, содержащиеся в письмах читателей.

Помимо материалов, которые читатели найдут в следующих номерах журнала, при подготовке к экзаменам можно рекомендовать познакомиться со статьями, опубликованными в прошлых номерах. Вот тематический список этих статей, начиная с 1976—1977 учебного года *).

МАТЕМАТИКА

I. Общие вопросы

«Воспоминание ... о предстоящих экзаменах» (1976, № 9),
«Читатели советуют» (1977, № 6),
«Читатели советуют» (1978, № 4).

II. Геометрия

«Прямоугольный треугольник» (1976, № 12),
«Принадлежность точек прямой и плоскости» (1978, № 3),
«Координатный метод» (1977, № 11),
«Скалярные умножения векторов» (1978, № 1),
«Конусы в каркасах» (1977, № 2),
«Задачи на площади и двугранные углы» (1977, № 12).

III. Алгебра и начала анализа

«Рационально или иррационально» (1977, № 5),
«Графическое задание функции» (1976, № 11),
«Периодичность и непериодичность функций» (1977, № 1),
«Множество значений числовых функций» (1978, № 2),
«Метод отделяющих констант» (1977, № 4),
«Наш выбор — теорема синусов» (1976, № 10),
«Ответ в тригонометрических уравнениях» (1977, № 9),
«Производная и касательные» (1978, № 5),
«Производная и задачи на экстремум» (1978, № 6).

ФИЗИКА

«Как решать задачи на механическое движение» (1977, № 2),
«Задачи на законы динамики материальной точки» (1977, № 11),
«Элементы статики» (1976, № 12),
«Закон сохранения импульса при соударениях» (1977, № 3),
«Импульс тела и системы тел» (1977, № 12),
«Парадокс «большого» тела» (1978, № 3),
«Первый закон термодинамики» (1978, № 1),
«Насыщенный пар» (1977, № 6),
«Напряженность, напряжение, потенциал» (1978, № 5),
«Что такое э. д. с.» (1978, № 4),
«Линзы и системы линз» (1977, № 4),
«Симметрия в задачах по физике» (1978, № 6).

Кроме того, в рубрике «Практикум абитуриента» было опубликовано более 30 статей с вариантами вступительных экзаменов по математике и физике разных вузов страны. Такие статьи, конечно же, будут систематически публиковаться и в дальнейшем.

Редакция надеется, что «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающим.

---

*) По материалам предыдущих лет имеются тематические списки в «Кванте» 1974, № 1, с. 52 и 1976, № 1, с. 60. Следует иметь в виду, что до 1977 года прием в вузы по математике осуществлялся по «старой» программе.

В. Литвиненко, А. Мордкович

Пределы

Понятие предела является одним из важнейших в математике. Пределами широко пользуются в дифференциальном и интегральном исчислении, в геометрии, в физике. Поэтому на вступительных экзаменах в вузы вопросам, связанным с различными аспектами теории пределов, уделяется значительное внимание. В настоящей статье рассказывается о некоторых приемах вычисления пределов функций.

Определение («Алгебра и начала анализа 9», п. 38). Число b называют *пределом функции* f при x, стремящемся к a (короче: при $x \to a$), и пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что из двойного неравенства

$$0 < |x - a| < \delta \qquad (1)$$

следует неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрически множество всех точек x, удовлетворяющих двойному неравенству (1), — это интервал длины 2δ, из которого выброшен его центр — точка a. Такое множество точек называется *проколотой δ-окрестностью* точки a (рис. 1) *).

Теперь мы можем дать геометрическое истолкование определения предела: число b называется пределом функции f при $x \to a$, если для любой ε-окрестности точки b найдется такая проколотая δ-окрестность точки a, что для всякой ее точки x значение $f(x)$ принадлежит взятой ε-окрестности числа b.

Разумеется, для каждого $\varepsilon > 0$ выбирается, вообще говоря, своя δ-окрестность. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда вместо δ пишут $\delta(\varepsilon)$ (на рисунке 2 показано, как по различным конкретным ε подбирается $\delta(\varepsilon)$). С другой стороны, если для некоторого ε годится какое-то δ_1, то для этого ε годится и любое $\delta_2 < \delta_1$.

Отметим два важных обстоятельства.

1) Из определения предела вытекает, что *если существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, то функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a.* Заведомо не существует, например, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, если a — конец отрезка, вне которого функция f не определена (пример: $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$)*).

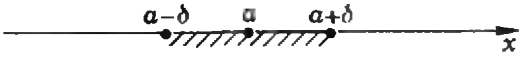


Рис. 1.

2) Значение предела при $x \to a$ зависит только от значений функции в некоторой проколотой δ-окрестности точки a. В частности, предел не зависит от значения функции в точке a. Точный смысл этих слов такой: *если значения функций f и g в некоторой проколотой δ-окрестности точки a совпадают, то совпадают и их пределы при $x \to a$.*

На рисунках 3—5 изображены графики функций, каждая из которых при $x \to a$ имеет пределом число b. Функция на рисунке 3 определена в точке a, причем $f(a) = b$. Функция

---

*) Весь интервал $]a-\delta; a-\delta[$ (включая точку a) называют просто δ-*окрестностью* точки a.

*) В вузовских курсах анализа рассматриваются так называемые односторонние пределы, позволяющие придать смысл пределам в такой ситуации.

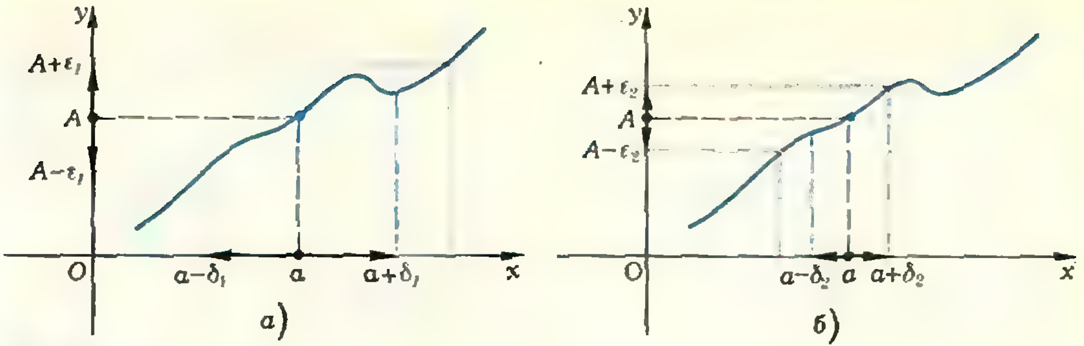

y
$A+\varepsilon_1$
A
$A-\varepsilon_1$
O
$a-\delta_1$
a
$a+\delta_1$
x
а)
y
$A+\varepsilon_2$
A
$A-\varepsilon_2$
O
$a-\delta_2$
a
$a+\delta_2$
x
б)

Рис. 2.

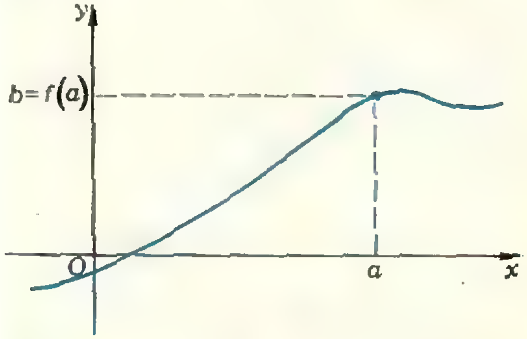


Рис. 3.

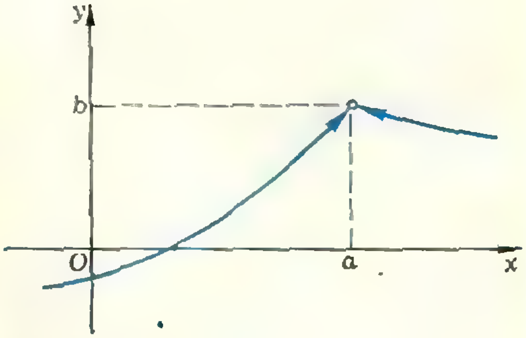


Рис. 4.

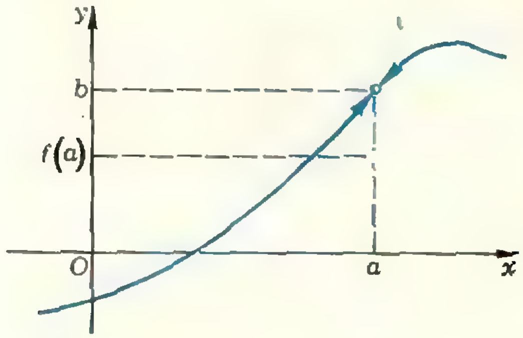


Рис. 5.

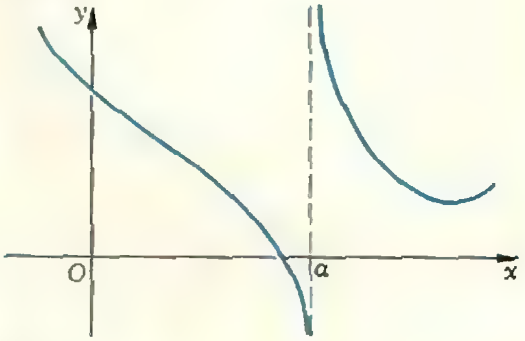


Рис. 6.

на рисунке 4 в точке a не определена. Функция на рисунке 5 в точке a определена, но $f(a) \neq b$.

Из этих случаев самый естественный, конечно, тот, где функция определена в точке a и принимает в ней значение, совпадающее с ее пределом при $x \to a$ (рис. 3). Именно такие функции рассматриваются наиболее часто. Их называют функциями, непрерывными в точке a.

Итак, функция f называется *непрерывной в точке a*, если

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a). \qquad (2)$$

Если же функция f определена в некоторой проколотой окрестности точки a и равенство (2) по той или иной причине не выполнено, функция f называется *разрывной в точке a*. Таким образом, функция f, определенная в проколотой окрестности точки a, будет разрывна в точке a, если

1) f не определена в самой точке a (например, функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ разрывна в точке 0; см. также рис. 4);

2) предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, но не равен $f(a)$ (именно по этой причине разрывны в точке a функция на рисунке 5).

3) предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не существует (например, функции $f(x) = \frac{|x|}{x}$ и $f(x) = \frac{1}{x}$ разрывны в точке 0; см. также рисунки 6 и 7).

Функция $f(x)=\sqrt{x}$ не является ни непрерывной, ни разрывной в точке 0. То же, конечно, можно сказать и о функции $f(x)=\lg x$ в любой точке $a\leqslant 0$.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9» доказано, что

а) $\lim\limits_{x\to a} c=c$,

б) $\lim\limits_{x\to a} x=a$.

Таким образом, *функции* $y=c$ *и* $y=x$ *непрерывны в любой точке* $a\in\mathbf{R}$.

При вычислении пределов часто используются следующие правила:

1) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=b+c$ (*предел суммы равен сумме пределов*);

2) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, то $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))=kb$ (*постоянный множитель можно выносить за знак предела*);

3) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=bc$ (*предел произведения равен произведению пределов*);

4) если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$, $c\neq 0$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c}$ (*предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля*).

Из этих правил вытекают соответствующие теоремы о непрерывности; например, *если функции* f *и* g *непрерывны в точке* a, *то и их произведение* $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ *непрерывно в точке* a (коротко: *произведение непрерывных функций — непрерывная функция*).

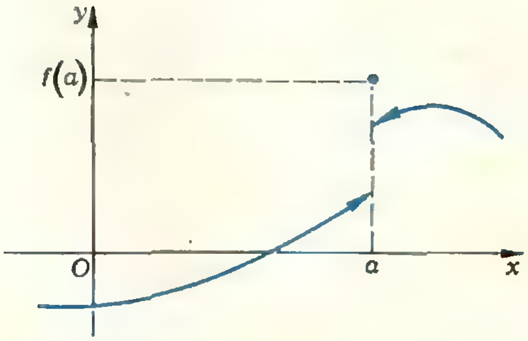


Рис. 7.

Пример 1. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x+2}.$$

Решение. $\lim\limits_{x\to 3} x=3$. Значит,

$$\lim_{x\to 3} x^2=\lim_{x\to 3}(x\cdot x)=(\lim_{x\to 3} x)\cdot(\lim_{x\to 3} x)=3\cdot 3=9.$$

Далее, $\lim\limits_{x\to 3}(-1)=-1$, а $\lim\limits_{x\to 3} 2=2$. Поэтому

$$\lim_{x\to 3}(x^2-1)=\lim_{x\to 3} x^2+\lim_{x\to 3}(-1)=9-1=8$$

и

$$\lim_{x\to 3} x+\lim_{x\to 3} 2=3+2=5.$$

Наконец,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)}=\frac{8}{5}.$$

Остановимся теперь на распространенном способе рассуждений, применяемом при вычислении пределов. Известно, что рациональные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены («Алгебра и начала анализа 9», п. 41). Поэтому пример 1 можно решить гораздо короче.

Рациональная функция $y=\frac{x^2-1}{x+2}$ определена в точке $x=3$; следовательно, она непрерывна в этой точке. Согласно определению это означает, что предел функции при $x\to 3$ равен значению функции в точке $x=3$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{3^2-1}{3+2}=\frac{8}{5}.$$

Пример 2 (МАДИ, 1977). *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2+x-x^2}{x^2-4}$.

Решение. Рациональная функция $y=\frac{2+x-x^2}{x^2-4}$ не определена в точке $x=2$, поэтому вычислить предел, используя понятие непрерывности, здесь не удастся.

Поскольку

$$f(x)=\frac{2+x-x^2}{x^2-4}=-\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}$$

и значения функций f и $g(x)=$

$= -\dfrac{x+1}{x+2}$ совпадают во всех точках прямой, кроме точки $x=2$ (в этой точке функция f не определена, а g определена), имеем $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{(x-2)}{(x-2)}\times\dfrac{(x+1)}{(x+2)}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left(-\dfrac{x+1}{x+2}\right)$. Таким образом, задача свелась к вычислению предела функции $y=-\dfrac{x+1}{x+2}$ при $x\to 2$. Но рациональная функция $y=-\dfrac{x+1}{x+2}$ в точке $x=2$ определена, а значит, и непрерывна, то есть ее предел при $x\to 2$ равен ее значению в точке $x=2$. Итак,

$$\lim_{x\to 2}\frac{2+x-x^2}{x^2-4}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(-\frac{x+1}{x+2}\right)=-\frac{2+1}{2+2}=-\frac{3}{4}.$$

На рисунке 8 изображен график функции $f(x)=\dfrac{2+x-x^2}{x^2-4}$, который отличается от графика функции $g(x)=-\dfrac{x+1}{x+2}$ лишь в точке $x=2$, где функция g определена и непрерывна, а f — не определена.

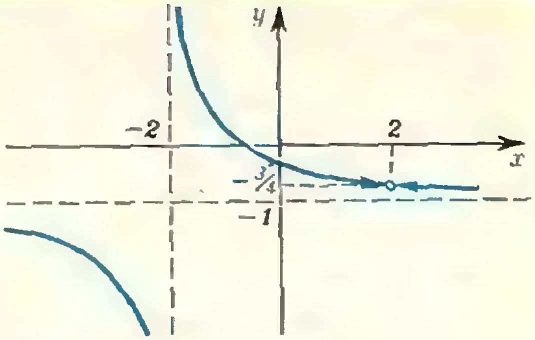


Рис. 8.

Замена функции f, не определенной в точке $x=a$, функцией g, непрерывной в этой точке и совпадающей с f в некоторой проколотой δ-окрестности точки a, является полезным приемом, часто позволяющим сразу найти предел функции f при $x\to a$.

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления пределов тригонометрических функций. При решении таких примеров используются следующие утверждения:

1 Тригонометрические функции непрерывны всюду, где они определены («Алгебра и начала анализа 10», п. 77).

2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (там же, п. 78).

Пример 3. (МИНХ, 1977). *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$ не определена в точке $x=0$, поэтому вычислить предел с помощью непосредственной подстановки значения $x=0$ в выражение, содержащееся под знаком предела, нельзя. Выполним некоторые преобразования этого выражения:

$$\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}=\frac{-2\sin^2 x}{x\sin x}=\frac{-2\sin x}{x}.$$

Из $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ следует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin x}{x}=-2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=-2$. Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x\sin x}=-2.$$

Пример 4. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}.$$

Решение.*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x}{\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x\right).$$

Из $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ легко следует $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}=1$. Функция $f(x)=\cos 4x\cdot\cos 2x$ в точке $x=0$ непрерывна (как произведение непрерывных функций), поэтому

$$\lim_{x\to 0}(\cos 4x\cdot\cos 2x)=f(0)=1.$$

---

*) Пример 4, воспользовавшись равенствами $\dfrac{\sin x}{\sin 2x}=\dfrac{\sin x}{2\sin x\cdot\cos x}=\dfrac{1}{2\cos x}$, можно решить и без применения предела 2° (прим. ред.).

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\cos 4x\cdot\cos 2x\right)=1\cdot\frac{1}{1}\cdot 1\cdot 1=1.$$

Рассмотрим теперь примеры вычисления пределов иррациональных функций. Здесь используются следующие утверждения:

А) Функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x>0$ *).

Б) Если функция f непрерывна в точке a и $f(a)>0$, то функция $y=\sqrt{f(x)}$ также непрерывна в точке a.

В) Если функция f непрерывна в точке a и $f(a)>0$, то функция $y=\sqrt[n]{f(x)}$ также непрерывна в точке a.

Докажем утверждение Б). Для этого нам нужно по данному числу $\varepsilon_0>0$ найти такое число $\delta_0>0$, что для любого x из проколотой δ_0-окрестности точки a

$$\left|\sqrt{f(a)}-\sqrt{f(x)}\right|<\varepsilon_0.$$

Так как функция f непрерывна в точке a, для $\varepsilon_1=\sqrt{f(a)}\,\varepsilon_0>0$ существует такое $\delta_1>0$, что для любой точки x из проколотой δ_1-окрестности точки a

$$|f(x)-f(a)|<\sqrt{f(a)}\,\varepsilon_0.$$

В качестве искомого числа δ_0 возьмем указанное выше число δ_1. Тогда

$$\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right|=\frac{|f(x)-f(a)|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}\leqslant\frac{|f(x)-f(a)|}{\sqrt{f(a)}}<\frac{\sqrt{f(a)}\,\varepsilon_0}{\sqrt{f(a)}}=\varepsilon_0,$$

и непрерывность доказана. Заметим, что из Б) сразу следует А) (положить $f(x)=x$).

Доказательство утверждения В), технически более сложного, мы не приводим.

Пример 5. *Вычислить*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{8x+1}}{x+2}.$$

Решение. По Б) функции $\sqrt{x^2+3}$ и $\sqrt{8x+1}$ непрерывны в точке $x=1$. В этой точке непрерывна и отлична от нуля и функция $x+2$. Значит, функция, содержащаяся под знаком предела, непрерывна в точке $x=1$, а потому ее предел при $x\to 1$ равен значению функции в точке $x=1$. Таким образом, имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{8x+1}}{x+2}=\frac{\sqrt{1^2+3}+\sqrt{8\cdot 1+1}}{1+2}=\frac{2+3}{3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 6 (МИНХ, 1977). *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$.

Решение. Функция $y=\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ не определена в точке $x=0$. Поэтому вычислить ее предел при $x\to 0$ так, как это было сделано в предыдущем примере, не удастся. В случае иррациональных выражений часто используется прием освобождения от иррациональности. Умножим и числитель, и знаменатель дроби на такое выражение, чтобы в числителе получилась разность кубов $(\sqrt[3]{1-x})^3-(\sqrt[3]{1+x})^3$. Таким выражением будет

$$(\sqrt[3]{1-x})^2+\sqrt[3]{1-x}\cdot\sqrt[3]{1+x}+(\sqrt[3]{1+x})^2$$

Получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x})\left((\sqrt[3]{1-x})^2+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+(\sqrt[3]{1+x})^2\right)}{x\left((\sqrt[3]{1-x})^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{1+x}+(\sqrt[3]{1+x})^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}-2x/\left[x\left((\sqrt[3]{1-x})^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{1+x}+(\sqrt[3]{1+x})^2\right)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}-2/\left[(\sqrt[3]{1-x})^2+\sqrt[3]{1-x}\times\sqrt[3]{1+x}+(\sqrt[3]{1+x})^2\right]$$

По В) функции $\sqrt[3]{1-x}$, $\sqrt[3]{1-x^2}$ и $\sqrt[3]{1+x}$ непрерывны в точке $x=0$. Используя утверждения о непрерывности суммы произведения и частного, приходим к выводу, что функция

---

*) «Алгебра и начала анализа 9», п. 38, задача 313.

$$\frac{-2}{\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^2+\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}$$

непрерывна в точке $x=0$. Но в точке $x=0$ она принимает значение $-\frac{2}{3}$. Значит, предел этой функции равен $-\frac{2}{3}$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=-\frac{2}{3}.$$

Пример 7 (МИНХ, 1977). *Вычислить* $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

Решение. Для вычисления этого предела недостаточно освободиться от иррациональности только в числителе или только в знаменателе; здесь нужно и числитель, и знаменатель умножить на «сопряженные» выражения:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{5-x}-2)}{(\sqrt{2-x}-1)}\times$$

$$\times\frac{(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{((5-x)-4)(\sqrt{2-x}+1)}{((2-x)-1)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}.$$

Так как полученная функция $y=\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}$ непрерывна в точке $x=1$, ее предел при $x\to 1$ равен значению функции в точке $x=1$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}=\frac{\sqrt{2-1}+1}{\sqrt{5-1}+2}=\frac{1}{2}.$$

Это же значение имеет и искомый предел.

Упражнения

Вычислите следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-3}{x-4}$.
2. (МАДИ, 1977) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{6x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+9}-4}{x^2-49}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 6x}{\sin^2 3x}$.
7. (МАДИ, 1977) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}$.
8. (МЭИ, 1977) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\left((1+x^2)\sqrt{x^{-2}+1}\right)^{\frac{1}{3}}-\left((1-x^2)\sqrt{x^{-2}-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^3$.

(*Окончание. Начало см. с. 34*).

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Книги 3-я, 4-я. (Излучение, волны, кванты. Кинетика, теплота, звук). Ц. 2 р. 25 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Книга 5-я. (Электричество и магнетизм). Ц. 1 р. 34 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Книга 6-я. (Электродинамика). Ц. 1 р. 54 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике.* Книга 7-я. (Физика сплошных сред). Ц. 1 р. 42 к.

Элементарный учебник физики. Под ред. Г. С. **Ландсберга**. Т. I. Ц. 1 р. 11 к. Т. II. Ц. 91 к.

Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике.* Ц. 2 р. 68 к.

Воронцов-Вельяминов Б. А. *Сборник задач и практических упражнений по астрономии.* Ц. 82 к.

Дагаев М. М. *Солнечные и лунные затмения.* Ц. 35 к.

Зигель Ф. Ю. *Астрономы наблюдают.* Ц. 40 к.

Рябов Ю. А. *Движение небесных тел.* Ц. 35 к.

Шкловский И. С. *Звезды. Их рождение и смерть.* Ц. 1 р. 10 к.

Заказы направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15. Магазин № 8 «Техническая книга». Отдел «Книга — почтой».

Математика на шахматной доске

В 1975 году в издательстве «Наука» вышла книга, посвященная одновременно шахматам и математике *). Любопытна история появления этой книги.

В 1971 году в «Кванте» № 9—12 были напечатаны «Шахматно-математические заметки» Е. Гика. Поскольку среди юных любителей математики и физики трудно найти ребят, не умеющих играть в шахматы, то такая публикация казалась нам достаточно полезной. Шахматы, как известно, сами по себе развивают сообразительность, логическое мышление, остроту ума. Тем больший интерес представляет рассмотрение вопросов, находящихся на стыке шахмат и математики. Математические и логические задачи, связанные с шахматами, необычны, оригинальны и порождают много любопытных и глубоких идей. Многочисленные отклики читателей заставили нас продолжить публикацию шахматно-математических статей, а Е. Гик стал, так сказать, нашим постоянным шахматно-математическим корреспондентом. Удачное сочетание интересов (автор — математик, кандидат технических наук, мастер спорта по шахматам и журналист) позволило ему написать целый ряд материалов на данную тему, в том числе в «Кванте» № 9, 1975 г. было опубликовано его интервью с экс-чемпионом мира по шахматам М. Талем «Когда катет длиннее гипотенузы».

Эти статьи и составили основу данной книги. Первый тираж книги — 10 0000 экземпляров разошелся мгновенно, и издательство выпустило дополнительно еще 10 0000 экземпляров. Уже одно это обстоятельство свидетельствует о большом успехе книги.

Материал рецензируемой книги весьма разнообразен, и вряд ли стоит подробно останавливаться на ее содержании. Практически в ней затронуты все существующие точки соприкосновения между математикой и шахматами. Рассмотрены различные задачи о шахматной доске, о маршрутах, расстановках и силе фигур, приводятся шахматно-математические «рекорды», рассказывается о необычных играх на шахматной доске. Здесь можно найти задачи «о ходе коня» и «о восьми ферзях», которыми занимались великие математики Л. Эйлер и К. Гаусс. Читатель узнает из книги о шахматных «достижениях» ЭВМ и геометрических свойствах шахматной доски, познакомится с системами проведения шахматных соревнований и т. д. Некоторые из рассмотренных вопросов носят более математический характер, другие будут интересны как любителям занимательной математики, так и любителям шахмат. Например, отдельная глава книги посвящена математической системе коэффициентов Эло, которые сейчас широко используются для оценки и прогноза результатов шахматистов в турнирах *).

МАТЕМАТИКА
НА ШАХМАТНОЙ
ДОСКЕ

Книга «Математика на шахматной доске» представляет собой результат большой исследовательской работы. В ней содержится множество ссылок на различные источники, в том числе малоизвестные. Ряд задач публикуется впервые. Многие подходы и идеи, рассмотренные автором, новы и оригинальны.

Чтобы не быть голословными, мы приводим несколько задач из этой книги, решение которых, мы надеемся, доставит нашим читателям большое удовольствие.

1. За сколько ходов два ферзя на доске $n \times n$ могут заматовать неприятельского короля (других фигур на доске нет)? Тот же вопрос для бесконечной доски.

2. На полях доски $n \times n$ последовательно выписаны числа от 1 до n^2 (на первой горизонтали слева направо от 1 до n, на второй от $n+1$ до $2n$, и т. д.). На этой доске расставлены n ладей так, что никакие две из них не угрожают друг другу. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями?

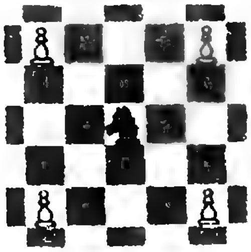
3. На бесконечной доске расставлены пешки через три поля на четвертом

---

*) Е. А. Гик. Математика на шахматной доске. М., «Наука», 1975.

*) Главу о коэффициентах Эло автор переработал специально для «Кванта», и она будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала.

(рис. 1). Может ли конь попасть на все свободные поля этой доски, посещая каждую из них по одному разу?



4. На шахматной доске 8 × 8 сделать конем максимальное число ходов подряд так, чтобы путь коня не самопересекался (центры каждой пары соседних полей на пути коня соединяются отрезком прямой).

5. Расставить на обычной шахматной доске полный комплект фигур одного цвета (король, ферзь, две ладьи, два слона — **не обязательно разноцветных!** — два коня, пешек нет), так, чтобы все поля доски, включая занятые фигурами, находились под обстрелом.

6. Расставить на обычной шахматной доске полный комплект фигур одного цвета (без пешек) так, чтобы в их распоряжении было:

а) максимально возможное число ходов;

б) минимально возможное число ходов.

Конечно, материал книги, несмотря на ее разнообразие, не исчерпывает всей проблематики. Так, уже после выхода книги состоялся второй чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ, при помощи ЭВМ были получены важные результаты в области ладейных эндшпилей, в «Кванте» № 12, 1977 г. была существенно продвинута одна задача о ферзях, которая в книге еще относилась к числу нерешенных проблем,*) и т. д.

Надо надеяться, что при переиздании книги автор дополнит ее новым интересным материалом.

М. Смолянский

---

*) М. Мамиков. Задача о ферзях («Квант», 1977, № 12, с. 22).

Мир, лишенный очертаний

Механика вообще и гидродинамика, в частности, считаются скучными науками, и, может быть, поэтому популяризаторы обходят их вниманием. Тем с большим любопытством берешь в руки книгу болгарского ученого К. Кузова «Мир без форм» (М., «Мир», 1976), вышедшую на русском языке в серии «В мире науки и техники».

Мир без форм — это мир жидкостей и газов, которые, как известно, не имеют собственных очертаний. Строго говоря, изучением поведения жидкостей и газов занимаются разные науки: гидродинамика и газодинамика. Но в свойствах жидкостей и газов столь много общего, что их можно изучать и описывать вместе. Поэтому-то обе дисциплины обычно объединяют в одну — гидрогазодинамику, или, более кратко, — гидродинамику.

Гидродинамика не испытала ни революционных потрясений (вроде рождения теории относительности), ни ожесточенной полемики (подобной полемике между Ньютоном и Гюйгенсом о природе света), ни неожиданных, эффектных открытий (как, скажем, обнаружение радиоактивности или рентгеновских лучей). В течение многих веков она развивалась постепенно, эволюционно, накапливая, суммируя и обобщая знания, впитывая достижения других наук и делясь с ними своими успехами, а главное — давая богатые выходы в практику, в технику. Не постигнув законов гидродинамики, люди не научились бы летать, не проникли бы в глубины моря, не смогли бы перекрывать реки, перекачивать нефть по гигантским трубопроводам, управлять химическим производством, прогнозировать погоду, «ремонтировать» сердца и сосуды... С этой наукой и знакомит книга К. Кузова.

Чтобы сразу увлечь читателя, автор на первых же страницах рассказывает о парадоксах, которые невозможно объяснить, не привлекая гидродинамики. Например, если положить в стеклянную воронку шарик для пинг-понга и сильно подуть в нее через узкий конец (скажем, из пылесоса), то, как ни странно, шарик не вылетит наружу, даже если воронку перевернуть «кверху дном». Что уравновешивает силу тяжести? Что толкает шарик внутрь воронки, притом тем сильнее, чем сильнее мы будем дуть? Другой пример: если тот же шарик пустить в свободную струю воздуха, созданную феном для сушки волос или пылесосом, то шарик не отлетит в сторону, а останется в струе и будет неуклонно следовать за ней, куда бы мы ее ни перемещали.

На этих и других, более сложных, примерах иллюстрируются проявления физических законов, которым подчиняются газы и жидкости. Такой метод изложения характерен для книги: все понятия, все соотношения автор вводит, отталкиваясь либо от повседневной практики, либо от технических устройств, либо от исторических событий (нередко малоизвестных). Так, представления о вязкости и «прилипании», а также фундаментальное понятие пограничного слоя разъясняются сначала на примерах полета «крученого» мяча, которого так опасаются футбольные вратари, и конструкции необычного корабля — «парусника без паруса», изобретенного Флетнером. В дальнейшем анализируются (конечно, уже с позиций теории пограничного слоя) такие явления, как турбулентность, подъемная сила крыла, сопротивление движению в жидкости. Элементам гидродинамики посвящены две главы книги: «На подступах к миру без форм» и «Внимание! Путеводитель по гидродинамике».

НТ
МИР БЕЗ ФОРМ

Знание законов гидродинамики, утверждает автор, абсолютно необходимо для всех, кто имеет дело с морской стихией и атмосферой, особенно для моряков и летчиков. Свое утверждение он подкрепляет многочисленными фактами, главным образом печальными. Так, игнорирование закономерностей, заложенных в уравнении Бернулли, стало причиной столкновения броненосца «Хок» с суперлайнером «Олимпик», а пренебрежение законом Архимеда и основанным на нем «принципом непотопляемости», который был разработан академиком Крыловым, вызвало одну из самых страшных трагедий за всю историю мореплавания — гибель «Титаника».

В природе и повседневной практике большую роль играет вихревое движение жидкостей и газов. Вихри — это разрушительный смерч на море и безобидная воронка в ванне, опасный след самолета и водоворот в реке. Как образуются вихревые явления, какое влияние они оказывают на движение судов и самолетов, на работу двигателей и турбин, на прочность конструкций — обо всем этом рассказано в книге.

Столь же большое место отведено другому каверзному явлению — кавитации, или, по образному определению автора, «холодному кипению». Кавитация — это возникновение и быстрое «схлопывание» пузырьков воздуха, что приводит к мгновенному локальному повышению давления вплоть до 100000 атмосфер. При этом покрываются «язвами» и в конечном счете разрушаются корабельные винты, лопатки турбин и насосов, детали атомных реакторов. Оказывается, действию кавитации подвержены не только детали, движущиеся в жидкости с огромными скоростями, но и поверхности неподвижных тел, погруженных в неподвижные жидкости! Автор подробно знакомит с причинами возникновения кавитации, с мерами профилактики и лечения этой опасной болезни.

Две главы — «Жидкости сопротивляются» и «Не только птицы летают» — повествуют об истории борьбы за скорости в мореплавании и авиации. Человек учится у природы — этот тезис красной нитью проходит через все повествование. Оказывается, чешуйчатый покров рыб — не просто защитный слой, но и активный участник движения, средство снижения сопротивления водной среды. Еще более удивительно, что ту же функцию выполняют жабры. Когда жаберные крышки слегка приподнимаются (действуя подобно клапанам насоса), вода изо рта рыбы устремляется к жабрам. Там она отдает растворенный кислород и, вытекая из жаберных отверстий в виде сильной струи, «сдувает» пограничный слой. Идея «сдувания» или «отсоса» пограничного слоя широко используется сейчас в авиации и космонавтике. Аналогично, идея предкрылков и закрылков, непременных элементов современного самолета, заимствована у птиц. В последнее время объектом пристального внимания ученых, в том числе гидродинамиков, стали дельфины, способные развивать скорость до 65 километров в час. С некоторыми своими «секретами» дельфины уже поделились, остальные еще предстоит узнать, и тогда корабли научатся плавать еще быстрее и увереннее, чем сейчас.

Об «игрушках», которыми любят «забавляться» ученые, рассказывается в главе «Моделирование». «При модельных испытаниях,— пишет автор,— реальные явления предстают перед нами в измененных масштабах, т. е. при других геометрических размерах и величинах действующих сил. Это позволяет ученым за один час «пережить» столетия или за неделю — секунду, дает возможность, насколько это необходимо, усилить или ослабить природные явления, сделать их доступными для наших чувств и аппаратуры».

К сожалению, подробно остановившись на физическом и геометрическом моделировании, автор ни словом не обмолвился о моделировании математическом, которое за последние годы, в связи с развитием ЭВМ, стало мощным средством решения научных и инженерных задач в гидродинамике.

Книга обильно иллюстрирована фотографиями гидродинамических процессов. Но ведь газы и жидкости, как правило, бесцветны! Как же получены эти снимки, на которых отчетливо видны линии тока, ударные волны? Современные экспериментальные методы гидродинамики, начиная с простейшей трубки Пито и кончая лазерными приборами, описаны в главе «Можем ли мы видеть течения?».

Резюмируя обзор небольшой книги К. Кузова, хотелось бы привести слова автора, который так сформулировал свою цель: «Главная задача этой книги — способствовать популяризации гидрогазодинамики, сломать барьер страха перед сложными формулами специальной литературы и привлечь внимание молодежи к важной отрасли человеческого знания, значение которой в практической жизни людей непрерывно возрастает».

Что ж, можно с уверенностью сказать, что книга К. Кузова вполне отвечает этой задаче.

И. Зорич

Поговорим об определениях

(см. «Квант» № 6)

1. «В одну сторону» утверждение очевидно (см., в частности, теорему 18 из «Геометрии 6»). Пусть теперь отображение плоскости на себя обладает перечисленными свойствами. Докажем, что оно является симметрией с центром O.

Для этого заметим сперва, что для любой точки A точки A, O и A' лежат на одной прямой, поскольку прямая AO переходит в параллельную прямую и содержит неподвижную точку O. Возьмем любую точку M. Так как $MB \parallel M'B'$, треугольники OBM и $OB'M'$ конгруэнтны (рис. 1). Значит, $|MO| = |M'O|$.

2. а) $\widehat{C} = 90°$. б) Если O — точка пересечения биссектрис, то $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\widehat{C} = 90°$; таким образом, прямобиссектрисных треугольников не существует. в) Обозначим $|AB|$ через $2c$. Если Q — точка пересечения медиан и $(CQ) \cap (AB) = P$, то $[QP]$ — медиана прямоугольного треугольника ABQ. Значит, $|PQ| = c$. Тогда $|QC| = 2c$, $|PC| = 3c$. Рассмотрим теперь окружности (P, c) и $(P, 3c)$. Возьмем произвольную точку $Q' \in (P, c)$, отличную от A и B. Пусть $(PQ') \cap (P, 3c) = C'$. Легко видеть, что треугольник ABC' является прямомедианным. Таким образом,

$$0° < \widehat{C} \leqslant \widehat{ADB},$$ где $[DP] \perp [AB]$ и $D \in (P, 3c)$, т. е. $0° < \widehat{C} \leqslant 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} \ (\approx 36°52')$.

3. а) Пусть $ABCD$ — неплоский правильный четырехугольник. Повернув треугольник BCD вокруг (BD) так, чтобы он лег на плоскость (ABD), мы получим (плоский) ромб. Следовательно, любой неплоский правильный четырехугольник (если он существует!) может быть получен перегибанием некоторого ромба $ABCD$ вокруг диагонали, причем, очевидно, меньшей диагонали.

Пусть теперь $ABCD$ — произвольный ромб, не являющийся квадратом, с острым углом $\widehat{A} = \alpha$. Тогда $\widehat{B} = 180° - \alpha > \alpha$. Начнем поворачивать $\angle BCD$ вокруг (BD). Величина $\widehat{ABC}$ будет при этом все время уменьшаться. Поскольку в начальный момент она $> \alpha$, а в конечный (когда точка C совпадает с точкой A) равна $0°$, в какой-то момент будем иметь $\widehat{B} = \widehat{D} = \alpha$. (Здесь мы опираемся на одно из важнейших свойств непрерывных функций — свойство «принимать любое промежуточное значение». Некоторый намек на это свойство дан в п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10».) Соответствующий неплоский четырехугольник будет, очевидно, правильным. Таким образом, неплоский правильный четырехугольник существует и угол α между соседними звеньями в нем может принимать любое значение $0° < \alpha < 90°$.

б) Покажем, что неплоского правильного пятиугольника не существует. Наметим (не очень простое) доказательство этого утверждения. Допустим, что $A_1A_2A_3A_4A_5$ — такой пятиугольник.

Покажем, прежде всего, что четыре его вершины лежат в одной плоскости. Найдутся такие три вершины, что остальные две лежат по одну сторону от плоскости, образованной этими тремя вершинами. Если это — три последовательные вершины, например, A_1, A_2, A_3, то точки A_4 и A_5 симметричны относительно плоскости α, проходящей через биссектрису угла $A_1A_2A_3$ перпендикулярно $(A_1A_2A_3)$; поэтому $[A_4A_5] \perp \alpha$; с другой стороны, $[A_1A_3] \perp \alpha$; значит, $[A_4A_5] \parallel [A_1A_3]$, т. е. вершины A_1, A_3, A_4, A_5 лежат в одной плоскости. Если же это, скажем, A_1, A_2, A_4, то аналогично показывается, что в одной плоскости лежат вершины A_1, A_2, A_3, A_5.

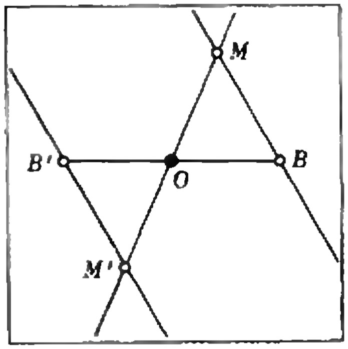


Рис. 1.

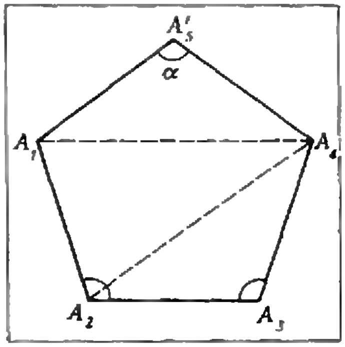


Рис. 2.

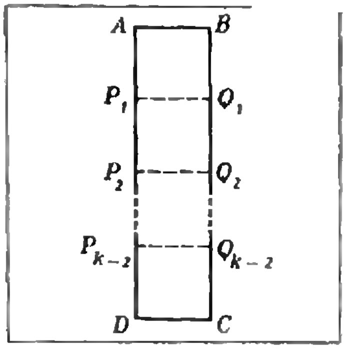


Рис. 3.

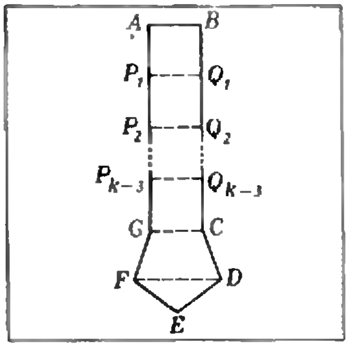


Рис. 4.

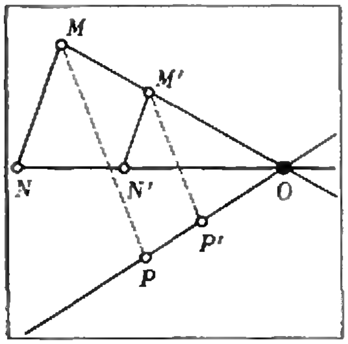


Рис. 5.

Итак, пусть точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат в одной плоскости. Повернув $\Delta A_1A_4A_5$ вокруг (A_1A_4), мы придем к плоскому пятиугольнику $A_1A_2A_3A_4A_5'$ с равными сторонами, в котором $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{A}_5'$. Из определения правильного многоугольника вытекает, что ломаная $A_1A_2A_3A_4$ не имеет самопересечений. Поэтому $\hat{A}_2 \geqslant 90^\circ$ (рис. 2).

Из $\Delta A_1A_5'A_4 \cong \Delta A_2A_3A_4$ вытекает $[A_2A_4] \cong [A_1A_4]$. Значит, $A_4\hat{A}_2A_1 = \hat{A}_4A_1A_2$. Из $A_4\hat{A}_2A_3 = A_4\hat{A}_1A_5'$ следует теперь $A_2\hat{A}_1A_5' = A_1\hat{A}_2A_3$. Таким образом, плоский пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5'$ — правильный. Но, очевидно, из плоского правильного пятиугольника, перегибая его вокруг диагонали, неплоского правильного пятиугольника получить нельзя.

Примечание. Можно показать, что неплоские правильные n-угольники *существуют при всех* $n > 3$, *кроме* $n = 5$. В самом деле, при $n = 2k$, где $k \geqslant 3$, искомый многоугольник (с прямыми углами) можно получить, перегнув $k - 2$ раз плоский прямоугольник, одна сторона которого в $k - 1$ раз больше другой, по линиям P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{k-2}Q_{k-2}$ (рис. 3). При $n = 2k + 1$, где $k \geqslant 3$, такой многоугольник (все углы которого снова прямые) можно получить из изображенного на рисунке 4 (невыпуклого) семиугольника $ABCDEFG$ с тремя прямыми углами A, B, E, у которого 5 сторон конгруэнтны, а $|BC| = |GA|$ больше их в $k - 2$ раз; его надо перегнуть по отрезкам P_1Q_1, P_2Q_2, ..., $P_{k-3}Q_{k-3}$, CG, DF.

Какими могут быть углы неплоского правильного n-угольника, где $n \geqslant 6$, пока, видимо, никому не известно.

4. Пусть любой отрезок AB переходит при отображении в конгруэнтный отрезок $A'B'$ того же направления. Покажем, что это отображение — параллельный перенос. Возьмем точку M_0; пусть она переходит в точку M_0'. Докажем, что, какова бы ни была точка M, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_0M_0'}$. Поскольку отрезок M_0M переходит в отрезок $M_0'M'$ с сохранением направления, т. е. $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0'M'}$, получаем $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_0'} + \overrightarrow{M_0'M'} = \overrightarrow{MM_0'} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MM_0'} = \overrightarrow{M_0M_0'}$.

Второе определение удобнее: композиция отображений, обладающих некоторым свойством, тоже обладает этим свойством.

5. Пусть отображение плоскости на себя обладает указанным свойством. Возьмем произвольные точки M и N. Так как $MN \parallel M'N'$ (рис. 5) и $k \neq 1$, прямые MM' и NN' пересекаются. Обозначим точку их пересечения через O. Из подобия треугольников OMN и $OM'N'$ вытекает, что $\frac{|OM'|}{|OM|} = k$. Если мы возьмем еще точку P, то нетрудно установить, что $(PP') \cap (MM') = O$, т. е. точка O не зависит от выбора точек M, N.

Кроссворд «Соты» *)

(см. «Квант» № 8)

1. Прогиб. 2. Капрон. 3. Евклид. 4. Фарада. 5. Усагин. 6. Галлон. 7. Оптика. 8. Вектор. 9. Скаляр. 10. Курако. 11. Модуль. 12. Рыбкин. 13. Протон. 14. Джоуль. 15. Лотбак. 16. Восемь. 17. Работа. 18. Делоне. 19. Способ. 20. Датчик. 21. Вольта. 22. Тиконд. 23. Эрстед. 24. Эбонит. 25. Почерк. 26. Крылов. 27. Облако. 28. Эдисон. 29. Гитара. 30. Компас. 31. Козлов. 32. Радуга. 33. Пассат. 34. Ландау. 35. Сатурн. 36. Сектор. 37. Кварта. 38. Плазма. 39. Лакруа. 40. Плутон. 41. Пробка. 42. Катион. 43. Призма. 44. Капица. 45. Линник. 46. Зодиак. 47. Анализ. 48. Орбита.

---

*) Автор кроссворда — В. Шестаков

Игра «йога»

Игра «йога» *) предназначена для одного человека.

Она состоит в следующем:

Доска из 33 полей имеет форму, показанную на рисунке 1; на каждое поле ставится по фишке, затем одна фишка убирается; на каждом ходу можно перепрыгивать любой фишкой через любую соседнюю (по горизонтали или вертикали) на пустое поле — при этом перепрыгнутая фишка снимается; цель игры — снять с доски все фишки, кроме одной.

Нетрудно проверить, что, *какую бы фишку мы ни убрали первоначально, снять все фишки, кроме одной, можно*. Из соображений симметрии ясно, что проверку достаточно провести для случая, когда первоначально снимаются фишки d1, d2, d3, d4, e1, e2, e3 (рис. 1 на 3 с. обложки). Впрочем, некоторые из этих случаев сводятся друг к другу.

Пусть вначале удалена фишка d3. Докажем, что, *когда на доске останется одна фишка, она будет стоять на одном из полей* a3, d3, g3, d6.

Раскрасим доску в три цвета, как на рисунке 2. Легко заметить, что при каждом ходе число фишек каких-то двух цветов уменьшается на 1, а третьего цвета — возрастает на 1 (рис. 3). Значит, после каждого хода четность числа фишек каждого цвета меняется на противоположную.

В исходном положении у нас 11 фишек стоит на синих полях, 11 — на красных и 10 — на белых. Мы хотим, чтобы осталась одна фишка — для этого надо сделать 31 ход. Когда четность изменится 31 раз, у нас будет четное число синих фишек, четное число — красных и нечетное — белых. Следовательно, единственная оставшаяся фишка будет на белом поле.

Чтобы закончить доказательство, раскрасим доску по-другому: как на рисунке 4. Аналогичное рассуждение показывает, что и при этой раскраске последняя фишка должна стоять на белом поле. Поскольку поля, белые при обеих раскрасках, — это и есть четыре поля, указанные в условии задачи, доказательство закончено.

Задачи

1. На каких полях может остаться фишка, если вначале мы сняли фишку с поля c1?

2. Раскрасим доску, как на рисунке 5. Удалим вначале фишку с поля c3. а) Какое наименьшее число «белых» (т. е. стоящих на белых полях) фишек необходимо съесть, чтобы уничтожить все «черные» фишки? б) Какое наименьшее число «черных» фишек необходимо сбить, чтобы уничтожить все «белые» фишки?

3. В квадрате 11×11 расставлена 81 фишка, как на рисунке 6. Докажите, что, действуя по правилам игры «йога», нельзя добиться того, чтобы осталась только одна фишка.

4. На шахматной доске расставили 64 фишки и сняли фишку с поля a1; на каждом ходу можно перепрыгивать любой фишкой через две соседние (по горизонтали или вертикали) на пустое поле, снимая с доски обе перепрыгнутые фишки. Какого наименьшего числа фишек можно добиться и как эти фишки будут располагаться? Как изменится ответ, если заполнить фишками все 64 поля и добавить к доске еще одно поле (пустое) рядом с клеткой a1?

А. Толпыго

---

*) Раньше она называлась «солитер».

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шихановнч

Номер оформили:
Е. Барк, М. Дубах, Г. Красиков,
Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

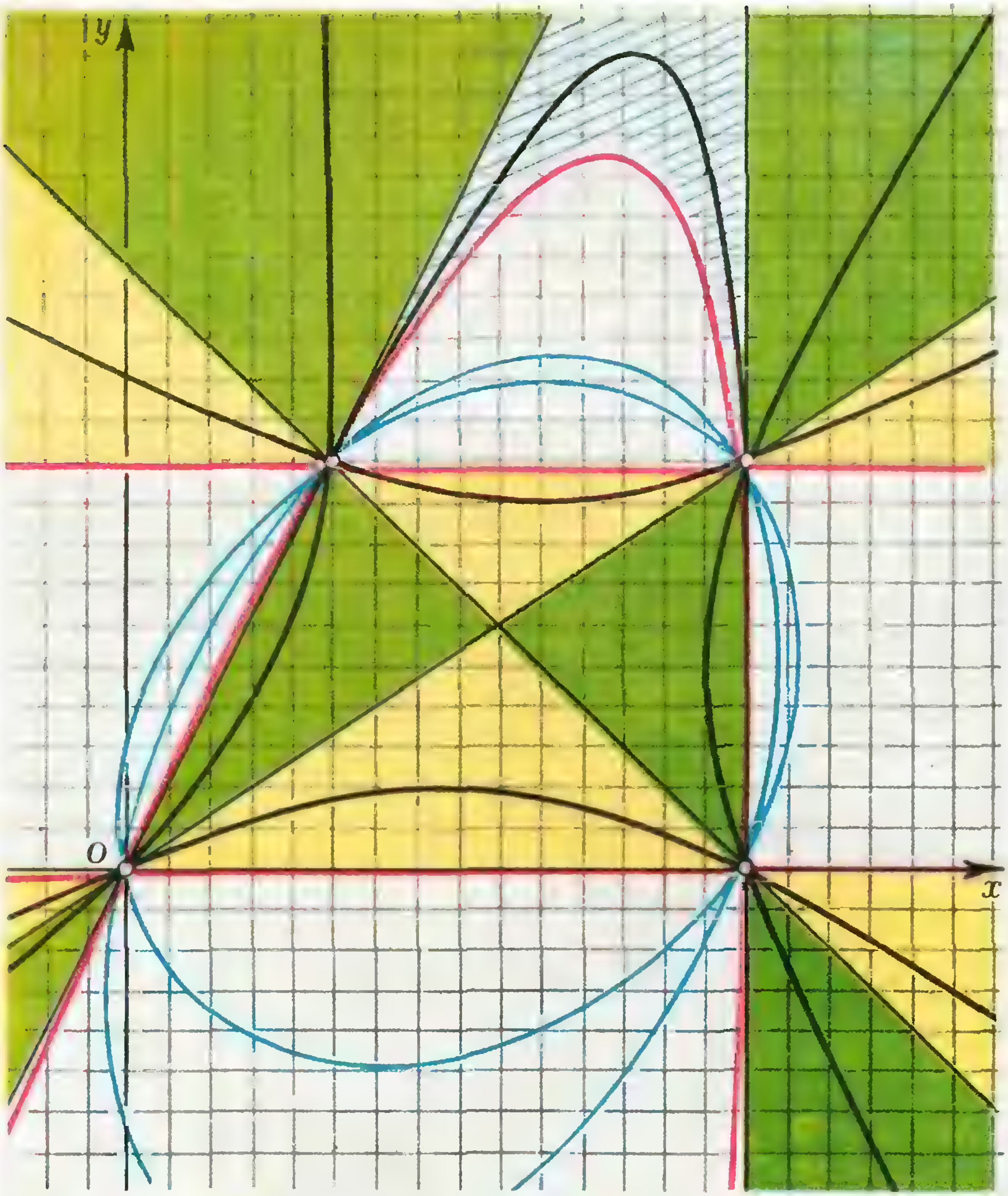
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Бутусова и В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/VI-78
Подписано в печать 15/VIII-78 г.
Бумага $70\times108^{1}/_{16}$ Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,58. Т-16204
Цена 30 коп Заказ 1168. Тираж 301 160 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

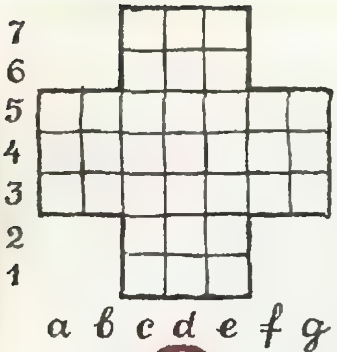
Рукописи не возвращаются



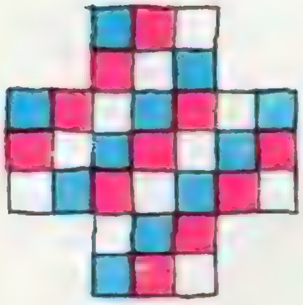
На этом рисунке изображено семейство кривых второго порядка, проходящих через точки (0,0), (1,2), (3,0) и (3,2). Кривая второго порядка — это график уравнения

$$ax^2+bxy+cy^2+ex+fy+q=0$$

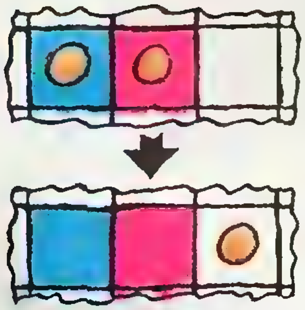
(где числа a, b, c не равны нулю одновременно). Примеры кривых второго порядка: эллипс, гипербола, парабола, пара прямых. (Подробнее о кривых второго порядка можно прочитать в «Кванте», 1977, № 8.) По теореме Паскаля в общем случае через пять точек проходит ровно одна кривая второго порядка. Поэтому через четыре точки проходит целое семейство кривых второго порядка, которое и показано на рисунке. Особую роль здесь играют «красная» парабола, пара параллельных прямых $y^2-2y=0$ и пара пересекающихся прямых $(2x-3y)(x+y-3)=0$. Эти линии отделяют области, заполненные кривыми разных типов. Например, белая область заполнена эллипсами, зеленая область — одним семейством гипербол, желтая — другим семейством гипербол.


7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g

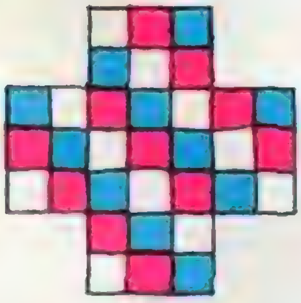
①



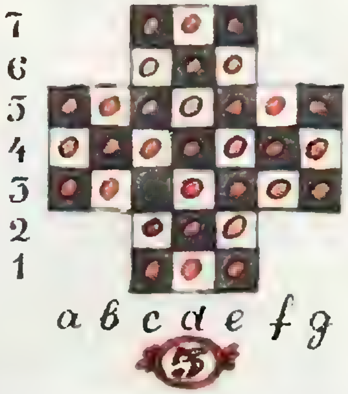
②



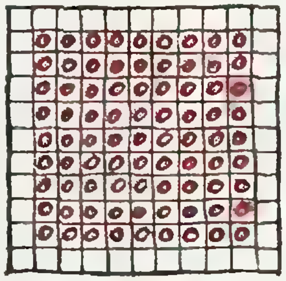
③



④


7
6
5
4
3
2
1
a b c d e f g

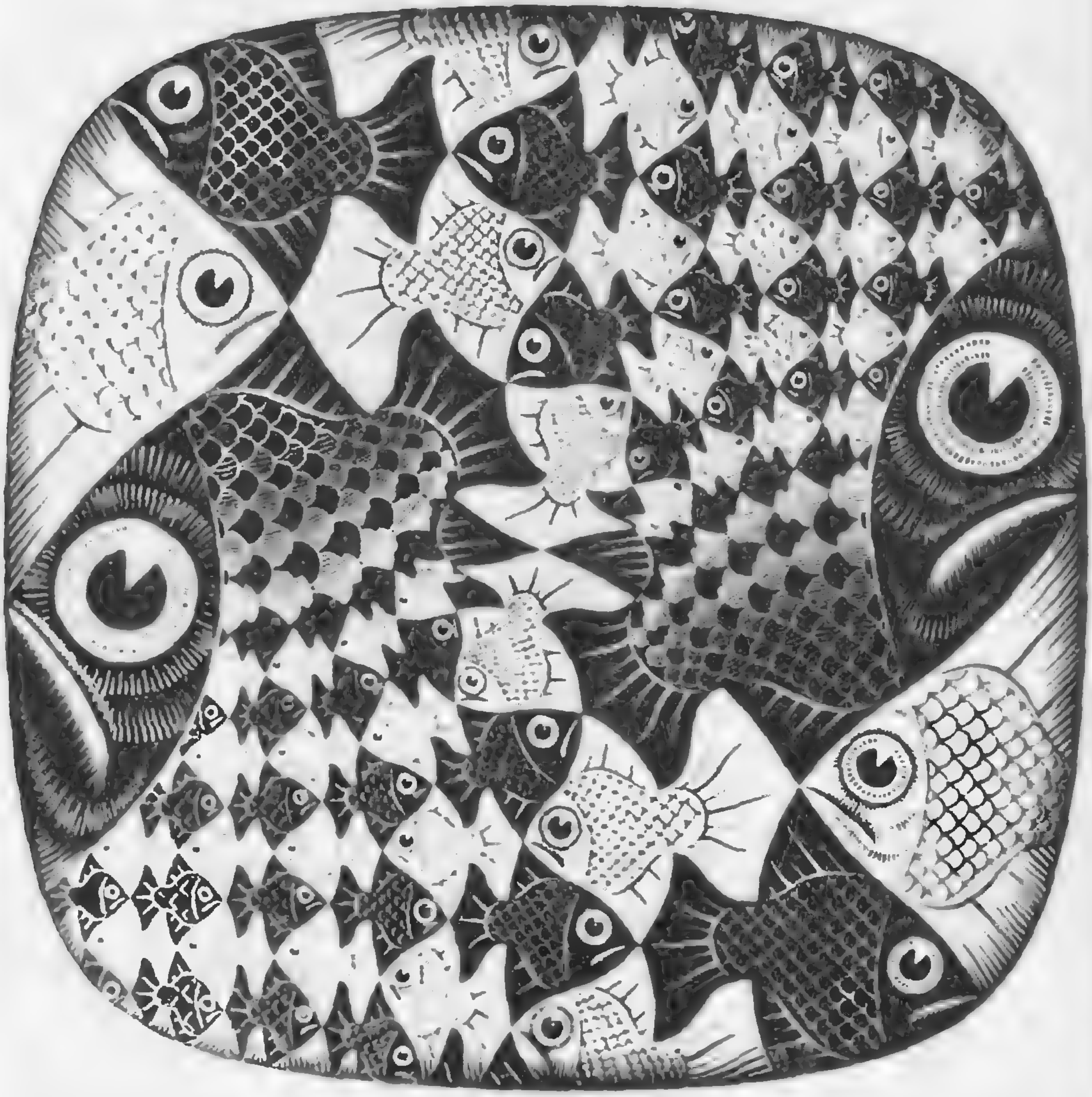
⑤



⑥

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Этот замечательный пример симметричного разбиения плоскости придуман знаменитым голландским художником Эшером. Постарайтесь найти другие закономерности, «управляющие» этим рисунком.



НОМЕР
10

Основан в 1970 году
Квант
10
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
Н. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

2 150 лет со дня рождения Л. Н. Толстого
4 *Н. Виленкин.* Сравнения и классы вычетов
9 *Л. Гродко.* Бегущая волна и... автомобильная шина
14 *В. Болтянский.* Три точки на одной прямой
20 *Е. Гик.* Ваш рейтинг, гроссмейстер?
25 *В. Абрамович.* Признаки делимости на *l*

Лаборатория «Кванта»

28 *И. Половинка.* Опыты с синтетическими пленками

Математический кружок

31 *Л. Курляндчик, А. Лисицкий.* Суммы и произведения

Задачник «Кванта»

38 Задачи М526—М530; Ф538—Ф542
40 Решения задач М476—М481, М483, М484; Ф493—Ф497

По страницам школьных учебников

54 *А. Звонкин.* Когда существует предел?

«Квант» для младших школьников

57 Задачи
58 *В. Невгод.* Приключения Ганса Пфааля и толстяка Пайкрафта

Практикум абитуриента

62 *Г. Перевилов.* Что значит «для любого ε»?

XII Всесоюзная олимпиада школьников

65 *Н. Розов, М. Смолянский.* Олимпиада по математике
70 *Л. Лиманов.* Задачи олимпиады по математике
71 *Т. Петрова.* Олимпиада по физике
76 *В. Орлов.* Экспериментальные задачи олимпиады по физике
82 Победители XII Всесоюзной олимпиады школьников

◆

84 Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

Рецензии, библиография

86 *И. Клумова, М. Смолянский.* Новые книги
87 *Ф. Леонидов.* Символический язык математики

Информация

89 *Л. Макаров.* IX праздник юных математиков в Батуми
90 *М. Башмаков, Т. Братусь, С. Поздняков.* Математика — будущему рабочему
94 **Ответы, указания, решения**
95 Анкета
Смесь *(с. 24, 27, 30, 37, 60, 92)*

На первой странице
обложки
решена задача
о попарном соединении
непересекающимися
тропинками
семи точек
на поверхности...
бублика.
Подробности
см. на с. 60.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

150 лет со дня рождения Л. Н. Толстого

Художественное наследие Л. Н. Толстого давно вошло в сокровищницу мировой культуры. Шедевры Л. Н. Толстого были и остаются не только непревзойденными описаниями русской жизни, но и глубокими философскими сочинениями, в которых отражены вся многогранность и сложность человека. Толстой-гуманист не предписывает человеку никаких отвлеченных правил, кроме обязательного для всех правила оставаться человеком в любых обстоятельствах, сообразуясь с ними, но не подчиняясь им. По мнению Толстого, без приобщения к общечеловеческому труду, не будь которого люди и дня не могли бы прожить, даже самый гениальный художник или ученый не смог бы считать себя равным всем людям. А без этого, по Толстому, невозможно никакое истинное творчество.

Художественное творчество Л. Н. Толстого хорошо знакомо. Гораздо меньше известны его педагогические сочинения. Нашим читателям, несомненно, будет интересно узнать, что Л. Н. Толстой много времени и внимания уделял вопросам преподавания в школе и, в частности, методике преподавания арифметики. Ему принадлежит учебник «Арифметика», изданный в 1874 году и опиравшийся на его личный опыт многолетнего преподавания в Яснополянской школе. В этой книге, существенно отличавшейся по содержанию от учебников своего времени, нашли отражение оригинальные воззрения

Л. Н. Толстого на преподавание арифметики. Многие идеи Л. Н. Толстого явно перекликаются с современными взглядами на преподавание математики в школе. Вот только один пример: «Уравнение, — писал Л. Н. Толстой, — следовательно, алгебру я начинаю вместе с первыми действиями...» (Л. Н. Толстой. Педагогические сочинения. М., 1953). Кажется, что это сказано не сто лет назад, а сегодня, о новых учебниках для начальных классов.

Л. Н. Толстой всю жизнь любил интересные, оригинальные задачи, высоко ценил простые и прозрачные решения. Напомним читателям одну из его любимых задач — «задачу о косцах», — которая решается нехитрыми рассуждениями без составления уравнений.

«Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели?

В «Войне и мире» многие страницы посвящены раздумьям писателя о жизни, о Родине, о бытии, о человеке. И чем больше перечитываешь это произведение, тем больше находишь в нем нового, глубокого, неожиданного, ранее скрытого.

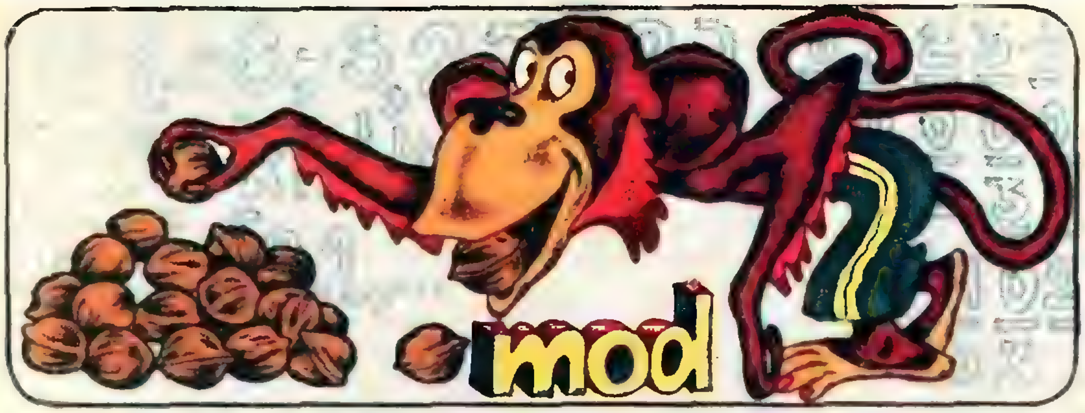
Ниже мы воспроизводим отрывок из романа, где речь идет об одном из важнейших вопросов философии естествознания, тесно примыкающем к тематике нашего журнала.

Для человеческого ума непонятна абсолютная непрерывность движения. Человеку становятся понятны законы какого бы то ни было движения только тогда, когда он рассматривает произвольно взятые единицы этого движения. Но вместе с тем из этого-то произвольного деления непрерывного движения на прерывные единицы проистекает большая часть человеческих заблуждений.

Известен так называемый софизм древних, состоящий в том, что Ахиллес никогда не догонит впереди идущую черепаху, несмотря на то, что Ахиллес идет в десять раз скорее черепахи: как только Ахиллес пройдет пространство, отделяющее его от черепахи, черепаха пройдет впереди его одну десятую этого пространства; Ахиллес пройдет эту десятую, черепаха пройдет одну сотую и т. д. до бесконечности. Задача эта представлялась древним неразрешимою. Бессмысленность решения (что Ахиллес никогда не догонит черепаху) вытекала из того только, что произвольно были допущены прерывные единицы движения, тогда как движение и Ахиллеса и черепахи совершалось непрерывно.

Принимая все более и более мелкие единицы движения, мы только приближаемся к решению вопроса, но никогда не достигаем его. Только допустив бесконечно-малую величину и восходящую от нее прогрессию до одной десятой и взяв сумму этой геометрической прогрессии, мы достигаем решения вопроса. Новая отрасль математики, достигнув искусства обращаться с бесконечно-малыми величинами, и в других более сложных вопросах движения дает теперь ответы на вопросы, казавшиеся неразрешимыми.

Эта новая, неизвестная древним, отрасль математики, при рассмотрении вопросов движения, допуская бесконечно-малые величины, то есть такие, при которых восстановляется главное условие движений (абсолютная непрерывность), тем самым исправляет ту неизбежную ошибку, которую ум человеческий не может не делать, рассматривая вместо непрерывного движения отдельные единицы движения.



Н. Виленкин

Сравнения и классы вычетов

Многим любителям математики известна следующая задача:

Обезьяна и орехи

Пять путешественников остановились на ночлег. Они везли с собой мешок орехов и обезьяну. Ночью один из них проснулся, подошел к мешку и разделил орехи на 5 равных частей, причем один орех остался лишним. Он отдал обезьяне лишний орех, съел свою долю и снова лег спать. Потом проснулся второй путешественник и, не зная о поступке первого, проделал то же самое. Потом это же сделали по очереди остальные три путешественника. Когда утром оставшиеся орехи разделили на 5 равных частей, снова остался один орех для обезьяны. Сколько было орехов?

Вся трудность этой задачи в лишних орехах, без них ответом послужило бы любое число, которое можно шесть раз делить без остатка на 5, то есть любое число, кратное $5^6 = 15625$. А из-за того, что каждый раз деление происходило с остатком, задачу решить куда труднее. Замечательное решение придумал в студенческие годы знаменитый английский физик Дирак. Он решил найти число орехов, которое бы ... не менялось при описанной операции (делении на пять частей с выделением ореха обезьяне и поедании одной части). Читатель, несомненно, скажет, что такого числа орехов быть не может — ясно, что после этой операции оно должно уменьшиться. Но все дело в том, что Дирак не ограничивал себя натуральными числами. А тогда ему осталось решить уравнение $\frac{4}{5}(x-1)=x$. Корнем этого уравнения является число -4. Поэтому число -4 могло бы быть решением нашей задачи, но по ее смыслу, конечно, не годится. Зато теперь ясно, как получить положительный ответ: надо к числу -4, найденному Дираком, прибавить 5^6. Проверьте, что ответ 15 621 удовлетворяет условию задачи. Впрочем, ему удовлетворяет и каждое число вида $-4 + 5^6 \cdot k$, где k — любое натуральное число.

Что такое сравнимые числа

Если отвлечься от требования положительности решения, то любое число вида $-4 + 5^6 \cdot k$, где k — целое, является решением задачи про орехи и обезьяну. Эти числа образуют «двустороннюю арифметическую прогрессию» с разностью 5^6, простирающуюся в обе стороны. У них есть одно общее свойство — при делении на 5^6 все они дают один и тот же остаток 15 621.

Про такие числа в математике говорят, что они *сравнимы друг с другом по модулю**) 15 625.

В общем виде понятие сравнимости по некоторому модулю $m \in \mathbf{N}$ можно определить двумя равносильными способами:

Определение 1. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если их разность делится без остатка на m.*

Определение 1′. *Целые числа a и b называются сравнимыми по модулю m, если их остатки при делении на m одинаковы* **).

Если числа a и b сравнимы друг с другом по модулю m, то пишут так:

$$a \equiv b \pmod m.$$

Например, $16 \equiv 30 \pmod 7$, так как разность $16 - 30 = -14$ делится на 7, а $72 \not\equiv 45 \pmod 8$, так как $72 - 45 = 27$ не делится на 8.

Арифметика остатков

Все числа, сравнимые с числом 2 по модулю 5, одинаково ведут себя при делении на 5 — они дают остаток 2. Объединим эти числа в одно множество и назовем его *классом вычетов по модулю* 5. Обозначим этот класс той же цифрой 2, только, чтобы отличить его от числа 2, будем писать ее так: $\overline{2}$. Значит, $\overline{2}$—не число, а бесконечная совокупность чисел:

$$\overline{2} = \{\dots -8, -3, 2, 7, 12, \dots\}$$

Так же определяется класс вычетов по любому модулю m. При делении на m могут получиться m различных остатков: $0, 1, 2, \dots, m-1$. Каждому из них соответствует свой класс вычетов. Остатку r соответствует класс вычетов $\overline{r}$, состоящий из чисел вида $r + km$, где k — целое число:

$$\overline{r} = \{r + km \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

Все множество $\mathbf{Z}$ целых чисел распадается на m классов вычетов по модулю m. Множество всех этих классов обозначают через $F_m : F_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. При изучении вопросов, касающихся делимости на m, лучше иметь дело с конечным множеством F_m, чем с бесконечным множеством $\mathbf{Z}$.

Чтобы решать задачи про делимость, надо уметь выполнять над классами вычетов арифметические операции. Начнем со сложения. Оно определяется очень просто — в каждом из слагаемых (напомним, что класс вычетов есть бесконечное множество целых чисел) берут по представителю и складывают их, а потом смотрят, в какой класс вычетов попала сумма. Его и называют *суммой* данных *классов*. Например, сложим классы вычетов $\overline{4}$ и $\overline{5}$ по модулю 6. Для этого выберем в них по представителю. Чтобы долго не думать, возьмем сами остатки $\overline{4}$ и $\overline{5}$, давшие названия слагаемым классам. Их сумма равна 9. Но $9 \equiv 3 \pmod 6$ и потому $\overline{4} + \overline{5} = \overline{3}$. Если те же классы берутся не в F_6, а в F_8, то сумма получится ниая: $\overline{4} + \overline{5} = \overline{1}$. А в F_9 $\overline{4} + \overline{5} = \overline{0}$.

Чтобы покончить с вопросом о сложении классов вычетов, надо еще доказать, что при выборе иных представителей сумма не изменится. Это следует из такой теоремы:

Теорема 1. *Если $a \equiv a_1 \pmod m$ и $b \equiv b_1 \pmod m$, то $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod m$.*

Доказательство. Так как $a \equiv a_1 \pmod m$, $a = a_1 + km$, где $k \in \mathbf{Z}$, а так как $b \equiv b_1 \pmod m$, $b = b_1 + lm$, где $l \in \mathbf{Z}$. Поэтому $a + b = a_1 + b_1 + (k + l)\,m$, где $k + l \in \mathbf{Z}$, и $a + b \equiv a_1 + b_1 \pmod m$.

Мы свели сложение классов вычетов к сложению чисел. Поэтому сложение классов вычетов коммутативно и ассоциативно, то есть $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ и $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$, прибавление класса $\overline{0}$ не меняет класса вычетов, то есть $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$, и т. д.

Вычитание и умножение классов вычетов определяются точно так же — в классе выбирают по представителю и выполняют операции над ними. И здесь результат не зависит от выбора представителей (докажите это сами). Более того, справедливо следующее весьма общее утверждение:

---

*) Слово «модуль» происходит от латинского modulus (мера).

**) *Остатком* от деления целого числа a на натуральное число m называется такое число r, что $a = mq + r$ и $0 \leqslant r < m$.

Если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами и $a \equiv a_1 \pmod m$, *то* $P(a) \equiv P(a_1) \pmod m$. Постарайтесь доказать это самостоятельно.

Свойства операций вычитания и умножения классов вычетов тоже очень похожи на свойства этих операций для целых чисел (за одним исключением; о нем — ниже).

Задачи на делимость

Поскольку классы вычетов по модулю m тесно связаны с остатками от деления на m, почти все задачи, в которых речь идет о делимости чисел, удобно решать с помощью сравнений.

Пример 1. *Найдем остаток от деления* 212^{1978} *на* 7.

Так как при делении 212 на 7 получается остаток 2, $212 \equiv 2 \pmod 7$. Отсюда следует, что $212^{1978} \equiv 2^{1978} \pmod 7$. Заметим теперь, что $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$. Но $1978 = 659 \times 3 + 1$. Значит, из $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ следует, что $2^{1978} = (2^3)^{659} \cdot 2 \equiv 1^{659} \cdot 2 = 2 \pmod 7$. Поэтому при делении 212^{1978} на 7 получится остаток 2.

Пример 2. *Выведем признак делимости на 9.*

Так как $10 \equiv 1 \pmod 9$, для любого k имеем $10^k \equiv 1 \pmod 9$. Но тогда

$$a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_n \equiv \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9.$$

Это значит, что числа $N = a_0 \cdot 10^n + \ldots + a_n$ и $M = a_0 + \ldots + a_n$ имеют одинаковые остатки при делении на 9. В частности, *N делится на 9 в том и только в том случае, когда на 9 делится число M* (сумма цифр числа N).

Пример 3. *Докажем, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо дает при делении на 3 остаток* 1.

В самом деле, если $x \equiv 0 \pmod 3$, то x^2 делится на 9. Если же $x \equiv 1 \pmod 3$ или $x \equiv 2 \pmod 3$, то $x^2 \equiv 1 \pmod 3$, так как $1^2 = 1$ и $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$.

Пример 4. *Найдем последнюю цифру числа* 7^{7^7}

Нам надо найти остаток от деления числа 7^{7^7} на 10. Но $7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{10}$, и потому $7^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Найдем остаток от деления показателя 7^7 на 4. Так как $7 \equiv -1 \pmod 4$, $7^7 \equiv (-1)^7 \equiv -1 \equiv 3 \pmod 4$, и потому $7^7 = 4m + 3$. Следовательно, $7^{7^7} = (7^4)^m \cdot 7^3 \equiv 7^3 \equiv (-3)^3 \equiv -27 \equiv 3 \pmod{10}$. Это значит, что у чисел 7^{7^7} и 3 одинакова последняя цифра, то есть 7^{7^7} кончается на 3.

Деление классов вычетов

Разделить класс вычетов $\bar b$ на класс вычетов $\bar a$ — значит найти такой класс вычетов $\bar x$, что $\bar a \bar x = \bar b$. Для целых чисел задача деления разрешима не всегда, но уж если она решается, то единственным образом. Это связано с тем, что произведение двух целых чисел равно нулю лишь в случае, когда хоть один из множителей равен нулю. Но в F_m дело обстоит не так. Взглянув на таблицу умножения для F_6, замечаем, что нули стоят в ней не только в первой строке и первом столбце (там, где один из множителей равен нулю).

Нулю равны и произведения $\bar 2 \cdot \bar 3$, $\bar 3 \cdot \bar 4$, хотя множители отличны от нуля. Как говорят, в F_6 есть делители нуля (класс вычетов $\bar a$ называется *делителем нуля*, если он отличен от $\bar 0$, но существует такой класс $\bar b \neq \bar 0$, что $\bar a \cdot \bar b = \bar 0$). В F_6 делителями нуля оказались классы $\bar 2$, $\bar 3$, $\bar 4$. Числа 2, 3, 4 имеют общее свойство — они не являются взаимно простыми с модулем 6. Это наводит на мысль о справедливости следующей теоремы:

Таблица умножения в F_6

	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$	$\bar 0$
$\bar 1$	$\bar 0$	$\bar 1$	$\bar 2$	$\bar 3$	$\bar 4$	$\bar 5$
$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 2$	$\bar 4$
$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$	$\bar 0$	$\bar 3$
$\bar 4$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$	$\bar 0$	$\bar 4$	$\bar 2$
$\bar 5$	$\bar 0$	$\bar 5$	$\bar 4$	$\bar 3$	$\bar 2$	$\bar 1$

Теорема 2. *Класс вычетов $\overline{a}$ в F_m не является делителем нуля в том и только в том случае, когда a и m взаимно просты.*

Доказательство. Пусть a и m взаимно просты. Если $\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{0}$, то число ab делится на m. Но, в силу взаимной простоты a и m, это может быть лишь в случае, когда b делится на m, то есть $\overline{b}=\overline{0}$. Это и значит, что $\overline{ab}=\overline{0}$ лишь при $\overline{b}=\overline{0}$, то есть что $\overline{a}$ не является делителем нуля.

Предположим теперь, что наибольший общий делитель чисел a и m отличен от 1, $a=a_1d$, $m=m_1d$, $d>1$. Тогда число $m_1<m$ — целое, причем отлично от m, и потому $\overline{m_1}\neq\overline{0}$. Но $am_1=a_1dm_1=a_1m$, то есть $\overline{am_1}=\overline{0}$. Значит, $\overline{a}$ — делитель нуля.

Если число a взаимно просто с модулем m, то все числа из класса вычетов $\overline{a}$ взаимно просты с m. В этом случае говорят, что *класс $\overline{a}$ взаимно прост с m.*

Из теоремы 2 вытекает важное

Следствие 1. *Если класс вычетов $\overline{a}$ взаимно прост с m, то в F_m можно однозначно делить на $\overline{a}$, то есть для любого $\overline{b}\in F_m$ уравнение $\overline{a}\overline{x}=\overline{b}$ имеет одно и только одно решение.*

Сначала докажем, что это уравнение не может иметь различных решений. Если $\overline{a}\overline{x_1}=\overline{b}$ и $\overline{a}\overline{x_2}=b$, то $\overline{a}\,(\overline{x_1}-\overline{x_2})=\overline{0}$, а так как $\overline{a}$ не делитель нуля, то $\overline{x_1}-\overline{x_2}=\overline{0}$, то есть $\overline{x_1}=\overline{x_2}$. Значит, решение может быть лишь одно.

Осталось показать, что решение существует.

Мы только что доказали, что среди классов вычетов $\overline{a}\cdot\overline{0}$, $\overline{a}\cdot\overline{1}$, …, $\overline{a}\,(\overline{m-1})$ нет одинаковых. Значит, это те же классы $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{m-1}$, только, возможно, взятые в ином порядке. А тогда для любого класса $\overline{b}$ найдется такой класс x, что $\overline{a}\cdot\overline{x}=\overline{b}$.

Подтверждением доказанного следствия может служить таблица умножения по модулю 6 — из нее видно, что только в строках для классов $\overline{1}$ и $\overline{5}$ встречаются все классы вычетов. В других строках есть лишь часть классов: в строках для $\overline{2}$ и $\overline{4}$ классы $\overline{0}$, $\overline{2}$, $\overline{4}$, а в строке для $\overline{3}$ — классы $\overline{0}$ и $\overline{3}$. Легко понять, как обстоит дело в общем случае:

Таблица умножения в F_6

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Следствие 2. *Если $(a,\ m)=d$*), то уравнение $\overline{a}\overline{x}=\overline{b}$ имеет решение лишь при условии, что b делится на d. В этом случае число решений равно d.*

Предоставляем читателю доказать это утверждение.

В случае, когда модуль является простым числом, можно делить на любой ненулевой класс вычетов — в этом случае все такие классы взаимно просты с модулем. Поэтому, например, в таблице умножения по модулю 5 одна строка состоит из нулей, а остальные содержат по одному разу все классы вычетов.

Теоремы Ферма и Эйлера

В теории чисел очень часто применяется так называемая *Малая теорема Ферма:*

Теорема 3. *Если p — простое число и a не делится на p, то остаток от деления числа a^{p-1} на p равен 1.*

По-другому ее можно сформулировать следующим образом:

Теорема 3′. *Если $\overline{a}$ — ненулевой класс вычетов по простому модулю p, то $\overline{a}^{p-1}=\overline{1}$.*

Доказательство. Так как $0<a<p$, а модуль p — простое число, то a и p взаимно просты. Поэтому классы вычетов $\overline{a}\cdot\overline{1}$, $\overline{a}\cdot\overline{2}$, …, $\overline{a}\,(\overline{p-1})$ являются теми же самыми, что и $\overline{1}$, $\overline{2}$, …, $\overline{p-1}$, только

---

*) $(a,\ m)$ — наибольший общий делитель чисел a и m.

взятыми, быть может, в другом порядке. Так как умножение в F_p коммутативно и ассоциативно, то

$$(\overline{a}\cdot\overline{1})\ (\overline{a}\cdot\overline{2})\ \ldots\ (\overline{a}\cdot\overline{(p-1)}) = \overline{1}\times\overline{2}\cdot\ldots\cdot\overline{(p-1)}.$$

Осталось сократить это равенство на отличный от $\overline{0}$ множитель $\overline{1}\cdot\overline{2}\times\ldots\cdot\overline{(p-1)}$, чтобы убедиться в том, что $\overline{a}^{p-1}=\overline{1}$.

В теореме Ферма модуль p обязан быть простым числом. Эйлер открыл замечательное обобщение этой теоремы на случай составного модуля m. Классы вычетов $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$, которые мы умножали на $\overline{a}$, взаимно просты с p. Возьмем и для составного модуля m лишь классы вычетов, взаимно простые с m, и обозначим их число через $\varphi(m)$. Умножение этих классов на класс вычетов $\overline{a}$, взаимно простой с m, лишь переставляет их. Перемножая эти произведения и рассуждая так же, как при доказательстве Малой теоремы Ферма, приходим к следующему утверждению:

Теорема 4. *Если класс вычетов $\overline{a}$ взаимно прост с модулем m, то $\overline{a}^{\varphi(m)}=\overline{1}$ (если число a взаимно просто с m, то при делении $a^{\varphi(m)}$ на m получается остаток* 1).

Например, $\varphi(12)=4$: с модулем 12 взаимно просты классы вычетов $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{11}$. Число 31 взаимно просто с числом 12. Поэтому при делении 31^4 на 12 получается остаток 1. Проверьте это!

Чтобы успешно применять теорему Эйлера, надо уметь вычислять *функцию Эйлера* *) $\varphi(m)$. Если m — простое число, то $\varphi(m)=m-1$. Можно доказать что если разложение модуля m на простые множители имеет вид $m=p_1^{\alpha_1}\ldots p_k^{\alpha_k}$, то

$$\varphi(m)=m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Например, $600=2^3\cdot3\cdot5^2$, и потому

$$\varphi(600)=600\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=160.$$

Первообразные корни

Возьмем какой-нибудь класс вычетов $\overline{a}$, взаимно простой с модулем m, и начнем возводить его в квадрат, куб и т. д. Мы уже знаем, что $\overline{a}^{\varphi(m)}=\overline{1}$. Но класс $\overline{1}$ может встретиться и раньше. Например, $\varphi(11)=10$, а в F_{11} уже $\overline{4}^5=\overline{1}$. В самом деле, $4^5=1024$ и при делении 1024 на 11 получается остаток 1.

Легко доказать, что если k — наименьший положительный показатель, при котором $\overline{a}^k=\overline{1}$, то $\varphi(m)$ делится на k (иначе уже $\overline{a}^r$, где r — остаток от деления $\varphi(m)$ на k, равнялось бы $\overline{1}$).

Назовем класс вычетов $\overline{a}$ (по модулю m), взаимно простой с m, *первообразным корнем*, если для него $\varphi(m)$ — наименьший положительный показатель степени, при котором получается $\overline{1}$. В этом случае все классы вычетов, взаимно простые с m, являются степенями $\overline{a}$. Иными словами, для любого такого класса вычетов $\overline{b}$ найдется показатель k такой, что $\overline{a}^k=\overline{b}$. В этом случае k можно назвать «логарифмом $\overline{b}$ по основанию $\overline{a}$» — в теории чисел вместо «логарифм» говорят «индекс».

Из сказанного отнюдь не следует, что первообразные корни существуют для всех модулей. Но есть случай, когда ответ заведомо положителен — если модуль является простым числом. Иными словами, если p — простое число, то среди классов вычетов по модулю p найдется хотя бы один первообразный корень. Доказательство этого утверждения вы найдете в следующем номере, в статье «Сравнения по простому модулю».

---

*) Об этой функции см. «Квант», 1977, № 7, с. 2.

Бегущая волна и... автомобильная шина

Л. Гродко

Качества современного автомобиля в значительной степени определяются уровнем развития теории автомобиля. Увеличение скорости автомобиля, его устойчивости, управляемости, плавности хода и улучшение многих других его характеристик требуют непрерывного развития теории, методов расчета и испытаний автомобилей.

Одной из многих интереснейших задач теории автомобиля является задача о критической скорости качения автомобильной шины.

Что такое критическая скорость, от чего зависит значение этой величины, какими способами можно улучшать эту важную характеристику — эти вопросы мы и рассмотрим в настоящей статье.

Начнем с задачи, которая, на первый взгляд, не имеет прямой связи с этими вопросами.

Волна, бегущая по ленте

Рассмотрим «бесконечную» тяжелую ленту, одетую на два вращающихся барабана и «бегущую» со скоростью V. На участке AB эта лента пропущена через неподвижно закрепленную искривленную трубку (рис. 1). Ось этой трубки представляет собой некоторую плоскую кривую (лежащую в плоскости чертежа). Найти силы, действующие со стороны трубки на ленту. Влиянием силы тяжести пренебречь; считать, что трение между лентой и стенками трубки отсутствует; сила натяжения постоянна (по длине ленты) и равна по модулю $|\vec{N}|$. Масса единицы длины ленты (погонная масса) равна m.

Рассмотрим малый элемент CD ленты длиной l, который в данный мо-

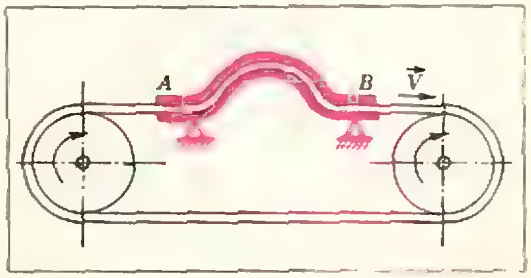


Рис. 1.

мент находится в трубке. Участок трубки, в котором находится этот элемент, можно с хорошим приближением считать дугой окружности. Пусть радиус этой окружности равен R (рис. 2).

Элемент CD движется с постоянной по модулю скоростью V по окружности радиуса R. Следовательно, он имеет центростремительное ускорение, равное V^2/R и направленное к точке O — центру кривизны дуги CD *).

Посмотрим, какие силы сообщают это ускорение элементу CD. Со стороны соседних участков ленты на него действуют силы натяжения N, направленные по касательным к дуге CD в точках C и D (см. рис. 2). Со стороны стенок трубки на ленту действуют силы нормального давления. Пусть на единицу длины ленты действует со стороны трубки сила нормального давления, равная по модулю $|\vec{f}|$. Тогда сила, действующая на элемент CD, равна $|\vec{f}|\,l$ (поскольку l мало и $l \ll R$, можно считать, что эта сила равна именно $|\vec{f}|\,l$, то есть такая же, как если бы элемент CD был прямолинейным). Согласно II закону Ньютона равнодействующая F всех этих сил, направленная к центру кривизны O, и сообщает элементу CD центростремительное ускорение:

$$ml\,\frac{V^2}{R} = |\vec{F}| \qquad (1)$$

(ml — масса элемента CD). Как видно из рисунка 2, $|\vec{F}| = |\vec{N}'| - |\vec{f}|\,l$, где N' — равнодействующая сил натяжения, действующих на элемент CD со стороны соседних участков ленты. Учитывая, что угол φ мал и $\sin\varphi \approx \varphi$, находим, что $|\vec{N}'| = 2|\vec{N}|\,\varphi$, $l = 2R\varphi$. Таким образом,

$$|\vec{F}| = 2|\vec{N}|\,\varphi - 2|\vec{f}|\,R\varphi.$$

Подставим это значение $|\vec{F}|$ и $l = 2R\varphi$ в выражение (1):

$$2mR\varphi\frac{V^2}{R} = 2|\vec{N}|\varphi - 2|\vec{f}|R\varphi.$$

Отсюда найдем $|\vec{f}|$:

$$|\vec{f}| = \frac{1}{R}\left(|\vec{N}| - mV^2\right). \qquad (2)$$

Итак, мы нашли интересовавшую нас силу нормального давления со стороны стенок трубки на ленту. Точнее, мы нашли эту силу, приходящуюся на единицу длины ленты на участке, радиус кривизны которого равен R. Но для дальнейшего рассмотрения нас устроит эта величина.

Проанализируем формулу (2). Величина, стоящая в скобках, не меняется вдоль трубки, так что при данных $|\vec{N}|$, m и $|\vec{V}|$ значение $|\vec{f}|$ определяется радиусом кривизны трубки: $|\vec{f}|$ пропорционально кри-

---

*) Центр кривизны — центр той окружности, дугой которой является криволинейный участок CD (дуга CD). Величина, обратная радиусу кривизны, называется кривизной

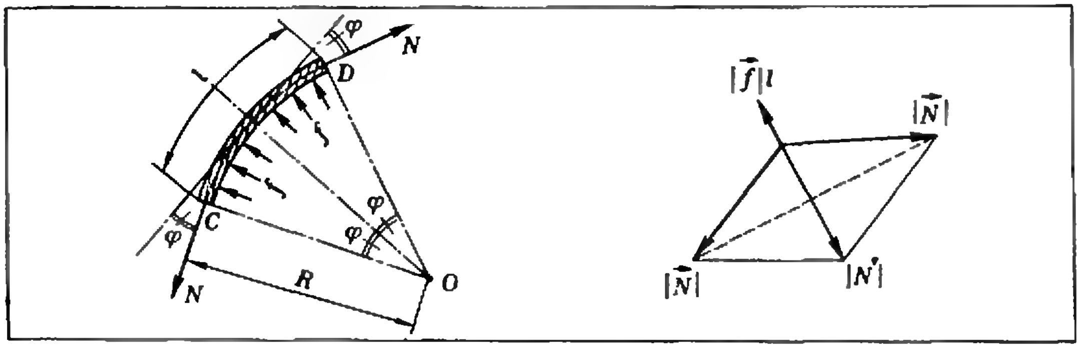


Рис. 2.

визне — $|\vec{f}| \sim \frac{1}{R}$. Если $\vec{V} = 0$ (лента неподвижна), $|\vec{f}| = \frac{|\vec{N}|}{R}$ — сила давления определяется силой натяжения и кривизной трубки в данной точке. С появлением скорости $\vec{V}$ и с ее ростом значение $|\vec{f}|$ начинает уменьшаться и при скорости, равной

$$|\vec{V}| = \sqrt{\frac{|\vec{N}|}{m}}, \qquad (3)$$

обращается в нуль сразу по всей длине трубки. Назовем эту скорость критической ($V_{кр}$).

Что это означает — $|\vec{f}| = 0$? Это означает, что при $|\vec{V}| = V_{кр}$ лента не взаимодействует с трубкой. Если именно при таком значении скорости трубку убрать, то искривление, ею вызванное, останется — лента по-прежнему будет изогнута на участке AB.

По отношению к наблюдателю, движущемуся вправо со скоростью, равной по модулю $V_{кр}$, это искривление бежит по ленте влево со скоростью $V_{кр}$. Такое явление называется волной, бегущей по ленте, а скорость $V_{кр}$ — скоростью распространения волны.

Представим себе теперь, что $|\vec{V}| < V_{кр}$ и мы убрали трубку, но сумели приложить к ленте на участке AB силы давления f, распределенные по длине ленты так же, как от трубки. Ясно, что при этом лента получит точно такое же искривление, какое было при наличии трубки. В каждой точке кривизна ленты $\frac{1}{R}$ будет связана с приложенными силами давления той же формулой (2). Если силы давления f поддерживать постоянными, а скорость ленты увеличивать, то, как следует из формулы (2), степень искривленности ленты, характеризуемая величиной $\frac{1}{R}$, будет увеличиваться. (При этом характер распределения величины $\frac{1}{R}$ по длине участка AB будет определяться законом распределения сил давления f по длине этого участка.)

При неизменном законе распределения сил давления на участке AB и при скорости ленты, близкой к критической, можно, таким образом, получить как угодно большое искривление ленты на участке AB.

Этот вывод можно сформулировать по-другому. Если по ленте «бежит» нагрузка, то есть давления, некоторым образом распределенные на участке AB, и величина этой нагрузки не меняется, а скорость ее распространения относительно ленты растет, то степень искривленности ленты на участке AB возрастает с ростом скорости, а следовательно, возрастет деформация ленты от данной нагрузки. При приближении скорости к $V_{кр}$ искривление ленты будет возрастать неограниченно. С этой точки зрения получается, что при скорости движения нагрузки, близкой к критической, натянутая лента перестает сопротивляться нагрузке.

Полученный вывод не зависит от характера распределения нагрузки на участке AB, так же как выражение для $V_{кр}$ не зависит от формы искривленной трубки.

Перейдем к автомобилю

Понятие критической скорости «бегущей» нагрузки может быть с помощью более сложных рассуждений распространено и на другие случаи, такие, например, как бегущая по рельсу нагрузка от колеса железнодорожного вагона. Рельс также искривляется от этой нагрузки, но задача в этом случае сложнее, так как рельс в отличие от ленты имеет так называемую «жесткость на изгиб» и лежит на «упругом основании» — земле. Однако и в этом случае существует критическая скорость. Расчеты показывают, что эта скорость очень высока (порядка 1000 км/ч) и может иметь практическое значение лишь при создании поездов, движущихся с очень большими, пока неосуществимыми, скоростями.

А вот при движении современного автомобиля существование критической скорости имеет большое практическое значение. Именно $V_{кр}$ определяет максимальное значение скорости, которую может развивать автомобиль. И ограничение это связано не с двигателем, а с автомобильной шиной.

Шина соприкасается с дорогой так называемой площадкой контакта. Действующие со стороны дороги силы, приложенные к шине в площадке контакта, представляют собой нагрузку, бегущую по шине.

Пневматическая шина (именно такие шины используются для автомобилей) представляет собой оболочку, «натянутую» внутренним давлением воздуха. Форма шины, как всем известно, близка к тороидальной.

Выделим мысленно малый элемент A оболочки шины (рис. 3). На этот участок со стороны соседей действуют силы натяжения, направленные вдоль параллели и вдоль меридиана (точнее, по касательным к ним). Пусть значения этих сил, отнесенных к единице длины (по параллели) и к единице ширины (по меридиану) элемента A, равны, соответственно, $|\vec{N}_x|$ и $|\vec{N}_y|$. Анализ зависимости между этими силами и скоростью шины дает значение критической скорости. Формула для $V_{кр}$ в этом случае оказывается аналогичной формуле (3) для тяжелой ленты —

$$|\vec{V}_{кр}| = \sqrt{\frac{|\vec{N}_x|}{m'}} \qquad (4)$$

— с той разницей, что здесь m' — масса единицы поверхности оболочки. Из формулы (4) видно, что критическая скорость тем больше, чем сильнее растянута шина в направлении параллели.

Для увеличения прочности шины при изготовлении оболочки в качестве «арматуры» используют сетку из очень прочных нитей (корда). Иногда нити делают стальными (для шин грузовых автомобилей, которые должны выдерживать большие нагрузки). Чтобы оценить роль сетки-арматуры, достаточно сказать, что если бы ее не было, то шина «лопалась» бы при избыточных давлениях в 20—30 раз меньших, чем те, которые выдерживает современная шина с сеткой. (Для легковых автомобилей это давление 1,5—2 атм, для грузовых — 4—6 атм.)

Направление нитей корда характеризуется углом α. Значение критической скорости зависит от этого угла:

$$|\vec{V}_{кр}| = K \operatorname{ctg} \alpha.$$

Здесь K — коэффициент, определяемый давлением p воздуха в шине, радиусом r поперечного сечения шины и величиной m':

$$K = \sqrt{\frac{pr}{m'}}.$$

Таким образом,

$$|\vec{V}_{кр}| = \sqrt{\frac{pr}{m'}} \operatorname{ctg} \alpha. \qquad (5)$$

Это — так называемая формула Тарнера. Вы можете вывести ее самостоятельно, используя свое знание школьного курса физики.

Тем, кто решил задачу Ф514 (см. «Квант» № 5, 1978), сделать это просто. Для тех, кто не решал этой задачи, даем указания, которые помогут вывести формулу (5). Рассмотрите условия равновесия элемента A в предположении, что кривизна в на-

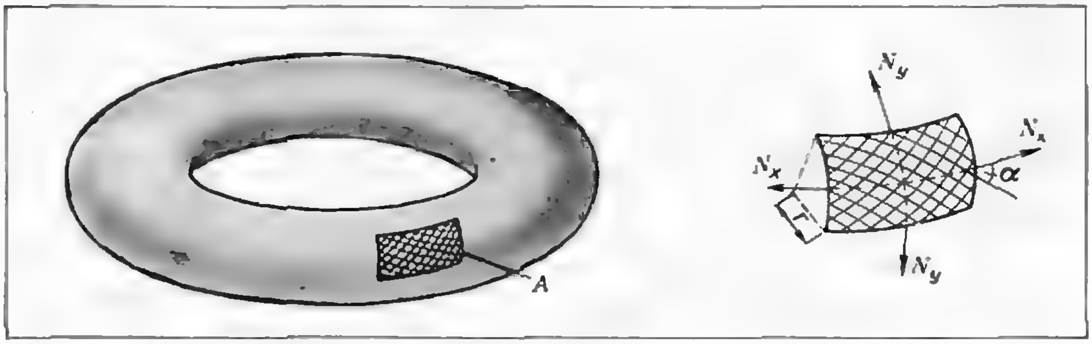


Рис. 3.

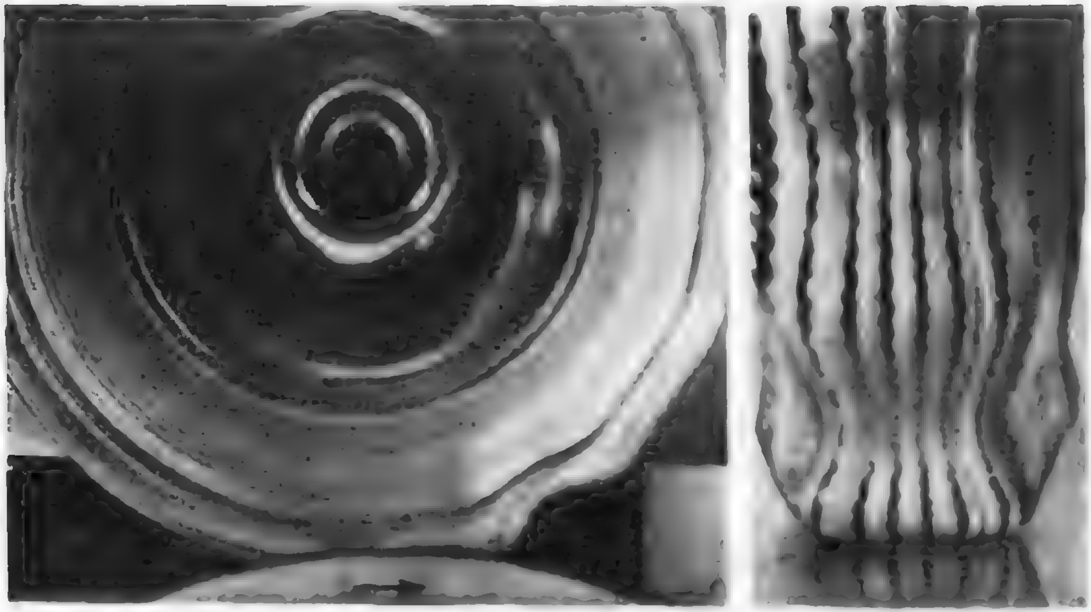


Рис. 4.

правлении параллели равна нулю; это приведет вас к соотношению $|\vec{N}_y| = pr$. Условие относительной неподвижности нитей корда (постоянство угла α) дает связь между $|\vec{N}_y|$ и $|\vec{N}_x|$: $|\vec{N}_x| = |\vec{N}_y| \operatorname{ctg}^2 \alpha = pr \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

Значения критической скорости, рассчитываемые по формуле (5), оказываются довольно близкими к значениям, наблюдаемым на опыте. Для шин легковых автомобилей обычно $|\vec{V}_{\text{кр}}| = 150 \div 220$ км/ч. Для скоростных автомобилей этого, разумеется, недостаточно. Формула Тарнера позволяет понять, какими *путями можно повышать критическую* скорость шины. Для этого нужно делать шину возможно более легкой (уменьшать m'), более «толстой» (увеличивать r), увеличивать давление воздуха и использовать сетку-арматуру с как можно меньшим углом α между нитями.

Величина критической скорости шины является очень важной характеристикой, поэтому все шины проходят специальные испытания на критическую скорость. При этих испытаниях ось вращения колеса неподвижна, и шина «катится» по вращающемуся барабану. На рисунке 4 приведена фотография шины при таких испытаниях, когда скорость качения близка к критической. На поверхности шины в районе «выхода» из площадки контакта видны волны. В этих местах деформация шины очень велика. По мере приближения скорости качения к критической деформация возрастает («глубина» волн становится все больше). Увеличить скорость качения *непосредственно* до значения $V_{\text{кр}}$ не удается, так как шина разрушается уже при скорости, несколько меньшей $V_{\text{кр}}$. Проблема критической скорости является довольно узкой в теории автомобиля. Однако она привлекает большое внимание исследователей. Достаточно сказать, что в научной литературе этой теме посвящены около 250 работ теоретического и экспериментального характера. И тем не менее вопрос еще далек от полного решения.

В. Болтянский

Три точки на одной прямой

В этой статье мы рассмотрим несколько задач, для решения которых оказывается полезным использование векторов. В основном, это задачи, в которых требуется доказать, что некоторые три точки лежат на одной прямой, или из того, что некоторые три точки лежат на одной прямой, вывести те или иные следствия. Главной для решения таких задач является хорошо известная

Теорема. *Точка C в том и только в том случае принадлежит прямой AB, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны* (т. е. существует такое число $k \in R$, что $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$).

Таким образом, чтобы установить принадлежность трех точек A, B и C одной прямой, достаточно убедиться, что существует число k, для которого $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Число k в соотношении $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ имеет (при $A \neq B$) простой геометрический смысл: $|k| = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}$, причем $k > 0$, если точка C принадлежит лучу AB, и $k < 0$, если она принадлежит противоположному лучу.

Если, например, C — середина отрезка AB (рис. 1), то $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; отсюда *для любой точки Q*

$$\overrightarrow{QC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QB}.$$

Если, далее, B — середина стороны MN треугольника AMN, а C — центр тяжести (точка пересечения медиан) этого треугольника, то длина отрезка AC составляет $\frac{2}{3}$ длины отрезка AB (рис. 2): $\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; поскольку для любой точки Q выполняется равенство

$$\overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QN},$$

можно заключить, что

$$\overrightarrow{QC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{QA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QM} + \frac{1}{3}\overrightarrow{QN}.$$

Наконец, еще одно замечание: *если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то из соотношения*

$$k\vec{a} + l\vec{b} = m\vec{a} + n\vec{b}$$

вытекает, что $k = m$ и $l = n$. В самом деле, это равенство можно переписать в виде

$$(k - m)\vec{a} = (n - l)\vec{b};$$

если теперь $k \neq m$, то $\vec{a} = \frac{n-l}{k-m}\vec{b}$, что противоречит неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, $k = m$ и, аналогично, $l = n$.

Вот и вся «теоретическая» премудрость. А теперь рассмотрим подробно четыре примера.

Пример 1. Хорошо известно, что середины оснований трапеции и точка пересечения ее диагоналей расположены на одной прямой. Докажем теперь в некотором смысле «обратную» теорему: *если точка A пересечения диагоналей четырехуголь-*

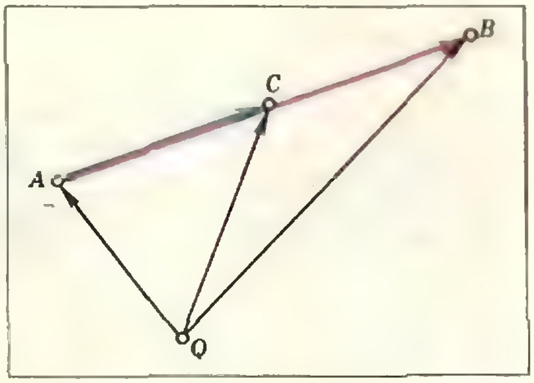


Рис. 1.

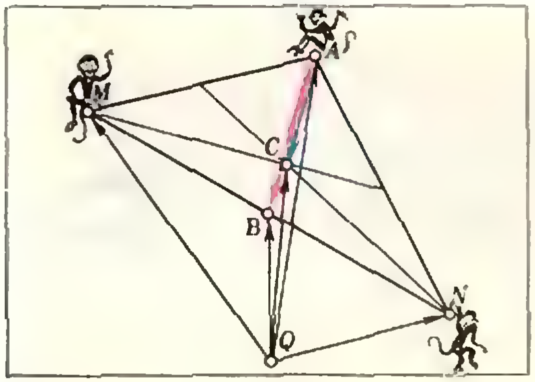


Рис. 2.

ника MNPQ и середины B, C его противоположных сторон MN и PQ лежат на одной прямой, то MNPQ — трапеция или параллелограмм (рис. 3).

Доказательство. Положим $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AN}$. Тогда $\overrightarrow{AP} = k\vec{a}$ (так как точки A, M, P лежат на одной прямой) и, точно так же, $\overrightarrow{AQ} = l\vec{b}$. Так как B — середина отрезка MN,

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Точно так же

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}.$$

По условию точки A, B, C лежат на одной прямой, и потому существует такое число m, что $\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$, то есть

$$m\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{k}{2}\vec{a} + \frac{l}{2}\vec{b}.$$

В силу неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отсюда вытекает, что $m = k = l$.

Наконец, имеем

$$\overrightarrow{MN} = \vec{b} - \vec{a},\ \overrightarrow{PQ} = l\vec{b} - k\vec{a} = k(\vec{b} - \vec{a}),$$

то есть $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{MN}$. Следовательно, $(PQ) \parallel (MN)$, то есть $MNPQ$ — трапеция или параллелограмм.

Замечания. На рисунке 3 точки A, M, N, P, Q расположены так, что числа k и l отрицательны. Однако в решении это нигде не использовалось. Поэтому приведенное рассуждение пригодно без всяких изменений и к случаю, когда числа k, l положительны. Этот случай изображен на рисунке 4. Таким образом, мы «задаром» получили доказательство и такой теоремы: *если точка A, в которой пересекаются продолжения сторон NQ и MP четырехугольника MNQP, и середины B, C сторон MN и PQ расположены на одной прямой, то четырехугольник MNQP* — трапеция. Предоставляем читателю убедиться также, что приведенные рассуждения проходят (почти без изменений) в обратном порядке. Это дает векторное доказательство соответствующих «прямых» теорем: *во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой; во всякой трапеции середины оснований и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой* (иными словами, все четыре указанные точки расположены на одной прямой).

Пример 2. *На стороне ON параллелограмма AMNO и на его ди-*

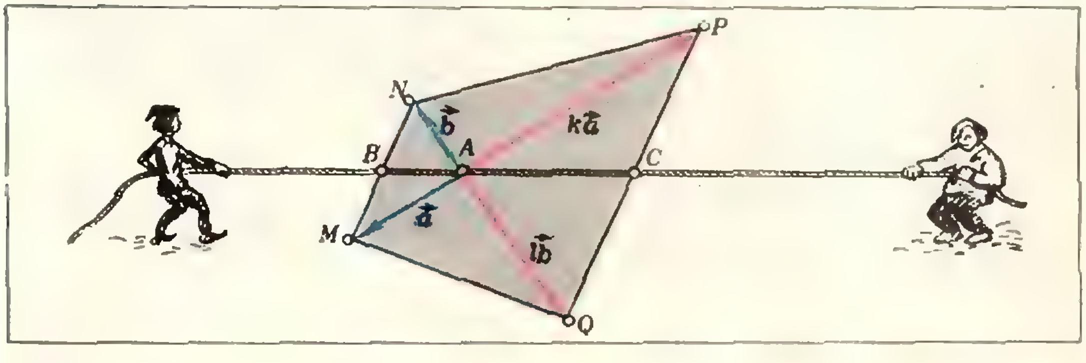


Рис. 3.

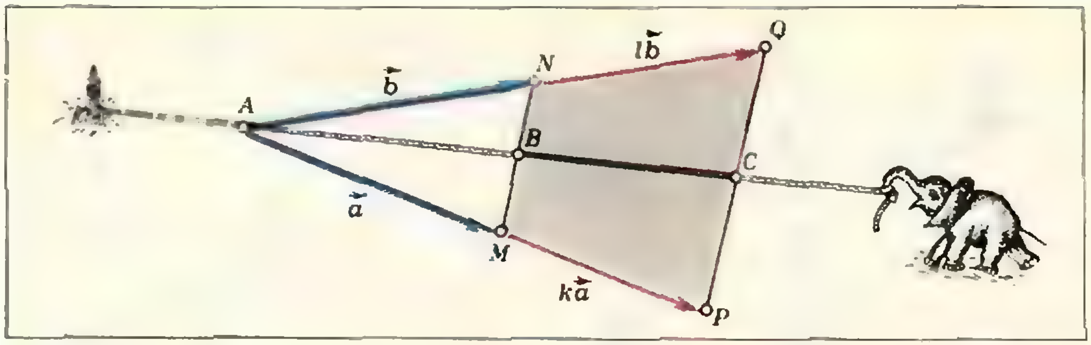


Рис. 4.

агонали OM взяты такие точки B и C, что $\overrightarrow{OB}=\frac{1}{n}\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}$ *(рис. 5). Доказать, что точки A, B, C лежат на одной прямой.*

Решение. Положим $\overrightarrow{AB}=\vec a$, $\overrightarrow{ON}=\vec b$. Тогда

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AO}+\frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM};$$

$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{OB}=\vec a-\frac{1}{n}\vec b;$$

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{AO}=\vec b-\left(\vec a-\frac{1}{n}\vec b\right)=$$

$$=\frac{n+1}{n}\vec b-\vec a,$$

то есть

$$\overrightarrow{AC}=\left(\vec a-\frac{1}{n}\vec b\right)+$$

$$+\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\vec b-\vec a\right)=\frac{n}{n+1}\vec a,$$

или $\overrightarrow{AC}=\frac{n}{n+1}\overrightarrow{AB}$. Из этого следует, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

Замечания. В решении нигде не использовалось, что число n — натуральное. Приведенное рассуждение показывает, что здесь n может быть любым действительным числом, отличным от 0 и -1 (в знаменателях дробей имеются выражения n и $n+1$). На рисунке 5 изображен случай $n=4$ (точка B отсекает четверть стороны ON, а точка C — пятую часть диагонали OM). Если же положить $n=-m-1$, то будем иметь

$$\frac{1}{n}=-\frac{1}{m+1},\quad \frac{1}{n+1}=-\frac{1}{m},$$ т. е.

$$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{m+1}\overrightarrow{ON},\quad \overrightarrow{OC}=-\frac{1}{m}\overrightarrow{OM}.$$

На рисунке 6 изображен случай, когда $m=3$ (на продолжении стороны ON от точки O отложена четверть этой стороны, а на продолжении диагонали — треть этой диагонали).

Пример 3. *Дан треугольник MNP. На прямых MN, NP, PM взяты точки A, B и C:*

$$\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{AN},\quad \overrightarrow{NB}=\beta\overrightarrow{BP},$$
$$\overrightarrow{PC}=\gamma\overrightarrow{CM}.$$

Доказать, что если $\alpha\beta\gamma=-1$, *то точки A, B, C лежат на одной прямой* (теорема Менелая).

Доказательство. Положим $\overrightarrow{AN}=\vec a$, $\overrightarrow{BP}=\vec b$, $\overrightarrow{CM}=\vec c$. Тогда

$$\overrightarrow{MA}=\alpha\vec a,\quad \overrightarrow{NB}=\beta\vec b,\quad \overrightarrow{PC}=\gamma\vec c.$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ легко выразить

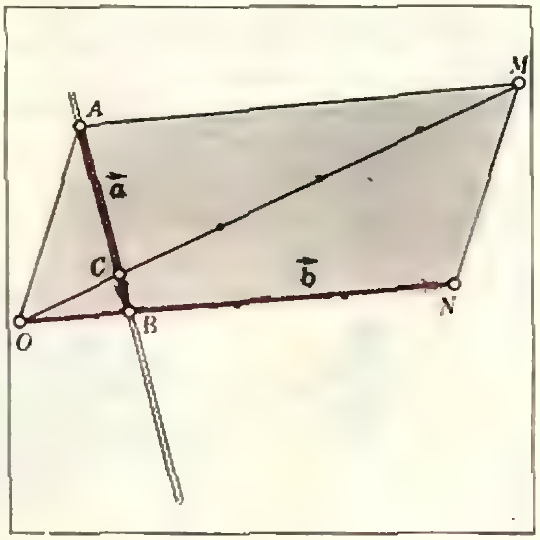


Рис. 5.

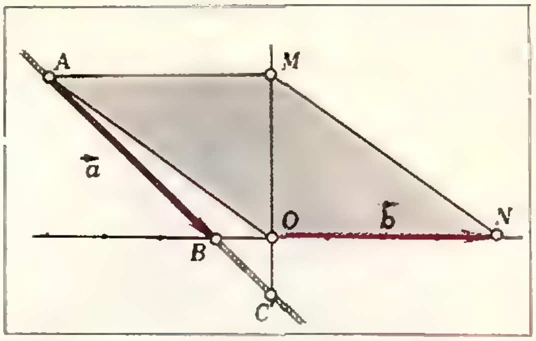


Рис. 6.

через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB} = \vec{a} + \beta\vec{b},$$

$$\overrightarrow{AC} = -(\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA}) = -\vec{c} - \alpha\vec{a}.$$

Далее, так как $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$, то есть $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) + (\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}) = \vec{0}$, получаем

$$(\alpha + 1)\vec{a} + (\beta + 1)\vec{b} + (\gamma + 1)\vec{c} = \vec{0}.$$

Используя это соотношение, исключим вектор $\vec{c}$ из выражения для $\overrightarrow{AC}$, то есть выразим вектор $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Имеем

$$(\gamma+1)\overrightarrow{AC} = -(\gamma+1)\vec{c} - (\alpha\gamma+\alpha)\vec{a} =$$

$$= (\alpha+1)\vec{a} + (\beta+1)\vec{b} - (\alpha\gamma+\alpha)\vec{a} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\vec{a} + (\beta+1)\vec{b} =$$

$$= \frac{\beta+1}{\beta}\left(\vec{a} + \beta\vec{b}\right) = \frac{\beta+1}{\beta}\overrightarrow{AB}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $-\alpha\gamma = \frac{1}{\beta}$). Таким образом,

$$\overrightarrow{AC} = \frac{\beta+1}{\beta(\gamma+1)}\overrightarrow{AB};$$

следовательно, точки A, B, C лежат на одной прямой.

Замечания. Если $\alpha > 0$, то $A \in [MN]$; в случае же $\alpha < 0$ точка A лежит на прямой MN вне отрезка MN (и аналогично для β и γ). Поэтому равенство $\alpha\beta\gamma = -1$ означает, что либо две из трех точек A, B, C лежат на двух сторонах треугольника MNP, а третья точка — на продолжении третьей стороны (рис. 7), либо же все три точки лежат на продолжениях сторон треугольника (рис. 8). Отметим также, что в приведенном доказательстве были первоначально взяты не два, а три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Сделано это для того, чтобы обозначения и вычисления были «симметричными» относительно всех трех вершин треугольника. Однако для получения окончательного вывода пришлось третий вектор исключить и выразить $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (из соотношений, выражающих $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не видно, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны).

Пример 4. *На сторонах треугольника ABC взяты точки M и N: $\overrightarrow{CN} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CM} = \beta\overrightarrow{CB}$. O — точка пересечения отрезков AM и BN* (рис. 9). *Определить отношения $|AO| : |AM|$ и $|BO| : |BN|$.*

Решение. Положим $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, а величины искомых отношений обозначим через x и y, так что $\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BN}$. По условию $\overrightarrow{CN} = \alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{CM} = \beta\vec{b}$. Имеем

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \beta\vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CB} = \alpha\vec{a} - \vec{b},$$

и потому

$$\overrightarrow{AO} = x\overrightarrow{AM} = x(\beta\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\overrightarrow{BO} = y\overrightarrow{BN} = y(\alpha\vec{a} - \vec{b}).$$

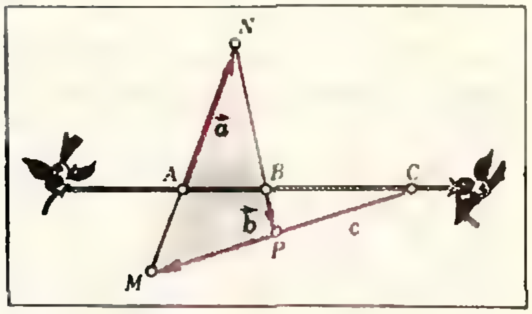


Рис. 7.

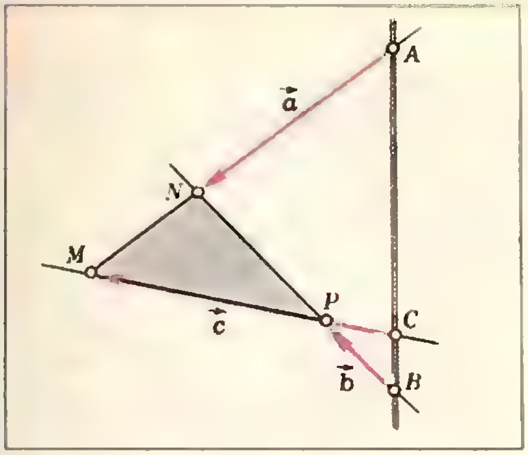


Рис. 8.

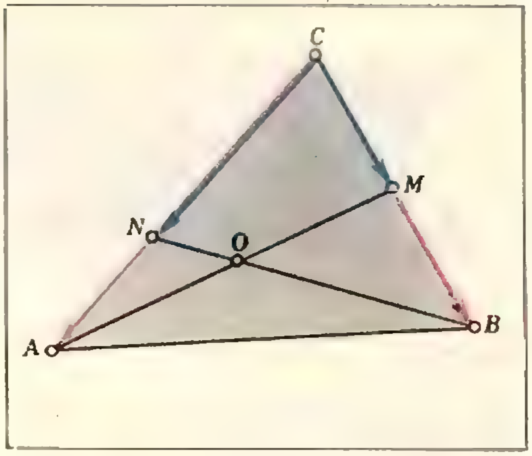


Рис. 9.

Так как $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}$ и $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$, получаем

$$\vec{b} - \vec{a} = x(\beta\vec{b} - \vec{a}) - y(\alpha\vec{a} - \vec{b}),$$

то есть

$$(x + \alpha y - 1)\,\vec{a} - (y + \beta x - 1)\,\vec{b} = \vec{0}.$$

Ввиду неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, коэффициенты в левой части последнего равенства должны быть равны нулю, то есть

$$\begin{cases} x + \alpha y = 1, \\ \beta x + y = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим ответ:

$$x = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}, \quad y = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta}.$$

Задачи

1. Точки A, B, C, M и N, не лежащие на одной прямой, расположены так, что лучи AM и BN параллельны и противоположно направлены; $|AC| = p$, $|BC| = q$, $|AB| = p + q$. При каком соотношении между длинами отрезков AM и BN точки M, N и C расположены на одной прямой?

2. Прямые a и b параллельны. На прямой a взяты произвольные точки A_1, A_2, A_3, на прямой b — произвольные точки B_1, B_2, B_3. На отрезках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 взяты такие точки C_1, C_2, C_3, что $|A_1C_1| = \alpha|A_1B_1|$, $|A_2C_2| = \alpha|A_2B_2|$, $|A_3C_3| = \alpha|A_3B_3|$. Докажите, что точки C_1, C_2, C_3 расположены на одной прямой.

3. Точки M, N, P симметричны точке O относительно середин сторон треугольника ABC. Докажите, что точка O и центры тяжести треугольников ABC и MNP лежат на одной прямой.

4. Точки A, B, C — центры тяжести треугольников OMN, ONP, OMP. Докажите, что центры тяжести треугольников MNP и ABC и точка O лежат на одной прямой.

5. Точки M и N — середины сторон CD и DA параллелограмма $ABCD$, O — точка пересечения отрезков AM и BN. Определите отношение $|ON| : |OB|$. Решите задачу в общем случае ($\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DM} = \beta\overrightarrow{DC}$).

6. На сторонах треугольника ABC взяты такие точки K, L, M, что $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. При пересечении прямых AL, BM и CK образовался треугольник PQR. Докажите, что точки P, Q, R являются серединами отрезков AQ, BR, CP.

7. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты такие точки P, Q, R, что $\overrightarrow{BP} = \alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CQ} = \alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AR} = \alpha\overrightarrow{CA}$. Точки пересечения лучей PA, QB, RC со сторонами треугольника PQR обозначены через K, L, M. Вычислите отношения $|RK| : |RQ|$, $|QM| : |QP|$, $|PL| : |PR|$.

8. Докажите, что три отрезка, каждый из которых соединяет середины двух противоположных ребер треугольной пирамиды $ABCD$, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам. Как изменится формулировка, если точки A, B, C, D лежат в одной плоскости?

9. Точки M и N — середины отрезков AB и CD. Докажите, что центр тяжести треугольника BCD, середина отрезка MN и точка A лежат на одной прямой.

10. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — центры тяжести треугольников BCD, ACD, ABD, ABC. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке M, причем точка M отсекает от каждого из этих отрезков четверть. Сделайте чертежи для плоского и пространственного случаев.

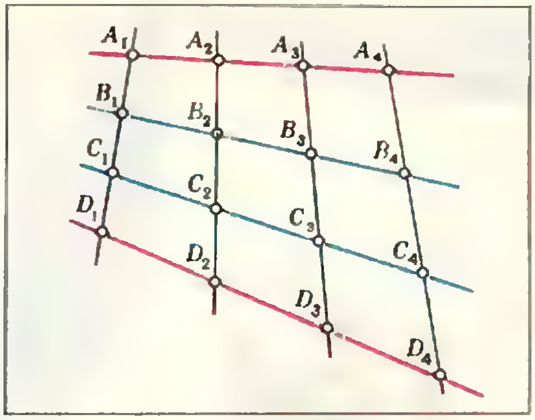


Рис. 10.

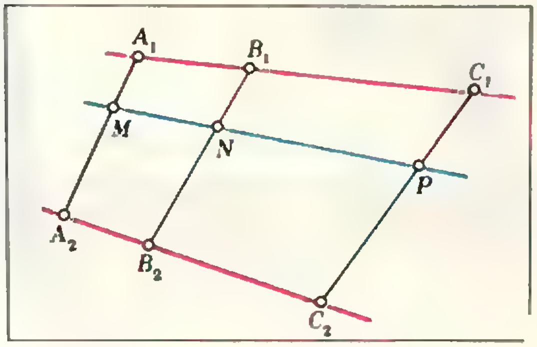


Рис. 11.

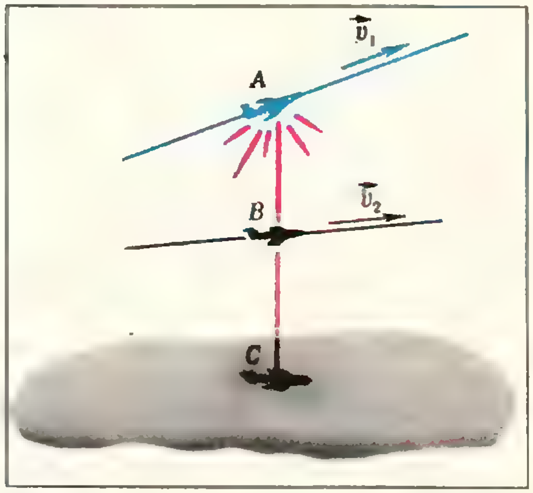


Рис. 12.

11. Докажите, что если точка пересечения средних линий четырехугольника $ABCD$ принадлежит диагонали AC, то диагональ BD делится диагональю AC пополам. Справедлива ли обратная теорема?

12. Дан треугольник MNP. На прямых MN, NP, PM взяты такие точки A, B, C, что $\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB} = \beta\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PC} = \gamma\overrightarrow{CM}$. Докажите, что если $\alpha\beta\gamma = 1$, то прямые MB, NC и PA пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

13. Отрезки A_1A_4 и D_1D_4 (произвольно расположенные в пространстве) разделены на три конгруэнтные части каждый точками A_2, A_3 и, соответственно, D_2, D_3 (рис. 10). Точки B_i и C_i делят отрезок A_iD_i на три конгруэнтные части ($i = 1, 2, 3, 4$). Докажите, что точки B_1, B_2, B_3, B_4 лежат на одной прямой и точки C_1, C_2, C_3, C_4 лежат на одной прямой.

14. На отрезках A_1C_1 и A_2C_2 (произвольно расположенных в пространстве) взяты такие точки B_1 и B_2, что $|A_1B_1| = \alpha|A_1C_1|$, $|A_2B_2| = \alpha|A_2C_2|$. На отрезках A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 взяты такие точки M, N, P (рис. 11), что $|A_1M| = \beta|A_1A_2|$, $|B_1N| = \beta|B_1B_2|$, $|C_1P| = \beta|C_1C_2|$. Докажите, что точки M, N, P лежат на одной прямой.

15. Две материальные точки движутся равномерно (с ненулевыми скоростями) по двум прямым a и b. Прямая, соединяющая движущиеся точки, все время проходит через неподвижную точку O. Докажите, что $a \parallel b$.

16. Две материальные точки движутся в пространстве прямолинейно и равномерно со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Положения движущихся точек в момент времени t обозначим через A_t и B_t, а через C_t обозначим такую точку отрезка A_tB_t, что $|A_tC_t| : |A_tB_t| = \alpha$ $(0<\alpha<1)$. Докажите, что точка C_t также движется равномерно и прямолинейно. С какой скоростью?

17. Самолет, несущий яркий точечный источник света, движется над плоской поверхностью равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_1$, а второй самолет — равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{v}_2$. В некоторый момент первый самолет, второй самолет и тень второго самолета находятся, соответственно, в точках A, B, C (рис. 12), причем $|BC| = \alpha|AC|$ $(0<\alpha<1)$. При каком соотношении между скоростями самолетов тень второго самолета тоже движется равномерно и прямолинейно?

18. Три материальные точки движутся в пространстве равномерно и прямолинейно, каждая — со своей скоростью. Положения движущихся точек в момент времени t обозначим через A_t, B_t, C_t. Докажите, что центр тяжести треугольника $A_tB_tC_t$ также движется равномерно и прямолинейно.

Е. Гик

Ваш рейтинг, гроссмейстер?

На страницах «Кванта» мы не раз писали о различных связях, существующих между математикой и шахматами. В этой статье мы расскажем о системе коэффициентов Эло, широко используемой ныне для оценки и прогноза результатов шахматистов в соревнованиях (турнирах и матчах).

В те далекие времена, когда во всем мире в шахматных турнирах выступало всего несколько десятков мастеров, сравнивать результаты шахматистов было совсем нетрудно. Вопрос, кто из двух мастеров играет сильнее, решался просто: на протяжении какого-то отрезка времени они встречались между собой в турнирах, и если один регулярно опережал другого, значит, он и был сильнее; если же впереди оказывался то один, то другой, можно было предположить, что их сила примерно одинакова; в особо спорных случаях между ними устраивался матч.

Сейчас шахматные соревнования происходят одновременно в нескольких странах и даже в нескольких городах одной страны. В одних лишь международных квалификационных соревнованиях (то есть таких, в которых присваиваются международные звания) участвует добрая тысяча шахматистов, из которых многие знают друг о друге лишь понаслышке. В таких условиях сравнивать силу мастеров стало куда труднее.

Первые попытки построить систему оценок силы шахматистов относятся к началу века. А в конце 50-х годов начались практические испытания нескольких систем, основанных на том, что каждому шахматисту присваивается меняющийся от соревнования к соревнованию индивидуальный коэффициент, или, иначе, рейтинг (от английского слова rating — «оценка»), вычисляемый по определенной формуле и зависящий от коэффициентов противников и пока-

Таблица 1

$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$	$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$	$\|\Delta K\|$	$h_б$	$h_м$
0—3	50	50	122—129	67	33	279—290	84	16
4—10	51	49	130—137	68	32	291—302	85	15
11—17	52	48	138—145	69	31	303—315	86	14
18—25	53	47	146—153	70	30	316—328	87	13
26—32	54	46	154—162	71	29	329—344	88	12
33—39	55	45	163—170	72	28	345—357	89	11
40—46	56	44	171—179	73	27	358—374	90	10
47—53	57	43	180—188	74	26	375—391	91	9
54—61	58	42	189—197	75	25	392—411	92	8
62—68	59	41	198—206	76	24	412—432	93	7
69—76	60	40	207—215	77	23	433—456	94	6
77—83	61	39	216—225	78	22	457—484	95	5
84—91	62	38	226—235	79	21	485—517	96	4
92—98	63	37	236—245	80	20	518—559	97	3
99—106	64	36	246—256	81	19	560—619	98	2
107—113	65	35	257—267	82	18	620—735	99	1
114—121	66	34	268—278	83	17	свыше 735	100	0

занного результата. После многолетнего обсуждения различных систем коэффициентов (принципиально не отличающихся друг от друга) Международная шахматная федерация (ФИДЕ) в 1970 году официально приняла систему индивидуальных коэффициентов, разработанную американским математиком профессором Арпадом Эло.

Покажем сначала, как по системе Эло ведется расчет коэффициентов, а затем обсудим ряд ее особенностей.

Пусть «старый» коэффициент данного участника (т. е. коэффициент перед началом соревнования) — $K_{ст}$. «Новый» коэффициент (коэффициент после окончания соревнования) $K_{нов}$ находится по следующей формуле:

$$K_{нов} = K_{ст} + 10\,(N - N_{ож}), \qquad (1)$$

где N — число набранных очков (результат шахматиста в соревновании), а $N_{ож}$ — так называемое ожидаемое число очков.

Для вычисления $N_{ож}$ прежде всего подсчитывается средний коэффициент $K_{ср}$ всех соперников данного шахматиста (в случае матча $K_{ср}$ совпадает с $K_{ст}$ его партнера), который затем округляется до целого числа *). Затем находится отклонение коэффициента $K_{ст}$ от $K_{ср}$:

$$\Delta K = K_{ст} - K_{ср}. \qquad (2)$$

Теперь из таблицы 1 по $|\Delta K|$ определяется ожидаемый процент очков:

$$h = \begin{cases} h_б, & \text{если } \Delta K \geqslant 0, \\ h_м, & \text{если } \Delta K < 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Наконец, ожидаемое число очков получается при округлении до 0,5 очка по следующей формуле:

$$N_{ож} = \frac{h}{100} \cdot m, \qquad (4)$$

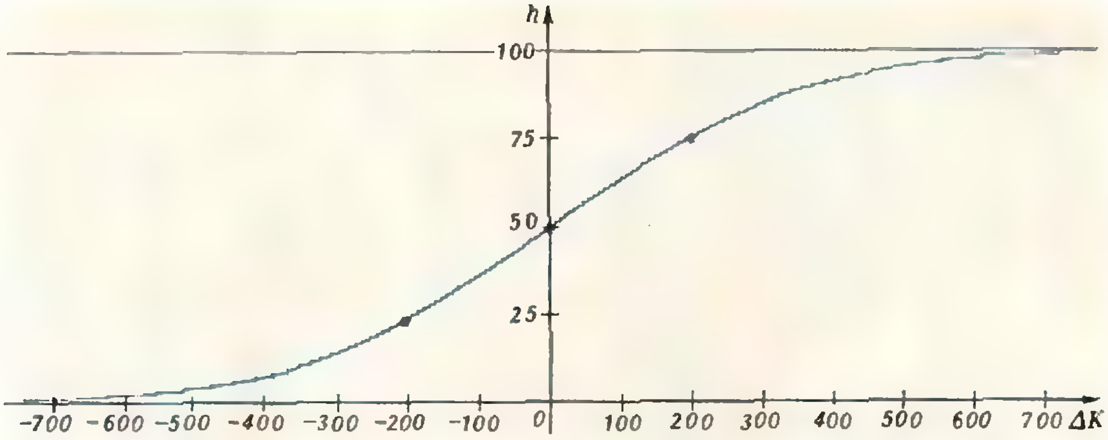
где m — число партий, которое шахматисту предстоит сыграть в соревновании. Неформально говоря, $N_{ож}$ — это наиболее вероятный результат шахматиста в соревновании, а h — наиболее вероятный процент набранных очков; это и объясняет соотношение (4).

Заметим, что в СССР при расчете рейтингов советских шахматистов с 1 января 1977 года официально используется система Эло, с той лишь разницей, что округление в формуле (4) производится до 0,1 очка.

Если перед началом турнира мы хотим найти $K^i_{нов}$ каждого участника турнира, мы должны, в соответствии с равенством (2), вычислить средние рейтинги $K^i_{ср}$ противников каждого участника ($i = 1, 2, \ldots, n$). Оказывается, эту работу можно

---

*) «Пограничные» числа (вроде 2377,5) округляются, по соглашению, в любую сторону — например, в сторону меньших чисел.



упростить. Пусть $K^1_{ст}$, $K^2_{ст}$, ..., $K^n_{ст}$ — рейтинги участников турнира до его начала. Введем величину

$$K_т = \frac{K^1_{ст} + K^2_{ст} + \ldots + K^n_{ст}}{n}$$

(она округляется до целого числа), называемую *коэффициентом турнира*. Легко доказать, что

$$\Delta K = \frac{n}{n-1}(K_{ст} - K_т), \qquad (5)$$

где округление вновь производится до целого числа (результаты округлений в формулах (2) и (5) совпадают). Таким образом, вместо того, чтобы n раз вычислять коэффициенты $K^i_{ср}$, нам достаточно один раз найти коэффициент $K_т$, после чего для определения ΔK пользоваться формулой (5).

Для квалификации международного турнира по системе Эло необходимо, чтобы: 1) не менее 2/3 его участников имели рейтинг; 2) коэффициент турнира $K_т$ был не менее 2250. Если же перед началом такого турнира у кого-то из участников еще нет рейтинга, то он получает начальный коэффициент $K_0 = 2200$ (который, очевидно, после турнира может уменьшиться). Так как K_0 — число целое, а числа $N_{ож}$ округляются до 0,5 или 0,1, рейтинги шахматистов — всегда числа целые, причем у Эло они оканчиваются на 0 или 5.

Внимательно посмотрев на таблицу 1, мы замечаем, что от строки к строке процент h меняется на 1 и при достижении $h_б = 100$ (соответственно, $h_м = 0$) уже не меняется (мы попадаем в «зону насыщения»).

Чтобы лучше понять таблицу 1, постараемся графически изобразить зависимость h от ΔK, причем h будем воспринимать в соответствии с интуитивным смыслом слов «ожидаемый процент очков».

Если коэффициент $K_{ст}$ данного участника совпадает с $K_{ср}$ его противников, то следует ожидать, что он наберет 50% очков; поэтому искомая кривая должна проходить через точку с координатами $\Delta K = 0$, $h = 50$. Естественно считать ее симметричной относительно этой точки. Если $K_{ст} > K_{ср}$, то, разумеется, $h > 50$, а если $K_{ст} < K_{ср}$, то $h < 50$. Поскольку h меняется от 0 до 100, кривая должна асимптотически стремиться к прямой $h = 100$ при $\Delta K \to +\infty$ и к оси абсцисс при $\Delta K \to -\infty$.

Огромная статистика соревнований показывает, что если из двух шахматистов, играющих матч, один, так сказать, сильнее другого на разряд, то он в среднем набирает 75% очков.

Указанное обстоятельство Эло при построении кривой учел следующим образом: положив, что разница между двумя соседними ступеньками в шахматной иерархии составляет 200 единиц рейтинга, он провел кривую через точку с координатами $\Delta K = 200$, $h = 75$ (и, соответственно, $\Delta K = -200$, $h = 25$).

Итак, вид нашей кривой довольно ясен (см. рисунок), и ее можно использовать для определения значений h при данных ΔK. Однако такой способ нахождения h неудобен по нескольким причинам. Во-первых, сама кривая, несмотря на вышеуказанные свойства, не определена однозначно; во-вторых, целых значений ΔK бесконечно много и их нельзя — все — затабулировать; наконец, не измерять же всякий раз величину h линейкой! Поэтому и возникает идея разбить ось абсцисс на конечное число отрезков (и два бесконечных полуинтервала) с постоянным h на каждом из них так, чтобы значения h на соседних отрезках отличались на 1.

В результате вместо нашей гладкой кривой мы получаем «лестницу» (см. рисунок). Высота всех ее ступенек одинакова и равна 1, а их длины по мере удаления от центра в соответствии с поведением кривой увеличиваются.

Разумеется, таблица 1, построенная по этой «лестнице», могла бы выглядеть и несколько иначе (при выборе чуть более узких или более широких отрезков с фиксированным h), однако принципиального значения это не имеет — лишь бы сохранялся общий характер зависимости h от ΔK.

В настоящее время перед началом любого крупного турнира подсчитываются числа $N_{\text{ож}}$ для всех его участников, что позволяет прикинуть окончательные итоги турнира и наиболее вероятное распределение мест в нем. Однако этот популярный способ прогнозирования можно применять не только перед началом соревнования, но и перед каждым его туром. Если мы сложим очки, набранные участником в уже состоявшихся турах, с очками, которые «обещают» ему коэффициенты Эло в оставшихся турах, мы получим ожидаемый результат в турнире с учетом уже сыгранных партий. Естественно считать, что эти прогнозы точнее характеризуют положение участников в данный момент, чем фактически набранное ими число очков, так как они учитывают информацию об оставшихся противниках.

Метод прогнозирования, о котором идет речь, имеет некоторые технические трудности. Ведь, скажем, при 22 участниках турнира для нахождения чисел $N_{\text{ож}}$ перед каждым туром расчет ожидаемых результатов придется провести 21 раз. Вручную такая работа потребует нескольких часов вычислений, причем к ней можно приступить только после жеребьевки турнира. Впрочем, ЭВМ справляется с такой задачей всего за какую-то минуту!

При применении формулы (1) возникает парадокс, на котором стоит остановиться подробнее. Представьте себе, что вы решили сыграть матч со своим товарищем, скажем, из 1000 партий. Вы оба — перворазрядники и имеете одинаковый рейтинг 2000. Пусть вы выиграли этот марафон со счетом 580 : 420. По прогнозу вы должны были свести матч вничью, т. е. набрать $N_{\text{ож}} = 500$ очков. Разница в 80 очков даст вам прибавку к рейтингу 800 единиц. Итак, закончив этот матч, вы получите рейтинг 2800 — больше, чем у самого чемпиона мира!

Нетрудно видеть, что при увеличении числа партий в матче рейтинг одного шахматиста вообще может неограниченно расти, рейтинг другого — неограниченно падать.

Таким образом, линейная зависимость между результатом шахматиста в соревновании и приращением его рейтинга не совсем правомерна. Выйти из положения пытались разными способами. Самый распространенный из них — введение в формуле (1) вместо коэффициента 10 переменного параметра α, зависящего от числа партий:

$$K_{\text{нов}} = K_{\text{ст}} + \alpha\,(N - N_{\text{ож}}).$$

При этом от парадокса удается избавиться, но заметно усложняется расчет коэффициентов.

Происхождение парадокса связано с тем, что коэффициенты шахматистов фактически меняются не только в конце соревнования, но и в процессе его. Так, в упомянутом матче из 1000 партий вскоре после его начала вы поведете в счете, что должно привести к увеличению вашего рейтинга и падению рейтинга противника. Если вы в среднем набираете 58% очков (согласно окончательному счету), то, как только разница в ваших рейтингах достигнет 60 единиц (2030 против 1070), коэффициенты стабилизируются и в дальнейшем не будут сильно меняться (разница в 60 единиц рейтинга как раз соответствует 58% очков — см. таблицу 1).

Из сказанного следует, что система Эло исправляется очень просто — пересчет коэффициентов следует производить после каждой партии! Однако такой частый пересчет, оправдываемый математически, практически никого не устроит. Итак, не годится расчет рейтингов ни после большого числа партий, ни после каждой партии.

Истина, как всегда, лежит посередине. Формула (1) проста и удобна, и не хочется от нее отказываться, но необходимо ограничиться «средним» числом партий. Сам Эло полагает, что если $m \leqslant 25$, то никаких недора-

Таблица 2

Эм. Ласкер, Х. Р. Капабланка, М. Ботвинник	2720
М. Таль	2700
П. Морфи (за три года выступлений)	2690
А. Алехин, В. Смыслов	2680
Д. Бронштейн, П. Керес	2670
С. Решевский, Р. Файн	2660
В. Стейниц, И. Болеславский, М. Найдорф	2650
А. Рубинштейн, М. Эйве, С. Глигорич	2640
С. Флор, А. Котов	2620
З. Тарраш, Г. Мароци, А. Нимцович, Е. Боголюбов	2610
А. Андерсен, Г. Пильсбери, М. Видмар, Г. Штальберг, Л. Сабо	2600

зумений не произойдет, и линейная зависимость в (1) вполне допустима. Практически большего числа партий в соревнованиях и не бывает. Исключение может представить только матч на первенство мира, проводимый по новой системе (без ограничения числа партий). Видимо, в этом случае матч следует разбить на отдельные отрезки длиной не более 25 партий, и после каждого из них подправлять коэффициенты партнеров.

Итак, система индивидуальных коэффициентов Эло устроена вполне разумно и практически очень удобна. Лучшее ее подтверждение — достоверность прогноза.

В настоящее время коэффициенты Эло используются весьма широко, например, для присвоения международных шахматных званий. В зависимости от $K_т$ существует 15 категорий «трудности» турниров, для каждой из которых установлены свои процентные нормы, причем для присвоения звания международного мастера или международного гроссмейстера требуется достичь, соответственно, рейтинга 2400 или 2500.

Основываясь на своей системе, Эло проделал ряд любопытных подсчетов. В частности, он рассчитал коэффициенты всех крупнейших шахматистов со времен Морфи. В 1963 году он опубликовал результаты своих расчетов (табл. 2). Для каждого «классика» шахмат Эло вычислил средний рейтинг, характеризующий результат его выступлений на «наилучшем» отрезке длиной в пять лет. К 1963 году лидерами в списке Эло (рейтинг 2600 и выше) были 28 шахматистов.

За прошедшие 15 лет список можно было бы пополнить еще десятью-пятнадцатью гроссмейстерами экстра-класса, в том числе четырьмя последними чемпионами мира — Т. Петросяном, Б. Спасским, Р. Фишером и А. Карповым.

Наивысший рейтинг за всю историю шахмат имел после завоевания звания чемпиона мира Р. Фишер — 2780. Но поскольку по правилам ФИДЕ шахматист, не выступающий в соревнованиях три года подряд, не включается в так называемый рейтинг-лист ФИДЕ, в 1975 году его возглавил новый чемпион мира А. Карпов.

Задачи нашших читателей

1. Найти пары чисел m, n, отвечающие закономерности

а) $$3=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{9\cdot 10}{5\cdot 6}=\ldots=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}=\ldots=\frac{6887\cdot 6888}{3976\cdot 3977}=\ldots$$

б) $$2=\frac{3\cdot 4}{2\cdot 3}=\frac{20\cdot 21}{14\cdot 15}=\ldots=\frac{m(m+1)}{n(n+1)}=\ldots$$

С. Суслов
(г. Свердловск)

2. Если к двузначному числу приписать слева число на единицу большее, то полученное число будет полным квадратом. Найти исходное число.

И. Михалкович
(Минская обл.)

3. Докажите неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}+\sqrt[3]{k^2+k-1}+\sqrt[3]{k^2+2k-2}}>\sqrt[3]{n+1}-1.$$

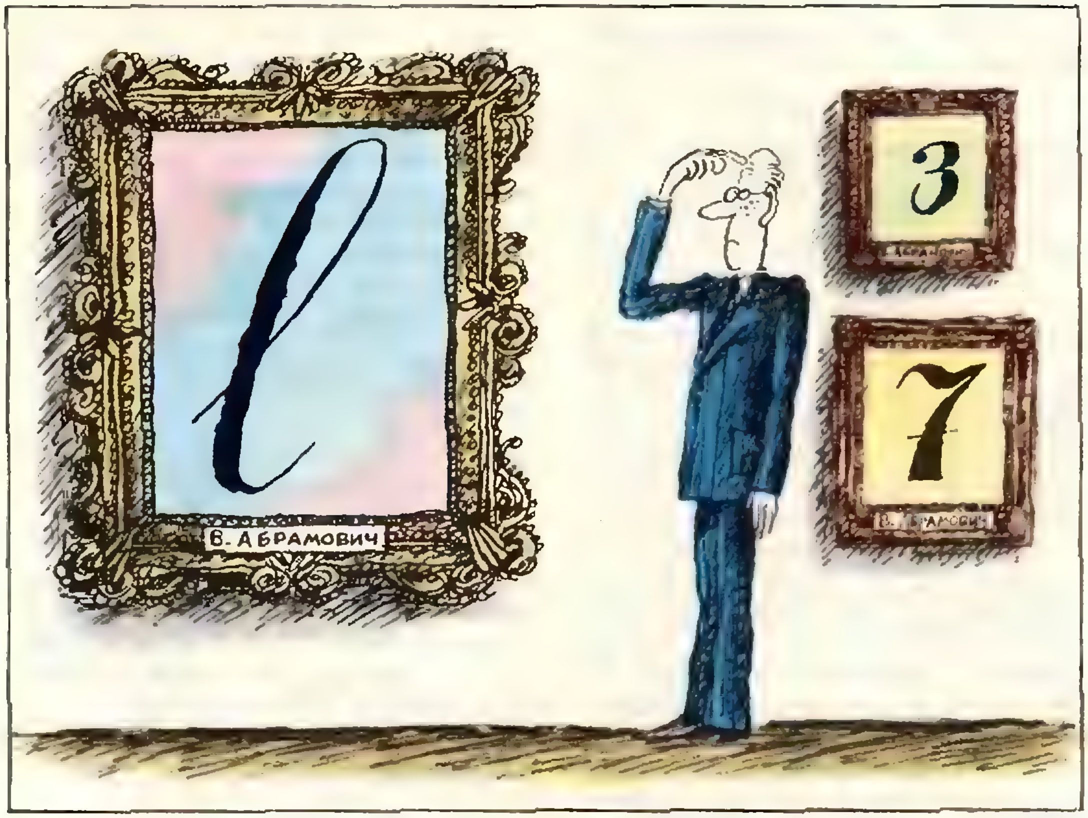
М. Махмудов
(г. Новый Узень)

4. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, AA_0, BB_0, CC_0 — его высоты, A_1, B_1 и C_1 — проекции точек A_0, B_0 и C_0 на прямые AO, BO и CO соответственно. Докажите, что тогда одна из величин

$$|A_0A_1|\cdot|BC|^4,\ |B_0B_1|\cdot|AC|^4,\ |C_0C_1|\cdot|AB|^4$$

равна сумме двух других.

У. Алла
(г. Выру)



В. Абрамович

Признаки делимости на l

Время от времени на страницах различных изданий, в том числе «Кванта», вниманию читателей предлагаются все новые и новые, иногда очень экзотические, признаки делимости на различные числа.

Часто спрашивают: а как открывают новые признаки делимости? Неужели каждый раз проводят длинную серию опытов с числами, а потом, в случае удачи, пытаются доказать наиболее вероятное предположение?

Что же, такой путь для любящих «возиться» с числами не тягостен, а в случае удачи вполне окупается радостью пусть небольшого, но открытия.

И все же: не существует ли какого-нибудь общего способа придумывания признаков делимости?

Автора заинтересовал этот вопрос, и он попытался на него ответить. Что из этого получилось, читатель найдет в заметке.

Еще в четвертом классе вы узнали, что натуральное число тогда и только тогда делится на 3, когда делится на 3 сумма его цифр *).

Можно представить себе дело так: при обычной (десятичной!) записи числа

$$n = \overline{a_1a_2\ldots a_l} \quad \overline{a_1a_2\ldots a_l}^{(10)}$$

каждая цифра-кирпичик чем левее, тем весомее:

$$n = a_l + 10a_{l-1} + 10^2a_{l-2} + \\ + \ldots + 10^{l-1}a_1;$$

---

*) Точнее: сумма цифр его десятичной записи (записи в десятичной системе счисления). Скорее всего, натуральные числа вы воспринимали до сих пор только в десятичной системе счисления и даже не задумывались об этом. Ну, что ж! Можете еще некоторое время «не задумываться». Для чтения этой статьи вам скоро понадобится понимание того, что такое m-ичная система счисления (m — произвольное натуральное число, большее 1). О системах счисления вы можете прочитать в «Кванте», 1975, № 8, с. 59 или в брошюре С. В. Фомина «Системы счисления» (М., «Наука», 1975).

когда же мы применяем признак делимости на 3, мы складываем цифры-кирпичики как равные с равными:

$$n^* = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots + a_1,$$

как будто мы оказались в сказочной системе счисления с основанием $m = 1$.

Легко сообразить, что признак делимости на 3 так хорош потому, что мы записываем числа в десятичной системе счисления, а числа $10^k - 1$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) делятся на 3.

Продолжим наш поиск. Пока мы записываем числа в десятичной системе счисления, вряд ли можно придумать такой же хороший признак делимости на 7, потому что $10 - 1$ не делится на 7. А что, если вместо $10 - 1$ рассмотреть выражение $10x - 1$ и посмотреть, при каком наименьшем натуральным x оно разделится на 7? Легко выяснить, что $x = 5$. Что бы значило это найденное число $x = 5$? Вернемся еще раз к признаку делимости на 3. Мы говорили о том, что в признаке делимости на 3 «кирпичики» складываются как бы в системе счисления с основанием 1! Не служит ли 5 основанием той системы, которую нужно испробовать, чтобы получить желаемый признак делимости на 7?

Возьмем, например, делящееся на 7 число 21. Припишем его первой цифре, имеющей в десятичной системе вес $2 \cdot 10$, новый вес $2 \cdot 5$ и сложим его со второй цифрой: $2 \cdot 5 + 1 = 11$. Пока нас постигла неудача: 21 делится на 7, а полученное число — не делится. Но не будем сразу складывать оружие. Откуда мы, собственно, взяли, что нужно в 5 раз увеличивать вес именно первой цифры? Наверное, просто потому, что она была «весомее» в десятичной записи «испытуемого» числа. А что если сделать ее теперь, наоборот, более «легкой»? Подсчитаем: $2 + 1 \cdot 5 = 7$.

Но, может быть, это случайный результат?

Возьмем еще один делитель — 19. $10x - 1$ делится на 19 при $x = 2$. Проэкспериментируем, скажем, с делящимися на 19 числами 228 и 3781, увеличивая «вес» цифр в направлении слева — направо в формальной системе счисления с основанием 2 (мы употребили слово «формальной», так как степени двойки умножаются не обязательно на коэффициенты 0, 1):

$$2 + 2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 8 = 38,$$
$$3 + 2 \cdot 7 + 2^2 \cdot 8 + 2^3 \cdot 1 = 57.$$

Оба числа делятся на 19!

Похоже, что закономерность в наших руках. Попробуем сформулировать общее утверждение.

Предположим, что мы ищем признак делимости на l. Пусть число q выбрано так, что $10q - 1$ делится на l. Возьмем произвольное число $n = \overline{a_1 a_2 \ldots a_t}^{(10)}$. Обозначим через n^* число, полученное из n по следующему правилу:

$$n^* = \overline{a_t a_{t-1} \ldots a_1}^{(q)},$$

то есть

$$n^* = a_1 + q a_2 + q^2 a_3 + \ldots + q^{t-1} a_t.$$

Наше предположение состоит в том, что натуральное число n тогда и только тогда делится на l, когда делится на l число n^*. Докажем его.

Подсчитаем сначала разность $R = q^{t-1} n - n^*$:

$$R = a_{t-1} q^{t-2} (10q - 1) + a_{t-2} q^{t-3} [(10q)^2 - 1] + \ldots + a_2 q [(10q)^{t-2} - 1] + a_1 [(10q)^{t-1} - 1].$$

По выбору числа q разность $10q - 1$ делится на l. Значит, делятся на l и разности $(10q)^2 - 1$, $(10q)^3 - 1, \ldots, (10q)^{t-1} - 1$ (почему?). Следовательно, R делится на l. Но $n^* = q^{t-1} n - R$. Поэтому, если n делится на l, то и n^* делится на l.

Аналогично, делится на l и разность $S = 10^{t-1} n^* - n = a_2 10^{t-2} (10q - 1) + a_3 10^{t-3} [(10q)^2 - 1] + \ldots + a_{t-1} 10 [(10q)^{t-2} - 1] + a_t [(10q)^{t-1} - 1]$. Из $n = 10^{t-1} n^* - S$, вытекает, что если n^* делится на l, то и n делится на l.

Итак, n делится на l тогда и только тогда, когда на l делится n^*. Наше предположение доказано!

Легко заметить, что в доказательстве мы нигде не пользовались положительностью числа q. Поэтому q можно выбирать и отрицательным. Ясно, что q желательно выбирать наименьшим по модулю. Например, для $l = 7$ лучше вместо $q = 5$ брать $q = -2$.

Мы пока оставили в стороне естественный вопрос: а для любого ли l найдется такое q, что $10q - 1$ делится на l? Оказывается, такое q существует тогда и только тогда, когда 10 и l взаимно просты*). (Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно; «в одну сторону» оно доказывается очень легко, «в другую» — не очень.)

Легко обобщить наш признак делимости и на произвольные системы счисления.

Пусть

$$n=\overline{a_1a_2\ldots a_l}^{(r)},$$

то есть

$$n=a_l+ra_{l-1}+r^2a_{l-2}+\ldots+r^{l-1}a_1,$$

и пусть q таково, что $rq-1$ делится на l. Построим по n число $n^*=\overline{a_la_{l-1}\ldots a_1}^{(q)}$. Тогда, чтобы n делилось на l, необходимо и достаточно, чтобы на l делилось n^*.

Доказывается это обобщенное утверждение абсолютно так же, как предыдущее.

Ответ на вопрос: когда существует требуемое q? — аналогичен: q существует тогда и только тогда, когда r и l взаимно просты.

Упражнения

1. Докажите, что наименьшее по модулю q такое, что $10q-1$ делится на l, равно

$$q=\begin{cases} k, & \text{если } l=10k-1,\\ -k, & \text{если } l=10k+1,\\ 3k+1, & \text{если } l=10k+3,\\ -3k+1, & \text{если } l=10k-3.\end{cases}$$

(Этими случаями исчерпываются все возможные l, взаимно простые с 10.)

2. Докажите, что $11^{1977}+1$ делится на 37.

3. Докажите, что $122^{132}-1$ делится на 407.

4. Докажите, что если для натуральных q, n и r число $\dfrac{n^r+1}{nq-1}$ целое, то число $\dfrac{q^r+1}{nq-1}$ — тоже целое.

5. Для каких l общий признак делимости, сформулированный в конце статьи, эффективен (т. е. когда $n^*<n$)?

6. Докажите совместный признак делимости на 7, 11 и 13: для делимости числа $\overline{a_1a_2\ldots a_{3m}}^{(10)}$ на 7, 11, 13 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1a_2a_3}-\overline{a_4a_5a_6}+\ldots+(-1)^{m-1}\overline{a_{3m-2}a_{3m-1}a_{3m}}$ делилось на 7, 11, 13.

Указание. Используйте, что r_7^3+1, r_{11}^3+1, r_{13}^3+1 делятся, соответственно, на 7, 11, 13 (r_7 — такое число, что $10r_7-1$ делится на 7, и т. д.).

7. Докажите совместный признак делимости на 3, 7, 19: для делимости числа $\overline{a_1a_2\ldots a_n}^{(10)}$ на 3, 7, 19 необходимо и достаточно, чтобы число $\overline{a_1a_2\ldots a_{n-2}}+4\overline{a_{n-1}a_n}$ делилось на 3, 7, 19.

8. Докажите, что для делимости числа n, r-ичная запись которого разбита на «блоки»: $n=\overline{M_1M_2\ldots M_l}^{(r)}$ (блок M_i содержит m_i цифр, $i=1, 2, \ldots, l$), на l необходима и достаточна делимость на l числа

$$n^*=M_1+M_2q^{m_2}+M_3q^{m_2+m_3}+\ldots+M_lq^{m_2+m_3+\ldots+m_l}.$$

---

*) То есть когда их наибольший общий делитель равен 1.

Задача, возникшая из каприза трех девочек

Три девочки гуляли со своими папами. Все шестеро подошли к небольшой реке и пожелали переправиться с одного берега на другой. В их распоряжении оказалась всего одна лодка без гребца, поднимающая только *двух* человек. Переправу было бы, разумеется, нетрудно осуществить, если бы девочки не заявили то ли из каприза, то ли из шалости, что ни одна из них не согласна ехать в лодке, или быть на берегу с одним или двумя чужими папами *без своего папы*. Девочки были маленькие, но не очень, так что каждая из них могла вести лодку самостоятельно.

Таким образом, неожиданно возникли дополнительные условия переправы, но ради забавы путники решили попытаться их выполнить. Как они действовали?

Веселая компания благополучно переправилась на противоположный берег реки и уселась отдыхать. Возник вопрос: можно ли при тех же условиях организовать переправу четырех пар? Очень скоро выяснилось, что при сохранении условий, выдвинутых девочками, переправу четырех пар можно было бы осуществить только при наличии лодки, поднимающей *трех* человек, причем всего лишь в 5 приемов.

Каким образом?

Развивая тему задачи еще дальше, наши путешественники нашли, что и на лодке, вмещающей только двух человек, можно осуществить переправу с одного берега на другой четырех девочек с их папами, если посреди реки есть остров, на котором можно делать промежуточную остановку и высаживаться. В этом случае для окончательной переправы требуется совершить не менее *десяти* переездов.

Найдите способ такой переправы.

Б. Кордемский

И. Половинка

Опыты с синтетическими пленками

В этой статье мы хотим рассказать о нескольких опытах по электростатике (так принято называть раздел физики, в котором рассматриваются взаимодействия покоящихся зарядов).

Опыты не требуют никакого специального оборудования, их можно поставить как на занятиях физического кружка, так и в домашних условиях.

Не спешите сделать все опыты сразу. Тщательно готовьтесь к каждому опыту, старайтесь объяснить все полученные результаты. Желаем вам успехов!

Для опытов удобнее всего воспользоваться разного рода синтетическими пленками. Например, можно взять рентгеновские пленки или фотопленки, предварительно удалив с них эмульсию (растворив ее в теплой воде), хотя это и не обязательно. В специализированных театральных магазинах можно купить разноцветные светофильтры на триацетатцеллюлозной основе. Можно использовать также телефильтры или полиэтиленовые пленки.

Все эти пленки при трении электризуются, приобретая положительные заряды. Для получения отрицательных зарядов лучше всего подходят пластмассовые пленки, изготовленные, например, из пластмассовых папок для бумаг.

Размеры пленок могут быть, конечно, разными; мы в своих опытах использовали пленки размером 70×300 мм.

Затем нужно изготовить несколько электростатических маятников. Возьмите серебряную обертку от шоколадной конфеты или кусок конденсаторной фольги размером 30×40 мм. Накрутив фольгу на карандаш, сделайте гильзу и привяжите к ней шелковую нитку.

Вам понадобятся также неоновые лампочки (МН-3 или МН-5) и электрометр.

Советуем вам проводить опыты в такой последовательности:

1. Исследуйте, как электризуются имеющиеся у вас пленки. Для этого натирайте пленки разными материалами (лучше мягкими, чтобы не поцарапать пленки): сухой рукой, бумагой, различными тканями. Используйте при этом разный подстил: дерево, стекло, газетную бумагу, клеенку, шерстяную или синтетическую ткани.

По отклонению маятника-гильзы или стрелки электрометра установите, в каком случае эффект наибольший.

Как бы вы объяснили преимущество пленок перед эбонитовыми и стеклянными палочками?

2. Определите знак заряда, появившегося на пленке. На занятиях кружка это можно сделать с помощью эбонитовой палочки, которая заряжается отрицательно, и электрометра.

А как это сделать в домашних условиях?

Исследуйте распределение заряда на пленках с помощью неоновой лампочки. Держа лампочку пальцами за ее баллон и проводя по пленке электродом (пленку нужно отделить от поверхности стола), можно наблюдать загорание лампочки в отдельных местах.

А почему неоновая лампочка не фиксирует скопление электрических зарядов, если наэлектризованная пленка лежит на поверхности стола?

3. Приложите пленку к вертикальной поверхности (стене, классной доске, стеклу) и проведите по ней несколько раз сухой рукой — пленка надежно прилипнет к поверхности. Если отклонить пленку сверху или снизу, а затем отпустить, то она снова притянется к поверхности.

Почему так происходит?

4. Наэлектризуйте две одинаковые пленки, приподнимите их, а за-

тем положите одну пленку на другую. При освобождении верхней пленки ее сильно отбросит в сторону.

Почему?

5. Положите на стол две одинаковые пленки и наэлектризуйте их трением. Затем возьмите их за концы и соедините — пленки разойдутся на значительное расстояние (рис. 1).

Почему? Имеет ли значение, какими сторонами вы сближаете пленки?

Положите друг на друга две-три пленки из одинакового материала и верхнюю натрите рукой. Затем поочередно снимайте их и соединяйте концами — пленки расходятся так же, как и в предыдущем опыте (рис. 2).

Как в этом случае происходит электризация пленок?

6. Поднесите заряженную пленку к работающему транзисторному приемнику — вы услышите треск, характерный для электрического разряда.

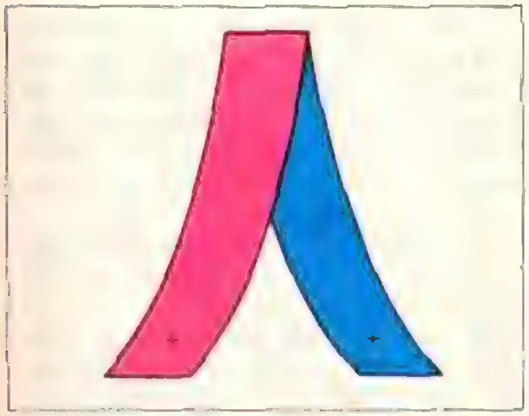


Рис. 1.

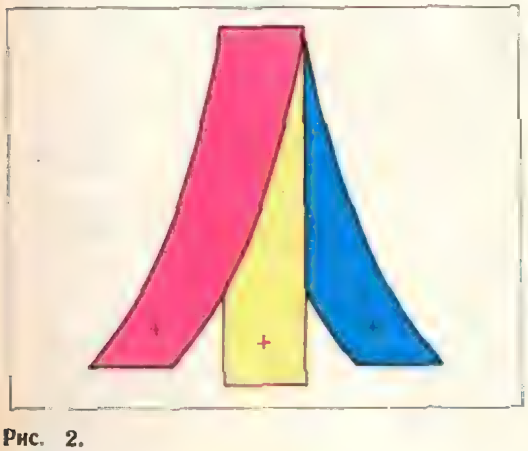


Рис. 2.

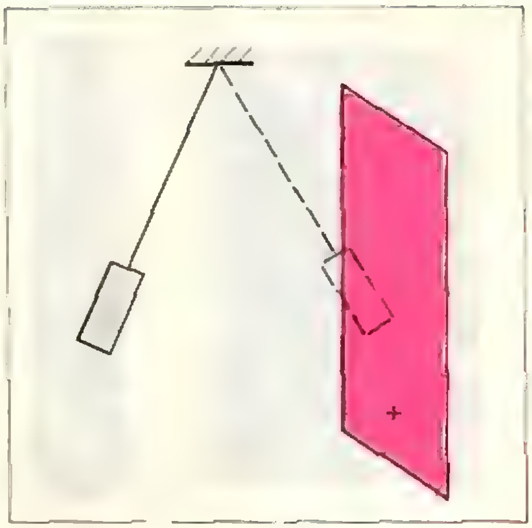


Рис. 3.

На каких волнах треск наибольший? В каком диапазоне длин волн помехи во время грозы будут наибольшими?

Между пленкой и приемником поставьте металлический лист размером чуть больше пленки — помех не наблюдается.

Объясните, почему. Какое практическое значение имеет описанное явление экранирования? Почему?

7. Плотно приложите пленку к экрану работающего телевизора и подержите ее в таком положении несколько секунд — пленка прилипнет к экрану; значит, она наэлектризована без трения.

Каким образом? Зарядом какого знака?

8. Наэлектризованную пленку поднесите к маятнику-гильзе. Вы увидите, что маятник сначала притянется к пленке, а затем резко оттолкнется от нее (рис. 3). Если пленку поднести к маятнику снизу, то он будет парить над пленкой.

Почему так происходит? А если пленку поднести снизу к двум таким маятникам? Что будет, если к заряженной пленке приблизить маятник, изготовленный из диэлектрика? Как результаты опыта связаны со строением проводников и непроводников электричества?

9. Возьмите две одинаковые наэлектризованные пленки и поочередно поднесите их на одинаковое расстояние к электрометру — стрелка в

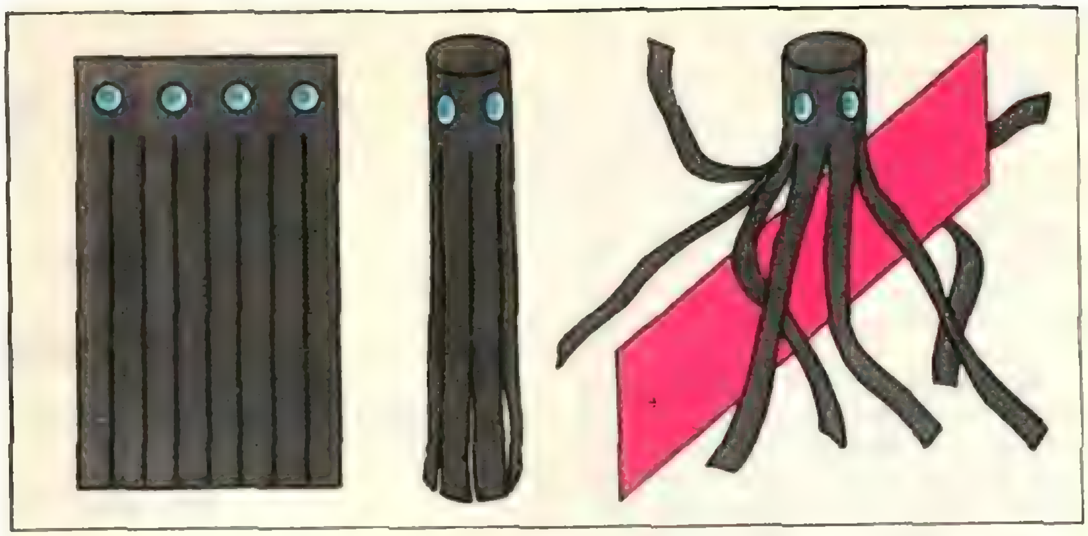


Рис. 4.

каждом отдельном случае отклоняется на определенный угол. Затем поднесите к электрометру обе пленки, но с противоположных сторон — угол отклонения стрелки прибора увеличится. Этот опыт наглядно демонстрирует одно из важных свойств электрических полей — наложение (или, как говорят физики, суперпозицию) электрических полей.

Поочередно поднесите к электрометру две разноименно заряженные пленки — стрелка будет отклоняться так же, как и в предыдущем опыте. Теперь одновременно поднесите обе разноименно заряженные пленки.

Что вы увидите в этом случае? Почему?

10. Наэлектризованную пленку приблизьте к тонкой струе воды, вытекающей из водопроводного крана.

Что вы увидите?

11. Очень красив опыт с «осьминогом». Возьмите лист папиросной бумаги 70×160 мм и разрежьте его почти до конца на восемь полосок, заверните лист и склейте его вверху (рис. 4). Наэлектризуйте разноименными зарядами две пленки. На одну из них положите голову «осьминога».

Что случится с его щупальцами?

Подведите к щупальцам «осьминога» противоположно заряженную пленку и соответствующими движениями заставьте «осьминога» переползти с одной пленки на другую.

Почему так происходит?

12. Возьмите две одноименно заряженные пленки. Положите на стол маятник-гильзу (или сложенный вдвое газетный лист) и сверху поднесите к нему пленку — нить (половина газетного листа) стремится установиться вертикально. Если поднести и другую заряженную пленку, эффект усиливается. Нить (газетный лист) послушно следует за совместными движениями пленок.

Объясните наблюдаемое явление.

Задачи наших читателей

1. *Докажите неравенство* ($n \geqslant 2$)

$$\frac{1}{n-1+\sqrt{n}}+\frac{1}{n-1+\sqrt{n!}}\leqslant 1.$$

А.—В. Хусаинов
(с. Киров—Юрт Чечено-Ингушской АССР)

2. *Докажите*, что если натуральное число n, не меньшее 17, является простым, то число

$$N=\frac{n^2-1}{24}$$

— целое, но составное.

Й. Суев
(г. Кишинев)

Л. Курляндчик, А. Лисицкий

Суммы и произведения

Искусством приводить длинную сумму или громоздкое произведение к простому виду, угадывать, когда такое упрощение возможно, придумывать и доказывать равенства вроде следующих:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+99\cdot100=\frac{99\cdot100\cdot101}{3},$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+50^2=\frac{101\,(101^2-1)}{24},$$

$$(1\cdot2\cdot2^2)(1\cdot2\cdot3\cdot3^3)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4^4)\dots$$
$$\dots(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9\cdot9^9)=(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9)^{10},$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10\cdot9}-\frac{1\cdot2\cdot3}{10\cdot9\cdot8}+\dots+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot10}{10\cdot9\cdot8\cdot\ldots\cdot1}=\frac{11}{12}\cdot2,$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1\cdot2}{10\cdot9}+\frac{1\cdot2\cdot3}{10\cdot9\cdot8}+\dots+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot10}{10\cdot9\cdot8\cdot\ldots\cdot1}=$$
$$=\frac{11}{2^{11}}\left(\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\dots+\frac{2^{11}}{11}\right),$$

овладеть далеко не просто. Тут требуются большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем некоторые из таких приемов на ряде примеров; среди них — и совсем простые упражнения, и трудные задачи (в числе последних — задачи М434 и М470 из Задачника «Кванта»).

Мы записываем формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1+a_2+\dots+a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} b_k = b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n,$$

$$n! = 1\cdot2\cdot\ldots\cdot n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

1. Остаются крайние

Этот заголовок объясняется следующим очевидным равенством:

$$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\dots+(a_n-a_{n-1})+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1 \qquad (1)$$

или

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1, \qquad (1')$$

из которого можно, выбирая различным образом последовательность (a_k), получить много отнюдь не очевидных равенств.

Пример 1. Положив $a_k=-\frac{1}{k}$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$; трудно найти задачник по алгебре, где бы не встречался этот пример.

Пример 2. Положим $a_k=k(k-1)d/2$. Поскольку $a_{k+1}-a_k=kd$, равенство (1) принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{n}kd=(n+1)\cdot n\cdot d/2$. Добавив к каждому члену суммы слева еще по $a-d$, а к сумме справа $n(a-d)$, получаем известную формулу для суммы n членов арифметической прогрессии: $a+(a+d)+\dots+(a+(n-1)d)=n(a-d)+(n+1)nd/2=na+n(n-1)d/2$.

Упражнение 1. Возьмите в (1) $a_k=(2k-1)^3/24$ и получите формулу для $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$.

Пример 3. Пусть m — натуральное число. Положим $a_k = \frac{1}{(m+2)} \times$ $\times (k-1)k(k+1)\ldots(k+m)$. Тогда $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{m+2} k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot (k+$ $+1+m) - \frac{1}{m+2}(k-1)k \ldots (k+m) =$ $= k(k+1)\ldots(k+m)$. В этом случае равенство (1) запишется так: $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+m) = \frac{1}{m+2} n(n+$ $+1) \cdot \ldots \cdot (n+m+1)$.

Равенство (1) можно использовать и по-другому. Пусть нам надо доказать, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n). \qquad (2)$$

Попробуем доказать равенство

$$g(k) - g(k-1) = f(k). \qquad (3)$$

Если нам это удастся, то будет доказано и (2). В самом деле, рассмотрим вспомогательную последовательность

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_{k+1} = g(k). \end{cases}$$

Для этой последовательности равенство (1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} [g(k) - g(k-1)] = g(n),$$

что, ввиду (3), равносильно (2).

Докажем, например, таким способом равенство

$$\sum_{k=1}^{n} C_{l+k-1}^{l} = C_{l+n}^{l+1}. \qquad (4)$$

В соответствии со сказанным для этого достаточно проверить равенство $C_{l+n}^{l+1} - C_{l+n-1}^{l+1} = C_{l+n-1}^{l}$ или $C_{l+n-1}^{l} +$ $+ C_{l+n-1}^{l+1} = C_{l+n}^{l+1}$, вытекающее из известного тождества $C_n^m + C_n^{m+1} =$ $= C_{n+1}^{m+1}$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 8). В п. 3 мы докажем тождество (4) другим способом.

Все вышесказанное переносится и на произведения. Напишем, прежде всего, мультипликативный аналог равенства (1):

$$\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_1} \qquad (5)$$

или

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}. \qquad (5')$$

Это равенство можно использовать, подставляя в него произвольные последовательности (a_k) (с ненулевыми членами) и для доказательства заданных тождеств.

Докажем, например, что*)

$$\prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)!! = \frac{2 \cdot (2^n)!}{2^{2^n}}, \qquad (6)$$

для чего проверим равенство

$$\frac{2 \cdot (2^n)!}{2^{2^n}} : \frac{2 \cdot (2^{n-1})!}{2^{2^{n-1}}} = (2^n - 1)!! \qquad (7)$$

или

$$\frac{(2^n)!}{(2^{n-1})! \cdot 2^{2^{n-1}}} = (2^n - 1)!!. \qquad (7')$$

Равенство (7′) легко доказывается при помощи двух очевидных тождеств:

$$(2l-1)!! = \frac{(2l)!}{(2l)!!},$$

$$(2l)!! = 2^l \cdot l!.$$

Равенство (6) можно также доказать, прологарифмировав его и перейдя к сумме.

Из (6) можно вывести, что в разложение числа $(2^n)!$ на простые множители двойка входит ровно $2^n - 1$ раз (подумайте, почему это так).

Итак, рассмотренный прием позволяет не только получать новые равенства, но и доказывать уже заданные.

Упражнения

Докажите, что:

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} -$ $- \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} \times$ $\times \frac{x - x^{2^n}}{1 - x^{2^n}}$.

---

*) Через $n!!$ обозначается произведение натуральных чисел от 1 до n, имеющих одинаковую четность с n. Например, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$, $9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1.$

5. $\prod\limits_{k=1}^{n} k^k\cdot k! = (n!)^{n+1}.$

6. $a_1 + (a_1+1)a_2 + (a_1+1)(a_2+1)\times$ $\times a + \ldots + (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_{n-1}+1)\times$ $\times a_n = (a_1+1)(a_2+1)\cdot\ldots\cdot(a_n+1) - 1$

7. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)\cdot\ldots\cdot(k+m)} =$ $= \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m!} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+m)}\right).$

8. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k\cdot k!}{(x+1)(2x+1)\cdot\ldots\cdot(kx+1)} =$ $= \frac{1}{x-1}\,\frac{x^{n+1}(n+1)!}{(x+1)\cdot\ldots\cdot(nx+1)} + \frac{x}{1-x}.$

9. $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{p_0\cdot p_1\cdot\ldots\cdot p_k q_{k+1}}{(p_1+q_1)\cdot\ldots\cdot(p_{k+1}+q_{k+1})} =$ $= 1 - \frac{p_1 p_2\cdot\ldots\cdot p_n}{(p_1+q_1)\cdot\ldots\cdot(p_n+q_n)}.$

(Здесь (p_k) и (q_k) — две последовательности и $p_0 = 1$.)

К сожалению, указанный способ годится только в том случае, когда в сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ слагаемые b_k не зависят от n. В следующем пункте мы будем доказывать равенства, в которых слагаемые зависят от n.

2. Метод «туда-назад»

Название этого метода (но не сам метод) — выдумка авторов. Историки математики утверждают, что именно с его помощью маленький Гаусс удивил своего школьного учителя, быстро найдя сумму натуральных чисел от 1 до 100. Покажем применение метода «туда-назад» на примерах.

Докажем, что для нечетного n

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sqrt{C_n^k} = 0.$$

Запишем сумму S_n двумя способами

$$S_n = \sqrt{C_n^0} - \sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^2} - \ldots + \sqrt{C_n^{n-1}} - \sqrt{C_n^n} \quad \text{(туда)},$$

$$S_n = -\sqrt{C_n^n} + \sqrt{C_n^{n-1}} - \sqrt{C_n^{n-2}} + \ldots - \sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^0} \quad \text{(назад)}.$$

В нашей сумме перед $\sqrt{C_n^n}$ знак минус, потому что n нечетно. Сложим два полученных выражения:

$$2S_n = \left(\sqrt{C_n^0} - \sqrt{C_n^n}\right) + \left(-\sqrt{C_n^1} + \sqrt{C_n^{n-1}}\right) + \ldots + \left(-\sqrt{C_n^n} + \sqrt{C_n^0}\right).$$

Легко сообразить, что в каждой скобке стоит нуль, так как $C_n^m = C_n^{n-m}$. Поэтому $2S_n = 0$, откуда $S_n = 0$.

Еще пример:

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{\left(C_{2n+1}^k\right)^2} = 0.$$

Действуем аналогично:

$$S_n = \frac{1}{\left(C_{2n+1}^0\right)^2} - \frac{1}{\left(C_{2n+1}^1\right)^2} + \ldots - \frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2} \quad \text{(туда)},$$

$$S_n = -\frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n+1}\right)^2} + \frac{1}{\left(C_{2n+1}^{2n}\right)^2} - \ldots + \frac{1}{\left(C_{2n+1}^0\right)^2} \quad \text{(назад)}.$$

Складывая эти выражения и учитывая, что $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$, получаем $2S_n = 0$. Отсюда $S_n = 0$.

А вот более сложный, но и более интересный пример на эту же тему:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+2}\left(1 + (-1)^n\right). \qquad (8)$$

Решить эту задачу так же просто, как две предыдущие, не удается. Обозначим $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_n^k}$ через S_n. Если n нечетно, вы без труда докажете, что $S_n = 0$. Случай же четного n сведем к нечетному. Проследите внимательно, как это делается.

Обозначим $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(k+1)}{C_n^k}$ через T_n. Запишем T_n двумя способами:

$$T_n = \frac{1}{C_n^0} - \frac{2}{C_n^1} + \ldots + \frac{n+1}{C_n^n} \quad \text{(туда)},$$

$$T_n = \frac{n+1}{C_n^n} - \frac{n}{C_n^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{C_n^0} \quad \text{(назад)}.$$

Складывая, получаем $2T_n = (n+2) \times \left(\frac{1}{C_n^0} - \frac{1}{C_n^1} + \ldots + \frac{1}{C_n^n}\right) = (n+2) \times S_n$. С другой стороны, $T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k(k+1)\,k!\,(n-k)!}{n!} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{C_{n+1}^{k+1}} = (n+1)(1 - S_{n+1})$. Но так как $S_{n+1} = 0$ ($n+1$ нечетно), $T_n = n+1$. Мы уже доказали, что $S_n = \frac{2}{n+2} T_n$. Значит, $S_n = \frac{2(n+1)}{(n+2)}$. Осталось заметить, что $\frac{n+1}{n+2}(1 + (-1)^n) = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетно}, \\ \frac{2(n+1)}{n+2}, & n \text{ четно}. \end{cases}$

Доказательство равенства

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} \qquad (9)$$

сложнее всех предыдущих, но оно и самое поучительное.

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = D_n; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = E_n;$$

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = F_n.$$

Сначала по методу «туда-назад» дважды запишем сумму

$$E_n = \frac{1}{C_n^0} + \frac{2}{C_n^1} + \ldots + \frac{n+1}{C_n^n} \quad \text{(туда)},$$

$$E_n = \frac{n+1}{C_n^n} + \frac{n}{C_n^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{C_n^0} \quad \text{(назад)}.$$

Сложим эти равенства: $2E_n = (n+2) \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = (n+2) D_n$. Значит, $D_n = \frac{2}{n+2} E_n$. Теперь, проделав выкладки, аналогичные тем, которые мы провели при решении предыдущей задачи, выразим E_n через D_{n+1}. А именно, $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{C_n^k} = (n+1) \times \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = (n+1)(D_{n+1} - 1)$, и мы можем выразить D_{n+1} через D_n: $D_n = \frac{2}{n+2} E_n = \frac{2}{n+2}(n+1)(D_{n+1} - 1)$, откуда

$$D_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} D_n.$$

Теперь, пользуясь методом математической индукции, докажем, что $D_n = F_n$ при всех целых $n \geqslant 0$. Легко видеть, что $D_0 = 1$ и $F_0 = 1$. Предположим, что $D_s = F_s$. Тогда $D_{s+1} = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} D_s = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} F_s = 1 + \frac{s+2}{2(s+1)} \cdot \frac{s+1}{2^{s+1}} \sum_{k=1}^{s+1} \frac{2^k}{k} = 1 + \frac{s+2}{2^{s+2}} \sum_{k=1}^{s+1} \frac{2^k}{k} = \frac{s+2}{2^{s+2}} \sum_{k=1}^{s+2} \frac{2^k}{k} = F_{s+1}$. Значит, $D_n = F_n$ при всех целых $n \geqslant 0$. Задача решена.

Доказав равенства (8) и (9), мы решили задачу М470 («Квант», 1977, № 10). Равенство (9) позволяет предложить новое решение задачи М434 («Квант», 1977, № 12).

Пусть $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = \frac{p_n}{q_n}$, где p_n, q_n взаимно просты. Обозначим через $\nu(n)$ наибольшую степень числа 2, на которую делится p_n. Докажем, что $\nu(n) \geqslant \frac{n-3}{2}$.

Из (9) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$. Поэтому $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{C_n^k}$ или $\frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}$. Отсюда $\frac{p_n}{q_n} = \frac{2^n}{n!} \times ((n-1)! + 1!\,(n-2)! + 2!\,(n-3)! + \ldots + (n-1)!)$. В $n!$ число 2 входит в степени $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \ldots \leqslant$

$\leqslant \frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\ldots<n$. В $k!(n-k-1)!$ оно входит в степени, большей чем $\left[\frac{k}{2}\right]+\left[\frac{n-k-1}{2}\right] \geqslant \frac{k}{2}+\frac{n-k-1}{2}-1=\frac{n-3}{2}$. Значит $\nu(n) \geqslant \frac{n-3}{2}$.

Упражнения

Докажите равенства:

10. $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k = n\cdot 2^{n-1}$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3C_n^k = \frac{3}{2}\, n\cdot \sum\limits_{k=0}^{n} k^2C_n^k - n^3 2^{n-2}$.

12. $\sum\limits_{k=0}^{n} k\left(C_n^k\right)^2 = \frac{n}{2}\, C_{2n}^n$.

13. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3\left(C_n^k\right)^2 = -\frac{n^3}{4}\, C_{2n}^n + \frac{3}{2} \times n \sum\limits_{k=0}^{n} k^2\left(C_n^k\right)^2 = n^3\left(\frac{3}{2}\, C_{2n-2}^{n-1} - \frac{1}{4}\, C_{2n}^n\right)$.

Ну, а как же действовать, если сумму надо вычислить? Иногда это удается сделать методом «туда-назад». Но есть и другие методы.

3. Сравнение коэффициентов

Этот метод — один из наиболее плодотворных. Мы надеемся, что вы по достоинству оцените его красоту и изящество. Основой метода является

Теорема. *Если для двух многочленов*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$$

$f(d) = g(d)$ *при всех* $d \in \mathbf{R}$, *то* $m = n$ *и* $b_0 = a_0,\ b_1 = a_1, \ldots,\ b_m = a_n$.

Эта теорема мгновенно получается, если предварительно будет доказана

Лемма. *Если для многочлена* $h(x) = C_0x^l + C_1x^{l-1} + \ldots + C_{l-1}x + C_l$ $h(d) = 0$ *при любом* $d \in \mathbf{R}$, *то* $C_0 = C_1 = \ldots = C_{l-1} = C_l = 0$.

Доказательство. Применим индукцию по l. При $l = 0$ утверждение очевидно. Предположим теперь, что наше утверждение верно при всех $l \leqslant s-1$ *). Докажем, что тогда оно верно и для $l = s$. Пусть

$$h(x) = C_0x^s + C_1x^{s-1} + \ldots + C_{s-1}x + C_s.$$

Тогда $2^s h(d) - h(2d) = 0$ при любом $d \in \mathbf{R}$, и степень многочлена $2^s h(x) - h(2x)$ меньше s. Поэтому по предположению индукции все его коэффициенты равны нулю, т. е.

$$(2^s - 2^{s-1})\,C_1 = 0,$$
$$(2^s - 2^{s-2})\,C_2 = 0,\ \ldots$$
$$\ldots, (2^s - 1)\,C_s = 0.$$

Следовательно, $C_1 = C_2 = \ldots = C_s = 0$. Тогда, конечно, и $C_0 = 0$. Лемма доказана.

В качестве первой иллюстрации установим еще раз равенство (4). Рассмотрим многочлен

$$f(x) = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots + (1+x)^{m-1}.$$

Коэффициент при x^l в этом многочлене по формуле Ньютона («Алгебра и начала анализа 9», п. 9) равен

$$C_l^l + C_{l+1}^l + \ldots + C_{m-1}^l = \sum_{k=1}^{m-l} C_{l+k-1}^l.$$

С другой стороны, последовательность $1, (1+x), (1+x)^2, \ldots, (1+x)^{m-1}$ — это геометрическая прогрессия. Поэтому

$$f(x) = \frac{(1+x)^m - 1}{(1+x) - 1} = \frac{1}{x}[(1+x)^m - 1].$$

Снова применяя формулу Ньютона, получаем

$$f(x) = \frac{1}{x}[(1+x)^m - 1] = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{m} C_m^k x^k = \sum_{k=1}^{m} C_m^k x^{k-1}.$$

Значит, коэффициент при x^l равен C_m^{l+1}. По теореме получаем (4).

Найдем $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$. Рассмотрим многочлен

---

*) Это — форма метода математической индукции, отличная от той, которая изложена в учебнике. Она называется *возвратной индукцией*.

$$f(x)=(1+x)^n(x+1)^n=$$
$$=\left(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n\right)\times$$
$$\times\left(C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+C_n^n\right).$$

Коэффициент при x^n в этом произведении равен, очевидно, $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2$. С другой стороны, $f(x)=(1+x)^{2n}$. Коэффициент при x^n в нем равен C_{2n}^n. По теореме получаем, что $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^2=C_{2n}^n$.

Теперь найдем $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2$.

При решении предыдущей задачи мы рассматривали многочлен $f(x)=(1+x)^n(x+1)^n$. Здесь же, по-видимому, надо взять похожий многочлен, но чтобы в нем знаки у коэффициентов чередовались. Давайте попробуем рассмотреть многочлен $g(x)=(1+x)^n(x-1)^n=\left(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n\right)\left(C_n^0x^n-C_n^1x^{n-1}+\ldots+(-1)^nC_n^n\right)$.

Коэффициент при x^n в этом произведении равен $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2$. С другой стороны, $g(x)=(1+x)^n(x-1)^n=(-1)^n(1-x^2)^n=(-1)^n\times\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kx^{2k}$. В этой сумме коэффициенты при нечетных степенях x равны 0. Поэтому, если n нечетно, то коэффициент при x^n равен 0. Если же n четно, то коэффициент при x^n равен $(-1)^{n+\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}=(-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}$. Итак, $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(C_n^k\right)^2=$

$$=\begin{cases}0, & n \text{ нечетно},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}C_n^{\frac{n}{2}}, & n \text{ четно}.\end{cases}$$

Упражнения

14. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k}{k+1}$. $\left(\text{Ответ: } \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}.\right)$

15. Обозначим через B_n^k коэффициент при x^k в многочлене $(1+x+x^2)^n$. Найдите сумму $\sum\limits_{k=0}^{2n}\left(B_n^k\right)^2$. $\left(\text{Ответ: } B_{2n}^{2n}.\right)$

На первый взгляд этот метод выглядит очень искусственным, потому что кажется непонятным, как же научиться выбирать нужный многочлен. К сожалению, в этой статье мы не можем более подробно останавливаться на этом вопросе.

Тем не менее мы думаем, что, решив предложенные упражнения, вы сможете самостоятельно решать аналогичные задачи.

4. Преобразование Абеля

Пусть нам дана сумма $S_n=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — две последовательности. Обозначим суммы b_1, $b_1+b_2, \ldots, b_1+b_2+\ldots+b_n$, соответственно, через $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Тогда $b_1=B_1$, $b_k=B_k-B_{k-1}$ при $k>1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kb_k$ можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=a_1B_1+a_2(B_2-B_1)+\ldots+$$
$$+a_n(B_n-B_{n-1})=(a_1-a_2)B_1+$$
$$+(a_2-a_3)B_2+\ldots+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+$$
$$+a_nB_n=\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_nB_n. \tag{10}$$

Это преобразование называют *преобразованием Абеля* (о замечательном норвежском математике Нильсе Хенрике Абеле см. в «Кванте» № 5 за 1976 год).

Воспользовавшись преобразованием Абеля, найдем сумму $\sum\limits_{k=1}^{n}kq^{k-1}$.

Положим в тождестве (10) $a_1=1$, $a_2=2, \ldots, a_n=n$; $b_1=1$, $b_2=q, \ldots, b_n=q^{n-1}$. Тогда $B_k=\dfrac{q^k-1}{q-1}$ и $a_1-a_2=a_2-a_3=\ldots=a_{n-1}-a_n=-1$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)\frac{q^k-1}{q-1}+$$

$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{-1}{q-1}\sum_{k=0}^{n-1}(q^k-1)+$$

$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{-1}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)+$$

$$+n\frac{q^n-1}{q-1}=\frac{nq^n}{q-1}-\frac{q^n-1}{(q-1)^2}.$$

Упражнения

Преобразованием Абеля найдите:

16. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2q^{k-1}$.

17. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot\sin kx$.

18. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\cdot\cos kx$.

Докажите равенства:

19. $$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k k}{(C_{2n-1}^k)^2}=$$

$$=\frac{4n^2}{2n+1}\left(1-\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k}{(C_{2n}^k)^2}\right).$$

20. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(C_n^k)^3=$$

$$=\begin{cases}0, \text{ если } n=2l+1,\\ (-1)^l\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l.\end{cases}$$

21. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k(C_n^k)^3=$$

$$=\begin{cases}(-1)^l l\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l,\\ (-1)^{l+1}\dfrac{(3l+1)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l+1.\end{cases}$$

22. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2(C_n^k)^3=\ .$$

$$=\begin{cases}(-1)^l\cdot\dfrac{2}{3}l^2\dfrac{(3l)!}{(l!)^3}, \text{ если } n=2l,\\ (-1)^{l+1}(2l+1)\dfrac{(3l+1)!}{(l!)^3},\\ \text{если } n=2l+1.\end{cases}$$

23. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{a_{k+1}}{C_n^k}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n+1}{n+2}(a_1+a_{n+1}), \text{ если } n \text{ четно},\\ -\dfrac{(n+1)^2}{n+3}d, \text{ если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Законный вопрос

В планиметрии доказываются следующие две взаимообратные теоремы:

Теорема 1. *Против равных углов треугольника всегда лежат равные стороны.*

Теорема 2. *Против равных сторон треугольника всегда лежат равные углы.*

Между тем, в практических применениях геометрии не имеет смысла говорить о строгом (точном) равенстве сторон или углов — там приходится иметь дело лишь с приближенно равными геометрическими величинами. Это обстоятельство подсказывает естественный вопрос, сохраняют ли силу приведенные теоремы после нижеследующей их модификации:

Теорема 1'. *Против почти равных углов треугольника всегда лежат и почти равные стороны.*

Теорема 2''. *Против почти равных сторон треугольника всегда лежат и почти равные углы.*

Однако фигурирующее в этих двух формулировках слово «почти» в наше время чуждо языку математика *). Итак, прежде чем пытаться ответить на поставленный вопрос, следует придать вполне точный смысл сформулированным теоремам, освободив их от неопределенного понятия «почти». (Не исключено, что сделать это можно разными способами, например, с помощью понятия предела или как-либо иначе.)

Предлагаем нашим читателям сделать это.

Ю. Гайдук
(г. Харьков)

---

*) Оно употребляется сейчас лишь как составная часть немногих математических терминов, например, «почти все», «почти всюду», «почти период», но в каждом случае в строго определенном смысле.

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто её предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 декабря 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант», Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете (например: «*М526*, *М527*» или «Ф538»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М526—М530; Ф538—Ф542

М526. а) Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна

$$S = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,|a^2 - b^2 + c^2 - d^2|}{4},$$

где a, b, c и d — длины последовательных сторон четырехугольника, φ — величина угла между его диагоналями, $\varphi \neq 90°$.

б) *Можно ли найти площадь* S, *зная* a, b, c *и* d, если $\varphi = 90°$?

У. Алла

М527. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. Докажите, что величина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n - \\ - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$$

не превосходит

а) 1 при $n=3$;
б) 2 при $n=4$;
в)* $[n/2]$ при любом $n \geqslant 3$.

В. Батырев, ученик 10 класса

М528. На каждой клетке шахматной доски стоит по фишке (рис. 1). Фишки нужно переставить так, чтобы расстояние между каждой парой фишек не уменьшилось по сравнению с расстоянием между ними при первоначальном расположении. Сколькими способами это можно сделать? (Расстоянием между фишками считается расстояние между центрами клеток, которые они занимают.)

М. Бершадский

М529. а) Многоугольник M' — образ выпуклого многоугольника M при гомотетии с коэффициентом $k = -{}^1/_2$. Докажите, что существует параллельный перенос T такой, что $T(M') \subseteq M$.

б) При каких коэффициентах гомотетии $k < 0$ верно аналогичное утверждение для выпуклого многогранника M в пространстве?

Н. Нецветаев

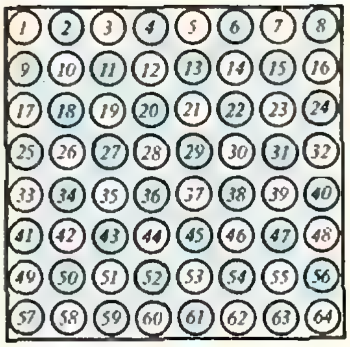


Рис. 1.

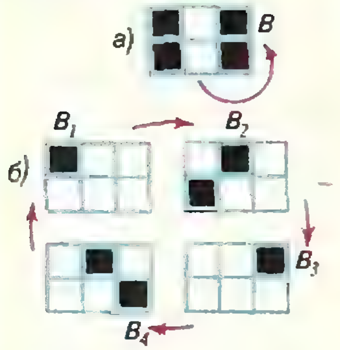


Рис. 2.

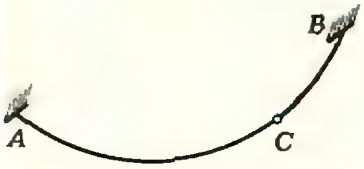


Рис. 3.

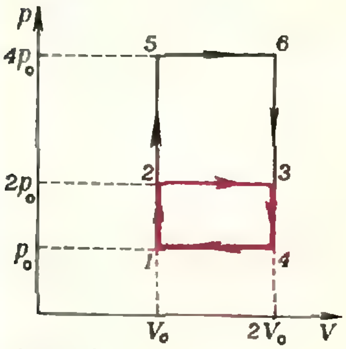


Рис. 4.

М530. На прямоугольном листе бумаги в клетку некоторые клетки закрашены в черный цвет. Затем происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: клетка, имевшая четное число черных соседей, становится белой, а имевшая нечетное число черных соседей — черной. (Соседями считаются клетки, имеющие общую сторону.)

а) Докажите, что если множество B черных клеток при перекрашивании не изменяется (рис. 2, *а*) то в B четное число клеток.

б) Пусть при перекрашивании множество B_1 черных клеток переходит в B_2, B_2 — в B_3, . . ., B_{r-1} — в B_r, а B_r — снова в B_1. Докажите, что общее число черных клеток в множествах $B_1, B_2, \ldots, B_r$ четно.

Р. Измайлов, ученик 10 класса

Ф538. Тяжелая веревка подвешена в точках A и B (рис. 3). Абсолютное значение силы натяжения веревки в точке C равно 20 Н. Найти массу веревки.

И. Слободецкий

Ф539. На рисунке 4 показаны два замкнутых термодинамических цикла, проведенных с идеальным одноатомным газом: $1\to2\to3\to4\to1$ и $1\to5\to6\to\to4\to1$. У какого из циклов коэффициент полезного действия выше? Во сколько раз?

А. Зильберман

Ф540. Две катушки с индуктивностями L_1 и L_2 соединены параллельно. Какими будут максимальные токи в катушках, если параллельно им подключить конденсатор с емкостью C (рис. 5), предварительно заряженный до напряжения U?

О. Савченко

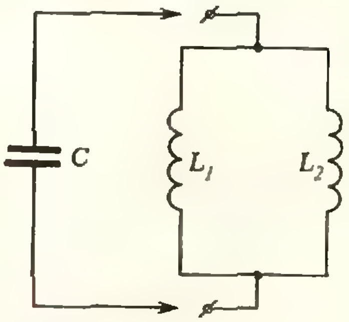


Рис. 5.

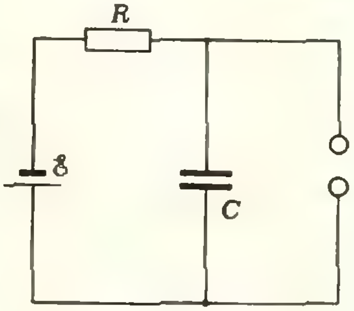


Рис. 6.

Ф541. Промежуток искрового генератора (рис. 6) отрегулирован на напряжение U, а сопротивление R резистора подобрано таким, чтобы происходило n разрядов в секунду. Определить среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе, если во время разряда конденсатор успевает полностью разрядиться.

П. Зубков

Ф542. Как изменится скорость истечения газа из баллона через небольшое отверстие, если температуру газа увеличить в 4 раза, а давление — в 8 раз?

Решения задач

М476—М481, М483, М484; Ф493—Ф497

М476. *а) Докажите, что если вершины выпуклого n-угольника лежат в узлах клетчатой бумаги, а внутри и на его сторонах других узлов нет, то $n \leqslant 4$.*

б) Пусть пространство разбито тремя семействами параллельных плоскостей на одинаковые кубики. Вершины кубиков назовем узлами. Докажите, что если все n вершин выпуклого многогранника лежат в узлах, а на его ребрах, гранях и внутри многогранника других узлов нет, то $n \leqslant 8$.

а) Допустим, что, напротив, $n \geqslant 5$. Введем на плоскости систему координат так, чтобы координатные оси являлись линиями клетчатой бумаги и сторона клетки равнялась единице. Тогда две целочисленные координаты будут иметь точки, лежащие в узлах клетчатой бумаги, и только они. Около каждой вершины n-угольника напишем две буквы. На первом месте напишем *Ч*, если первая координата вершины четная, и *Н* — в противном случае; соответственно, на втором месте напишем *Ч*, если вторая координата вершины четная, и *Н*, если она нечетная (на рисунке 1 вершины, около которых написаны разные пары букв, покрашены в разные цвета). Так как всего имеется только четыре различные пары из букв *Ч* и *Н*, а $n \geqslant 5$, найдутся две вершины A и B многоугольника, около которых написаны одинаковые наборы букв. Пусть $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2; y_2)$. Середина C отрезка AB лежит внутри многоугольника или на его стороне (поскольку многоугольник выпуклый). Так как x_1 и x_2 имеют одинаковую четность, то абсцисса точки C, равная $\dfrac{x_1 + x_2}{2}$, число целое; аналогично, C имеет целочисленную ординату. Следовательно, точка C лежит в узле клетчатой бумаги. Получили противоречие.

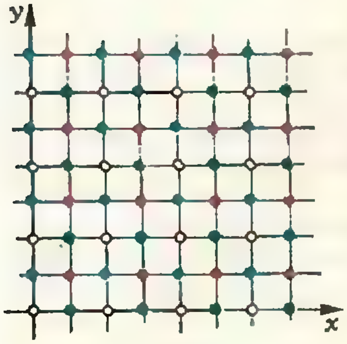


Рис. 1.

б) Рассуждение проводится аналогично предыдущему случаю с той лишь разницей, что около каждой вершины многогранника мы пишем, в зависимости от четности ее координат, тот или иной набор из букв *Ч* и *Н* длины 3. Число всевозможных таких наборов равно 8, и если число вершин многогранника больше 8, то найдутся две вершины многогранника, около которых записаны одинаковые наборы букв.

Решение этой задачи — характерный пример применения так называемого «принципа Дирихле», о котором рассказывалось в «Кванте» (1971, № 7, статья А. Орлова «Принцип Дирихле» и 1977, № 2, статья В. Болтянского «Шесть зайцев в пяти клетках»): *если в n клетках сидит $n + 1$ заяц, то хотя бы в одной клетке сидят два зайца.*

◆

М477. *Дан многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что для каждого натурального x выполняется неравенство $P(x) > x$. Определим последовательность $\{b_n\}$ следующим образом: $b_1 = 1$, $b_{k+1} = P(b_k)$ для $k \geqslant 1$. Известно, что для любого натурального d найдется член последовательности $\{b_n\}$, делящийся на d. Докажите, что $P(x) = x + 1$.*

Заметим сначала, что если целые числа x и y дают одинаковые остатки при делении на натуральное число d, то $P(x)$ и $P(y)$ также дают одинаковые остатки при делении на d. Это следует из того, что при подстановке x и y в многочлен P соответствующие члены будут давать одинаковые остатки при делении на d. (В самом деле, $x^k - y^k$ при любом натуральном k делится на $x - y$, поскольку $x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + x^{k-3}y^2 + \ldots + y^{k-1})$; следовательно, если $x - y$ делится на d, то $x^k - y^k$ — тоже.)

Пусть $P(x)$ отличен от $x + 1$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ — из натуральных чисел, и $P(x) > x$ для каждого натурального x, при некотором натуральном n будет $b_{n+1} > b_n + 1$. Возьмем минимальное такое n. Имеем: $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, ..., $b_n = n$, $b_{n+1} > n + 1$. Положим $d = b_{n+1} - 1$. Остатки от деления членов нашей последовательности на d вначале будут равны 1, 2, ..., n, а затем, в силу сделанного замечания и выбора d, они будут периодически повторяться: b_{n+1} даст в остатке 1, b_{n+2} даст 2, ..., b_{2n} даст n, b_{2n+1} — снова 1 и т. д. Ни один из членов последовательности, вопреки условию задачи, не будет делиться на d. Поэтому $P(x) = x + 1$.

М478. *В волейбольном турнире каждые две команды сыграли по одному матчу.*
а) Докажите, что если для любых двух команд найдется третья, которая выиграла у этих двух, то число команд не меньше семи.
б) Постройте пример такого турнира семи команд.
в) Докажите, что если для любых трех команд найдется такая, которая выиграла у этих трех, то число команд не меньше 15.

а) Рассматривая произвольную команду A вместе с одной из команд B, которой A проиграла, мы видим, что B должна проиграть хотя бы одной команде из числа выигравших у A. Иными словами, все команды, выигравшие у A, *проиграли хотя бы* по одному матчу в играх друг с другом. Значит, число команд, выигравших у A, не меньше трех. Но среди всех наших команд должна найтись команда, которая выиграла не меньше матчей, чем проиграла (иначе общее число побед было бы меньше общего числа поражений). Эта команда не менее трех раз проигрывала и не менее трех раз выигрывала, что возможно лишь в случае, когда число команд не меньше семи.

б) Сопоставим каждой из команд вершину выпуклого семиугольника. Победу команды A над командой B обозначим стрелкой, проведенной из точки A в точку B. Наш рисунок 2 показывает возможность удовлетворить условиям задачи.

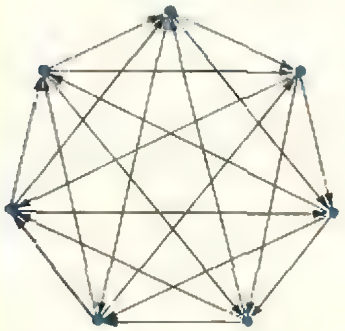


Рис. 2.

в) Пусть команда A выиграла не меньше встреч, чем проиграла. Проверяя выполнение условия задачи для всевозможных троек, составленных из команды A *и двух команд, выигравших* у нее, мы видим, что команды, победившие A, образуют множество, удовлетворяющее условию задачи а). Следовательно, их не меньше семи. Команда A не менее семи встреч выиграла и не менее семи проиграла; следовательно, всего в турнире участвовало не менее 15 команд.

Аналогичным образом легко доказать, что если (при данном m) для любых m команд найдется такая, которая им всем не проиграла, то число команд не меньше $2^{m+1}-1=a_m$ (последовательность $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=15$, … удовлетворяет соотношению $a_{m+1}=2a_m+1$). Автору неизвестно, является ли эта оценка точной при всех m.

◆

М479. *Существуют ли а) шесть, б) 1000 таких различных натуральных чисел, что для любых двух a и b из них сумма $a+b$ делится на разность $a-b$?*

а) Существуют. *Например, числа 168, 170, 171, 172, 174, 180.*

б) Существуют. Покажем, как можно строить сколь угодно длинные наборы таких чисел. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — набор из n натуральных чисел, удовлетворяющий условию задачи. Тогда $n+1$ чисел $\{a_1a_2\ldots a_n, a_1a_2\ldots a_n+a_1, \ldots, a_1a_2\ldots a_n+a_n\}$ также будут удовлетворять условию. (В самом деле, $2a_1a_2\ldots a_n+a_i$, очевидно, делится на a_i, и $2a_1a_2\ldots a_n+a_i+a_j$ делится на a_i-a_j, поскольку $2a_j=(a_i+a_j)-(a_i-a_j)$, и a_i+a_j делится на a_i-a_j в силу выбора набора $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.) Начиная с набора чисел, состоящего из одной единицы, мы можем, многократно используя описанное преобразование, получить нужные нам наборы любой длины: $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{24, 26, 27, 28\}$ и т. д.

Но, как правильно заметили некоторые читатели, бесконечного множества натуральных чисел, в котором сумма любых двух делится *на их разность, не существует.*

◆

М480. *Последовательность c_n строится по следующему правилу: $c_1=2$, $c_{n+1}=[3c_n/2]$ для $n\geq1$\*). Докажите, что*
а) в этой последовательности бесконечно много четных чи-

Пункт а) является следствием пункта б) в такой усиленной форме: последовательность e_n, начиная с любого места, не является периодической.

б) Предположим, что последовательность $\{e_n\}$, начиная с некоторого места, периодическая, то есть что $e_{n+T}=e_n$ при некотором натуральном T для всех n, начиная с некоторого N. Это означает, что для любого $n\geq N$ числа c_n и c_{n+T} имеют одинаковую четность. Отсюда следует, что

$$\frac{3}{2}c_n-\left[\frac{3}{2}c_n\right]=\frac{3}{2}c_{n+T}-\left[\frac{3}{2}c_{n+T}\right],$$

---

*) *Здесь $[x]$ — целая часть числа x.*

сел и бесконечно много нечетных чисел;
б) последовательность $e_n = (-1)^{c_n}$ непериодическая;
в) существует число γ такое, что

$$c_n = [(^3/_2)^n \gamma] + 1.$$

и поэтому $c_{n+T+1} - c_{n+1} = \frac{3}{2}(c_{n+T} - c_n)$. Но ясно, что *не существует бесконечной последовательности целых чисел, в которой каждое число в полтора раза больше предыдущего.* (В самом деле, если какой-то член последовательности имеет вид $2^k \cdot r$, где r — нечетное число, то через $k + 1$ шагов после него мы должны были бы встретить член $\frac{3^{k+1}r}{2}$ — число не целое.) Противоречие.

в) Легко проверить, что при любом n

$$c_{n+1} \leqslant \frac{3}{2}c_n,\ c_{n+1} - 1 \geqslant \frac{3}{2}(c_n - 1).$$

Поэтому

$$\frac{c_n - 1}{(3/2)^n} \leqslant \frac{c_{n+1} - 1}{(3/2)^{n+1}} < \frac{c_{n+1}}{(3/2)^{n+1}} \leqslant \frac{c_n}{(3/2)^n}.$$

Длина отрезка $\left[\frac{c_n - 1}{(3/2)^n};\ \frac{c_n}{(3/2)^n}\right]$ равна $(2/3)^n$, — она стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому все эти отрезки имеют *единственную общую точку*. Обозначим ее через γ.

Из определения γ следует, что $(3/2)^n\gamma \in [c_n - 1;\ c_n]$. При этом равенство $(3/2)^N \gamma = c_N$ ни при каком N невозможно: из него вытекало бы, что $(3/2)^n \gamma = c_n$ при любом целом $n \geqslant N$, или $c_{n+1} = \frac{3}{2}c_n$ при любом целом $n \geqslant N$, что противоречит сказанному выше. Значит, $[(3/2)^n\gamma] = c_n - 1$, что и требовалось доказать.

В решении этой задачи мы воспользовались важным принципом стягивающихся отрезков, согласно которому *последовательность вложенных отрезков*

$$[a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset [a_3;\ b_3] \supset \ldots,$$

длина $|a_n - b_n|$ которых стремится к 0, всегда имеет единственную общую точку. При аксиоматическом изложении теории действительных чисел этот принцип (или какой-либо ему эквивалентный) принимается за аксиому. Он наглядно выражает очевидное свойство «плотности» числовой оси, отсутствие в ней «дыр». Этот принцип можно доказать, исходя из теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности.

В нашей задаче легко указать левые и правые концы n-го отрезка для нескольких первых n и тем самым приближенно вычислить γ; например, с двумя знаками после запятой: $\gamma \approx 0{,}81$.

С. Конягин

◆

М481. *В последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ каждый член a_{k+1} равен сумме квадратов цифр в десятичной записи числа a_k $(k \geqslant 1)$. Докажите, что при любом a_1 в этой последовательности встретится число 1 или число 89.*

Ясно, что сумма квадратов цифр числа x — обозначим ее $f(x)$ — для достаточно большого x значительно меньше самого числа x. Так, если x — четырехзначное число, то есть $10^3 \leqslant x < 10^4$, то $f(x) \leqslant 4 \cdot 9^2 = 364 < 10^3 \leqslant x$. Вообще, если $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$ и $n > 3$, то $f(x) \leqslant 81n < 10^{n-1}$. (Последнее неравенство легко доказать по индукции: $81n < 10^{n-1} \Rightarrow 81(n+1) = 81n + 81 < 10^{n-1} + 81 < 10^n$.) Докажем, что и для любого трехзначного x также $f(x) < x$. Если первая цифра числа x равна $p > 1$, то $f(x) < p^2 + 2 \cdot 81 = 162 + p^2 < 100p$ (в этом нетрудно убедиться для каждого $p = 2, 3, 4, \ldots, 9$). Если первая цифра x равна 1, а вторая q, то $f(x) \leqslant 1 + q^2 + 81 < 100 + 10q \leqslant x$ для любого $q = 1, 2, \ldots, 9$.

2-й разряд двузначного числа \ 1-й разряд двузначного числа	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	1	2	5	10	17	26	37	50	65	82
2	4	5	8	13	20	29	40	53	68	85
3	9	10	13	18	25	34	45	58	73	90
4	16	17	20	25	32	41	52	65	80	97
5	25	26	29	34	41	50	61	74	89	106
6	36	37	40	45	52	61	72	85	100	117
7	49	50	53	58	65	74	85	98	113	130
8	64	65	68	73	80	89	100	113	128	145
9	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162

Таким образом, для любого натурального числа a_1 в последовательности

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, \text{ где } a_{n+1} = f(a_n), \qquad (*)$$

встретится число, не превосходящее 99. Для двузначных и однозначных чисел приходится изучать соответствующие им последовательности (*) перебором. В вычислениях помогает табличка, у которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит сумма $i^2 + j^2$ — эта табличка *помещена выше*. Для любого $x \leqslant 99$ будет $f(x) \leqslant 162$; таким образом, множество $X = \{1, 2, \ldots, 162\}$ отображается в себя: $f(x) \leqslant 162$ для всех $x \leqslant 162$.

Как устроено отображение f множества X, показано на рисунке 3: от каждого числа x идет стрелка к числу $f(x)$. Из

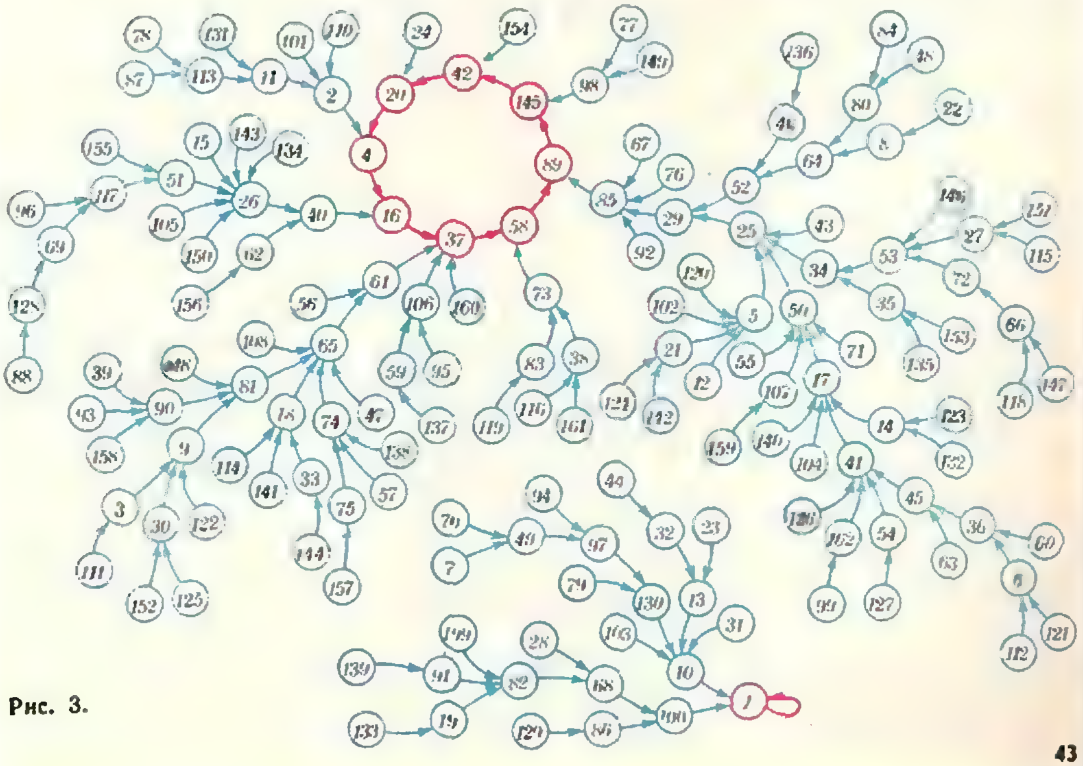


Рис. 3.

рисунка 3 видно, что для любого a_1 последовательность (•) либо войдет в «неподвижную точку» 1: при некотором N получится $a_N = 1$ (и тогда $a_{N+1} = a_{N+2} = \ldots$), либо попадет в «цикл» (период) $\ldots \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to \ldots$ (Таким образом, число 89 в условии можно было бы заменить любым из семи остальных чисел этого цикла; 89 примечательно разве лишь тем, что к нему примыкает самая мощная «ветвь» на рисунке.) Отсюда следует утверждение задачи M481.

Для аналогичной задачи, в которой вместо суммы квадратов цифр речь идет просто о сумме цифр, получается более простой результат: после нескольких применений отображения «$x \to$ сумма цифр x» из чисел a_1, кратных девяти, получится 9, а из любого числа a_1, не кратного девяти, получится остаток от деления a_1 на 9. Таким образом, здесь имеется девять неподвижных точек 1, 2, …, 9, и по a_1 сразу можно сказать, в какую из них мы попадем.

Разумеется, можно вместо f брать и другие функции скажем, сумму кубов, или четвертых степеней цифр, и т. д. Для этих отображений также можно доказать, что $f(x) < x$ при достаточно большом x, а значит, последовательности вида (•) рано или поздно входят в один из конечного числа «циклов» — в частности, быть может, попадают в «цикл длины 1», то есть в неподвижную точку. Хотя любители цифровых диковинок, возможно, получат удовольствие, наткнувшись на такие неподвижные точки, как $1^3 + 5^3 + 3^3 = 153$ (*В. Панфилов*) или $1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4 = 1634$ (*Г. Гуревич*), но искать здесь все циклы — дело довольно утомительное, даже если под рукой есть вычислительная машина.

◆

M483*). *а) Докажите, что отношение квадрата радиуса вписанной окружности прямоугольного треугольника к сумме квадратов длин медиан, проведенных из острых углов, не превосходит 1/20.*
б) Найдите наибольшее значение, которое может принимать это отношение.

Пусть a и b — длины катетов треугольника, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — длина гипотенузы, r — радиус вписанной окружности. Поскольку сумма квадратов длин медиан, о которой говорится в условии, равна

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2,$$

в задаче требуется оценить отношение $4r^2/5c^2$. Заметим, что

$$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{ab}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}} <$$

$$< \frac{a^2+b^2}{2\cdot 2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{4},$$

поскольку $ab \leqslant (a^2 + b^2)/2$ и $a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$. Отсюда получаем результат а):

$$\frac{4r^2}{5c^2} < \frac{4}{5\cdot 4^2} = \frac{1}{20}.$$

Более точная оценка (в ней используются неравенства $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ и $c^2 = a^2 + b^2 \geqslant 2ab$, обращающиеся в равенства при $a = b$):

$$\frac{r^2}{c^2} = \frac{a^2b^2}{(a+b+\sqrt{a^2+b^2})^2c^2} \leqslant \frac{ab}{2(2\sqrt{ab}+\sqrt{2ab})^2} =$$

$$= \frac{1}{4(1+\sqrt{2})^2},$$

откуда получаем результат б):

$$\frac{4r^2}{5c^2} \leqslant \frac{1}{5(3+2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{5}$$

(при $a = b$ получаем равенство, то есть оценка — наилучшая).

---

*(Решение задачи M482 будет опубликовано в следующем номере журнала.

Эта задача допускает и другие решения, использующие геометрические соображения. Приведем два решения.

1°. Если продолжить диагональ квадратика на рисунке 4 до пересечения с гипотенузой, мы получим биссектрису прямого угла; обозначим ее длину через l. Поэтому $r+r\sqrt{2}\leqslant l$. Но биссектриса в любом треугольнике расположена между высотой h и медианой, длина которой в прямоугольном треугольнике с гипотенузой длины c равна $c/2$. Отсюда $r(1+\sqrt{2})\leqslant c/2$, откуда получаем результат.

2°. Зафиксируем отрезок AB длины c. Пусть C — любая точка полуокружности с диаметром $[AB]$ (тогда $\widehat{ACB}=90°$) и M — центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\widehat{AMB}=135°$, точки M лежат на дуге в 90° с концами A, B, и поэтому расстояние от M до прямой AB (радиус r вписанной окружности) будет наибольшим, когда M попадает в середину этой дуги, т. е. когда прямоугольный треугольник ABC — равнобедренный.

Н. Васильев

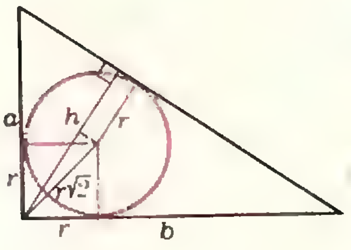


Рис. 4.

◆

М484. *При каких n существует выпуклый n-угольник, который можно разрезать на несколько правильных многоугольников (не обязательно одинаковых)?*

Мы сейчас докажем, что *при* $3\leqslant n\leqslant 12$ *такие n-угольники существуют, а при* $n>12$ *— нет.*

Обозначим разбиваемый n-угольник через M. Правильный многоугольник, участвующий в разбиении M, назовем *хорошим*, если хотя бы одна из его вершин является вершиной многоугольника M.

(Далее, говоря о многоугольниках разбиения, мы всегда под словом *многоугольник* будем подразумевать *правильный многоугольник.*)

Наше доказательство будет состоять из нескольких пунктов.

1°. Заметим, что *в вершине многоугольника M может сходиться не более двух правильных многоугольников, причем это либо два треугольника, либо треугольник и квадрат, либо треугольник и пятиугольник.*

Это утверждение немедленно следует из того, что величина каждого угла M меньше 180°, а величина угла произвольного правильного многоугольника не меньше 60°, и, кроме того, возможны только такие сочетания: $60°+60°$, $60°+90°$, $60°+108°$.

Из нашего замечания следует, что *если правильный k-угольник с* $k\geqslant 6$ *примыкает к вершине многоугольника M, то его стороны идут по сторонам M.*

2°. Докажем, что *правильный k-угольник при* $k>6$ *не может быть хорошим.* Предположим противное. Тогда, если он хороший и если все его вершины совпадают с вершинами M, то он совпадает с M, а мы предполагаем, что M разбит не менее чем на два многоугольника. Если же найдутся две соседние вершины A и B k-угольника, одна из которых (A) является вершиной M, а другая (B) — нет (рис. 5), то при вершине B образуется угол, по величине меньший 60° (на рисунке 5 он заштрихован), который не может быть заполнен углами правильных многоугольников. Противоречие.

3°. Так как правильный шестиугольник можно разбить на правильные треугольники, будем считать, что в разбиении шестиугольники не участвуют.

При таком условии мы получаем, что *хорошими могут быть только треугольники, квадраты и пятиугольники.*

4°. Докажем, что *если в разбиении M есть хороший пятиугольник, то каждая его вершина является вершиной M.*

Прежде всего заметим, что вершина хорошего пятиугольника (обозначим его буквой $П$) не может быть внутренней точкой стороны ни многоугольника M, ни какого-либо многоугольника разбиения (иначе при этой точке

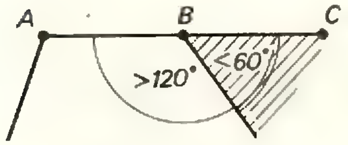


Рис. 5.

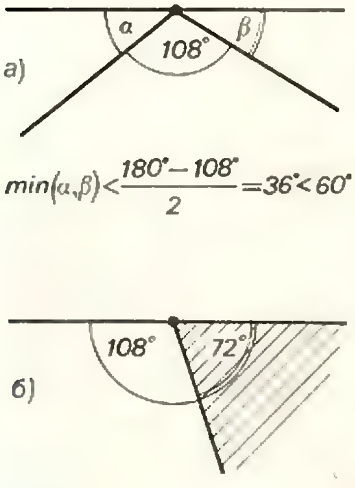


Рис. 6.

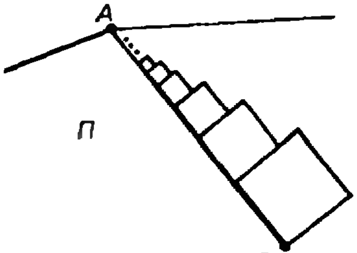


Рис. 7.

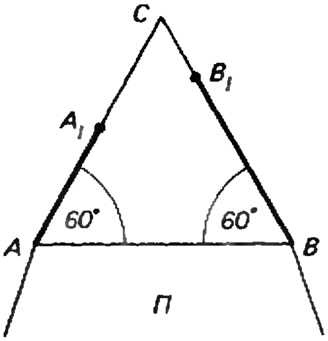


Рис. 8.

образовался бы «плохой» угол, не заполняемый правильными многоугольниками — см. рисунки 6, *а*, *б*). Поэтому каждая вершина $П$ либо является вершиной M, либо лежит строго внутри M и является общей вершиной еще каких-то многоугольников разбиения.

Допустим, что нашлись две соседние вершины $П$, одна из которых (A) — вершина M, а другая (B) лежит строго внутри M. Покажем, что этого не может быть. В самом деле, поскольку B — общая вершина многоугольников, один из которых — пятиугольник, нам нужно заполнить правильными многоугольниками угол в $360°-108° = 252°$. Нетрудно сообразить, что четырьмя (и более) многоугольниками этот угол заполнить нельзя: четырех треугольников мало, а трех треугольников и одного квадрата уже много ($4 \cdot 60° = 240° < 252°$; $3 \cdot 60° + 90° = 270° > 252°$). Значит, угол в 252° можно попытаться заполнить двумя или тремя многоугольниками разбиения.

Если многоугольников три, то один из них — обязательно треугольник ($3 \cdot 90° = 270° > 252°$); поэтому в этом случае для заполнения двумя многоугольниками остается угол в $252° - 60° = 192°$. Пусть это — какие-то k- и m-угольники. Тогда

$$180°\left(1-\frac{2}{k}\right)+180°\left(1-\frac{2}{m}\right)=192°,$$

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{7}{15},$$

и если $k \leqslant m$, то $\frac{2}{k} \geqslant \frac{7}{15}$, откуда $k \leqslant \frac{30}{7} < 5$ (и $k \geqslant 3$).

При $k = 4$ получаем $m = \frac{60}{13}$ — не целое число; следовательно, квадрат в заполнении угла величиной 192° участвовать не может. По той же причине не может участвовать в его заполнении и треугольник: при $k = 3$ получаем $m = \frac{15}{2}$. Значит, угол в 192° «плохой», и, таким образом, угол в 252° тремя многоугольниками заполнить нельзя.

Если же многоугольников два, то тогда

$$180°\left(1-\frac{2}{k}\right)+180°\left(1-\frac{2}{m}\right)=252° \quad (k \leqslant m),$$

откуда

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{m}=\frac{3}{10}.$$

Убедитесь сами, что в целых числах k, m, $k \leqslant m$ это уравнение имеет только такие решения: $k = 5$, $m = 10$ и $k = 4$, $m = 20$. Покажем, что ни одно из них не годится. Действительно, в вершине B к стороне $[AB]$ пятиугольника $П$ не могут примыкать ни пятиугольник, ни десятиугольник, ни двадцатиугольник (у них «плохие» внешние углы — 72°, 36° и 18° соответственно); значит, в вершине B к $[AB]$ должен примыкать квадрат. Легко понять, что тогда все прилегающие к $[AB]$ многоугольники должны быть квадратами (рис. 7), что невозможно, поскольку величина «свободного» угла при вершине A меньше $72° < 90°$.

Значит, у хорошего пятиугольника не может быть вершины внутри M. Тем самым утверждение 4 доказано: *если пятиугольник, участвующий в разбиении M, хороший, то все его вершины являются вершинами M.*

5° Легко понять, что к соседним сторонам хорошего пятиугольника многоугольники разбиения примыкать не могут (иначе в общей вершине этих многоугольников, являющейся, по доказанному, и вершиной выпуклого M, сходилось бы не менее трех многоугольников, один из которых — пятиугольник, и сумма величин углов

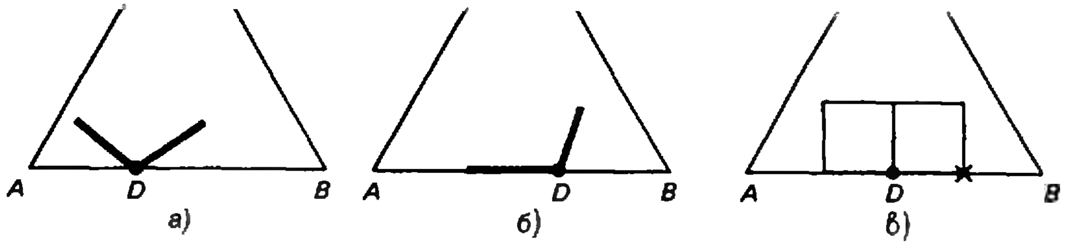


Рис. 9.

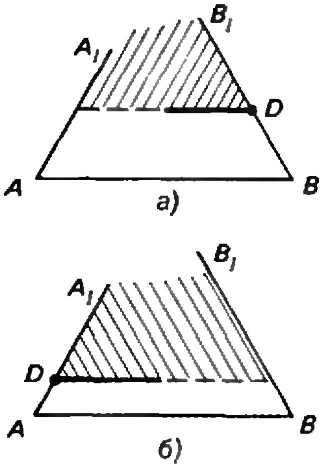


Рис. 10.

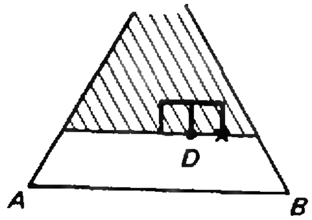


Рис. 11.

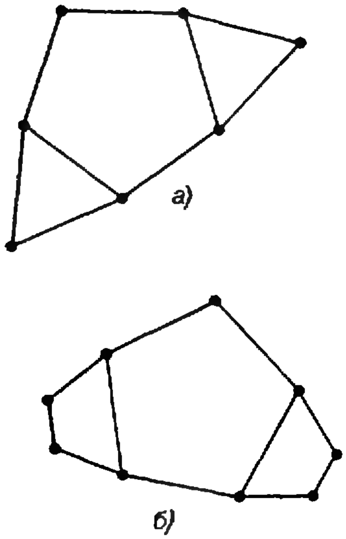


Рис. 12.

была бы не меньше $108^\circ+2\cdot60^\circ>180^\circ$). Таким образом *многоугольники разбиения могут примыкать только к несмежным сторонам хорошего пятиугольника.* Пусть $[AB]$ — сторона пятиугольника Π, к которой примыкают еще какие-то многоугольники разбиения (рис. 8). Пусть A_1 и B_1 — вторые концы сторон многоугольника M, выходящих из вершин A и B соответственно (A_1 и B_1 — не вершины пятиугольника Π; возможно, что $A_1 = B_1$). Обозначим через C точку пересечения (AA_1) с (BB_1). Тогда $\triangle ACB$ — правильный треугольник, внутри которого расположены все многоугольники разбиения, лежащие выше $[AB]$ (если Π расположен под $[AB]$, как на рисунке 8).

6°. Докажем, что *все многоугольники разбиения, лежащие внутри* $\triangle ABC$ (рис. 8), *являются треугольниками.*

Предположим противное — пусть есть «не-треугольники». (Будем считать, что сторона $[AB]$ горизонтальна.) Рассмотрим ближайшую к $[AB]$ (самую низкую) вершину не-треугольника; если таких вершин несколько, то возьмем самую правую среди них. Обозначим эту «самую низкую и самую правую» вершину через D. Точка D не может лежать на стороне $[AB]$: если «не-треугольник» расположен так, как на рисунке 9, *а*, то один из углов не больше $\frac{180^\circ-90^\circ}{2}=45^\circ$ — «плохой»; если так, как на рисунке 9, *б*, и «не-треугольник» — «не-квадрат», то снова получается «плохой» угол (мы условились, что «не-треугольник» — и «не-шестиугольник»); если же «не-треугольник» — квадрат, то справа к вершине D примыкает снова квадрат (рис. 9, *в*), и, значит, вершина D — не самая правая. Точка D не может лежать и на сторонах $[AA_1]$ и $[BB_1]$ многоугольника M: концы A_1 и B_1 — не ближайшие к $[AB]$, а если D — внутренняя точка $[AA_1]$ или $[BB_1]$, то тогда «не-треугольник» должен быть целиком расположен внутри угла в 60° (рис. 10, *а*, *б*), что невозможно.

Итак, точка D — внутренняя точка области $AA_1\ldots B_1B$ многоугольника M. Поскольку все «не-треугольники», сходящиеся в D, должны располагаться не ниже проходящей через D горизонтальной прямой, сумма их углов при вершине D не больше 180°. Значит, это либо два квадрата, либо с вершиной в D есть только один «не-треугольник». Если это два квадрата, то поскольку D — самая нижняя, они могут быть расположены только горизонтально — так, как на рисунке 11; но тогда вершина D — не самая правая среди вершин «не-треугольников». Если же «не-треугольник» в D только один (например, k-угольник, $k>4$, $k\neq6$), а остальные многоугольники разбиения — треугольники, то тогда

$$360^\circ-180^\circ\left(1-\frac{2}{k}\right)=60^\circ n$$

(n — натуральное). Отсюда $k=\frac{6}{n-3}$. В натуральных числах это уравнение имеет такие решения: $n=4$, $k=6$;

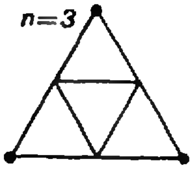


Рис. 13.

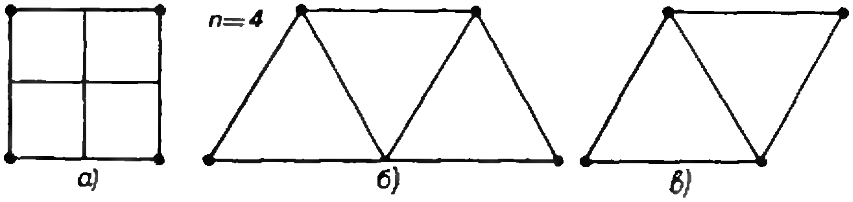


Рис. 14,

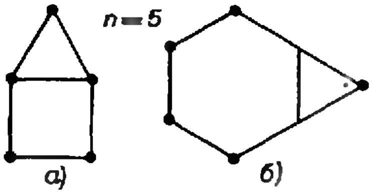


Рис. 15.

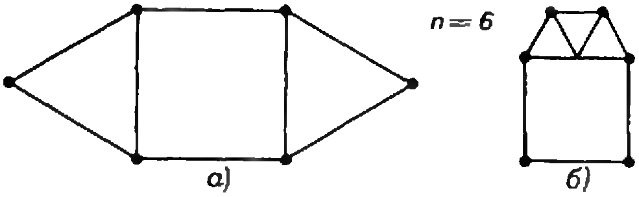


Рис. 16.

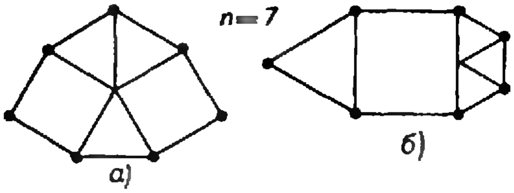


Рис. 17.

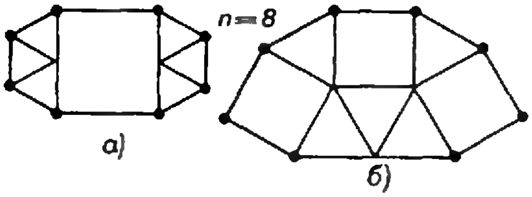


Рис. 18.

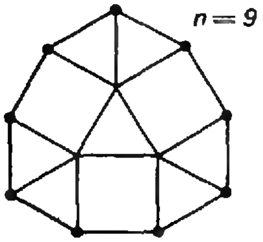


Рис. 19.

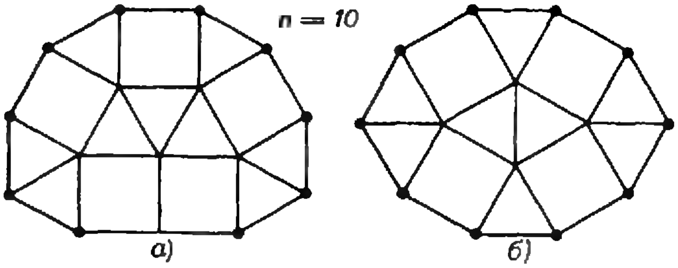


Рис. 20.

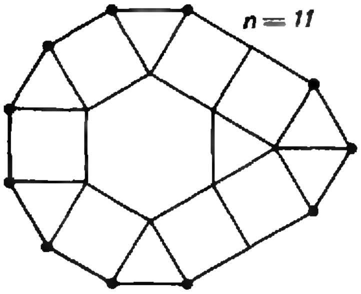


Рис. 21.

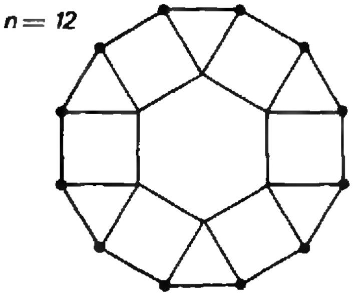


Рис. 22.

$n = 5$, $k = 3$; $n = 6$, $k = 2$; $n = 9$, $k = 1$. Ни одно из них нам не подходит (у нас $k > 4$ и $k \neq 6$). Полученное противоречие доказывает утверждение 6°: *все многоугольники разбиения, лежащие внутри $\triangle ABC$, являются треугольниками.*

7°. Докажем, что *если среди хороших многоугольников найдется пятиугольник, то M имеет не более девяти сторон* (*то есть* $n \leqslant 9$).

В самом деле, если $A_1 \neq B_1 \neq C$, то у M углы при вершинах A_1 и B_1 равны по величине 120° (в вершинах A_1

и B_1 сходятся треугольники — один или два; ни при A_1, ни при B_1 быть не может, поскольку в этом случае сумма величин внешних углов при вершинах A_1 и B_1 равна либо $360° - 2 \cdot 60° = 240°$, либо $360° - 60° - 120° = 180°$, а она должна быть строго меньше 180°). Так как многоугольник M — выпуклый, это означает, что отрезок $[A_1B_1]$ является его стороной.

Таким образом, если в разбиении многоугольника M участвует хороший пятиугольник, то не более чем к двум сторонам этого пятиугольника может примыкать многоугольник, причем это либо правильный треугольник, либо равнобедренная трапеция (рис. 12). Из этого следует утверждение 7°.

8°. Докажем теперь, что *если выпуклый многоугольник M можно разбить на правильные многоугольники, то он имеет не более двенадцати сторон* (то есть $n \leqslant 12$). Предположим противное: пусть $n > 12$. Тогда из пунктов 3° и 7° следует, что среди хороших многоугольников, участвующих в разбиении многоугольника M, есть только треугольники и квадраты. Поэтому величина каждого его угла имеет вид $90°k + 60°m$ ($k \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, $k \in N$, $m \in N$) и делится на 30; поскольку $90°k + 60°m < 180°$, величина каждого угла M не больше 150°. Следовательно, величина каждого его внешнего угла не меньше 30°, и тогда сумма всех его внешних углов не меньше $13 \cdot 30 > 360°$ — противоречие.

Примеры разбиений многоугольников с тремя, четырьмя, ..., двенадцатью сторонами приведены на рисунках 13—22.

С. Миронов

◆

Ф493. *Какое влияние оказывает Луна на траекторию движения Земли вокруг Солнца?*

Как известно, под действием сил притяжения Луна и Земля вращаются вокруг некоторой точки P (рис. 23). Центр Луны движется по окружности радиуса $r_Л \approx 380\,000$ км, а центр Земли — по окружности радиуса $r_З \approx 4700$ км. Под действием силы притяжения Солнца система Земля — Луна вращается вокруг Солнца. При этом точка P движется по окружности радиуса $R_0 \approx 150 \cdot 10^6$ км.

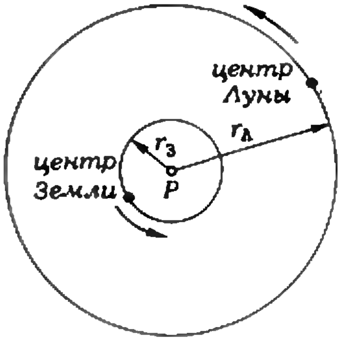


Рис. 23.

При различных положениях Луны центр Земли находится то с одной стороны от траектории точки P, то с другой. При движении вокруг Солнца Земля «качается» около окружности радиуса R_0. При этом максимальное отклонение центра Земли от центра Солнца равно $R_0 + r_З$, а минимальное отклонение равно $R_0 - r_З$.

Луна совершает полный оборот вокруг Земли за время $T_Л = 27$ суток 7 часов 43 минуты 11 секунд ($\approx 27{,}322$ суток). За это же время Земля делает один оборот вокруг точки P. Центр Земли проходит при этом путь $S = 2\pi r_З \approx 29\,500$ км, и его линейная скорость $v = S/T_Л \approx 12{,}5$ м/с немного превышает рекордную скорость человека (≈ 10 м/с). Линейная скорость орбитального движения точки P равна $V \approx 30$ км/с.

Участок траектории, проходимый точкой P за сравнительно небольшое время, можно считать прямолинейным. (За одни сутки радиус-вектор точки P поворачивается на угол $\alpha \approx \frac{2\pi}{365} \approx 0{,}99°$, и дугу, проходимую точкой P, можно считать отрезком прямой.) Иными словами, скорость точки P в течение небольшого промежутка времени можно считать постоянной по направлению. В течение малого промежутка времени проекцию скорости v на направление движения по основной траектории можно записать в виде $v_0 = v \sin(\omega t + \varphi_0)$, где частота вращения $\omega = v/r_З$, а начальная фаза φ_0 связана лишь с выбором начала отсчета времени t. Модуль скорости центра Земли относительно Солнца за малый промежуток време-

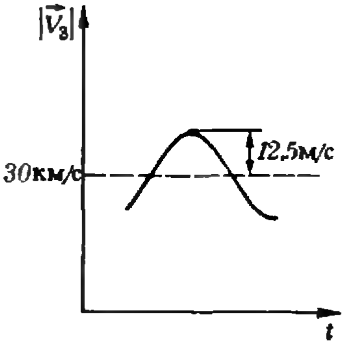


Рис. 24.

ии меняется тоже по синусоидальному закону (рис. 24):

$$\left|\vec{V}_{\text{З}}\right| = V + v_0 = V + v\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом, в течение малого промежутка времени траектория движения Земли вокруг Солнца представляет собой синусоиду (участок синусоиды). Всю же траекторию Земли за время полного оборота точки P вокруг Солнца приближенно можно представить как следующие друг за другом последовательные участки синусоиды, «согнутые» в окружность. Число колебаний, совершаемых Землей около основной траектории за один год, равно, очевидно, 1 год$/T_{\text{Л}} \approx 13{,}5$. Так что через год центр Земли попадает уже не в «прошлогоднее» положение.

Мы видим, что в движении Земли, если говорить точно, нет повторяемости, то есть для движения Земли вокруг Солнца нельзя ввести понятия периода обращения. С математической точки зрения периодично движение системы Земля — Луна как целого.

На рисунке 25 схематически представлена траектория движения центра Земли вокруг Солнца.

А. Дозоров

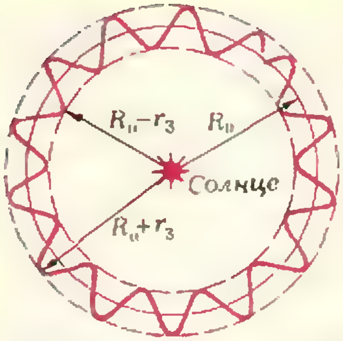


Рис. 25.

◆

Ф494. *В схеме, изображенной на рисунке 26, $R_2=90$ Ом, $R_3=300$ Ом, $R_4=60$ Ом, $L_2=90$ Г. Каковы значения R_1 и L_1, если через гальванометр G ток не идет независимо от того, подключен к клеммам a и b источник постоянного или переменного тока?*

Тот факт, что через гальванометр не идет ток, означает, что потенциалы и их фазы в точках c и d одинаковы. Следовательно, $u_{cn}=u_{dn}$, $u_{cm}=u_{dm}$ и $\dfrac{u_{cn}}{u_{cm}}=\dfrac{u_{dn}}{u_{dm}}$. Так как отношение падений напряжения на последовательных участках цепи пропорционально отношению полных сопротивлений этих участков, то

$$\frac{R_3}{\sqrt{R_1^2+\omega^2L_1^2}}=\frac{R_4}{\sqrt{R_2^2+\omega^2L_2^2}},$$

или

$$R_1^2R_4^2-R_2^2R_3^2+\omega^2\left(L_1^2R_4^2-L_2^2R_3^2\right)=0.$$

Это равенство должно выполняться при любых значениях ω. Значит, коэффициент при ω^2 должен быть равен нулю, то есть

$$L_1^2R_4^2-L_2^2R_3^2=0,$$

и следовательно,

$$R_1^2R_4^2-R_2^2R_3^2=0.$$

(Нетрудно проверить, что в этом случае $\dfrac{L_1}{R_1}=\dfrac{L_2}{R_2}$, так что фазы потенциалов в точках c и d одинаковы.)

Из последних уравнений находим:

$$L_1=L_2\frac{R_3}{R_4}=450\ \text{Г},$$

$$R_1=\frac{R_2R_3}{R_4}=450\ \text{Ом}.$$

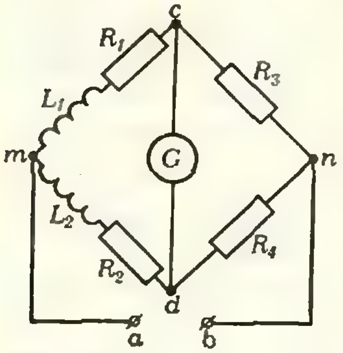


Рис. 26.

◆

Ф495. *Три несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1, ρ_2 и ρ_3 заполняют замкнутую тонкую цилиндрическую трубку, образующую кольцо, плоскость которого вертикальна.*

Давление внутри трубки в точках A и B одинаково; одинаково и давление в точках C и D. Это означает, что

$$\rho_1gh_1=\rho_2gh_2+\rho_3gh_3.$$

Но $h_3=h_1-h_2$. Используя это соотношение, получим

$$(\rho_1-\rho_3)\,h_1=(\rho_2-\rho_3)\,h_2. \qquad (1)$$

(рис. 27). Жидкость с плотностью ρ_1 заполняет дугу кольца с углом α_1, жидкость с плотностью ρ_2 — дугу с углом α_2. Какой угол α образует с вертикалью радиус кольца, проведенный к границе этих жидкостей? Поверхностными эффектами пренебречь.

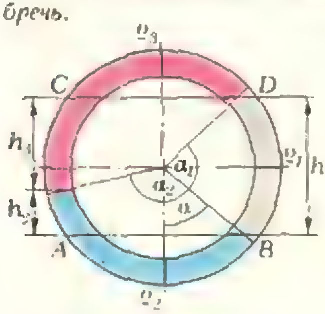


Рис. 27.

Ф496. *В цилиндрический конденсатор в точке A впускается слегка расходящийся пучок положительных ионов с малым углом раствора α (рис. 28). Все ионы в пучке имеют одинаковую энергию. Те ионы, у которых вектор скорости в точке A направлен перпендикулярно AO, движутся по окружности радиуса $AO = r_0$, концентрической с обкладками конденсатора. Доказать, что пучок ионов будет фокусироваться в точке B такой, что $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$. Определить максимальную ширину пучка.*

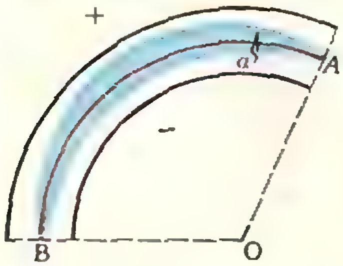


Рис. 28.

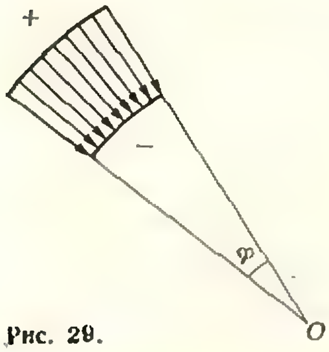


Рис. 29.

Из рисунка видно: $h_1 = R\cos\alpha + R\cos(\pi - \alpha - \alpha_1) = R[\cos\alpha - \cos(\alpha + \alpha_1)]$ и $h_2 = R\cos\alpha - R\cos(\alpha_2 - \alpha)$, где R — радиус кольца. Подставляя эти выражения для h_1 и h_2 в равенство (1), найдем

$$(\rho_1 - \rho_3)[\cos\alpha - \cos\alpha\cos\alpha_1 + \sin\alpha\sin\alpha_1] = (\rho_2 - \rho_3)[\cos\alpha - \cos\alpha_2\cos\alpha - \sin\alpha_2\sin\alpha],$$

или

$$(\rho_1 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_1 + \sin\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha) = (\rho_2 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_2 - \sin\alpha_2 \operatorname{tg}\alpha).$$

Решая это уравнение, найдем

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\rho_1 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_1) - (\rho_2 - \rho_3)(1 - \cos\alpha_2)}{(\rho_1 - \rho_3)\sin\alpha_1 + (\rho_2 - \rho_3)\sin\alpha_2}.$$

◆

Для того чтобы можно было изучить движение ионов, необходимо прежде всего выяснить, какая сила действует на ион в электростатическом поле цилиндрического конденсатора, то есть выяснить, какова напряженность электростатического поля конденсатора.

Напряженность поля пропорциональна плотности силовых линий. Если через дугу с единичным углом проходит n силовых линий, то через дугу с углом φ проходит $N = n\varphi$ силовых линий. Плотность силовых линий, пересекающих дугу радиуса r, равна отношению числа N к длине $r\varphi$ дуги, то есть равна $\frac{n}{r}$ (рис. 29).

Следовательно, напряженность поля конденсатора пропорциональна $\frac{1}{r}$:

$$E = \frac{b}{r}, \quad b = \text{const}.$$

В таком поле на заряд q, находящийся на расстоянии r от оси конденсатора, действует сила $\vec{F}$ такая, что

$$|\vec{F}| = \frac{bq}{r}.$$

Эта сила сообщает заряду ускорение $\vec{a}$, равное по модулю

$$|\vec{a}| = \frac{bq}{rm},$$

где m — масса заряда.

Обозначим x отклонение иона от основной траектории радиуса r_0 (эта траектория показана на рисунке 28 красной линией). Тогда $r = r_0 + x$, и

$$|\vec{a}| = \frac{bq}{m(r_0 + x)}.$$

Рассмотрим движение этого иона в системе отсчета, вращающейся вокруг оси конденсатора так, что угловая скорость ее в каждый момент равна угловой скорости ω отклонившегося иона. В этой системе ускорение уже не равно $\vec{a}$, так как все точки системы тоже движутся с некоторым ускорением относительно неподвижной системы отсчета, связанной с осью конденсатора. Точка, находящаяся на расстоянии $r_0 + x$ от оси, движется с центростремительным ускорением $|\vec{a}_{\text{ц}}| = \omega^2(r_0 + x)$.

Следовательно, во вращающейся системе отсчета ускорение иона равно

$$|\vec{a}_{\text{отн}}| = -|\vec{a}| + |\vec{a}_{\text{ц}}| = -\frac{bq}{m(r_0+x)} + \omega^2(r_0+x).$$

Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m(r_0+x)^2\omega = mr_0^2\omega_0,$$

где ω_0—угловая скорость иона в точке A. Она же равна и угловой скорости иона, движущегося по «красной» траектории. Но центростремительное ускорение $|\vec{a}_0| = \omega_0^2 r_0$ иону, движущемуся по «красной» траектории радиуса r_0, сообщает сила $\vec{F}$, равная по модулю $\frac{bq}{r_0}$, поэтому

$$\omega_0^2 r_0 = \frac{bq}{mr_0}, \quad \text{и} \quad \omega_0^2 = \frac{bq}{mr_0^2}.$$

Таким образом,

$$|\vec{a}_{\text{отн}}| = -\frac{bq}{m(r_0+x)} + \frac{bq}{mr_0^2}(r_0+x)\frac{r_0^4}{(r_0+x)^4} =$$

$$= \frac{bq\left[r_0^2-(r_0+x)^2\right]}{m(r_0+x)^3} = \frac{bq\left(-2r_0x-x^2\right)}{m(r_0+x)^3}.$$

При $x \ll r_0$

$$|\vec{a}_{\text{отн}}| = -2\frac{bq}{mr_0^2}x.$$

Мы видим, что

$$m|\vec{a}_{\text{отн}}| = -kx, \text{ где } k = 2\frac{bq}{r_0^2}.$$

Как известно, при такой зависимости ускорения тела от смещения тело совершает гармонические колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Следовательно, ионы пучка, скорость которых в точке A составляет малый угол α со скоростью ионов, движущихся по основной траектории, будут совершать относительно основной траектории радиальные гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}}.$$

Этот период одинаков для всех ионов. Значит, после того как ионы попадают в конденсатор в точке A через времена $t_n = n\frac{T}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, все ионы будут оказываться в одной и той же точке основной траектории — будут фокусироваться. Нетрудно найти угол φ_0 между двумя последовательными фокусами:

$$\varphi_0 = \omega_0 t = \omega_0\frac{T}{2} = \sqrt{\frac{bq}{mr_0^2}}\cdot\pi\sqrt{\frac{mr_0^2}{2bq}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, если $\widehat{AOB} = \pi/\sqrt{2}$, то ионы будут фокусироваться в точке B.

Найдем теперь максимальную ширину пучка. Для этого воспользуемся тем, что максимальное абсолютное значение скорости тела, совершающего гармонические колебания, и амплитуда $x_{\max}$ его колебаний связаны соотношением

$$\left|\vec{v}\right|_{\max} = x_{\max}\Omega,$$

где $\Omega = 2\pi/T$ — частота колебаний. В нашем случае $\left|\vec{v}\right|_{\max}$ равно значению радиальной проекции скорости в точке A иона (рис. 30):

$$\left|\vec{v}\right|_{\max} = \left|\vec{v}_0\right| \sin\frac{\alpha}{2} = \omega r_0 \sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{2}\,\omega r_0 \alpha$$

(так как α мало, $\sin\frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$). Поэтому

$$\frac{1}{2}\,\omega r_0 \alpha = x_{\max}\frac{2\pi}{T}.$$

Следовательно, максимальная ширина d пучка равна

$$d = 2x_{\max} = \frac{\omega r_0 \alpha T}{2\pi} = \frac{r_0\alpha}{\sqrt{2}}.$$

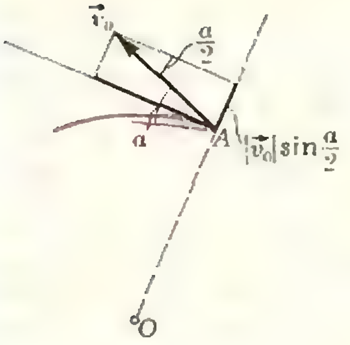


Рис. 30.

◆

Ф497. *Диск радиуса r, вращающийся с угловой скоростью ω, бросают со скоростью $\vec{v}$ под углом α к горизонту. Плоскость диска во время его движения остается вертикальной. Найти радиус кривизны траектории самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема.*

В тот момент, когда диск достигнет максимальной высоты своего подъема, скорость центра диска будет направлена горизонтально и ее абсолютное значение будет равно $|\vec{v}|\cos\alpha$. Так как диск вращается вокруг своего центра с угловой скоростью ω, линейная скорость точек края диска в системе координат, движущейся горизонтально с той же скоростью, что и центр диска, равна ωr, а их ускорение равно по модулю $\omega^2 r$ и направлено к центру диска. В системе координат, связанной с землей, скорость $\vec{u}$ самой верхней точки диска в тот момент, когда диск достигает максимальной высоты подъема, направлена горизонтально, и $|\vec{u}| = |\vec{v}|\cos\alpha + \omega r$. Ускорение $\vec{a}$ этой точки в этот момент направлено вертикально, и $|\vec{a}| = \omega^2 r + |\vec{g}|$. Следовательно, в этот момент точка движется по круговой траектории, радиус которой определяется соотношением

$$\left|\vec{a}\right| = \frac{u^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{u^2}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left(\left|\vec{v}\right|\cos\alpha + \omega r\right)^2}{\omega^2 r + \left|\vec{g}\right|}.$$

И. Слободецкий

А. Звонкин

Когда существует предел?

Долгие годы мировой рекорд в беге на 100м держался на уровне 10,1с. Многие даже считали, что улучшить его невозможно. Но жизнь опровергла пессимистов: сначала стометровку пробежали за 10,0с, потом — за 9,9с. «Да есть ли вообще предел у рекордов?» — писали взволнованные спортивные комментаторы.

Бедные комментаторы! Они не знали теоремы Вейерштрасса — иначе ответ был бы им очевиден.

Монотонность

Про некоторую последовательность (β_n) один школьник написал в контрольной, что она — «неубывающая», а другой — что она «не убывающая». Ответ одного из школьников учитель признал правильным, а другого — неправильным. Как это могло случиться? Поскольку по правилам грамматики частицу «не» можно писать с причастием как слитно, так и раздельно — дело, конечно, в математике. Кто же из школьников прав? Оказывается... впрочем, подождем с ответом.

В п. 31 учебника «Алгебра и начала анализа 9»*) даются определения *возрастающей*, *убывающей*, *невозрастающей*, *неубывающей* и *монотонной* последовательности. Если возрастающие и убывающие последовательности объединить под названием *строго монотонных*, шесть перечисленных свойств будут находиться в логической взаимозависимости, указанной на рисунках 1 и 2.

Если последовательность (x_n) действительных чисел представить себе в виде точки, которая совершает прыжки по числовой прямой, занимая по счету «раз!», «два!», «три!», ... положения x_1, x_2, x_3, ... , то строго монотонными будут те последовательности, которые всегда прыгают в одну сторону (убывающие — налево, возрастающие — направо), а монотонными — те, которые либо прыгают в одну сторону, либо стоят на месте (например, невозрастающие последовательности прыгают налево или стоят на месте). Монотонной последовательности из бесконечного количества прыжков запрещается хотя бы два сделать в разные стороны.

Упражнения

1. Докажите, что последовательность (x_n) тогда и только тогда является одновременно невозрастающей и неубывающей, когда она—постоянная (п. 19).

2 Докажите, что последовательность не может быть одновременно возрастающей и убывающей.

Глядя на рисунок 2, легко сообразить, что из двух школьников, упомянутых в начале раздела, прав второй (если бы прав был первый, т. е. если бы последовательность (β_n) была неубывающей, то тогда был бы прав и второй — она была бы и «не убывающей», а сказано, что прав только один из них). Таким образом, поскольку первый не прав, последовательность (β_n) — либо вообще не монотонная, либо невозрастающая, но не постоянная и не убывающая.

Упражнения

3. Приведите пример невозрастающей последовательности, не являющейся ни убывающей, ни постоянной.

4. Пусть f — возрастающая (п. 36) числовая функция (п. 34). Зададим последовательность (x_n) равенствами:

$$\begin{cases} x_1 = a, \\ x_n = f(x_{n-1}) \end{cases}$$

(a — некоторое число). Докажите, что если $x_2 > x_1$, то последовательность (x_n) — возрастающая, а если $x_2 < x_1$, то — убывающая.

---

*) В дальнейшем все ссылки — на эту книгу.

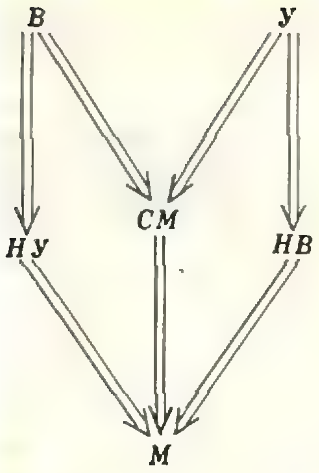


Рис. 1.

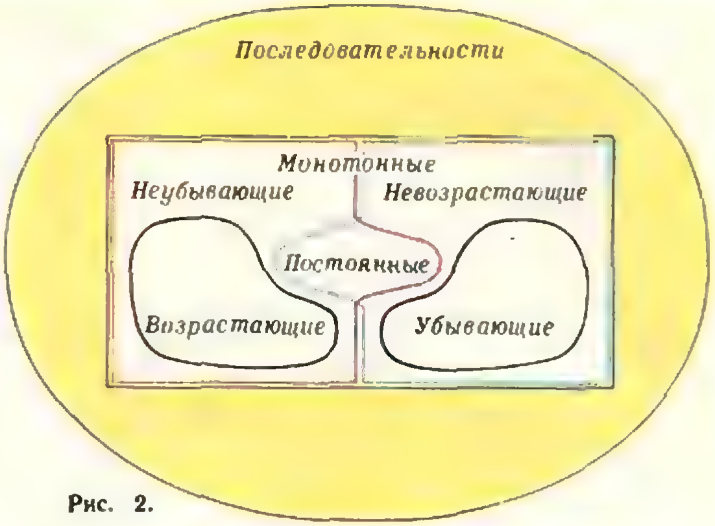


Рис. 2.

Ограниченность

К понятию *ограниченной* последовательности, введенному в учебнике (п. 26), полезно добавить еще два: последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M, что для всех n

$$x_n \leqslant M;$$

последовательность (x_n) называется *ограниченной снизу*, если существует такое число m, что для всех n

$$x_n \geqslant m.$$

Очевидно, последовательность (x_n) тогда и только тогда является ограниченной, когда она ограничена сверху и снизу.

Упражнения

5. Приведите четыре примера последовательностей: ограниченной сверху, но не снизу; ограниченной снизу, но не сверху; не ограниченной ни снизу, ни сверху; ограниченной и снизу, и сверху.

6. Докажите, что любая неубывающая последовательность ограничена снизу, любая невозрастающая — сверху.

Существование предела

В учебнике доказывается, что *если последовательность имеет предел, то она ограничена* (п. 26). Следовательно, *если последовательность не ограничена, то она предела не имеет.*

Кроме того, в учебнике формулируется упомянутая в начале статьи теорема Вейерштрасса: *если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел* (п. 32).

Ситуация станет более ясной, если мы изобразим ее в виде таблицы. Любая последовательность обладает (знак + в таблице ниже) или не обладает (знак —) каждым из двух свойств, указанных над «входными» столбцами таблицы. Таким образом, возникают четыре возможности. В трех случаях сформулированные выше теоремы позволяют утверждать существование (знак + в «выходном» столбце таблицы) или несуществование (знак —) предела. В четвертом случае (третья строка таблицы) ничего определенного сказать нельзя (см. упр. 7).

Монотонность	Ограниченность	Существование предела
+	+	+
+	—	—
—	+	
—	—	—

Упражнения

7. Приведите пример немонотонной ограниченной последовательности, имеющей предел, и пример немонотонной ограниченной последовательности, не имеющей предела.

8. Докажите, что последовательность

$$x_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$$

не имеет предела.

Теорема Вейерштрасса спасает многие математические рассуждения, которые без нее оказались бы нестрогими. Сравним два рассуждения.

Пример 1. Положим

$$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} \tag{1}$$

(количество радикалов бесконечно). Заметим, что под первым радикалом стоит $2+x$. Решая уравнение

$$x=\sqrt{2+x}, \tag{2}$$

получаем $x=2$.

Пример 2. Положим

$$x=1+2+4+8+16+32+\ldots$$

(количество слагаемых бесконечно). Заметим, что

$$\begin{aligned} x &= 1+2+4+8+16+\ldots = \\ &= 1+2(1+2+4+8+\ldots) = \\ &= 1+2x. \end{aligned}$$

Решая уравнение

$$x=1+2x,$$

получаем $x=-1$.

Рассуждения аналогичны, однако во втором примере мы получили явную бессмыслицу. Попробуем спасти (сделать строгим) первое рассуждение. Для этого при помощи понятия предела придадим точный смысл «бесконечному выражению» (1). Рассмотрим последовательность

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{2}, \\ x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}. \end{cases}$$

Под выражением (1) естественно понимать предел этой последовательности, если он существует. Вот тут-то нам и поможет теорема Вейерштрасса. Легко проверить, что для всех n, во-первых, $x_n<2$ (по индукции) и, во-вторых, $x_n>x_{n-1}$ (см. упр. 4). Значит, по теореме Вейерштрасса последовательность (x_n) имеет предел. Таким образом, обозначение x для выражения (1) корректно. Из равенства $x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}$, переходя к пределу, получаем (2). Рассуждение примера 1 спасено *).

Второе рассуждение спасти таким путем невозможно (см. упр. 8).

* * *

Вернемся к началу статьи. Так есть ли предел у рекордов? Казалось бы, все ясно: последовательность рекордов, скажем, в беге на 100м, конечно, убывает (каждый следующий рекорд фиксирует меньшее время) и ограничена снизу (никто никогда не пробежит 100м за 0 секунд); значит, по теореме Вейерштрасса она имеет предел.

На самом деле, в применении математического аппарата к реальной (в данном случае, к спортивной) жизни не все так просто, как это выглядит в предыдущем абзаце. Вот и у нас, конечно же, не все корректно. Что именно? Ожидаем ваших писем.

Задачи

1. Является ли последовательность $x_n=n\cdot\sin n$ $(n\in\mathbb{N})$ ограниченной?

2. Докажите, что последовательность

$$x_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{4n}$$

имеет предел.

3. Докажите, что последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

имеет предел.

4. Докажите, что последовательность

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

не имеет предела.

5. Чему равно число

$$\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots}}}}?$$

---

*) По поводу осмысления «бесконечных выражений» см. также «Квант», 1977, № 10, с. 60.

«Квант» для младших школьников

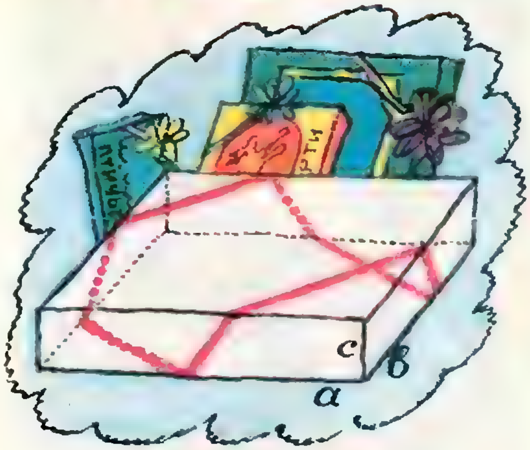
Задачи

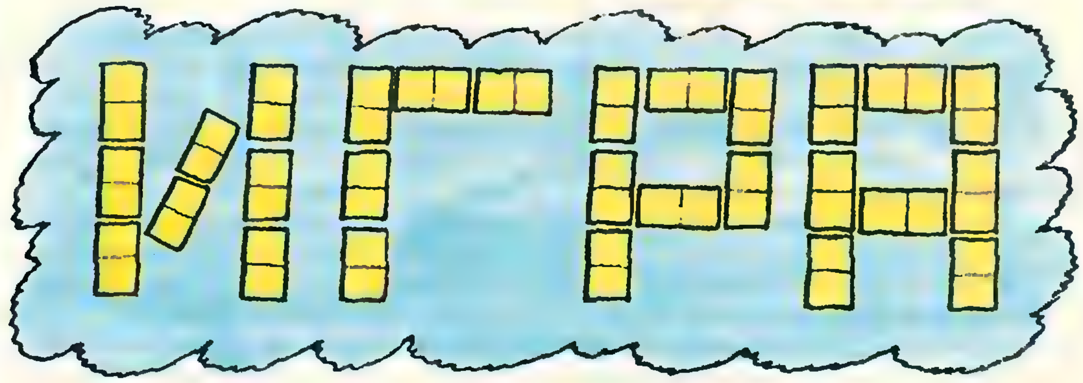
1. Сейчас отцу столько лет, сколько месяцев было сыну, когда отец был старше его в 9 раз. Сколько лет сейчас отцу, если известно, что он старше сына на 26 лет 8 месяцев?

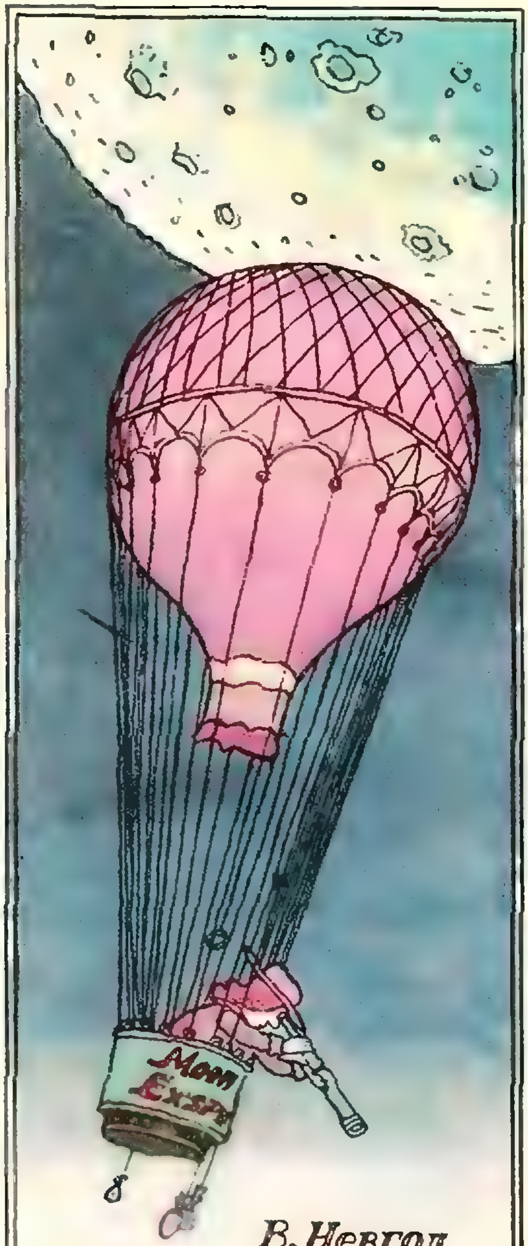
2. Полный комплект косточек домино выложите, как показано на рисунке, так, чтобы косточки соприкасались по правилам домино, и суммы очков в каждой букве были одинаковыми.

3. Коробка конфет имеет форму прямоугольного параллелепипеда (a — длина, b — ширина, c — высота коробки; коробка — не куб!). Какой длины веревочки хватит, чтобы перевязать коробку обычным способом (см. рисунок)?

4. В магазин привезли платья трех разных фасонов и трех разных расцветок. Продавщица хочет выбрать для витрины три платья так, чтобы были представлены все фасоны и все расцветки. Всегда ли она сможет это сделать?







В. Невгод

Приключения Ганса Пфааля и толстяка Пайкрафта

В этой статье обсуждаются две довольно любопытные и поучительные задачи по физике, условия которых взяты из литературных произведений.

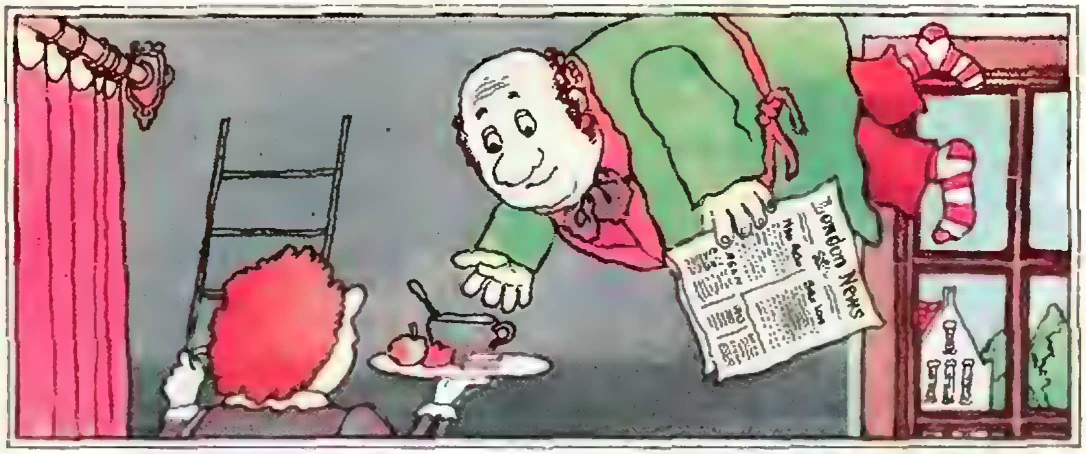
Есть у Эдгара По сравнительно малоизвестный фантастический рассказ «Необыкновенное приключение некоего Ганса Пфааля». Герой этого рассказа совершил удивительное открытие — получил необыкновенный газ, плотность которого в 37,4 раза меньше плотности водорода. Воздушный шар, наполненный таким газом, обладал невероятной подъемной силой. С его помощью Ганс Пфааль даже сумел добраться до Луны.

То, что газа легче водорода в природе не существует, доказывать не станем — это общеизвестно. (А вы сможете объяснить, почему это невозможно?) Но не лишена интереса задача: если бы такой газ все-таки существовал, во сколько раз увеличил бы он подъемную силу воздушного шара (по сравнению с шаром, наполненным водородом)?

Несмотря на несложность задачи, многие не сразу находят верный ответ. Тут так и напрашивается «логичный» вывод: поскольку газ в 37,4 раза легче водорода, то и подъемная сила его больше во столько же раз. Возможно, на такое поспешное умозаключение читателей и рассчитывал Эдгар По, когда писал свой рассказ. Впрочем, столь же вероятно, что он и сам стал жертвой ошибочного рассуждения, внешне столь логичного.

Однако простейший расчет показывает, что выигрыш в подъемной силе был бы таким ничтожным, что его можно вовсе не принимать во внимание. Проверим это. Для этого найдем подъемную силу воздушного шара, наполненного водородом, и шара, наполненного газом Ганса Пфааля.

Пусть объем воздушного шара равен 1 м^3. Плотность воздуха равна 0,00129 г/см^3, водорода — 0,00009 г/см^3, а газа Ганса Пфааля — 0,0000024 г/см^3. Напомним, что подъемная сила воздушного шара — это разность между выталкивающей силой, равной силе тяжести воздуха, вытесненного шаром, и силой тяжести газа внутри шара (оболочку шара будем считать невесомой). Тогда подъемная сила шара, наполненного водородом, равна приблизительно 12 Н,



а шара с газом Ганса Пфааля — 12,9 Н.

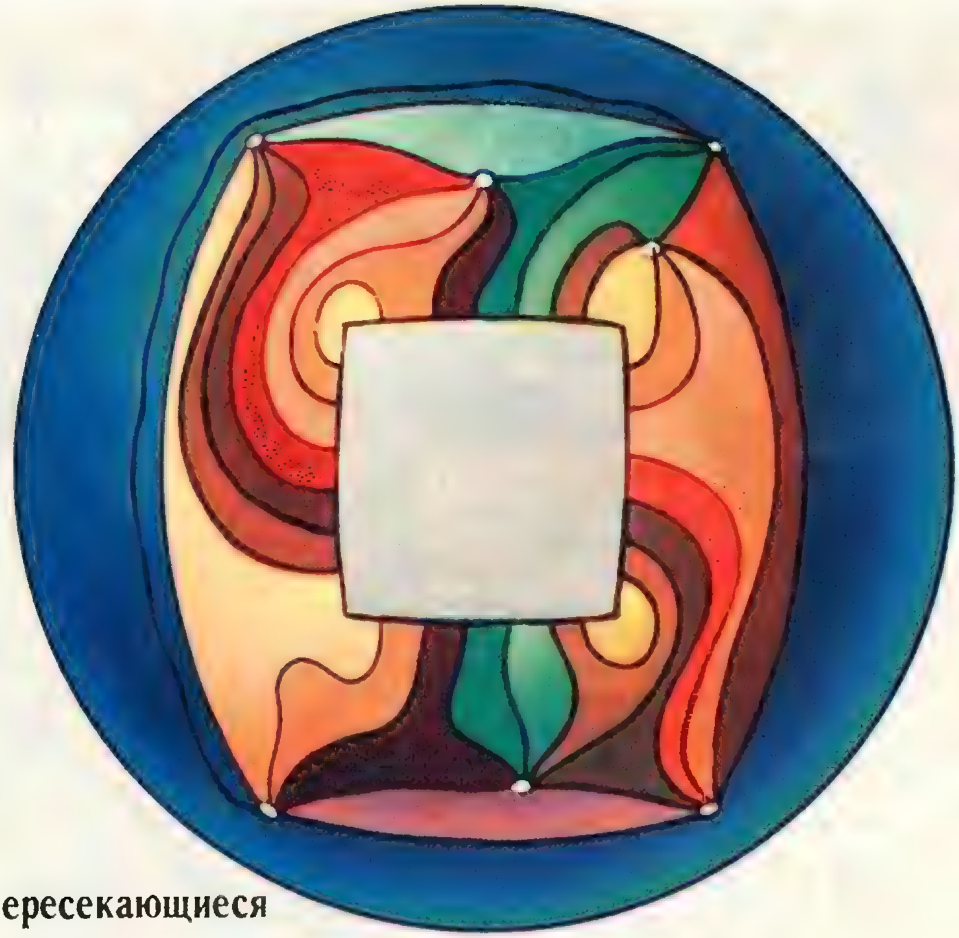
Таким образом, выигрыш в подъемной силе всего-навсего около 0,9 Н! Итог настолько ничтожный, что, очевидно, Гансу Пфаалю (или Эдгару По) не стоило и изобретать чудодейственный сверхлегкий газ, нарушая, к тому же, законы природы. (Справедливости ради заметим, что во времена Эдгара По таблица Менделеева еще не была составлена.) Вся беда — в небольшой силе тяжести водорода. Будь возможен газ даже в тысячи раз легче водорода, он все равно не помог бы существенно увеличить подъемную силу воздушного шара. Предел такого увеличения — те 0,9 Н, которые составляют силу тяжести самого водорода.

Вспомним теперь популярный фантастический рассказ Г. Уэллса «Правда о Пайкрафте». Смешной толстяк Пайкрафт, страстно желая избавиться от лишнего веса, выпил таинственное индийское снадобье — и полностью потерял вес, в самом буквальном смысле! Целыми днями летал он под потолком собственного кабинета, не выходя на улицу, дабы не упорхнуть ввысь, подобно воздушному шару. Так продолжалось до тех пор, пока Пайкрафту не посоветовали заказать себе специальный костюм со свинцовыми прокладками. В таком костюме, в тяжелых свинцовых башмаках и с полным портфелем свинца в руках он, наконец, получил возможность вновь ходить по улицам, как все люди.

Напрашивается вопрос — много ли понадобилось свинца, чтобы Пайкрафт смог спокойно ходить по Земле? Сделаем несложный расчет. Предположим, толстяк Пайкрафт весил 1000 Н (его масса была 100 кг), тогда объем его тела можно считать равным 0,1 м^3. Лишенный веса, Пайкрафт как бы превратился в своеобразный воздушный шар того же объема. «Подъемная» сила его составляла всего около 1,3 Н!

И тут мы видим, как тускнеет нарисованная буйной фантазией писателя картина злоключений невесомого Пайкрафта! Даже в повседневной своей одежде Пайкрафт вовсе не должен был парить под потолком своего кабинета, а мог бы, хотя и не очень устойчиво, сидеть в кресле за письменным столом и даже осторожно ходить по комнате (избегая, правда, резких движений). А свинцовый костюм и свинцовые ботинки ему не понадобились бы вовсе — в обычной одежде, да еще взяв в руки тяжелый портфель, он мог бы ходить по улицам (конечно, остерегаясь сильного ветра!), не опасаясь взлететь в небеса.

Как мы убедились, «летучесть» Пайкрафта и вызванные ею проблемы сильно преувеличены автором. Сомнительно, конечно, чтобы Уэллс не заметил этого, когда писал свой рассказ. Скорее всего, он умышленно игнорировал полученные при расчете данные, чтобы в более ярких и выразительных тонах представить комические злоключения бедного Пайкрафта. При этом автор, видимо, был уверен, что читатели, увлеченные оригинальным вымыслом, так и не заметят допущенных им преувеличений.



Непересекающиеся тропинки

Представьте себе, что вам нужно проложить тропинки, соединяющие попарно k точек, причем сделать это так, чтобы тропинки между собой не пересекались. Для каких k это можно сделать? Как бы вы ни старались, если эти точки лежат на плоскости или на сфере, то больше четырех точек соединить таким образом не удастся. Правда, доказать это строго довольно сложно.

Вот еще похожая задача — про домики и колодцы: нужно соединить три домика и три колодца так, чтобы каждый домик был соединен с каждым колодцем и тропинки не пересекались. Оказывается, этого тоже сделать нельзя (рис. 1, 2).

Но то, что нельзя сделать на плоскости и на сфере, удается осуществить, если точки лежат на других поверхностях. Возьмем, например, тор — так математики называют поверхность бублика. На торе удается попарно соединить даже семь точек. Лег-

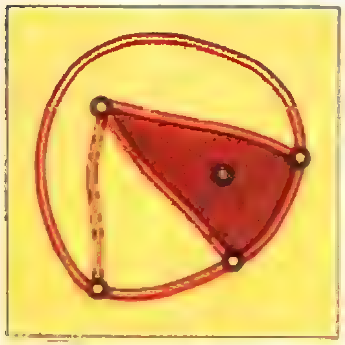


Рис. 1.

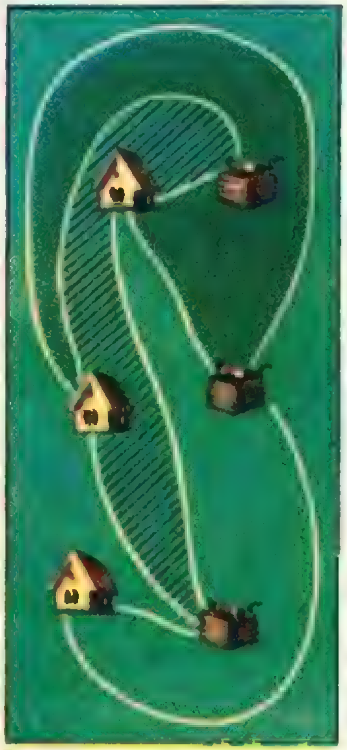


Рис. 2.

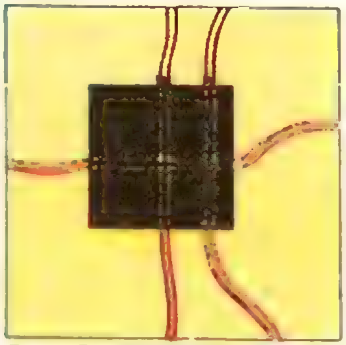


Рис. 3.

ко решить на нем и задачу о домиках и колодцах. Эту вторую задачу сделайте самостоятельно, а первая решена... на первой странице обложки. Вот правила, по которым нарисованы тропинки на обложке. Серый квадрат — это дырка, обладающая волшебным свойством: если тропинка подошла к одной из ее сторон, то после этого она продолжается на противоположной стороне дырки (рис. 3).

Но все-таки, причем здесь тор? Объясним это. Прежде всего заметим, что с точки зрения тропинок не важно, «аккуратный» тор или нет (рис. 4,5). Теперь представьте себе, что рисунок с первой страницы обложки сделан не на синей плоскости, а на синей сфере (см рис. на с. 60 на нем проведена еще одна тропинка, идущая по синей области; на обложке она не показана). Затем из сферы вырезан серый «квадрат», и противоположные стороны образовавшейся дырки склеены. При этом действительно получится тор (рис. 6). И на этом торе семь точек соединены непересекающимися тропинками.

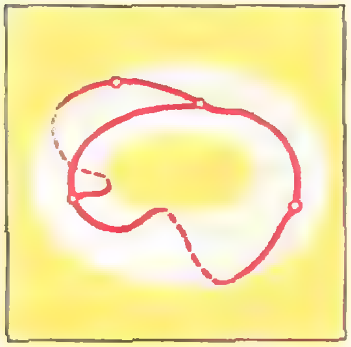


Рис. 4.

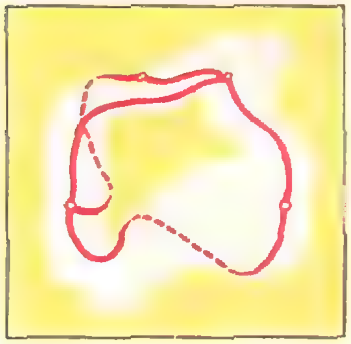


Рис. 5.

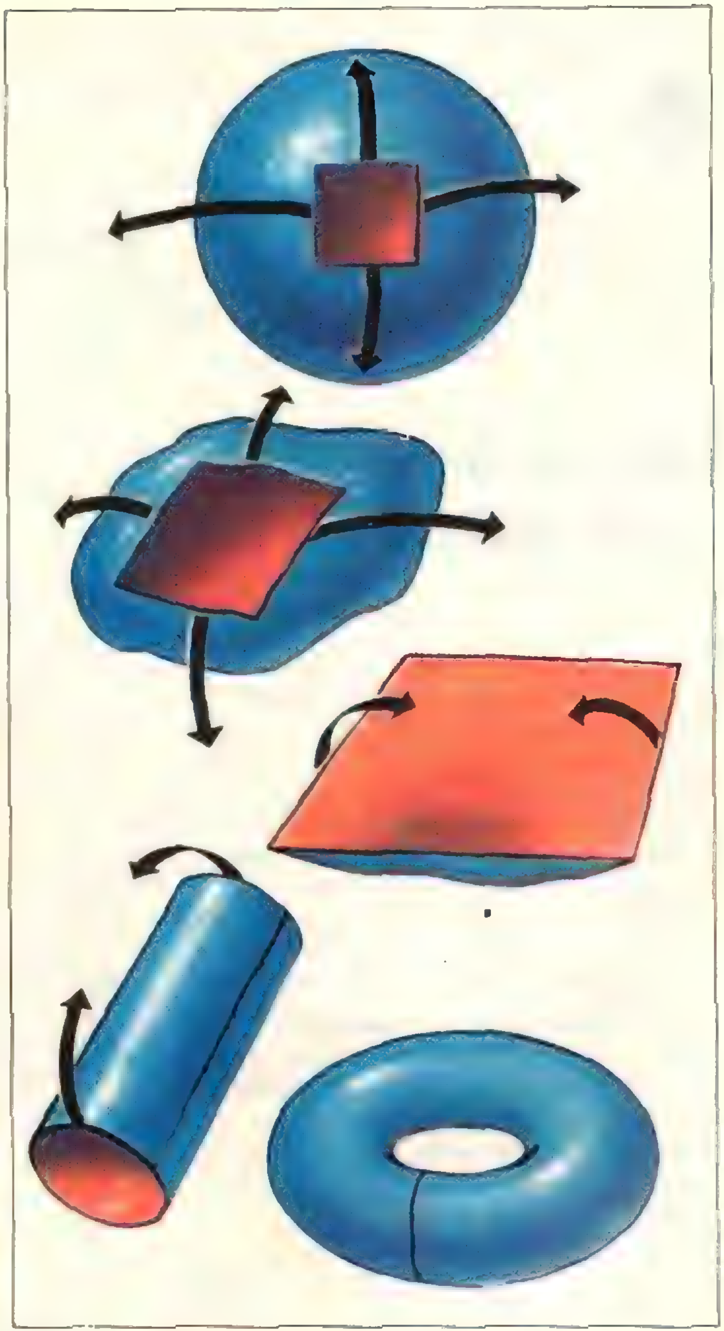


Рис. 6.

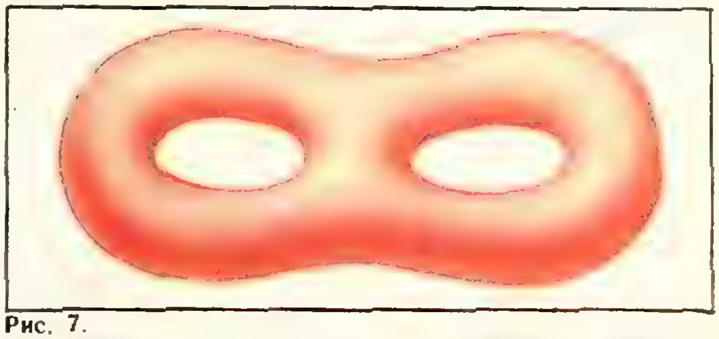


Рис. 7.

Постарайтесь решить на торе задачу про четыре домика и четыре колодца.

Придумайте аналогичные правила рисования на кренделе (рис. 7).

Г. Макаров

Г. Перевалов

Что значит «для любого ε»?

Вот какой случай произошел в прошлом году на вступительном экзамене по математике в одном из вузов.

Об одной ошибке

Абитуриенту Сереже К. досталась теорема о пределе суммы двух сходящихся числовых последовательностей.

«Пусть, — сказал Сережа, — $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тогда для любого положительного числа ε найдется номер n_1 такой, что для всех $n > n_1$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. А так как ε — любое положительное число, то вместо ε можно взять $\frac{\varepsilon}{2}$, и для $n > n_1$ мы получим неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично, найдется номер n_2 такой, что для всех $n > n_2$ будет выполняться неравенство $|y_n - b| < \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, мы и здесь вместо ε возьмем $\frac{\varepsilon}{2}$ и получим для $n > n_2$ неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Наибольшее из чисел n_1 и n_2 обозначим через N. Тогда для всех $n > N$ будут выполняться как неравенство (1), так и неравенство (2), и потому для этих n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ — произвольное число, из полученного неравенства следует, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Теорема доказана».

А Наташе М. была предложена задача: доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n} = 5$.

«Для решения задачи, — сказала Наташа, — надо взять любое положительное число ε и найти номер N такой, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| < \varepsilon. \qquad (3)$$

Так как $\varepsilon > 0$ — любое положительное число, то вместо него возьмем, например, число 0,1. Решаем неравенство

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| < 0{,}1. \qquad (4)$$

Сначала преобразуем выражение под знаком модуля

$$\left|\frac{5n-2}{n} - 5\right| = \left|\frac{5n-2-5n}{n}\right| = \left|\frac{-2}{n}\right| = \frac{2}{n}.$$

Неравенство (4) перепишется в виде

$$\frac{2}{n} < 0{,}1,$$

откуда $n > 20$. Поэтому за N можно взять число 20. Тогда для $n > N = 20$ будет выполняться неравенство (4), а значит, и неравенство (3). Следовательно, число 5 является пределом последовательности $x_n = \frac{5n-2}{n}$, что и требовалось доказать».

И Сережа и Наташа думали, что отвечают правильно. Но экзаменаторы почему-то были недовольны.

Проверьте, пожалуйста, — обращается один из них к Наташе, — будет ли выполняться неравенство (3) для $n > 20$, если $\varepsilon = 0{,}001$? Наташа стала вычислять.

— Возьмем какое-нибудь $n > 20$, например, $n = 21$. Получим

$$|x_{21} - 5| = \left|\frac{5\cdot 21 - 2}{21} - 5\right| = \frac{2}{21} \approx 0{,}09.$$

— Сравните полученное число с числом $\varepsilon = 0{,}001$.

— Число 0,09 больше 0,001, то есть $|x_{21} - 5| > 0{,}001$.

— А это противоречит неравенству (3). В чем дело?

В чем дело?

Наташа считала, что найденный номер $N = 20$ годится для всех $\varepsilon > 0$. А оказалось, что он обеспечивает необходимую «близость» членов последовательности (x_n) к числу 5 только для чисел $\varepsilon \geqslant 0{,}1$. Для чисел же $0 < \varepsilon < 0{,}1$ он уже «мал». Например, для $\varepsilon = 0{,}001$ за номер N можно взять натуральное число 2000. Действительно,

$$|x_{2001} - 5| = \left|\frac{5\cdot 2001 - 2}{2001} - 5\right| = \frac{2}{2001} \approx 0{,}0009,$$

что меньше 0,001. Другими словами, неравенство $|x_n - 5| < 0{,}001$ будет выполняться для всех $n > N = 2000$.

Аналогичную ошибку сделал и Сережа. Ведь номер n_1 или n_2 не может быть, вообще говоря*), одним и тем же и для ε и для $\frac{\varepsilon}{2}$. Откуда взялась ошибка? Из неправильного толкования определения предела последовательности. Напомним его («Алгебра и начала анализа 9», п. 21).

Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (5)$$

Фразу «любое положительное число ε» Сережа и Наташа поняли как «все положительные числа», то есть считали, что для всех положительных чисел существует один номер N такой, что для $n > N$ выполняется неравенство (5).

Что это не так, мы уже видели на примере последовательности $x_n = \frac{5n - 2}{5}$. Для $\varepsilon = 0{,}1$ в качестве номера N годится 20, а для $\varepsilon = 0{,}001$ этот номер уже «мал», для него годится 2000, а для $\varepsilon = 0{,}000001$ — $N = 2\,000\,000$.

Для данной последовательности номер N зависит от числа ε, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ следует находить «свой» номер N такой, что для $n > N$ выполняется неравенство (5). Таким образом, фраза «для любого положительного числа ε найдется N» не означает, что найдется N, пригодное для всех положительных чисел, а только для одного, произвольно взятого из множества всех положительных действительных чисел. ε — это произвольно выбранное число! Поэтому после того, как выбрано N, изменять ε нельзя, как бы нам этого ни хотелось.

Какими должны быть рассуждения Сережи и Наташи

Пусть ε — произвольное положительное число. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ (а не по числу ε!) найдется номер n_1 такой, что для всех $n > n_1$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

Аналогично, так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то по числу $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер n_2, что для $n > n_2$ будет выполняться неравенство

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

Пусть N — наибольшее из чисел n_1 и n_2. Тогда для всех $n > N$ будут выполняться оба неравенства (6) и (7), и потому для этих n

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon,$$

откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) =$

---

*) См. ниже замечание 2.

$= a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Теорема доказана.

Ошибка Наташи заключается в том, что для числа ε она взяла конкретное значение 0,1 и от неравенства (3) перешла к неравенству (4). Ей надо было просто решить неравенство (3), рассматривая ε как параметр. Решая неравенство (3), получим $\frac{2}{n} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{2}{\varepsilon}$. В качестве номера N возьмем какое-нибудь натуральное число не меньшее, чем $\frac{2}{\varepsilon}$, то есть $N \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$. Тогда для всех $n > N$ будет выполняться неравенство (3). Найденный таким образом номер N зависит от ε. Для каждого конкретного значения ε теперь уже легко находится «свой» номер N. Например, для $\varepsilon = 0{,}1$ можно взять $N = 20$, для $\varepsilon = 0{,}001$ — $N = 2000$, и т. д.

Замечание 1. При отыскании номера N нет нужды находить минимальный номер, важно лишь указать какой-нибудь, начиная с которого будет выполняться неравенство (5). Поэтому отыскание его можно производить «грубо», «прикидкой». Покажем это на примере.

Пусть требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^4+16} = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Для отыскания N надо решить неравенство

$$\left|\frac{n^2}{n^4+16} - 0\right| = \frac{n^2}{n^4+16} < \varepsilon. \tag{8}$$

Но это неравенство громоздко. Поэтому делаем прикидку: отбрасываем в знаменателе дроби слагаемое 16, дробь $\frac{n^2}{n^4+16}$ заменяем другой $\frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}$, которая, очевидно, больше первой, и решаем неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon. \tag{9}$$

Отсюда $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Если натуральное число N выбрать больше $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то есть $N \geqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то неравенство (9) будет выполняться для всех $n > N$. Тогда для $n > N$ и подавно будет выполняться неравенство (8). Таким образом, требуемое равенство доказано.

Замечание 2. Не следует, однако, думать, что N обязательно меняется при изменении ε. Например, для постоянных последовательностей выбор номера N вообще не зависит от числа $\varepsilon > 0$. Действительно, пусть $x_n = c$, где c — постоянное число. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$. Докажем это; пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Найдем номер N такой, чтобы для всех $n > N$ выполнялось неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$. Но это неравенство всегда справедливо, так как $|x_n - c| = 0$. Поэтому за число N можно взять любое натуральное число, в частности 1.

Упражнения

1. Докажите, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$.

Найдите N для $\varepsilon = 0{,}1$; 0,05; 0,001; 0,0002.

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2-3n} = -1$.

Найдите N для $\varepsilon = 0{,}5$; 0,04; 0,0001.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+5} = 0$.

2. Найдите пределы следующих последовательностей:

а) $0;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ \ldots;\ 0;\ \frac{1}{n};\ \ldots$

б) $0{,}2;\ 0{,}22;\ 0{,}222;\ \ldots,\ 0{,}\underbrace{22\ldots2}_{n};\ \ldots$

в) $\sin 1^\circ,\ \sin 2^\circ,\ \ldots,\ \sin n^\circ,\ \ldots$

г) $3;\ 3;\ \ldots,\ 3,\ \ldots$

д) $x_n = (-1)^n$.

е) $x_n = \frac{\sin n}{n}$.

ж) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$.

XII Всесоюзная олимпиада школьников

Н. Розов, М. Смолянский

Олимпиада по математике

С 13 по 18 апреля в Ташкенте состоялся заключительный тур XII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 153 школьника: победители республиканских олимпиад и ребята, получившие дипломы I и II степени на заключительном туре XI Всесоюзной олиампиады. В заключительном туре принимала также участие команда учащихся ПТУ (3 человека) — победители олимпиады профессионально-технических училищ Ленинграда — и команда хозяев олимпиады — школьники Ташкента (3 человека).

Всего в заключительном туре соревновались 38 восьмиклассников, 63 девятиклассника и 52 десятиклассника.

Торжественное открытие заключительного тура происходило 13 апреля в актовом зале Президиума Академии наук Узбекской ССР. Председатель оргкомитета заместитель министра просвещения Узбекской ССР В. В. Барыльников поздравил участников заключительного тура олимпиады с началом соревнований. С напутственным словом выступили председатель жюри олимпиады академик А. Н. Колмогоров, заместитель председателя жюри вице-президент АН УзССР, председатель Верховного Совета УзССР академик С. Х. Сираждинов, секретарь ЦК ЛКСМ Узбекистана Ш. Н. Махмудова и другие товарищи.

Участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленина и могиле Неизвестного солдата. Юные математики приняли участие в традиционном коммунистическом субботнике.

Заключительный этап олимпиады проводился в два тура, которые состоялись 14 и 15 апреля.

Ниже мы приводим условия задач по математике, предлагавшихся на XII Всесоюзной олимпиаде.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к $\sqrt{n}$. Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{1980}}.$$

2. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD}=\widehat{BCM}$.

3. Докажите, что ни при каком натуральном m число 1978^m-1 не делится на 1000^m-1.

4. На плоскости задано конечное множество точек K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается через K_1. Аналогично, из множества K_1 получается K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n

найдется точка, находящаяся на расстоянии 1000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n (для каждого $n = 1, 2, \ldots$).

9 класс

1. См. задачу № 1 для 8-го класса.

2. См. задачу № 2 для 8-го класса.

3. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

4. Докажите, что существует бесконечная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ такая, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k| \geqslant \frac{1}{|m-k|}.$$

10 класс

1. Пусть $f(x) = x^3 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального $m > 1$ числа

$$m,\ f(m),\ f(f(m)),\ f(f(f(m))),\ \ldots$$

попарно взаимно просты.

2. Докажите, что существует такое число A, что в график функции $y = A \sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

3. Пусть K_0 — множество из четырех точек, являющихся вершинами правильного тетраэдра единичного объема. К множеству K_0 добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается через K_1. Аналогично из множества K_1 получается множество K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

б) Чему равен объем этого многогранника?

в) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n (при каждом $n = 2, 3, \ldots$).

4. См. задачу № 4 для 9-го класса.

Второй день

8 класс

5. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1;\ b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ (он работает только, когда a и b четные); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку а) $(1; 50)$? б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

6. В окружность радиуса R вписан n-угольник площади S. На каждой стороне n-угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n-угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.

7. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выиграет, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

8. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков, так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

9 класс

5. См. задачу № 5 для 8-го класса.

6. См. задачу № 6 для 8-го класса.

7. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

8. Дано простое число $p > 3$. Рассмотрим на координатной плоскости множество M, состоящее из таких точек с целыми координатами $(x; y)$, что $0 \leqslant x < p$, $0 \leqslant y < p$. Докажите, что можно отметить p различных точек множества M так, чтобы никакие четыре из них не лежали в вершинах параллелограмма и никакие три из них не лежали на одной прямой.

10 класс

5. См. задачу № 5 для 8-го класса.

6. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

7. Рассмотрим n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Положим

$$b_k = \frac{a_1 + \ldots + a_k}{k} \text{ (для } k = 1, 2, \ldots),$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_n - b_n)^2,$$
$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \ldots$$
$$\ldots + (a_n - b_n)^2.$$

Докажите неравенства $C \leqslant D \leqslant 2C$.

8. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n \sqrt{2} + s_n \sqrt{3} + t_n \sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

9. См. задачу № 8 для 9-го класса.

Таблица

8 класс

Результаты	1	2	3	4а	4б	5а	5б	5в	6	7а	7б	8
+	15	2	1	26	2	24	17	4	7	4	2	4
±	8	0	0	5	9	0	3	12	0	1	1	1
∓	2	0	0	0	5	0	2	4	1	1	2	2

9 класс

Результаты	1	2	3а	3б	4	5	6	7	8
+	44	9	17	2	0	23	23	9	6
±	13	0	2	2	0	14	1	1	0
∓	0	1	1	3	5	11	1	4	1

10 класс

Результаты	1	2	3а	3б	3в	4	5	6	7	8	9
+	42	12	29	11	1	1	23	5	6	11	2
±	2	4	2	3	2	0	11	1	2	7	0
∓	0	2	4	9	1	17	2	5	4	9	0

Как участники соревнования справились с этими задачами, видно из приведенной таблицы. К сожалению, некоторые задачи оказались довольно трудными. Так, у восьмиклассников с задачей № 2 справились только два школьника, с задачей № 3 — один школьник и с задачей № 8 — четыре школьника.

Никто из девятиклассников не решил задачи № 4 и только два человека полностью решили задачу № 3б.

Среди десятиклассников задачи №№ 3в и 4 полностью решили толь-

Восьмиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Ю. Ткаченко, А. Балинский, А. Разборов, А. Боричев.

В. Синцов, награжденный специальным призом нашего журнала.

Девятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): С. Хлебутин, И. Рудковский, И. Лысенок, И. Захаревич.

ко по одному участнику, а задачу № 9 — два школьника.

А ведь в заключительном туре приняли участие школьники-победители республиканских олимпиад, то есть «математический цвет».

Нужно отметить большой и заслуженный успех школьников из Москвы и ФМШ № 18 при МГУ. Они получили все дипломы I степени по 10 классам, 2 диплома I степени по 9 классам (из 4-х) и 1 диплом I степени по 8 классам (из 4-х), а также много дипломов 2 и 3 степени по всем классам.

Тот, кто внимательно следит за проведением Всесоюзных олимпиад, сразу заметит, что в этом году, в отличие от прошлых лет, оба тура заключительного этапа олимпиады проходили подряд (14 и 15 апреля). При таком порядке проведения соревнований возникает ряд трудностей. Разбор всех задач, проводимый жюри с участниками заключительного тура, прошел мало продуктивно. Трудно и утомительно и для членов жюри, и для слушателей внимательно следить за разбором 12—13 сложных задач. К недостаткам проведения олимпиады следует отнести и то, что у членов жюри практически не было времени для встреч со школьниками. А ведь эти встречи являются чрезвычайно важным элементом олимпиады.

Очень живо и интересно в этом году прошла встреча участников заключительного тура с редколлегией нашего журнала. На встрече присутствовал академик А. Н. Колмогоров. Зам. главного редактора журнала М. Л. Смолянский рассказал участникам встречи о творческих планах редакции, о статьях, которые будут напечатаны в ближайших номерах журнала, а затем члены редколлегии А. Н. Колмогоров, В. Г. Болтянский, Л. Г. Макар-Лиманов, Н. Х. Розов, А. П. Савин рассказали о различных статьях журнала и предложили участникам ряд интересных задач для самостоятельного решения.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 18 апреля в актовом зале Ташкентского педагогического института им. Низами. Заместитель председателя жюри Н. Х. Розов зачитал решение жюри. По итогам соревнований участникам заключи-

Десятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): В. Гальперин, В. Книжник, И. Лихтинен.

тельного этапа XII Всесоюзной олимпиады было присуждено 11 дипломов первой степени (4 диплома по 8 классам, 4 диплома по 9 классам и 3 диплома по 10 классам), 32 диплома второй степени (11 — по 8 классам, 10 — по 9 классам и 11 — по 10 классам) и 24 диплома третьей степени (4 — по 8 классам, 9 — по 9 классам, 11 — по 10 классам); кроме того, 80 участников были награждены похвальными отзывами.

Имена победителей мы публикуем на с. 82.

Особо отмечая успешное выступление на олимпиаде школьников из города Ангарска, жюри присудило Ангарскому городскому отделу народного образования специальный приз.

Многие участники получили специальные призы, установленные различными организациями и предприятиями Узбекистана.

Специальным призом журнала «Квант» был награжден ученик 8 класса *Вадим Синцов* (пос. Комсомольский Тюменской области).

За успехи в олиампиаде годовой подпиской на 1979 год на журнал «Квант» награждены:

учащиеся 8 классов:

1. *Братченко Светлана* (Краснодарский край);
2. *Лучко Юрий* (Гродненская обл.);
3. *Файсман Александр* (Ташкент);

учащиеся 9 классов:

4. *Абдуганиев Абдували* (Ташкентская обл.);
5. *Ирматов Анвар* (Наманган);
6. *Щербаков Сергей* (Ленинград).

В этом году олимпиада была организована очень хорошо. Ребята ездили на экскурсии, ходили в театры, участвовали в коммунистическом субботнике. Необходимо отметить большую работу по организации олимпиады, проведенную работниками органов народного образования и математиками Узбекистана. За отличное проведение олимпиады редколлегия журнала наградила годовой подпиской на «Квант» заместителя председателя жюри олимпиады вице-президента АН УзССР академика С. Х. Сираждинова, республиканскую школу-интернат юных математиков и физиков Ташкента (директор С. А. Атаметов), заместителя председателя жюри Т. А. Азларова и члена оргкомитета А. Б. Воронову.

Подводя итоги олимпиады, хотелось бы остановиться на некоторых вопросах, требующих своего разрешения. Представители профессионально-технических училищ зарекомендовали себя как полноправные участники олимпиады. Поэтому было бы естественно, чтобы министерство просвещения СССР и Государственный Комитет Совета Министров СССР по профессионально-техническому образованию установили официальный статут участия в олимпиаде команды профессионально-технических училищ подобно тому, как это сделано для учащихся школ Министерства путей сообщения СССР.

Более тщательного планирования требует учебная часть программы олимпиады, чтобы школьники могли не только соревноваться в решении задач, но и прослушать лекции ведущих ученых по математике, узнать новое и интересное о своей любимой науке, получить необходимые консультации, иметь возможность побеседовать с членами жюри. Возможно, для этого стоит вернуться к старой форме олимпиады — проведению только одного тура, который полезно было бы дополнить личными собеседованиями с участниками.

Заслуживает внимания предложение о введении специального *Диплома участника олимпиады*, который вручается всем участникам олимпиады. Это значительно повысит авторитет самого факта выхода учащегося в заключительный тур Всесоюзной олимпиады.

Наконец, было бы полезно отмечать специальными грамотами не только победителей олимпиады, но и их воспитателей — учителей математики.

Задачи олимпиады по математике

В этом году только две задачи заключительного тура XII Всесоюзной олимпиады по математике не вошли в Задачник «Кванта». (Условия задач см. на с. 65—67.) Ниже приводятся решения этих задач.

9 класс

Задача 8.

Рассмотрим p точек с координатами $(i;\ \overline{i^2})$, где $i = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, а через $\overline{i^2}$ обозначен остаток от деления i^2 на p. Если некоторые три точки $(a;\ \overline{a^2})$, $(b;\ \overline{b^2})$, $(c;\ \overline{c^2})$ из этого набора лежат на одной прямой, то векторы $(b-a;\ \overline{b^2}-\overline{a^2})$ и $(c-b;\ \overline{c^2}-\overline{b^2})$ коллинеарны, откуда $(b-a)(\overline{c^2}-\overline{b^2}) = (\overline{b^2}-\overline{a^2})(c-b)$. По определению $\overline{i^2}$ отсюда следует, что $(b-a)(c^2-b^2)-(b^2-a^2)(c-b)$ делится на p. Следовательно, $(b-a)(c-b)[(c+b)-(b+a)] = (b-a)\times(c-b)(c-a)$ делится на p. Поскольку p — простое число, это возможно только в том случае, когда одна из скобок делится на p. Но каждая из них меньше p. Поэтому одна из скобок равна нулю, и некоторые две точки из выбранных трех совпадают.

Аналогично показывается, что четыре различные точки из нашего набора не могут лежать в вершинах параллелограмма. Действительно, пусть точки $(a;\ \overline{a^2})$, $(b;\ \overline{b^2})$, $(c;\ \overline{c^2})$, $(d;\ \overline{d^2})$ лежат в вершинах параллелограмма. Тогда векторы $(b-a;\ \overline{b^2}-\overline{a^2})$ и $(d-c;\ \overline{d^2}-\overline{c^2})$ равны. Отсюда $b-a=d-c$ и число $b^2-a^2-(d^2-c^2)=(b+a)(d-c)-(d+c)(d-c)=[(b+a)-(d+c)](d-c)$ делится на p. Но тогда делится на p и $(b+a)-(d+c)$, откуда на p делится и $(b+a)-(d+c)+(b-a)-(d-c)=2(b-d)$ — противоречие.

10 класс

Задача 7.

Рассмотрим наряду с C и D числа $C_i=(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_i-b_i)^2$ и $D_i=(a_1-b_i)^2+(a_2-b_i)^2+\ldots+(a_i-b_i)^2$ $(i=1,2\ldots)$. Тогда $C=C_n$, $D=D_n$. Докажем, что последовательности D_i-C_i и $2C_i-D_i$ — неубывающие. Поскольку $C_1=D_1=0$, из этого будет следовать решение задачи. Заметим, что $D_i=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-2b_i(a_1+a_2+\ldots+a_i)+ib_i^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-2ib_i^2+ib_i^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_i^2-ib_i^2$. Поэтому $D_{i+1}=D_i+a_{i+1}^2+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2$, а $C_{i+1}=C_i+(a_{i+1}-b_{i+1})^2$. Отсюда

$$\begin{aligned}D_{i+1}-C_{i+1}&=D_i-C_i+a_{i+1}^2+\\&+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2-(a_{i+1}-b_{i+1})^2=\\&=D_i-C_i+[(i+1)b_{i+1}-ib_i]^2+\\&+ib_i^2-(i+1)b_{i+1}^2-i^2(b_{i+1}-b_i)^2=\\&=D_i-C_i+i(b_{i+1}-b_i)^2\geqslant D_i-C_i\end{aligned}$$

(здесь использовано равенство $a_{i+1}=(i+1)\times b_{i+1}-ib_i$). Аналогично, $2C_{i+1}-D_{i+1}=C_{i+1}+(C_{i+1}-D_{i+1})=C_i+i^2(b_{i+1}-b_i)^2+C_i-D_i-i(b_{i+1}-b_i)^2=2C_i-D_i+(i^2-i)(b_{i+1}-b_i)^2\geqslant 2C_i-D_i$.

Л. Лиманов

Т. Петрова

Олимпиада по физике

Проходившая в этом году XII Всесоюзная олимпиада школьников была посвящена 60-летию ВЛКСМ.

Заключительный этап олимпиады по физике проходил в столице Туркменской ССР городе Ашхабаде. Его участниками были 138 учащихся: 39 восьмиклассников, 50 девятиклассников и 49 десятиклассников. Все они — победители районных, городских, областных и республиканских олимпиад 1978 года или победители предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Открытие заключительного этапа олимпиады состоялось 13 апреля в городском Дворце пионеров. С теплым приветственным словом к участникам обратилась министр народного образования Туркменской ССР Б. Пальванова. Больших успехов в предстоящей олимпийской борьбе и в дальнейших занятиях любимым делом — физикой — пожелал ребятам председатель жюри олимпиады вице-президент Академии наук ТССР доктор физико-математических наук О. Овезгельдыев. От имени комсомольцев республики успехов на олимпиаде пожелала участникам секретарь ЦК ЛКСМ ТССР Ж. Чарыева. Представитель Министерства просвещения СССР М. Грабиленков в своем приветствии выразил уверенность, что творческая работа на олимпиадах, целеустремленность, с которой ребята готовятся к этим конкурсам, несомненно помогут им в дальнейшей жизни, в труде.

Первый тур заключительного этапа олимпиады — теоретический — состоялся 14 апреля. Участникам были предложены следующие задачи:

8 класс

1. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массы M на конце (рис. 1). К другому концу прикреплена легкая цилиндрическая втулка с внутренним радиусом R, надетая на вращающуюся горизонтальную ось. Коэффициент трения между втулкой и осью μ. Определить угол отклонения стержня от вертикали в равновесии.

2. На графике (рис. 2) приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В последовательно с сопротивлением $R = 4$ Ом. Определить мощность лампочки.

3. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 3, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены положения снаряда и одного из осколков через последовательные равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находится в точке B в тот момент, когда первый осколок находится в точке A. Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите ваш способ построения.

4. В дне цилиндрической кастрюли площади S_1 просверлили дырку площади S_2 и вставили в нее пластмассовую трубку (рис. 4). Масса кастрюли с трубкой равна M. Кастрюля стоит на ровном листе резины дном вверх. Сверху в трубку осторожно наливают воду. До какого уровня можно налить воду, чтобы она не вытекала снизу?

9 класс

1. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, напол-

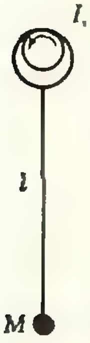


Рис. 1.

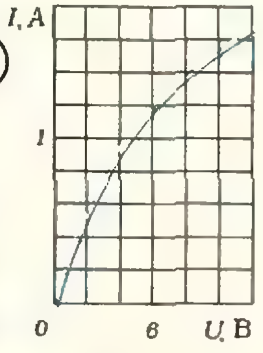


Рис. 2.

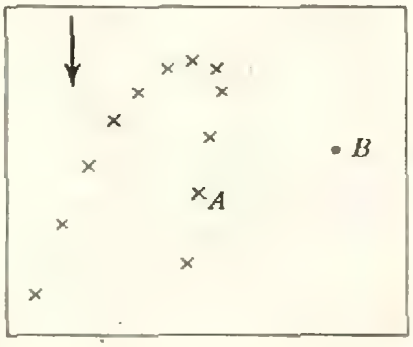


Рис. 3.

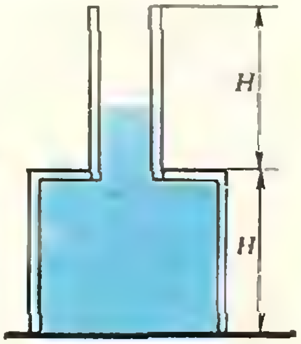


Рис. 4.

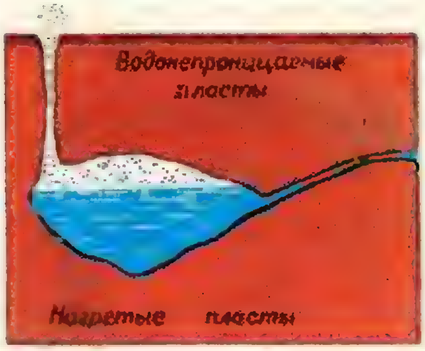


Рис. 5.

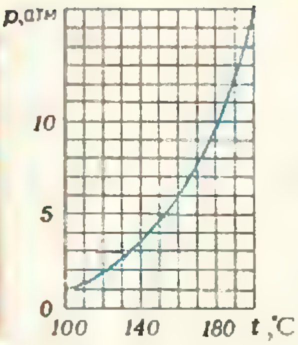


Рис. 6.

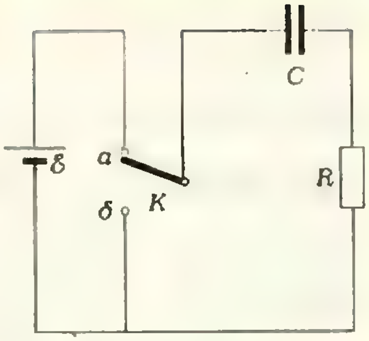


Рис. 7.

ненные грунтовой водой и прогреваемые земным теплом (рис. 5). Выход из них на поверхность земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h = 90$ м; удельная теплота испарения воды $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг; удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). График зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры дан на рисунке 6.

2. Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель?

3. В схеме, показанной на рисунке 7, э. д. с. батареи $\mathcal{E} = 100$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 100$ Ом, емкость конденсатора $C = 200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R = 10$ Ом. Ключ K переключается между контактами «*а*» и «*б*» $f = 10$ раз в секунду. При подключении его к клемме «*а*» конденсатор успевает полностью зарядиться, а при подключении к клемме «*б*» — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее?

4. На рисунке 8 приведен график зависимости напряжения на разрядном промежутке дугового разряда от тока. Дугу подключают к источнику постоянного напряжения последовательно с резистором. При каком максимальном значении сопротивления резистора дуга может гореть при напряжении источника $U = 85$ В?

5. Колба термоса объемом 1 литр откачана до давления $p = 10^{-5}$ атм (при комнатной температуре). Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90°C до 70°C. Площадь поверхности колбы $S = 600$ см². Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать.

10 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. См. задачу 5 для 9 класса.

3. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика (то есть зависимость напряжения от тока) для такой цепи показана на рисунке 9. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный вами график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U = 85$ В.

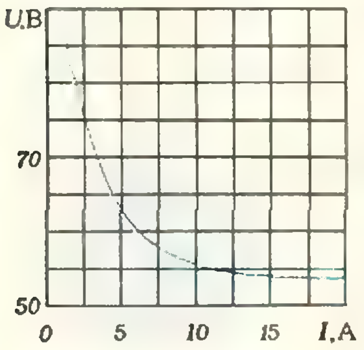


Рис. 8.

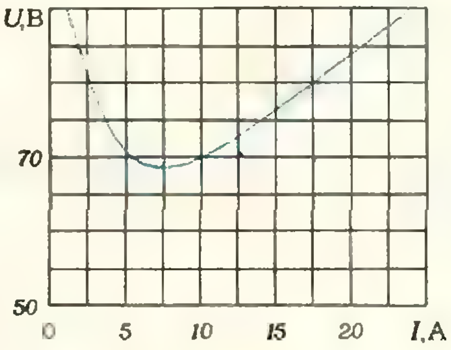


Рис. 9.

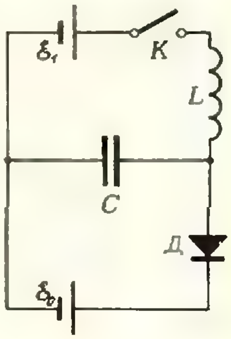


Рис. 10.

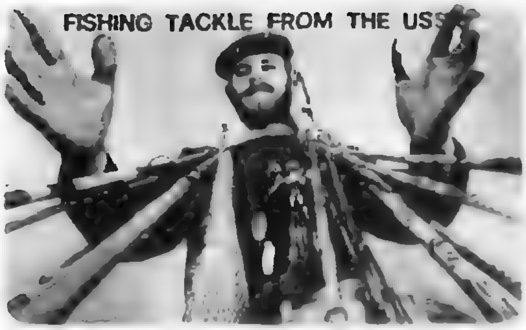

FISHING TACKLE FROM THE USS

Рис. 11.

4. В схеме, изображенной на рисунке 10, э. д. с. батареи $\mathcal{E}_0$ больше, чем $\mathcal{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею $\mathcal{E}_0$ при замыкании ключа K, полагая, что внутренние сопротивления обеих батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод D считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечно велико). Конденсатор C до замыкания ключа был незаряжен.

5. Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 11), определите: 1) Фокусное расстояние объектива фотоаппарата. 2) На каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании? 3) Размер рыбы, пойманной рыбаком. 4) Диаметр объектива, предполагая, что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм. Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу.

На решение задач восьмиклассникам отводилось 4 часа, а девятиклассникам и десятиклассникам — 5 часов.

Сразу после того, как участники олимпиады сдали свои работы, к их проверке приступили члены жюри. В составе жюри — ученые Академии наук СССР, Академии педагогических наук СССР, Сибирского отделения АН СССР, преподаватели Московского физико-технического института, Московского, Новосибирского и Туркменского государственных университетов.

Еще до проверки работ члены жюри высказали свое мнение относительно сравнительной трудности задач теоретического тура. Результаты проверки показали, что мнение жюри совпало с мнением самих участников. Наиболее трудной для восьмиклассников оказалась задача 1; ее смогли решить только 8 участников. Самой легкой оказалась задача 4. У девятиклассников наибольшие затруднения вызвала задача 2; ее правильно решили 22 участника. Наибольшее число верных решений было по задаче 4. Для десятиклассников самой трудной была задача 4: с ней справились только 10 участников. Самой легкой оказалась задача 3.

Задачи теоретического тура включены в Задачник «Кванта» (№№ 7, 8 за этот год), так что каждый желающий может проверить себя, померяться силами с олимпийцами. Лишь задача 4 для 8 класса не вошла в Задачник «Кванта». Вот ее решение.

Вода не будет вытекать снизу до тех пор, пока кастрюля не начнет всплывать.

На кастрюлю действуют две силы: сила тяжести $M\overrightarrow{g}$, направленная вертикально вниз, и сила $\vec{F}$ давления на дно кастрюли со стороны воды, направленная вертикально вверх. Сила давления по абсолютной величине равна

$$\left|\vec{F}\right| = p\,(S_1 - S_2) = \rho\left|\vec{g}\right| h\,(S_1 - S_2),$$

где p — давление воды на уровне дна кастрюли, h — высота уровня воды в трубке.

Значение h, при котором кастрюля начнет всплывать, определяется условием

$$\rho\left|\vec{g}\right| h\,(S_1 - S_2) = M\left|\vec{g}\right|,$$

откуда

$$h = \frac{M}{\rho\,(S_1 - S_2)}.$$

Очевидно, что задача будет иметь решение, если $h \leqslant H$.

16 апреля в лабораториях физического факультета Туркменского государственного университета проходил экспериментальный тур олимпиады. Каждому участнику предлагалось две задачи. Вот условия этих задач.

8 класс

1. Определите отношение плотностей жидкостей.

Оборудование: рычаг-линейка, два груза, два сосуда с различными жидкостями, штатив с муфтой и лапкой.

2. Проверьте экспериментально выполнение закона сохранения импульса при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух пластмассовых и двух стальных шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

9 класс

1. Проверьте экспериментально выполнение законов сохранения импульса и

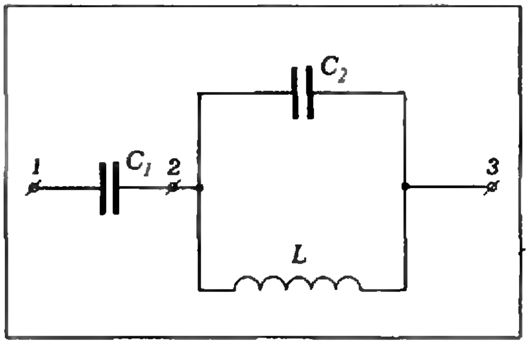


Рис. 12.

энергии при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух алюминиевых, одного стального и двух пластмассовых шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

2. Определите схему «черного ящика», содержащего 3 одинаковых резистора и 2 диода, и сопротивления резисторов.

Оборудование: коробочка с тремя выводами, омметр, диод (такой же, как в коробочке).

10 класс

1. Определите параметры элементов в предложенной вам электрической цепи (рис. 12).

Оборудование: электрическая цепь, состоящая из двух конденсаторов и катушки индуктивности, авометр, звуковой генератор, соединительные провода.

2. Определите оптическую схему «черного ящика» и возможные параметры оптических элементов, находящихся в нем.

Оборудование: коробочка с шестью отверстиями, линейка масштабная, 4 булавки, подъемный столик, бумага.

В этом номере журнала помещена статья В. Орлова, в которой приводятся решения экспериментальных задач и дается анализ выполнения работ участниками олимпиады. Однако советуем вам, прежде чем читать статью В. Орлова, попробовать самим решить эти задачи. Безусловно, ваши учителя физики помогут вам достать нужное оборудование в физическом кабинете и приготовить все необходимое для проведения эксперимента. Попытайтесь!

Проверив экспериментальные работы участников олимпиады, жюри подвело итоги. 18 апреля на торжественном закрытии олимпиады председатель Центрального жюри олимпиады по физике профессор Московского физико-технического института С. Козел объявил результаты.

Имена победителей, получивших Дипломы I, II и III степени, приведены на странице 83 этого номера журнала.

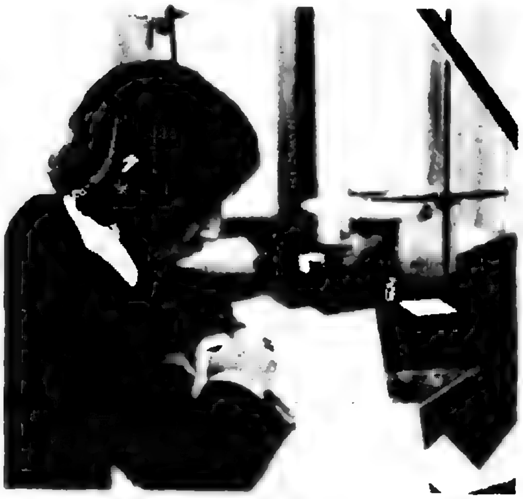
Многие участники олимпиады награждены различными грамотами и призами. Грамоты Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады получили 42 участника.

Специальные призы присуждены *С. Мигинскому* (Новосибирск) — за лучшее решение задач теоретического тура, *А. Товмасяну* (Ереван), *К. Кленину* (Саратов) и *Д. Ковригину* (Ломоносов) — за лучшее выполнение работ экспериментального тура.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» учредили специальный приз — подшивку журнала с автографом главного редактора академика И. Кикоина. В этом году этот приз получил семиклассник из Гомеля *А. Ляпин*, выступивший за 8 класс.

XII Всесоюзная олимпиада школьников по физике закончилась. Участники ее надолго запомнят гостеприимство Туркменской земли, теплые встречи с учеными Туркмении, ее славными, добрыми людьми. Хозяева олимпиады — ученые Туркмении, комсомольцы, все, кто помогал в ее проведении, — сделали очень многое, чтобы олимпиада прошла успешно. Не только рабочие часы, но и досуг школьников был организован интересно. В этом большую роль сыграл комитет комиссаров, созданный ЦК ЛКСМ Туркмении.

Через год — XIII Всесоюзная олимпиада. И вы сможете стать ее участниками. Для этого надо много работать, работать систематически, целеустремленно. Желаем успехов!



Победители олимпиады по физике, получившие Дипломы I степени: А. Морозов, В. Яковенко (во втором ряду), Е. Пономарев, М. Гаврилов, М. Светлов, В. Бикташев, С. Мигинский, А. Ляпин, М. Севрюк.

О. Кунингас, получивший Диплом I степени, за выполнением экспериментальной задачи.

Идет эксперимент.

Вручение наград и призов.

В. Орлов

Экспериментальные задачи олимпиады по физике

16 апреля в лабораториях физического факультета Туркменского государственного университета проходил экспериментальный тур заключительного этапа XII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Каждому участнику предлагалось решить две экспериментальные задачи. Решения и анализ выполнения этих задач участниками олимпиады приводятся ниже.

8 класс

Задача 1. *Определите отношение плотностей жидкостей.*

Оборудование: рычаг-линейка, два груза, два сосуда с различными жидкостями, штатив с муфтой и лапкой. (В качестве грузов использовались алюминиевый кубик массой 100 г и стальная гирька массой 100 г; в качестве жидкостей — подкрашенная вода и раствор соли.)

Решение. Метод сравнения плотностей жидкостей основан на зависимости абсолютных значений F_{A_1} и F_{A_2} архимедовых сил от плотностей ρ_1 и ρ_2 жидкостей, в которые погружают груз объемом V:

$$F_{A_1} = \rho_1 Vg, \quad F_{A_2} = \rho_2 Vg.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{F_{A_1}}{F_{A_2}}.$$

Уравновесив грузы на рычаге, устанавливаем, что массы грузов одинаковы.

Опустив алюминиевый кубик в первую жидкость (рис. 1, *а*), уравновешиваем грузы на рычаге:

$$(mg - F_{A_1})\, l = mgl_1. \qquad (1)$$

Заменив сосуд с жидкостью, не меняя плеча l, вновь уравновешиваем грузы (рис. 1, *б*):

$$(mg - F_{A_2})\, l = mgl_2. \qquad (2)$$

Из условий (1) и (2) находим

$$\frac{F_{A_1}}{F_{A_2}} = \frac{l - l_1}{l - l_2} \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{l - l_1}{l - l_2}.$$

Относительная погрешность измерения отношения ρ_1/ρ_2 равна

$$\varepsilon_{\rho_1/\rho_2} = \varepsilon_{l-l_1} + \varepsilon_{l-l_2} = \frac{h_l + h_{l_1}}{l - l_1}\,100\% + \frac{h_l + h_{l_2}}{l - l_2}\,100\%, \qquad (3)$$

где h_l, h_{l_1} и h_{l_2} — абсолютные погрешности измерения длин плеч.

От чего зависит значение величины $\varepsilon_{\rho_1/\rho_2}$? Значения h_l, h_{l_1} и h_{l_2} определяются точностью измерительного инструмента (линейки). Из выражения (3) видно, что чем меньше различие в длинах l и l_1, l и l_2, тем больше относительная погрешность измерений. Отсюда следует, что для повышения точности измерений следовало в сосуды с жидкостями опускать именно алюминиевый кубик, а не стальную гирьку, так как вследствие большего объема кубика на него будет действовать бо́льшая архимедова сила, что, в свою очередь, приведет к большему различию длин l, l_1 и l_2. С этой же целью длину плеча l следовало выбирать максимально большой для данного рычага. Производить несколько опытов с различными плечами рычага, опускать в жидкости оба груза поочередно, а затем усреднять результат смысла не имело, так как это заведомо ухудшало точность измерений. Часть учеников при переносе груза из одной жидкости в другую изменяла плечо l силы $m\vec{g} + \vec{F}_A$. Это приводило к более сложной расчетной формуле, к дополнительным погрешностям измерений, увеличивало вероятность расчетных ошибок.

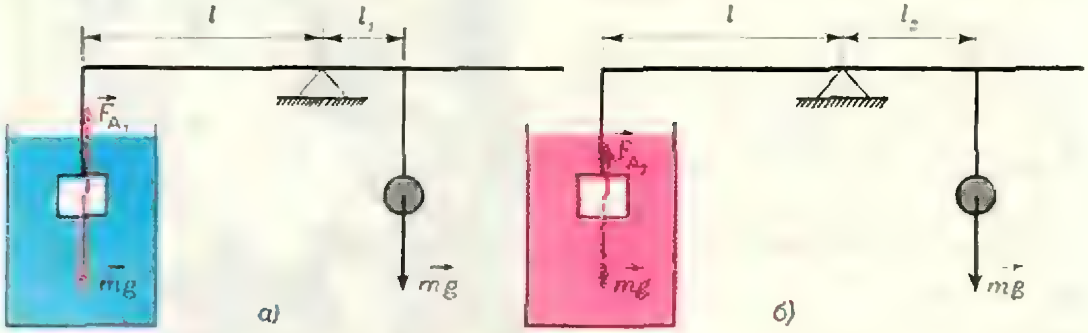


Рис. 1.

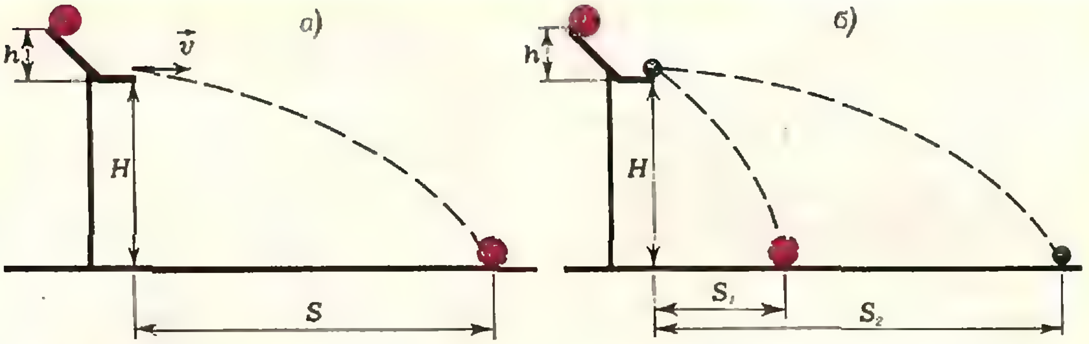


Рис. 2.

Задача 2. *Проверьте экспериментально выполнение закона сохранения импульса при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.*

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, лоток дугообразный, набор из двух пластмассовых и двух стальных шаров с заданными массами, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

Решение. Простейшая методика выполнения эксперимента заключается в следующем. С помощью *листов белой и копировальной бумаги* фиксируется место падения шара при его скатывании по свободному лотку и измеряется дальность полета S шара (рис. 2, *а*). Начальная скорость шара к моменту начала свободного полета равна $v=S/t$, где t — время падения шара.

Поставив на горизонтальный участок лотка второй шар, измеряем дальности полета S_1 и S_2 обоих шаров после их столкновения (рис. 2, *б*). Скорости шаров после столкновения равны $v_1=S_1/t$ и $v_2=S_2/t$. Так как время падения шаров во всех опытах одинаково, для проверки закона сохранения импульса достаточно проверить выполнение соотношения

$$m_1S = m_1S_1 + m_2S_2. \qquad (*)$$

где m_1 и m_2 — массы сталкивающихся шаров.

Для того чтобы сделать вывод о выполнимости или невыполнимости закона сохранения импульса в этом эксперименте, следовало сравнить относительные погрешности измерений расстояний (S, S_1, S_2) с относительным отклонением левой и правой частей выражения (*).

Относительная погрешность измерения дальности полета $\varepsilon_S = (h_S/S)\,100\%$ (h_S — абсолютная погрешность). Следовательно, для уменьшения значения ε_S нужно подбирать условия эксперимента так, чтобы значение S было максимально велико. С этой целью лоток следовало поднять на всю высоту штатива, а шар отпускать с верхней точки лотка.

Для пластмассовых шаров, скатывающихся с лотка, отклонение левой и правой частей выражения (*) оказывалось существенно бо́льшим погрешностей измерений — импульс шаров после удара возрастал! Причина невыполнения закона сохранения импульса в данном случае заключается в том, что шар при скатывании с лотка вращается. При столкновении пластмассовых шаров одинаковых масс движущийся шар в момент удара останавливается, полностью передавая свой импульс второму шару. Однако за счет энергии вращательного движения, запасенной при скатывании, первый шар снова начинает двигаться по горизонтальному участку лотка. Вследствие этого правая часть (*) оказывается больше, чем того требовал бы закон сохранения импульса.

Для стальных шаров закон сохранения импульса в пределах погрешностей измерений выполняется, так как гладкие стальные шары соскальзывают с лотка.

Эта задача оказалась для восьмиклассников значительно труднее первой. Только треть из них выбрала простейшую методику выполнения эксперимента, приводящую к расчетной формуле (*). Многие учащиеся измеряли высоту падения шара H, вычисляли время падения шара $t = \sqrt{2H/g}$ и его скорость $v = S/\sqrt{2H/g}$. Подобный путь приводил к увеличению погрешностей измерений.

Большинство учеников не рассчитывало погрешностей измерений и отклонения левой и правой частей (*), достигающие 10—15%, объясняли ошибками измерений (в то время как ошибки измерений при оптимальных условиях проведения опыта не превышали 5%). Очень досадно, что некоторые ребята, обнаружив эти значительные отклонения, просто «подогнали» результаты Лишь немногие обратили внимание на факт возрастания импульса шаров после удара, но не смогли его объяснить.

9 класс

Задача 1. *Проверьте экспериментально выполнение законов сохранения импульса и энергии при столкновении движущегося шара с неподвижным, установленным на горизонтальном участке лотка. Объясните полученные результаты.*

Оборудование: штатив с муфтой и лапкой, набор из двух алюминиевых, одного стального и двух пластмассовых шаров с заданными массами, лоток дугообразный, листы белой и копировальной бумаги, линейка масштабная.

Решение. Та же методика, что и в задаче 2 для 8-х классов, приводит к следующим расчетным формулам (рис. 2,*б*): для проверки закона сохранения импульса —

$$m_1S = m_1S_1 + m_2S_2, \qquad (*)$$

для проверки закона сохранения энергии —

$$m_1S^2 = m_1S_1^2 + m_2S_2^2. \qquad (**)$$

Однако эти выражения получены в приближении «шар — материальная точка», которое в условиях данной задачи было не всегда корректно. В зависимости от материала шара и качества его обработки, шар проходит различные пути в режимах скольжения и качения. Чем больше проскальзывание шара при его движении по лотку, тем лучше выполняются законы сохранения импульса и энергии в этом опыте. Наибольшее проскальзывание было у стального шарика, наименьшее — у алюминиевого. В этом легко было убедиться, отпуская с одной и той же высоты стальной, пластмассовый и алюминиевый шары. Стальной шар при этом летит существенно дальше других — большая часть его потенциальной энергии превращается в кинетическую энергию поступательного движения.

Основные замечания по выполнению этой работы, в основном, те же, что и в задаче 2 для 8-х классов Однако, если расхождения в выполнении закона сохранения импульса (в форме (*)) достигали 10—15%, то расхождения в выполнении закона сохранения энергии (в форме (**)) достигали 40% и более (!). И даже такие отклонения не смутили многих учеников, которые пытались «подогнать» свои результаты под незыблемые законы сохранения.

Лишь немногие ученики, поставив серию опытов, сумели качественно объяснить отклонения в выполнении законов сохранения импульса и энергии вращением шара. Один ученик — Олег Ющук (145-я средняя школа г. Киева), сделав правильный вывод о причинах невыполнения закона сохранения энергии (в форме (**)), сумел количественно определить долю k первоначальной (потенциальной) энергии скатывающегося шара, переходящей в кинетическую энергию вращения:

$$k = \frac{E_{\text{вр}}}{mgh} = \frac{mgh - mv^2/2}{mgh}, \qquad (3)$$

где h — высота скатывания шара (рис. 3), v — скорость его поступательного движения, определяемая выражением

$$v = \frac{S}{t} = \frac{S}{\sqrt{2H/g}}. \qquad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует

$$k = \frac{mgh - mgS^2/4H}{mgh} = 1 - \frac{S^2}{4Hh}.$$

Опыты показали, что для стального шара коэффициент k мал и близок к 0,1 (практически отсутствует качение; при полном проскальзывании вся потенциальная энергия шара превращается в кинетическую энергию поступательного движения). Для пластмассового шара k = 0,3—0,35. Для алюминиевого k = 0,4 (качение без проскальзывания)

Полный количественный расчет эксперимента с учетом вращательного движения учащиеся 8—9 классов не проводили, но это и не требовалось. Важнее было «честно» провести опыты и дать объяснение полученным результатам, подтверждая свои объяснения контрольными опытами.

Задача 2. *Определите схему «черного ящика», содержащего 3 одинаковых резистора и 2 диода, и сопротивления резисторов.*

Оборудование: коробочка с тремя выводами, омметр, диод (такой же, как в коробочке).

Решение. Измерения сопротивлений с помощью омметра (положение его переключателя «× 1000»)

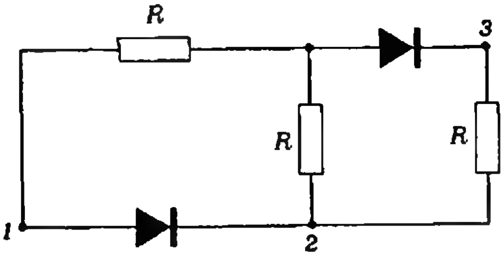


Рис. 3.

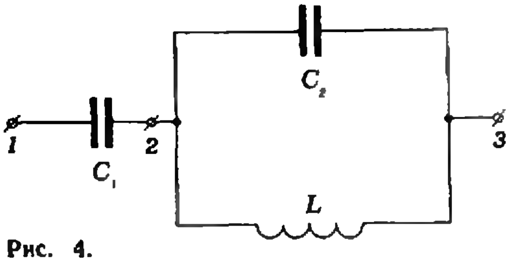


Рис. 4.

при подключении его к двум попарно различным выводам дали следующие значения:

$$R_{12} = 2\ \text{кОм},\ R_{21} = 30\ \text{кОм},$$
$$R_{13} = 8\ \text{кОм},\ R_{31} = 45\ \text{кОм},$$
$$R_{23} = 8{,}5\ \text{кОм},\ R_{32} = 15\ \text{кОм}.$$

Сопротивление участка 1—2 с подключенным к нему «пробным» диодом оказалось равным 4 кОм.

Анализ результатов измерений позволяет сделать следующие выводы.

а) На участке 1—2 цепи включены диод и параллельно ему резистор (резисторы?) с сопротивлением 30 кОм. Сопротивление диода в прямом направлении $R_д = 2$ кОм.

б) На участке 2—3 цепи включен резистор с сопротивлением 15 кОм и параллельно ему — диод и резистор (15 кОм). Сопротивление R'_{23} участка 2—3 с последовательно подключенным к нему «пробным» диодом оказалось равным 12,5 кОм: $R'_{23} = R_{23} + R'_д = 12{,}5$ кОм, откуда $R'_д = 12{,}5\ \text{кОм} - 8{,}5\ \text{кОм} = 4$ кОм. Правильность вывода б) подтверждает прямая проверка: $R_{23} = 8{,}5$ кОм.

Этот результат позволяет уточнить вывод а): на участке 1—2 параллельно с диодом включены два резистора с сопротивлением по 15 кОм.

в) Значение $R_{31} = 45$ кОм говорит о том, что в направлении 3—1 диоды закрыты и в цепи «работают» три последовательно включенных резистора с сопротивлениями по 15 кОм.

Схема, заключенная в «черный ящик», — такая, как на рисунке 3.

Определить схему «черного ящика» удалось только 10 учащимся. Во многих работах повторялась одна и та же ошибка, связанная с неверным измерением сопротивления диода. Так как диод — нелинейный элемент, его сопротивление существенно изменяется в зависимости от величины протекающего тока. Следовательно, обязательно нужно было измерять сопротивление диода в прямом направлении при подключении его последовательно к различным клеммам «черного ящика». Такие измерения давали различные значения $R_д$ в зависимости от режима, в котором производились измерения ($R_{д1-2} = 2$ кОм, $R_{д2-3} = 4$ кОм).

10 класс

Задача 1. *Определите параметры элементов в предложенной вам электрической цепи.*

Оборудование: электрическая цепь, состоящая из двух конденсаторов и катушки индуктивности (рис. 4), авометр, звуковой генератор, соединительные провода.

Решение. Наиболее удачную методику измерения, позволившую правильно определить все параметры схемы, предложил Дмитрий Ковригин — ученик 1-й средней школы г. Ломоносова Ленинградской области. Выделим основные этапы этой методики.

а) Определение емкости конденсатора C_1.

Генератор подключаем к клеммам 1—2, измеряем при частоте ν_1 напряжение U_1 на конденсаторе C_1 с помощью авометра. Затем авометр в режиме амперметра включаем последовательно с конденсатором C_1, генератор подключаем к клеммам 1—2, измеряем силу тока I (рис. 5, *а*). Зная частоту изменения тока (частоту генератора) ν_1, определяем C_1:

$$I = \frac{U_1}{X_{C_1}} = U_1 2\pi\nu_1 C_1,\ C_1 = \frac{I}{2\pi\nu_1 U_1}.$$

Эти измерения следовало проводить при низких частотах, так как при высоких частотах генератор закорачивается малым сопротивлением X_{C_1} конденсатора C_1 и уменьшается выходное напряжение генератора (изменяется U_1). Чтобы быть уверенным, что этого не происходит, надо построить график зависимости $I(\nu)$ и

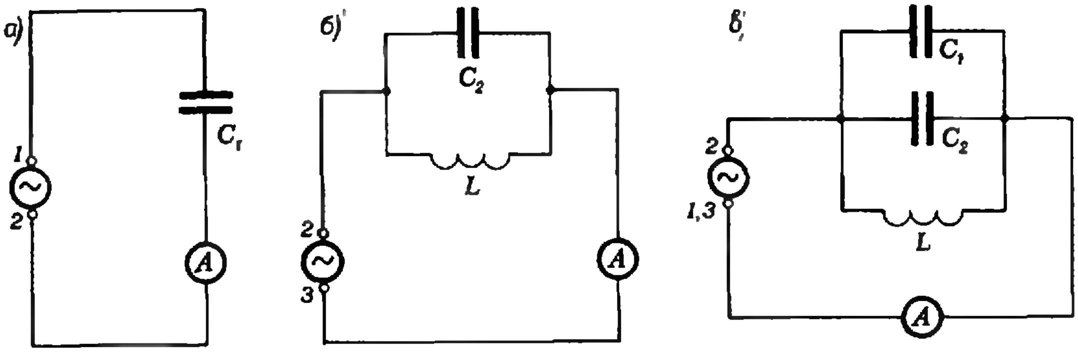


Рис. 5.

убедиться, что частота ν_1, при которой измерялось значение U_1, соответствует линейному участку графика $I(\nu)$.

б) Определение индуктивности L и емкости C_2.

Подключаем генератор к клеммам *2—3* и авометр в качестве амперметра (рис. 5, *б*). Изменением частоты генератора добиваемся минимальной силы тока в цепи. Частота $\nu_р$, при которой наступает резонанс, связана с параметрами контура:

$$\nu_р' = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}}.$$

Замыкаем клеммы *1—3*, включаем авометр в качестве амперметра, подключаем генератор к клеммам *2 — (1, 3)* (рис. 5, *в*). Изменяя частоту генератора, находим резонансную частоту $\nu_р'$:

$$\nu_р' = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C_1+C_2)}}.$$

Найденные значения частот $\nu_р$ и $\nu_р'$ позволяют рассчитать L и C_2.

в) Активное сопротивление катушки (потери на меди) легко измеряется с помощью авометра, подключенного в режиме омметра к клеммам *2—3*.

При данной методике амперметр служит лишь индикатором для обнаружения минимума тока. Прямые измерения силы тока и напряжения не проводятся, что существенно уменьшает погрешности измерений (сопротивление амперметра порядка 0,5 кОм). Кроме того, частоты $\nu_р$ и $\nu_р'$ измеряются при малых токах, вследствие чего напряжение на выходе генератора практически не изменяется. Величина индуктивности катушки (медный провод, намотанный на ферритовое кольцо) при данной методике также не изменяется.

Значительная часть десятиклассников предложила «лобовое» решение задачи: решение системы уравнений в комплексных амплитудах для двух произвольных значений токов и напряжений. Однако этот метод оказался совсем непригодным. Большие погрешности при определении силы тока и напряжения с помощью одного авометра и сложные расчеты привели к грубейшим ошибкам в измерении емкости конденсатора C_2 (до 1000 мкФ!) и индуктивности L (до 11 000 Г!). Самым неприятным является тот факт, что эти невероятные значения не вызвали удивления ребят. Очень многие ученики пытались производить усреднение результатов, полученных при различных условиях. Эта операция не имеет никакого смысла, ибо усреднением можно убрать лишь случайную ошибку измерений, а не систематическую, вызванную несовершенством методики выполнения работы.

Были предложены и другие способы определения параметров цепи. Однако все они по точности измерений значительно уступают описанному нами выше методу.

Задача 2. *Определите оптическую схему «черного ящика» и возможные параметры оптических элементов, находящихся в нем.*

Оборудование: коробочка с шестью отверстиями, линейка масштабная, 4 булавки, подъемный столик, бумага.

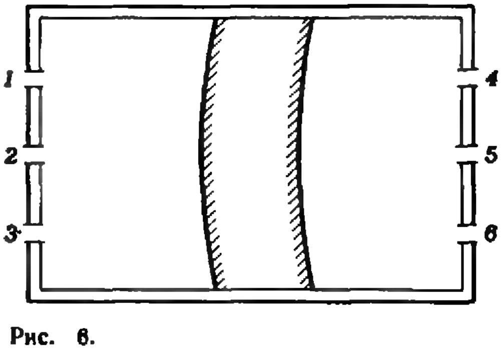


Рис. 6.

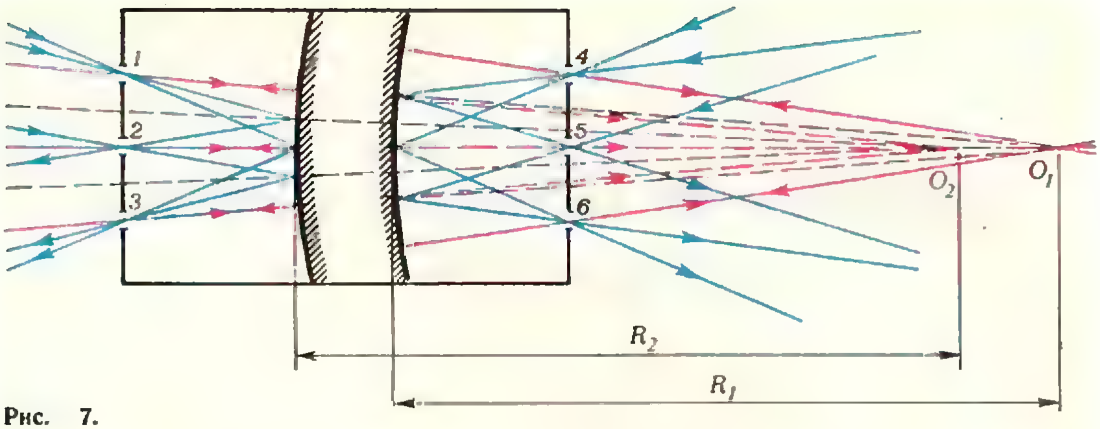


Рис. 7.

Решение. В «черном ящике» находилось вогнуто-выпуклое зеркало с радусами кривизны $R_1 = R_2 = 21$ см (рис. 6).

В том, что в коробочке находится зеркало, легко можно убедиться, глядя в отверстия *1*, *2*, *3* сначала при открытых отверстиях *4*, *5*, *6*, а затем при закрытых и не обнаруживая никаких изменений при этом.

Стандартным решением явилось построение хода падающих и отраженных от зеркала лучей. Для этого с помощью булавок отмечались направления, по которым через одно отверстие были видны два других отверстия. Пересечение соответствующих направлений (синие линии на рисунке 7) дает положение трех точек зеркала с одной стороны и трех точек зеркала с другой. Биссектрисы углов между падающим и отраженным лучами дают положение перпендикуляров к поверхности зеркала, пересечение перпендикуляров — центр кривизны. Измерение расстояния от центра кривизны до поверхности зеркала дает искомую величину радиуса зеркала.

Описанная методика выполнения работы дает тем большую точность, чем меньше радиус кривизны зеркальной поверхности. В данном случае радиус кривизны был довольно большой, и поэтому необходимо было точно выполнять построение хода лучей.

С этой работой успешно справились только 13 десятиклассников из 49. Основной ошибкой, которая не позволила получить правильную оптическую схему «черного ящика», был небрежно сделанный чертеж с построением хода лучей.

Удачную методику определения оптического центра зеркал выбрали **Сергей Мигинский** (145-я средняя школа Новосибирска) и **Евгений Пономарев** (82-я средняя школа п. Черноголовка Московской области). После того как стандартным методом были найдены точки зеркальной поверхности, определялись направления (красные линии на рисунке 7), по которым были видны те же отверстия, через которые производилось наблюдение. С этой целью булавка ставилась таким образом, чтобы изображение булавки, сама булавка, отверстие и глаз находились на одной прямой. Это возможно, если луч проходит через оптический центр зеркала. Сделав подобные построения из других двух отверстий, получаем оптический центр зеркала в месте пересечения построенных прямых. Из рисунка 7 видно, что в одном случае эти прямые сходятся (вогнутое зеркало), а в другом расходятся (выпуклое зеркало). Измерение расстояний от полученных точек O_1 и O_2 до зеркала дает искомые значения радиусов кривизны зеркальных поверхностей. Описанный метод прямого определения оптического центра зеркальных поверхностей дает бóльшую по сравнению со стандартной методикой точность при малой кривизне этих поверхностей.

Победители XII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145);

по 9 классам—

Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Лысенок И. (Москва, ФМШ № 18),
Рудковский И. (Киев, ФМШ при КГУ),
Хлебутин С. (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам—

Гальперин В. (Москва, с. ш. № 57),
Книжник В. (Москва, с. ш. № 2),
Лихтинен И. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Авербах И. (Челябинск, с. ш. № 121),
Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16),
Братченко С. (х. Бойко-Понура Краснодарского края),
Василевский С. (Ашхабад, п. Фирюза, с. ш. № 30),
Добров Б. (Ангарск, с. ш. № 10),
Лавров П. (Ленинград, с. ш. № 207),
Лацис С. (Стучка, с. ш. № 2),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Лучко Ю. (д. Слонатичи Гродненской обл),
Рухадзе К. (Обнинск, с. ш. № 1);

по 9 классам—

Буякевич А. (с. Родинское Донецкой обл., с. ш. № 8),
Измайлов Р. (Баку, с. ш. № 134),
Канепс Я. (Рига, с. ш. № 2),
Карагуян Г. (Ереван, ФМШ № 1),
Касаковскис Я. (Рига, с. ш. № 1),
Кордюков Ю. (Серов, с. ш. № 14),
Ляховец А. (Москва, ФМШ № 18),
Нестеренко Н. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Суворова Н. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Хютть Урмас (Нью)

по 10 классам—

Аронов Б. (Саратов, с. ш. № 13),
Бугаенко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Жердев А. (Славянск, с. ш. № 5),
Изюмченко М. (Москва, ФМШ № 18),
Корчинов С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Ктитарев Д. (Дубна Московской обл., с. ш. № 8),
Лисничук Л. (Васильевская с. ш. № 8),
Нейман В. (Ленинград, ФМШ № 45),
Оревков С. (Москва, с. ш. № 57),
Харенко С. (Ангарск, с. ш. № 10),
Якубович Д. (Ленинград, ФМШ № 45).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Владимиров И. (Куйбышев, с. ш. № 144),
Попелюхин А. (Киев, ФМШ при КГУ),
Радченко В. (Киев, ФМШ при КГУ),
Синцов В. (п. Комсомольский Тюменской обл., с. ш. № 1);

по 9 классам—

Амброладзе М. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Бодров С. (Димитровград, с. ш. № 25),

Долинский С. (Целиноград. с. ш. № 11)
Иванов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30),
Кузьмин Е. (Череповец, с. ш. № 4),
Лиманаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Ротару В. (с. Сесены Молдавской ССР),
Убайдуллаев Р. (Ташкент, с. ш. № 5);

по 10 классам—

Бахтин В. (Воронеж, с. ш. № 58),
Гохберг А. (Москва, с. ш. № 57),
Камолова Э. (Ташкентская обл., свх. Свердлова),
Коган А. (Донецк, с. ш. № 13),
Мамедов Г. (Баку, с. ш. № 160),
Надежин Д. (Курган, с. ш. № 47),
Ненашев А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Озола З. (Рига, с. ш. № 1),
Остров Г. (Барановичи, с. ш. № 16),
Шейдвассер О. (Оренбург, с. ш. № 2),
Шулембаев Д. (Алма-Ата, РФМШ).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Ляпин А. (Гомель, с. ш. № 33, 7 кл.),
Светлов М. (Пермь, с. ш. № 25);

по 9 классам—

Гаврилов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Севрюк М. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам—

Бикташев В. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Мигинский С. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Морозов А. (Москва, с. ш. № 179),
Пономарев Е. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Яковенко В. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Заневский А. (Ленинград, с. ш. № 127),
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2),
Перлов А. (Киев, ФМШ № 145),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам—

Васильев А. (Чебоксары, ФМШ № 2),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Чикин Д. (Москва, ФМШ № 18),
Шпилькин С. (Москва, ФМШ № 18),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145),
Ясонов И. (Москва. ФМШ № 18);

по 10 классам—

Забродин А. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Макушок Ю. (Минск, с. ш. № 75),
Смышляев В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Шептовецкий А. (Москва, с. ш. № 2).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Долганов А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Погосов А. (Ташкент, с. ш. № 110),
Усов В. (Томск, с. ш. № 6),
Устинов Е. (Калининград, с. ш. № 43),
Чичинов А. (п. Красногорск Янгиабадского р-на УзССР, с. ш. № 8),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9);

по 9 классам—

Александров Н. (Ленинск Кзыл-Ординской обл., с. ш. № 222),
Бараз Л. (Свердловск, с. ш. № 9),
Батыршин Ш. (Ленинград, ФМШ № 45),
Гордиенко С. (Смолевичи, с. ш. № 2),
Зудин Е. (Александров, с. ш. № 4),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Кривицкий В. (Харьков, с. ш. № 27),
Ульмасов Т. (Душанбе, с. ш. № 8),
Фрадкин Я. (Уфа, с. ш. № 114),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам—

Вайсбурд И. (Томск, с. ш. № 6),
Водостоев Д. (Воронеж, с. ш. № 15),
Клишко В. (Винница, с. ш. № 2),
Ковригин Д. (Ломоносов, с. ш. № 1),
Кушнир Л. (Астрахань, с. ш. № 10),
Нестеренко А. (Новосибирск, ФМШ № 165),
Пикшрис Р. (Вильнюс, с. ш. № 22),
Ханелес А. (Самарканд, с. ш. № 67).

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М476—М495 и Ф478—Ф492 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших решение задач **М481, М488а)**, решили их верно. Остальные задачи решили: *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) 78, 80а), 83, 88, 89, 91; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) 79а), 83, 86, 91, 93; *Д. Агиев* (с. Зарнава АзССР) 83, 88б), е); *С. Азнабаев* (Новотроицк) 89, 91; *В. Айриян* (Раздан) 91, 93; *Г. Аксуян* (Евпатория) 91, 93, 94; *Ф. Алиев* (Баку) 91; *Е. Альтерман* (Львов) 80а), б), 86, 88, 91, 93; *К. Аминов* (Казань) 91; *П. Анев* (НРБ) 89; *И. Аполонский* (Жуковский) 86; *И. Артюшкин* (Пенза) 91; *К. Архангельский* (Киев) 76, 88е), 91, 92; *Р. Атангулов* (с. Юлдыбаево БАССР) 83; *И. Ахметов* (Москва) 86, 87, 88б), в); *А. Бадалян* (пос. Берд АрССР) 83, 84, 86, 88б), в), д), 89, 91; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 88б), в); *К. Бакланов* (Тула) 89; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 76, 80а), б), 85а), б), 86, 88б), 89; *В. Батырев* (Москва) 82, 83, 85а) — в), 88, 89, 91—93, 94а); *Б. Бегун* (Москва) 89, 91; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) 91; *З. Бектембаева* (с. Коммунизм. Таны КазССР) 91; *Ю. Беляев* (Ленинград) 91; *М. Бествина* (СФРЮ) 78, 80а), в), 85а)—д), 86, 88, 89; *И. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) 83, 91; *Г. Бокк* (Воронеж) 85а) — д), 91, 93; *О. Боконов* (Кобрин) 91, 93; *В. Болотников* (Харьков) 76, 83, 89, 91; *А. Боричев* (Ленинград) 91, 93; *И. Бородин* (Соликамск) 91; *А. Бржезинска* (ПНР) 88, 89, 91; *А. Броварник* (Кривой Рог) 91; *С. Буга* (Ульяновск) 86, 87, 88б), в), 89, 93; *Б. Вайсберг* (Обнинск) 86, 88б), в), 91; *А. Васильев* (Саратов) 83, 85а) — в), 86, 88б), в), 89, 91, 94а); *В. Виноградов* (Казань) 87, 88б), в); *И. Власов* (Мичуринск) 91; *Д. Воса* (п/о Лиепа ЛатССР) 91; *А. Галенко* (Пенза) 91; *Э. Гасанов* (Али-Байрамлы) 91; *Э. Гасанов* (Тауз) 91; *К. Гедалин* (Тбилиси) 91; *М. Гальперин* (Ленинград) 83, 84; *А. Гельфгат* (Рига) 80а); *А. Гильман* (Москва) 84, 85а) — в), 86, 88б), в), 89, 91—93, 94а); *Ю. Глухов* (Щелково) 91; *О. Головинская* (Киев) 91; *В. Голубенко* (Черкесск) 91; *О. Гордиенко* (Павлодар) 89, 91, 93; *Г. Грабарник* (Ташкент) 86, 88д), е) 89, 91, 92, 93; *В. Григоров* (Москва) 86, 87, 88б), в), 89; *Н. Гринберг* (Киев) 91; *С. Гришечкин* (Москва) 76—80; *Д. Грязнов* (Днепропетровск) 83, 85а) — в); *В. Губа* (Вологда) 78, 79, 80а), 82, 83, 85а), д), 86—93, 94а), 95а); *А. Даценко* (Харьков) 91; *А. Дедков* (Омск) 78б), 79, 80а); *В. Джалоян* (с. Чишан АрССР) 88б, в), д), 89, 93; *М. Джафаров* (Кировабад) 88б), е), 91; *В. Димантман* (Баку) 91; *О. Дмитриев* (Саратов) 83, 85а), б), 86, 88б), в), 89, 91, 94а); *А. Дороговцев* (Киев) 83, 84, 89, 91; *А. Дорошенко* (Пермь) 89, 91; *Ю. Дудко* (Симферополь) 91; *И. Ермилов* (Красноярск) 89, 91; *С. Железовский* (Саратов) 78; *Н. Жернаков* (Золотоноша Черкасской обл.) 91, 93; *В. Живаев* (Ташкент) 78, 83, 84, 86, 88, 91, 93; *В. Забелин* (Саратов) 78б), 83; *Р. Заботцки* (ПНР) 92; *И. Зверович* (Минск) 80а) — в), 83; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 78а), б), 79а), 80а), в), 86, 89, 94а); *М. Златоустовский* (с. Правая Хава Воронежской обл.) 83, 89, 91; *Я. Золотарев* (Ташкент) 76а), 78а), б), 80а); *Е. Зубова* (Пермь) 78; *М. Ибрагимов* (Шуша) 91; *О. Ижболдин* (Ленинград) 91—93; *Р. Измайлов* (Баку) 76—80; 84, 89, 91, 93; *И. Искендеров* (С. Нюснюс НахАССР) 88б), в), 91; *А. Исмаилов* (с. Чайра-суллу АзССР) 91; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) 80а), 83, 85а), б), 86, 88б), в), 91—93; *Я. Канепс* (Лиелварде ЛатССР) 91, 94а); *А. Каплан* (Сумгаит) 83, 91, 94а); *Ю. Каплунов* (Москва) 86, 88б), в), 89; *Г. Карагулян* (Ереван) 91, 93; *Ч. Карибов* (с. Вандам АзССР) 91; *П. Каталымов* (Алма-Ата) 83, 88б), в); *А. Кац* (Ташкент) 77—79, 80а), 83, 94; *Г. Квернадзе* (Тбилиси) 91; *И. Кевхишвили* (Тбилиси) 78б, 79а), 91; *А. Келарев* (Свердловск) 83, 91, 92, 94; *А. Керимов* (Москва) 78а), б); *Е. Коган* (Днепропетровск) 91; *Н. Коган* (Харьков) 88б), в), 89; *А. Колдашов* (Тбилиси) 91; *С. Колпаков* (Москва) 80а), б), 83, 85а) — в), 91; *И. Коростишевский* (Орск) 91; *И. Кохановский* (Фрунзе) 89, 91; *О. Кравец* (Воронеж) 88б), в), д), е), 91; *В. Крикухин* (Махачкала) 91; *О. Кружалов* (с. Воскресенское Тульской обл.) 83, 87, 88б), в), 91; *О. Крылов* (В. Устюг) 86; *В. Крюкова* (п. Оронгой БурАССР) 91; *О. Кузичкин* (Муром) 88б), в); *С. Кузнецов* (Ангарск) 78а), б), 82, 83, 85а) — д), 86, 87, 89, 91, 92; *Е. Кузьмин* (Череповец) 76а), 78а), б), 79, 80а), 82, 83, 88б), в), 89, 91, 93, 94; *П. Кулаков* (Ангарск) 83; *А. Кулеско* (Донецк) 77, 78а), б), 79, 80а), 83, 85а) — д), 86, 88, 89; *Кулябин* (п. Углеуральский Пермской обл.) 78а), б); *Д. Купчинский* (Павлодар) 91, 93; *В. Ландер* (Одесса) 91; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 88б), в), 91, 93; *Ю. Лапуста* (Тернополь) 91, 94; *А. Левитов* (Москва) 93, 94а), 95а) — в); *Р. Лейпус* (Вильнюс) 91; *А. Липин* (Ленинград) 91; *А. Логинов* (Ташкент) 91; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) 88б), в), д), е); *А. Ломтатидзе* (Тбилиси) 89, 91; *А. Ляховец* (Краснодар) 78, 82, 83, 86, 88, 89, 91; *А. Мадоян* (Ереван) 83а); *Ю. Макаров* (Ленинград) 88в), 89, 91, 93, 94, 95а), в); *А. Мамиконян* (св х. Ханджян АрССР) 83, 88б); *М. Марьянович* (СФРЮ) 91; *В. Матчишин* (Целиноград) 93; *В. Машевский* (Одесса) 91; *М. Межуева* (Челябинск) 91; *Р. Мешойрер*

(Москва) 77, 78, 80а), 83, 86, 88 б), в), 89, 91, 93, 94а); *Г. Микаелян* (Кафана) 76; *А. Миндлин* (Саратов) 88б), в), д), 89; *Д. Миндлин* (Ташкент) 78, 79, 83, 86, 88, 89, 91, 93; *А. Мирлин* (Ленинград) 76—79, 80а), б); *А. Молотовщиков* (Тейково) 83; *Б. Монхоо* (Улан-Батор) 91; *С. Морейно* (Москва) 91; *В. Морштейн* (Харьков) 93; *О. Мурсакулийев* (Сназань) 89; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 86, 88, 89, 91, 93, 94а); *Т. Наджафов* (Нахичевань) 88б), в), д), 91; *О. Намазов* (с. Фахрало ГССР) 91; *П. Натапов* (Москва) 89; *Б. Наткович* (Тбилиси) 89; *Н. Нестеренко* (Новосибирск) 85а)—д); *М. Нудельман* (Москва) 76—78, 80а), 82, 83, 85а) — в); *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) 91; *И. Облаков* (Ленинград) 76, 78а), б), 79а), 80а), в); *А. Опарин* (Горький) 78а), б) 80а), 82, 83, 88, 91, 92, 94а); *С. Осенний* (Киев) 91; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 78а), б); *И. Петренко* (Поти) 86, 89; *С. Печенкин* (Алма-Ата) 91; *В. Подругина* (Ангарск) 91, 93; *И. Пономарев* (Пенза) 86; *А. Попелюхин* (Киев) 76, 91; *В. Потебня* (Винница) 91; *Д. Привальский* (Москва) 91; *С. Пузанов* (Одинцово) 91; *Г. Пунинский* (Бобруйск) 76, 78; *Г. Пуричамиашвили* (Тбилиси) 91; *В. Радченко* (Киев) 91; *З. Райхштейн* (Ярославль) 77—79, 80а), б), 83, 86, 87—89, 91—93; *В. Решетников* (Муром) 91; *Н. Рибарска* (НРБ) 77, 78, 80а); *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) 76, 78а), 80а); *Н. Рубинштейн* (Ленинград) 91; *Г. Рыбкин* (Смоленск) 91; *А. Саблин* (Москва) 76—79, 80а); *И. Савенков* (Лысые горы Саратовской обл.) 78б), 80а), 88б), в), 89, 91; *С. Савченко* (Херсон) 91; *С. Сазонов* (Уфа) 83; *М. Салахли* (с. Сарачло ГССР) 93; *С. Самедов* (с. Зарнава АзССР) 91; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) 76—79; *С. Севастюк* (Невинномыск) 83, 85а), в); *М. Севрюк* (Москва) 76а), 77—80, 82, 83, 84, 85а)—д), 86, 88—92, 94; *П. Селиванов* (Семипалатинск) 91; *С. Семенякин* (Киев) 91; *А. Сивацкий* (Ленинград) 86, 89, 91—93, 94а); *С. Сидоренко* (Брянск) 91; *В. Скричевский* (Киев) 91; *В. Смелянский* (Москва) 91; 93; *А. Смыслов* (Конаково) 91; *О. Соболев* (Свердловск) 86, 89; *Ю. Солдатенко* (Пинск) 78а), б); *А. Сромин* (Ленинград) 86, 88б), в), 91; *С. Стадниченко* (Пенза) 80а), 83, 85в), 89, 91; *М. Стрешинский* (Донецк) 91; *М. Струнинский* (Северодонецк) 91, 93; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 78а); *Ф. Сухочев* (Ташкент) 86, 88д), е), 89, 91—93; *В. Сытенко* (Минск) 86, 91; *О. Тавчень* (Минск) 86, 91; *Э. Таджиларов* (Тбилиси) 86, 88; *А. Тартаковский* (Москва) 76а), 77—79, 80а), б), 82, 83, 84, 85а)—д); *К. Таталян* (Ереван) 76а), 78а), б), 79а), 80а), 86, 89, 90, 94а); *А. Татевосян* (с. Ншаван АрССР) 83; *И. Тилешов* (Алма-Ата) 83, 88б, в), 91; *С. Тихомиров* (Москва) 89, 91; *М. Торосян* (Ереван) 91; *В. Трофимов* (Москва) 76—79, 80а), в), 82, 83; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 89, 91; *И. Троянов* (Москва) 92; *О. Трушин* (Кострома) 91; *К. Туйтеев* (с. Ходжейли ККАССР) 91; *Г. Тюрин* (Курск) 83; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) 91; *Р. Убайдуллаев* (Ташкент) 84, 88, 91, 93; *А. Удавивхин* (Йошкар-Ола) 83, 86, 88б), в), 89, 91; *В. Уманский* (Баку) 86, 88б), в), д), 91, 94; *М. Фаддеев* (Ленинград) 76, 78б), 80а), в); *Н. Федин* (Омск) 78б), 83; *А. Филонов*; (Якутск) 91; *Б. Филь* (Львов) 83; *Г. Фирсова* (Ленинград) 76а), 78а), б), 80а), 83, 85а)—г), 88б), в), 89, 91, 93, 94а); *Харитонов* (Старая Русса) 78а, б); *С. Хосид* (Алма-Ата) 86, 88б), в), 91, 93; *Ю. Церковский* (Москва) 76б), 77, 78а), в); *З. Цихиставн* (Телави) 83; *П. Чеботарев* (Москва) 76, 78а), б), 80а), 86, 91; *Е. Чегирев* (п. Кадошкина МорАССР) 91; *И. Черная* (Ленинград) 91; *В. Шарафян* (Ереван) 91; *В. Шенкарь* (Киев) 78а),б); *А. Шихкеримов* (Сумгаит) 91; *В. Шматенко* (Ангарск) 83, 85а),в)—д), 88б), в), д), е), 89,91; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) 85а)—д); *Ф. Эрдман* (ГДР) 78б); *И. Эркенов* (Пенза) 78а), в), 91; *И. Якунин* (Ленинград) 91; *И. Яремко* (п. Долгое Закарпатской обл.) 91; *Н. Ярошенко* (с. Устивица Полтавской обл.) 88б, в), 91; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) 83.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф478—Ф492**, справились с задачами **Ф481**, **Ф483** и **Ф491**. Остальные задачи правильно решили: *М. Абдуллов* (Баку) 87; *К. Акопян* (Ереван) 79, 85; *А. Алексеев* (Гомель) 88; *М. Алексеев* (Обнинск) 80; *Н. Анисимов* (Раменское) 89, 90; *А. Антонян* (Ереван) 79; *А. Арутюнян* (Ленинакан) 78, 79; *А. Баргуев* (Улан-Удэ) 84; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 87, 88, 90, 92; *Г. Баскаков* (Южно-Сахалинск) 90; *В. Болотников* (Харьков) 79, 82; *Д. Василевич* (Ленинград) 79; *С. Веселянский* (Харьков) 79, 82; *А. Владимиров* (Ленинград) 86; *В. Гаврилов* (Орск) 80, 82; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 82; *В. Гаврилюк* (Староконстантинов) 90; *О. Ганболд* (Улан-Батор, МНР) 90; *В. Гаркавый* (Лида) 79, 80, 82, 88—90; *Ю. Гернер* (Ангарск) 92; *Ю. Горбунов* (Курск) 78—80; *О. Гребенчиков* (Уфа) 90; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) 87, 90; *С. Дынник* (Тараклия) 90, 92; *А. Заболотских* (Чусовой) 87; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) 78—80, 84—90, 92; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 78—80, 84, 86—90; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 78, 79, 84, 86, 88, 89; *Я. Калейдзидис* (Чимкент) 82, 84, 86, 88—90; *А. Карнаухов* (п. Кутана ЯАССР) 78, 79; *И. Кевхишвили* (Тбилиси) 86, 87; *В. Кобелев* (Щигры) 79, 80, *В. Комов* (Александров) 80, 82, 85, 86, 89, 92; *А. Коробейников* (Балашов) 89; *И. Коротков* (Волгоград) 86, 89, 90; *Г. Корчемский* (Кишинев) 82, 85, 87; *В. Костур* (Киев) 88—90; *В. Костусян* (Запорожье) 85, 86, 89; *А. Краджян* (Ереван) 82, 89; *А. Куприн* (Москва) 82, 88; *Т. Кухтина* (Киев) 92; *Л. Кушнир* (Астрахань) 78, 82; *В. Лашкин* (Киев) 82, 86, 88, 90; *А. Левченко* (Свердловск) 79,

(Окончание см. на с. 91)

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на выходящие в IV квартале книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям.

Математика

Издательство «Наука»

1. Кокстер Г. С. М., Грейтцер С. Л. *Новые встречи с геометрией*. Перевод с англ. Объем 13 л., тираж 50 000 экз., ц. 87 к.

Эта книга знакомит читателя с красивейшими результатами и методами геометрии, открытыми как в древности, так и в более позднее время. В ней содержатся и результаты, непосредственно примыкающие к школьному курсу геометрии (окружность девяти точек, теорема Чевы, геометрические преобразования), и идеи, приводящие к инверсивной и проективной геометриям.

Книга чрезвычайно удачно расширяет и дополняет школьную программу по геометрии. Поэтому «Новые встречи с геометрией» явятся прекрасным пособием для работы школьных математических кружков, тем более, что после каждого раздела имеется большое количество задач.

Одну из глав этой книги мы публиковали в «Кванте» — см. «Квант», № 7, статью «Задача о трех кувшинах».

Простое и доступное изложение делает книгу интересной широкому кругу читателей, которые смогут, благодаря ей, познакомиться с красотой и богатством идей геометрии.

Издательство «Просвещение»

2. Виленкин Н. Я. *Функции в природе и технике*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 30 к.

В книге рассказывается о различных приложениях элементарных функций, изучаемых в школе, о развитии и применении дифференциального и интегрального исчислений, о том, как математики ищут оптимальные решения задач.

Книга будет полезна учащимся старших классов, желающим больше узнать об изучаемых в школе функциях.

Физика

Издательство «Наука»

1. Китайгородский А. И. *Физика для всех. Фотоны и ядра*. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., ц. 38 к.

Книга задумана как заключительная часть «Физики для всех» Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского, неоднократно издававшейся в нашей стране и переведенной на многие языки мира. В книге изложены основные сведения, касающиеся электромагнитных волн, теплового излучения, учения о спектрах; приведены примеры наиболее распространенных лазеров; много внимания уделено ядерной физике. Отдельные разделы посвящены механике быстрых движений (специальная теория относительности) и движению малых частиц (волновая механика).

2. Шаскольская М. П. *Кристаллы*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

3. Шаскольская М. П. *Очерки о свойствах кристаллов*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

Эти книги представляют собой отдельные части полностью переработанного и расширенного издания книги «Кристаллы», издававшейся в 1944 и 1957 годах.

В первой книге рассказывается о росте кристаллов в природе — под землей, в глубинах морей, в пещерах, и минеральных месторождениях, в облаках — и о выращивании кристаллов в лабораториях. Во второй книге — о структуре кристаллов и о влиянии структуры на свойства кристаллов.

Простая и занимательная форма изложения делает книги доступными и интересными для многих читателей. Их с интересом прочтут школьники старших классов.

4. Тимофеев А. В. *Роботы и искусственный интеллект*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., ц. 38 к.

В книге рассматриваются различные функциональные схемы роботов и современное состояние проблемы моделирования интеллекта. Дается представление о принципах, алгоритмах и средствах очувствления и управления роботами. Особое внимание уделяется проблеме создания элементов интеллекта роботов. Обсуждаются вопросы применения роботов и систем искусственного интеллекта в промышленности, в космических и подводных исследованиях.

5. Казютинский В. В., Комаров В. И. *Взрывающаяся Вселенная*. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., ц. 70 к.

В книге рассматриваются основные вехи революции в современной астрономической науке, те острые споры и дискуссии, которыми сопровождается рождение новых представлений о Вселенной, связанных с открытиями последних лет: активностью ядер галактик, квазарами, пульсарами, «черными дырами». Авторы делают попытку выяснить причины, которые приводят к тому, что в ряде случаев одним и тем же астрономическим фактам даются противоположные научные истолкования. Рассматривается также вопрос о том, какой вклад вносит новая картина Вселенной в научное мировоззрение.

Книга, написанная живо и интересно, рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся современной астрономией.

6. Лишевский В. П. *Популярная механика*. Объ-

ем 8 л., тираж 50 000 экз., ц. 30 к.

Книга посвящена теоретической механике. В ней на отдельных примерах в популярной и занимательной форме рассматриваются основные законы этой науки — теоретической базы всей техники.

7. Ирина В. Р., Новиков А. А. *В мире научной интуиции*. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., ц. 65 к.

В книге рассматриваются процессы научного творчества, обусловленные действием интуиции. Удивительные, неожиданные, подчас трудно объяснимые возможности этой важной особенности человеческого разума раскрываются на конкретных примерах из области физики.

8. Смирнов Г. Д. *Управление космическими аппаратами*. Объем 10 л., тираж 25 000 экз., ц. 65 к.

Развитие ракетно-космической техники потребовало форсированной разработки методов, средств и систем управления космическими аппаратами различных типов. Об этой новой области техники и рассказывается в книге.

9. Филонович С. Р. *Лучи, волны, кванты*. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., ц. 65 к.

Книга посвящена истории оптики — одного из наиболее развитых разделов современной физики. Показано влияние оптических исследований на развитие других областей физики (электродинамики, теории относительности, квантовой механики). Отражена история прикладной оптики, история создания оптических приборов.

Издательство «Мир»

10. Тригг Дж. Л. *Занимательные вехи в экспериментальной физике*. Перевод с англ. Объем 22 л., тираж 30 000 экз., ц. 1 р. 70 к.

История открытия сверхпроводимости и сверхтекучести, создание первого транзистора и первого лазера, основные эксперименты в области атомной и ядерной физики — таков вкратце круг вопросов, рассматриваемых известным американским ученым Джорджем Л. Триггом.

Популярная и одновременно строго научная форма изложения, богатый фактический и иллюстративный материал привлекут к книге внимание широкого круга читателей.

Издательство «Просвещение»

11. *Школьникам о современной физике. Физика сложных систем*. Составитель Угаров В. А. Объем 12 л., тираж 100 000 экз., ц. 57 к.

Предлагаемая книга предназначена школьникам старших классов, интересующимся физикой. Она поможет им углубить и расширить полученные в школе знания, даст много новых сведений из современной физики. В книге содержится девять рассказов на различные актуальные темы: «Фазовые переходы», «Квазичастицы и фотоны», «Излучение частиц, движущихся быстрее света» и др.

12. Ланге В. Н. *Физические парадоксы и софизмы*. Издание 3-е, переработанное. Объем 8 л., тираж 100 000 экз., ц. 25 к.

Книга содержит различные по тематике и степени трудности занимательные задачи, парадоксы, софизмы по всем разделам школьного курса физики. Все задачи имеют краткие решения.

13. Елисеев А. А. *Б. С. Якоби*. Объем 6 л., тираж 80 000 экз., ц. 20 к.

В книге рассказывается о жизни, научной и общественной деятельности выдающегося изобретателя, инженера и физика Б. С. Якоби.

«Атомиздат»

14. Шелест В. П. *Новый круг (структура элементарных частиц)*. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., ц. 30 к.

Уже много лет физики изучают мельчайшие частицы вещества, которые принято называть элементарными. Но оказывается, эти частицы совсем не элементарные, а очень сложные. В последние годы (в результате серии важных открытий экспериментаторов и работ теоретиков) стало ясно, что у этих частиц необычная структура, и разнообразие их намного больше, чем предполагалось.

И. Клумова,
М. Смолянский

Символический язык математики

В математике приходится иметь дело с различного рода утверждениями. Некоторые из них удается доказать (с помощью тех или иных рассуждений, опираясь на определенные исходные утверждения), другие — удается опровергнуть. В сущности, всякая математическая теория занимается доказательством или опровержением формулируемых в рамках этой теории утверждений.

Но как, собственно, устроены математические утверждения? Каковы те законы и правила, по которым мы рассуждаем — выводим одни утверждения из других? Этими вопросами занимается специальная математическая наука, называемая *математической логикой*. Знакомство с этой наукой — важное и увлекательное дело, помогающее проникнуть в дух современной математики.

Существует уже немало книг, посвященных изложению различных разделов математической логики. Среди них имеются книги, которые либо непосредственно адресованы, либо вполне доступны старшеклассникам. Остановимся коротко на двух таких книжках, вышедших в последние годы:

А. Д. Кутасов, *«Элементы математической логики»* (М., «Просвещение», 1977, 62 стр.).

С. Л. Эдельман, *«Математическая логика»*

(М., «Высшая школа», 1975, 170 стр.).

Первая из этих книг написана специально для учащихся 9—10 классов. В ней рассказывается о начальных понятиях математической логики, о ее символическом языке и его выразительных возможностях. Автор, опираясь на удачно подобранные примеры, весьма просто и доходчиво освещает такие вопросы, как *необходимые и достаточные условия*, *взаимно обратные* и *взаимно противоположные* утверждения. Значительное внимание уделяется так называемым *утверждениям общности*, объясняется, как такие утверждения доказываются с помощью *принципа математической индукции* и как они опровергаются *на контрпримерах*.

Читателя, несомненно, заинтересуют рассматриваемые в книге приложения символической логики, в частности — решение традиционных для популярной математики «логических» задач.

Вот одна из таких задач:

Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд Мустанг» и ни в коем случае не синий. Стало известно, что, желая запутать следствие, каждый из них указал правильно либо только марку машины, либо только ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?

Оказывается, ответ на этот вопрос можно попросту «вычислить». Как именно это сделать — подробно объясняется в книге.

Важным достоинством книги Кутасова являются помещенные в ней задачи. Часть из них разобрана, другие предназначены для самостоятельного решения и снабжены подробными указаниями и ответами.

ЭЛЕМЕНТЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛОГИКИ

Тогда как книга Кутасова посвящена почти исключительно структуре математических утверждений и написана совершенно элементарно, книга Эдельмана идет значительно дальше и потребует от читателя серьезных усилий (но не предварительных знаний). Здесь тоже — и притом более подробно — рассматривается язык, на котором формулируются математические утверждения, но сверх этого изучаются важнейшие понятия *логического следствия*, *вывода* и *доказательства*. Основное внимание уделено анализу и формальному описанию тех средств, с помощью которых из одних утверждений разрешается выводить другие.

Рассмотрим для примера такое незамысловатое рассуждение: *Всякий ромб является параллелограммом, фигура ABCD — ромб; значит, фигура ABCD — параллелограмм.* Из книги Эдельмана читатель узнает, что данное рассуждение получается как частный случай некоторой общей схемы рассуждений и что всякое математическое доказательство сводится, по существу, к последовательному использованию нескольких таких схем.

В книге Эдельмана более детально, чем в книге Кутасова, освещается вопрос о применении символического языка к конструированию так называемых *переключательных схем*. Рассматривается, например, задача об управлении мотором лифта при спуске с какого-нибудь этажа на первый. Приведение мотора в действие зависит от целого ряда условий (закрыты ли двери шахты на обоих этажах и двери кабины, находится ли пассажир в кабине, нажата ли кнопка спуска в кабине, нажата ли кнопка вызова на первом этаже). В книге составляется формула, учитывающая все эти условия, и строится соответствующая переключательная схема.

Терпеливый и вдумчивый школьник мог бы в принципе начать знакомство с математической логикой непосредственно по книге Эдельмана. Однако проще изучить сперва более элементарную и легко читаемую книгу Кутасова. Тем, кого заинтересует предмет, книгу Эдельмана можно рекомендовать как сравнительно доступное и вместе с тем достаточно основательное введение в «серьезную» математическую логику.

Конечно, рекомендуемые здесь книги нельзя признать совершенно безупречными. На наш взгляд, например, в книге Кутасова не всегда удачно продуманы обозначения, а в книге Эдельмана желательно было бы увеличить число упражнений (особенно в важной третьей главе). Надо полагать, авторы будут стараться улучшить свои пособия в следующих изданиях. В целом, однако, каждая из книг представляет собой доброкачественное, основанное на должном педагогическом опыте, введение в предмет.

Ф. Леонидов

IX праздник юных математиков в Батуми

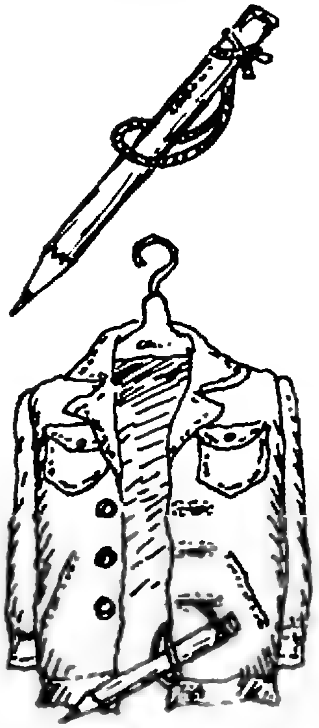
С 4 по 9 ноября 1977 года в Батуми проходила очередная математическая конференция школьников. Эта конференция стала замечательной традицией. Кроме батумских школьников в ней приняли участие почти 150 школьников из Тбилиси, Сухуми и других городов Грузии, из Баку, Еревана, Киева, Москвы и Риги. На конференции было прочитано 28 докладов. Пять из них были отмечены специальными грамотами оргкомитета и жюри. Кроме этого еще десять докладов были отмечены как интересные.

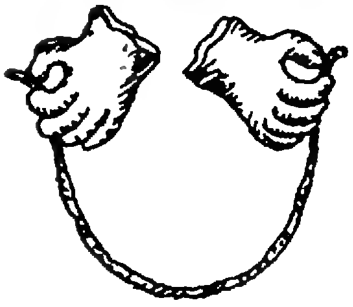
Доклады были самые разные: в одних ребята рассказывали о собственных исследованиях, в других — о том, что они прочитали в книгах или в «Кванте». Обычно после доклада кто-нибудь из членов жюри выходил к доске, комментировал доклад, говорил о близких вопросах.

Некоторые доклады были посвящены не решенным до конца задачам. Например, в докладе А. Алексеева (Москва, 18' интернат) рассматривалась такая игра.

Играют двое. Они по очереди вписывают в таблицу 3×3 *числа от* 1 *до* 9 *(каждое число должно быть использовано). Когда таблица заполнена, подсчитывают две суммы: сумму* S_1 *произведений по столбцам и сумму* S_2 *произведений по строкам. Если* $S_1 > S_2$*, выигрывает начинавший игру, если* $S_1 < S_2$ *— выигрывает второй игрок.*

Докладчик исследовал игру с помощью электронной вычислительной машины и научил ЭВМ выигрывать. Однако он не сумел доказать, что найденная им стратегия приводит к победе всегда. Может быть, вам удастся придумать стратегию и доказать про нее, что она наверняка приводит к победе?





Чрезвычайно большой интерес вызвал у участников и многочисленных зрителей математический КВН. Первое место в нем заняла команда 19-й московской школы, второе — 208-й киевской школы и третье — команда 57-й московской школы. В конкурсе капитанов победил москвич Витя Гальперин (57 школа), победитель всесоюзных и международной олимпиад. Он сумел выиграть по олимпийской системе у остальных капитанов в такую игру:

Из трех куч камней за один ход можно либо взять несколько камней из одной кучи, либо равное число камней из двух куч. Играют двое. Выигрывает игрок, взявший последний камень.

Быстрее всех удалось ему и расцепить карандаш с веревкой и пиджак, не разрывая веревки и не ломая карандаша (см. рисунок). Попробуйте разобраться с этой головоломкой. Заодно попытайтесь, взяв за концы кусок бичевки и не выпуская их затем из рук, завязать на нем узел.

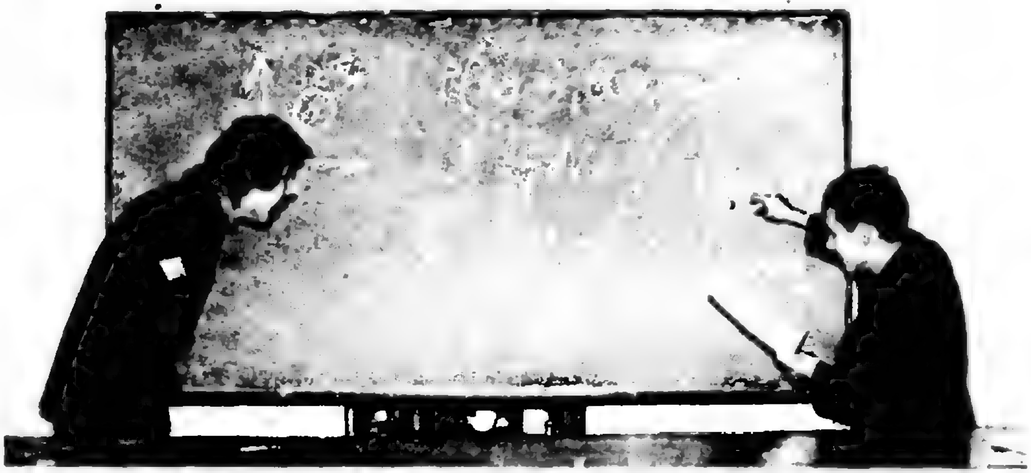
Приятно отметить, что конференция, в которой несколько лет назад принимали участие только школьники Закавказья, стала теперь практически всесоюзной. Это произошло благодаря энергии и энтузиазму Батумского горкома КПСС, Аджарского обкома и городского комитета ВЛКСМ, министерства просвещения Аджарской АССР, Совета профсоюза Аджарии, Аджарского отделения общества «Знание» и других республиканских и городских организаций и таких энтузиастов, как учитель математики батумской школы № 7 М. Жгенти.

Мы надеемся, что география батумского праздника математики в ближайшие годы еще более расширится. Хотелось бы, чтобы число городов, проводящих подобные конференции, тоже увеличилось.

Ждем ваших писем с рассказами о таких встречах школьников.

Л. Макаро■

LiKBaCaNaMgALZnFeSnPbHCu2HgAgPtAu



Математика — будущему рабочему

Кем быть, чему посвятить свою жизнь, куда пойти учиться — с этими вопросами сталкивается каждый молодой человек на пороге самостоятельной жизни. Многие, решая эти вопросы, поступают после 8 класса в профессионально-технические училища, где вместе со средним образованием получают рабочую специальность. Например, в Ленинграде число учащихся в ПТУ уже сейчас превышает число учеников 9—10 классов. В современных ПТУ прекрасные кабинеты, лаборатории, читальные залы — одним словом все, что необходимо для получения полноценного общего образования. Конечно, кабинеты и оборудование — не самое главное. Сейчас много делается для того, чтобы хорошие традиции, накопленные нашей школой, перенести в ПТУ. «Квант» уже писал об олимпиадах по математике и физике для учащихся ПТУ, в течение трех лет организующихся в Ленинграде. Дважды команда учащихся профтехучилищ выступала на заключительном туре Всесоюзной математической олимпиады. В этом году большая группа выпускников ПТУ Ленинграда рекомендована к поступлению на дневные отделения вузов. Во многих училищах работают математические и физические кружки, проходят недели математики, перед ребятами выступают с лекциями научные сотрудники и преподаватели институтов.

Иногда задают вопрос — зачем будущему рабочему трудные математические понятия, задачи, кружки, олимпиады? Мы не будем пространно агитировать за занятия математикой. Просто хочется сказать о том громадном удовлетворении, которое получает человек, для которого математика становится другом и необходимым спутником. Таких людей среди учащихся ПТУ становится все больше и больше, и журнал «Квант» будет рад помочь им в общении с нашей древней и вечно молодой наукой.

В феврале этого года в Ленинграде состоялась, ставшая традиционной, IV физико-математическая олимпиада учащихся профтехучилищ; впервые была проведена олимпиада и по химии. Олимпиада проходила в два тура. В первом туре олимпиады участвовали почти все учащиеся 149 ПТУ города и области. Второй, заключительный тур, организацию которого в этом году взял на себя ЛЭТИ, собрал около 500 победителей первого тура. В течение четырех часов решали задачи, затем активно участвовали в разборе решений этих задач. Завершился этот день праздничным вечером в Доме культуры учащихся профтехобразования, где победителям были вручены дипломы, грамоты и многочисленные призы.

Ниже мы приводим тексты некоторых задач по математике Ленинградской олимпиады профтехучилищ.

I курс

1. Длины оснований равнобочной трапеции — 4 см и 8 см, а длина боковой стороны — 5 см. Какую сторону пересекает биссектриса угла при бо́льшем основании: меньшее основание или боковую сторону?

2. Сколько корней имеет уравнение $x^2 + ax + b = 0$, если известно, что $100 + 10a + b < 0$?

3. Дан куб с ребром 1. Доказать, что сумма расстояний от любой точки внутри куба до всех вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

4. Стальную плитку размером 60 см × 85 см обвели карандашом на бумаге. Найдите центр полученного прямоугольника, имея лишь эту плитку и карандаш.

5. Дама сдавала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Чемодан весит больше, чем рюкзак; саквояж и рюкзак вместе весят больше, чем две остальные вещи, а корзина и саквояж вместе весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Какая из вещей самая тяжелая, а какая самая легкая?

II курс

1. В окружности проведена хорда, стягивающая дугу в 120°. Можно ли провести через середину этой хорды другую хорду, делящуюся в точке пересечения хорд в отношении 1 : 4?

2. Существуют ли такие числа a и b, что область значений функции

$$y = a + b\sqrt{2}(\cos x + \sin x)$$

совпадает с отрезком $[-3; 15]$?

3. В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB втрое меньше стороны AD. Сторона AD точками K и P разделена на три конгруэнтные части ($|AK| = |KP| = |PD|$). Найти тангенс суммы углов $\widehat{BPA}$ и $\widehat{BDA}$. Какой вывод можно сделать о сумме углов $\widehat{BKA}$, $\widehat{BPA}$ и $\widehat{BDA}$?

4. Доказать, что в любом шестизначном числе можно так переставить цифры, чтобы сумма первых трех цифр отличалась от суммы последних трех цифр меньше, чем на 10.

III курс

1. Сколько корней имеет уравнение

$$x^4 + x^3 = 10?$$

2. Человек стоит на заснеженном поле на расстоянии h от прямолинейного асфальтированного шоссе. Его скорость при движении по снегу вдвое меньше скорости на асфальте. Какое расстояние человек должен пробежать по снегу так, чтобы как можно быстрее добраться до некоторой (достаточно далеко расположенной) точки на шоссе?

3. Доказать, что при всех $x > 2$ выполнено неравенство: $5^x > 3^x + 4^x$.

4. Существует ли многогранник, имеющий 35 ребер?

М. Башмаков, Т. Братусь, С. Поздняков

(Начало см. на с. 84)

82, 86, 87, 90; *Д. Людмирский* (Киев) 79, 82, 84, 86—90, 92; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) 79, 90; *С. Мартынов* (Белгород-Днестровский) 86; *С. Медведев* (Москва) 79, 89, 90; *В. Микулов* (Павлоград) 90; *А. Мирлин* (Ленинград) 79; *Н. Миронов* (Кашин) 88, 92; *А. Михеев* (Пермь) 87—89; *А. Мкртчян* (Ленинакан) 78, 79, 82; *А. Могильнер* (Свердловск) 86, 90; *И. Молчанов* (Киев) 78, 79, 90; *Б. Наткович* (Тбилиси) 90; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) 79, 86, 87, 90; *Г. Нечаева* (Курск) 79, 90; *А. Никитенков* (Великие Луки) 78—80, 82, 84—90, 92; *В. Никитин* (Запорожье) 92; *А. Оглоблин* (Иркутск) 90; *А. Опарин* (Горький) 82, 86, 89, 90, 92; *К. Оразов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) 78, 84; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 78, 90; *Т. Павелкина* (Киев) 90; *В. Переверзев* (с. Лукьяновка Омской обл.) 86, 90; *С. Пивницкий* (Виклини, ПНР) 90, 92; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) 85—90, 92; *А. Попов* (Чусовой) 82, 87; *А. Родин* (Великие Луки) 88, 90; *Л. Рожанский* (Москва) 84—88; *И. Романов* (Москва) 85; *А. Ряр* (Новосибирск) 87; *Д. Самедов* (Масаллы) 90; *Г. Сизых* (Ангарск) 92; *В. Смышляев* (Ленинград) 84, 85, 88—90; *С. Старков* (Белебей) 89, 92; *А. Сторожев* (Актюбинск) 78; *Р. Султанов* (Ташкент) 85, 87; *В. Токарев* (Новосибирск) 90; *О. Трушин* (Кострома) 89; *Н. Федин* (Омск) 85, 88—90, 92; *А. Фомин* (Новосибирск) 87, 90, 92; *Ю. Хомяков* (Белорецк) 90; *А. Чекмизов* (Краснодар) 90; *В. Шанин* (Небит-Даг) 90; *Д. Шафер* (Ленинград) 86—88; *Н. Шестопал* (Киев) 85, 86, 89, 90, 92; *И. Шляхова* (Лобня) 86, 89, 92; *Ф. Эрдманн* (Цейтц, ГДР) 79; *М. Эфроимский* (Ленинград) 92; *Д. Юрьев* (Москва) 87; *Ю. Янчук* (п/о Иванополь Житомирской обл.) 80.

Т. Уоолкер, А. Слек

Откуда взялся «он»?

Даже случайные свидетели профессионального разговора физиков могут заметить, что разговор пестрит словами, оканчивающимися на «он»: фотон, фонон, электрон, магнон и т. д.

Каково происхождение этих слов? Кто был их «изобретателем»? Кто ввел их в обиход?

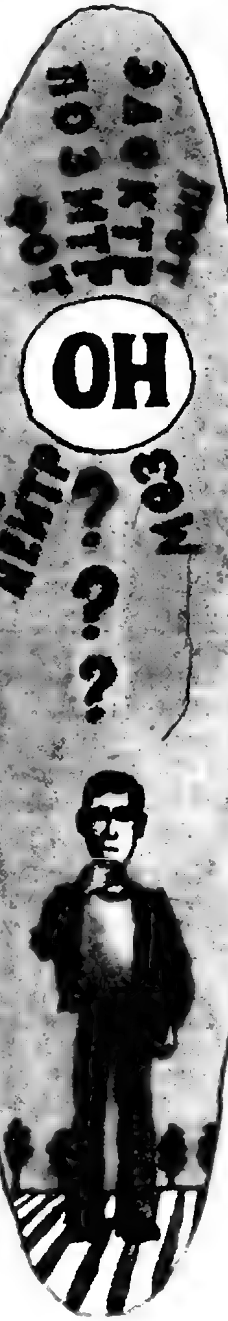
Термин «электрон» (для обозначения носителя электрического заряда) появился в 1891 году. Это слово происходит от греческого ηλεκτρον, что означает «янтарь».

В 1920 году появилось слово «протон», которое происходит от πρωτοσ, означающего «первый». Переход от «σ» к «ν» в конце слова был продиктован желанием согласовать новый термин со словом «электрон».

В 1921 году возникло название «нейтрон»: соединение слова «нейтральный» с окончанием в стиле электрона и протона.

В 30-е годы наблюдалось некоторое отступление от традиции в наименовании частиц — появились термины «мезотрон» и «позитрон». От первого названия физики впоследствии отказались, второе было сохранено. Для образования этих слов от «электрона» было отделено звукосочетание «трон», в качестве корней использовались греческое μεσορ («средний») и латинское positivus («положительный»).

Сочетание «трон» ныне определяется как суффикс, подчеркивающий принадлежность предмета к приборам (например, «циклотрон» и другие названия для ускорителей частиц). Оно ведет свою родословную, по-видимому, от старого шотландского слова tron, одно из значений которого — «прибор для взвешивания».



Термин «мезотрон» вскоре был заменен термином «мезон», и теперь «он» является традиционным суффиксом, служащим для всего спектра частиц в физике.

Проследим историю наименования некоторых частиц, фигурирующих в физике.

Электрон

Имя ирландского физика Георга Джонстона Стони не часто упоминается в современных работах по физике. Однако он еще в 1874 году постулировал, что должны существовать «определенные количества электричества», величину которых он определил из опытов по электролизу. В 1891 году Стони предложил название для этих частиц: «Автор обращал внимание на существование определенных количеств электричества в 1874 году... Эти заряды, которые удобно назвать электронами, не могут быть отделены от атома, они проявляются, когда атомы химически связываются».

Стони никак не мог показать, что электроны существуют на самом деле; скорее он продемонстрировал, что они должны существовать. Существование электрона, как частицы, было доказано Томсоном в 1897 году.

Нейтрон и протон

Нейтрон был открыт в 1932 году Дж. Чэдвиком.

Эта статья — сокращенный перевод работы американских авторов, опубликованной в Американском физическом журнале (American Journal of Phisics, 1970, т. 38). Перевод и подготовка к публикации В. Чернева.

Чэдвик указывает, что название открытой им частицы принадлежит Резерфорду, и цитирует лекцию Резерфорда, читанную в 1920 году в Королевском обществе в Лондоне. В этой лекции Резерфорд предсказывает существование некой нейтральной частицы, состоящей из тесно связанных ядра водорода и электрона. Однако он не использует названия «нейтрон». Ни одна из работ Резерфорда за 1920—1921 годы не содержит этого слова. Мы думаем, что название «нейтрон» было однажды предложено Резерфордом в лаборатории, и слово это прижилось, но в литературе оно появилось впервые в 1921 году.

Резерфорд также предложил слово «протон». Это произошло на собрании Британской ассоциации в 1920 году. Отчет об этом собрании гласит: «Показано, что элементы могут рассматриваться состоящими из водородных ядер или «протонов», как их назвал сэр Эрнест Резерфорд».

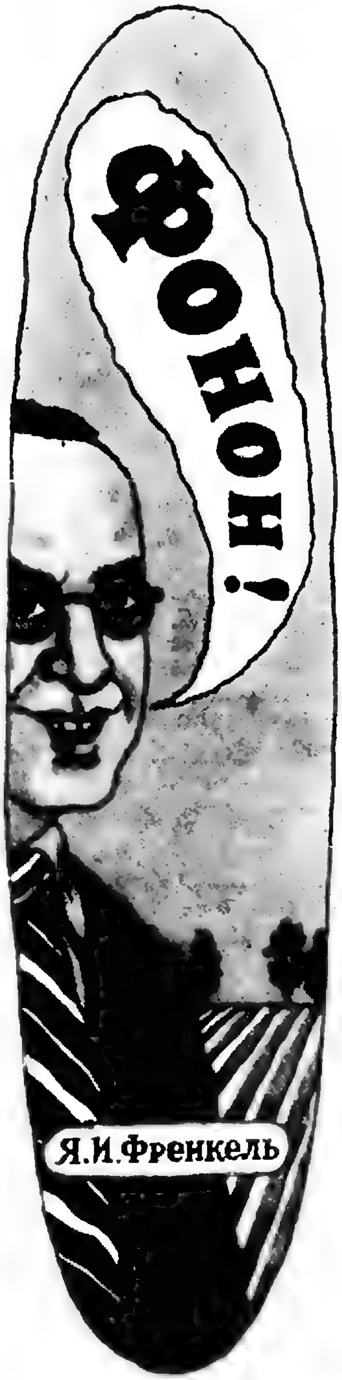
Фотон

Это слово используется для описания корпускулярных свойств электромагнитного поля. Автором такой концепции большинство физиков, вероятно, считает Эйнштейна. Многие книги по современной физике ссылаются на знаменитую статью Эйнштейна 1905 года о фотоэффекте, в которой он писал: «Согласно сделанному здесь предположению, энергия пучка света, вышедшего из некоторой точки, не распределяется непрерывно во все возрастающем пространстве, а складывается из конечного числа локализованных в пространстве неделимых квантов энергии, поглощаемых или возникающих только целиком».

Однако Эйнштейн не использовал термин «фотон» в своей статье. Он был введен в физику гораздо позднее, в 1926 году.

Но кем же именно введен этот термин?

Выпуск журнала «Nature» («Природа») от 18 декабря 1926 года содержит статью Льюиса «Сохранение фотонов», в которой это слово вводится впервые: «Я беру на себя смелость ввести для этого гипотетического нового атома, который не является светом, но играет существенную роль в любом процессе излучения, название «фотон».



Фонон

Квант энергии звуковых волн в кристалле, представление о котором ввел советский физик И. Е. Тамм, получил свое название по прямой аналогии с фотоном.

Кто же дал ему это название?

Оно было предложено советским физиком Я. И. Френкелем в книге «Волновая механика» (1932 г.): «Так же, как и в случае света и электронов, можно сопоставить звуковые волны с некоторого рода частицами, которые мы будем называть «фононами», и заменить изучение тепловых колебаний, образующих эти волны, изучением соответствующих фононов».

От редакции

Окончание «он» в названии элементарных частиц стало уже традицией. После «мезонов», «гиперонов» и других частиц, открытых в последнее время, эта традиция была перенесена на названия не самих частиц, а особых состояний частиц, взаимодействующих с излучением или другими частицами. Так появились «экситон», «поляроны», «магнон», «плазмон», «вакансион» и т. д.

Мы не будем здесь касаться этих «частиц», иначе нам пришлось бы рассказывать о всей современной физике, что невозможно.

Суммы и произведения

19. Преобразуйте $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k (k+1)^2}{\left(C_{2n-1}^k\right)^2}$ двумя способами: по методу «туда — назад» и основываясь на соотношении

$$2n\, C_{2n-1}^k = (k+1)\, C_{2n}^{k+1}.$$

20—22. Получите соотношения между различными суммами вида $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k k^l \left(C_n^k\right)^2$ для $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, пользуясь методом «туда — назад» и соотношением $(n+1)\, C_n^k = (k+1)\, C_{n+1}^{k+1}$.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 32)

1. Указание. Возьмем на координатной плоскости точки

$M_k (k;\ \sqrt{k})$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Тогда

$|M_{k-1}M_k| = \sqrt{2k - 2\sqrt{(k-1)\,k}}$,

а $|M_0M_n| = \sqrt{n\,(n+1)}$.

2. а) Нет (рассмотрите остаток от деления A на 9); б) 954; в) 2961, 3870, 5823, 7642, 9108 (других автор не знает); г) два 9 876 543 210 и 987 654 321; е) $N \geqslant 3$

3. Указание. Каждый член последовательности, начиная со второго, равен $S_n/(S_n - 1)$, где S_n — сумма (или произведение) всех предыдущих членов.

Когда существует предел?

1. Указание. На отрезках $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$ $(k \in Z)$ $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$.

Ответ. Не является.

2. Последовательность (x_n) — убывающая, поскольку $x_{n+1} - x_n < 0$.

3. Указание. $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.

4. Указание. Докажите, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geqslant 1 + \frac{m}{2}$.

5. Ответ. 2.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Условия задачи сокращенно можно записать так:

1) $\alpha \to \beta\ (1) + \gamma\ (4)$;
2) $\beta \to \gamma\ (3) + \alpha\ (2)$;
3) $\gamma \to \alpha\ (5) + \beta\ (0)$

(α, β и γ — буквы греческого алфавита: α — «альфа», β — «бета» и γ — «гамма»).

Из 1-го условия видно, что задачи «Беты» сложнее задач «Гаммы», ибо их решено меньше. Следовательно, по сложности задач $\beta > \gamma$ (значок $>$ в данном случае означает «сильнее»). Аналогично, из 2-го условия делаем вывод, что $\alpha > \gamma$, а из 3-го — что $\beta > \alpha$. Итак, по сложности составленных задач $\beta > \alpha > \gamma$. Следовательно, в первом конкурсе команда «Бета» получила 2 балла, а команда «Альфа» — 1 балл.

Сравнивая условия 1) и 2), видим, что «Альфа» решила больше задач «Гаммы», чем «Бета». Следовательно, по умению решать задачи $\alpha > \beta$. Сравнивая условия 2) и 3), делаем вывод, что $\gamma > \beta$, а сравнивая условия 1) и 3), получаем, что $\alpha > \gamma$. Итак, по умению решать задачи $\alpha > \gamma > \beta$; «Альфа» получила 2 балла, «Гамма» — 1 балл.

После двух конкурсов у «Альфы» 3 балла, у «Беты» — 2 балла и у «Гаммы» — 1 балл. Следовательно, на 1-м месте «Альфа», затем следуют «Бета» и «Гамма».

2. Два решения: КОЛЯ = 1974 и КОЛЯ = 4827.

3. Табличка 1 устроена так: $625 = 5^4$, $8 = 8^1$, $216 = 6^3$, поэтому недостающее число — это $49 = 7^2$.

В табличке 2 восемь чисел попарно равны: $\frac{1}{3} = 0{,}(3)$; $\frac{1}{8} = 0{,}125$; $3\frac{2}{7} = \frac{23}{7}$; $\frac{4}{11} = 0{,}(36)$, так что лишнее число — $\frac{4}{13}$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 1/VIII-78
Подписано в печать 14/IX-78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Усл печ. л. 8,4 Уч-изд. л. 9,99 Т-16198
Цена 30 коп. Заказ 1704 Тираж 301250 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли.
г Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Анкета

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

● Для улучшения работы журнала и более полного удовлетворения ваших интересов редакция просит вас ответить на следующие вопросы.

● Ответы можно присылать на этой отрывной странице, а можно на отдельном листке бумаги (сохранив нумерацию вопросов).

● В части вопросов достаточно подчеркнуть ваш вариант ответа или написать «да» или «нет», в других желательно дать подробный ответ.

● Редакция будет вам очень признательна, если дополнительно к анкете вы (отдельно) напишите свое общее мнение о журнале, приведете примеры, когда он вам помог (и чем), укажете, что вас наиболее интересует в журнале, чем он еще мог бы вам помочь.

● Анкету просим высылать по адресу:

113035, МОСКВА М-35, Б. ОРДЫНКА 21/16, АНКЕТА «КВАНТА».

1. *Ваши фамилия, имя, отчество, возраст, место учебы (город, школа, класс) или работы (профессия, специальность), круг интересов (математика, физика)*

____

____

2. *Сколько лет вы читаете «Квант»?* ______________

3. *Сколько человек читают ваши номера «Кванта»?* ______________

4. *Материалы каких рубрик журнала вас больше всего интересуют и доступны для вас (подчеркните красным)? Какие не интересуют или не нравятся (подчеркните черным)?*
Общие статьи; «Математический кружок»; «Математический практикум»; «Лаборатория «Кванта»; «Задачник «Кванта»; «Квант» для младших школьников»; «По страницам школьных учебников»; «Практикум абитуриента»; «Рецензии, библиография»; «Информация»; «Олимпиады»; «Уголок коллекционера»; «Смесь»; «Ответы, указания, решения».

5. *Назовите 2—3 лучшие статьи (за 1977—1978 годы) из разных рубрик журнала* ______________

____

____

6. *Недавно в журнале появилась новая рубрика «По страницам школьных учебников». Доступны ли вам материалы этой рубрики?* ________
Помогают ли они вам? ______________ *На какие еще темы вы хотели бы видеть статьи под этой рубрикой?* ______________

____

____

____

7. В Задачнике «Кванта» уже опубликовано более 1000 задач по математике и физике. Понятны ли вам решения этих задач? ____________

Мы хотели бы получить ваши оценки этих задач по 7-балльной системе (1 — совсем плохая задача..., 7 — одна из лучших оригинальных задач). Пришлите нам (на отдельном листе) оценки тех задач, которые вам запомнились.

8. Нравится ли вам оформление журнала? ____________

Какие статьи оформлены по вашему мнению хорошо ____________

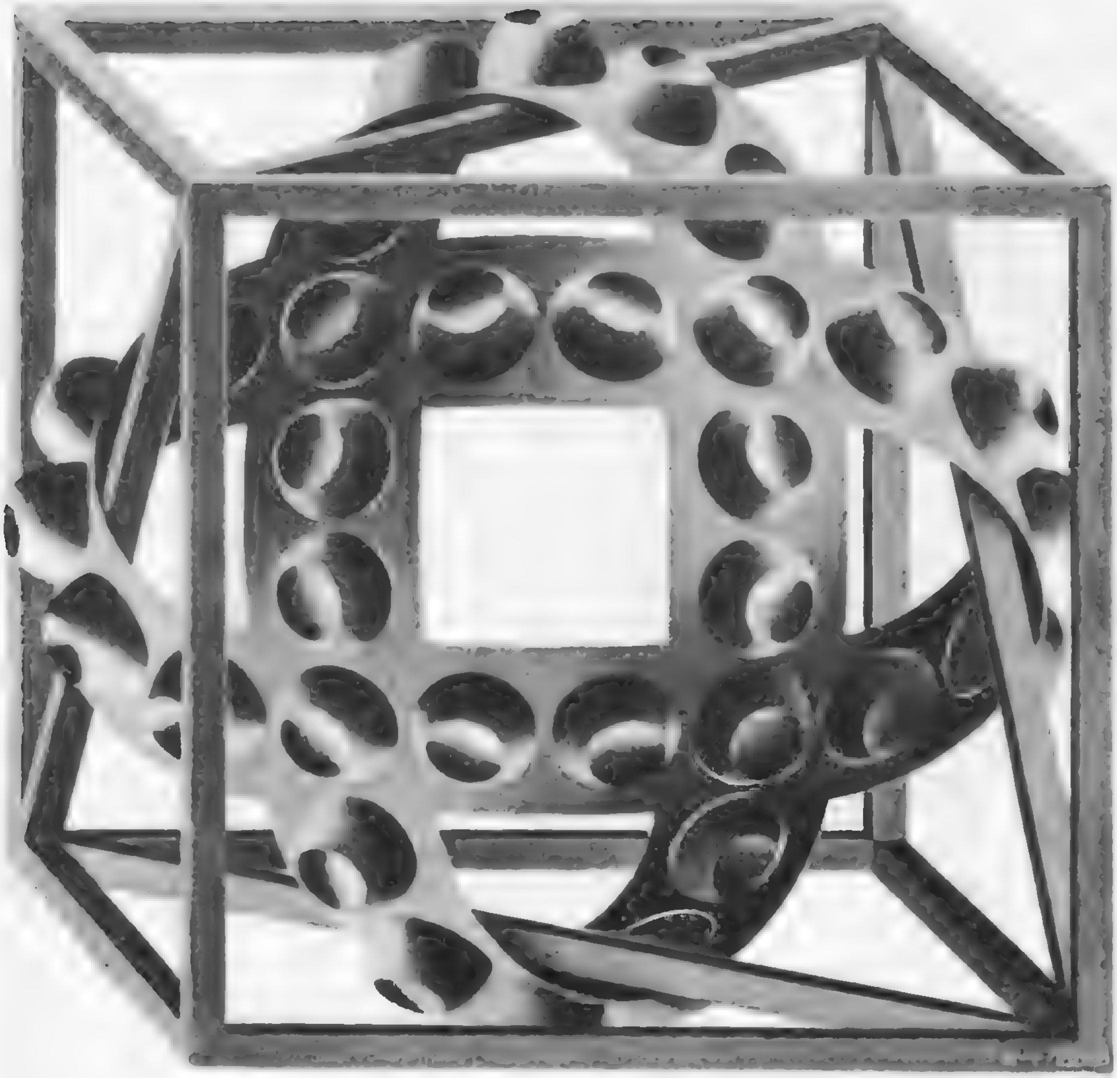
плохо ____________

9. Статьи на какие темы вы хотели бы видеть в журнале в 1979 году?

Математика ____________

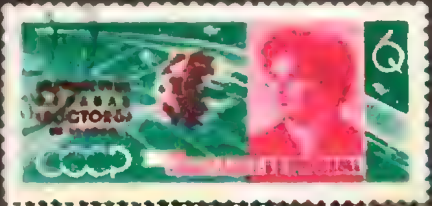
Физика ____________

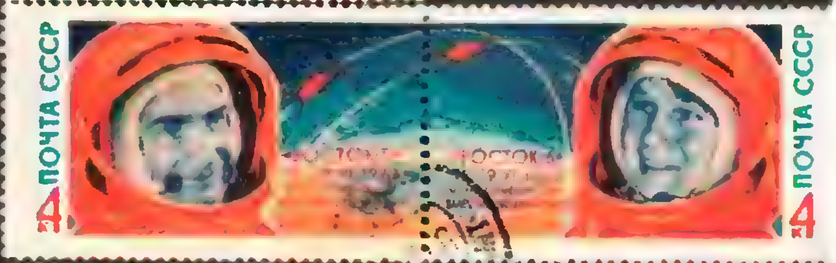
Дополнительные замечания ____________



ЧТО ВЫПУКЛО, А ЧТО ВОГНУТО?

В некоторых случаях определить это легко, а в некоторых невозможно. Глаз по-прежнему будет видеть то «горку», то «впадинку». На этом рисунке замечательному голландскому художнику М. Эшеру удалось «поймать» эти неустойчивости.




4 ПОЧТА СССР
ВОСТОК-5
ВОСТОК-6
4 ПОЧТА СССР

КОСМИЧЕСКАЯ «ЧАЙКА»

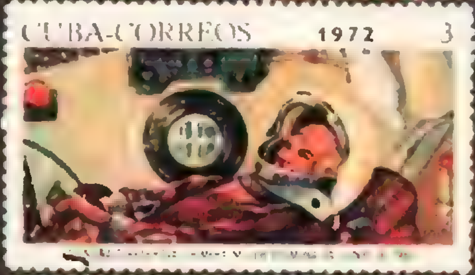
15 лет назад мир узнал имя первой женщины-космонавта. 16 июня 1963 года с космодрома Байконур стартовал космический корабль «Восток-6», пилотируемый Валентиной Владимировной Терешковой. Ее позывные были: «Я — чайка». Двумя днями раньше на корабле «Восток-5» в космос поднялся ее напарник Валерий Федорович Быковский. Полет Валентины Терешковой продолжался 71 час; за это время «Восток-6» совершил 48 оборотов вокруг Земли, пролетев в космосе около двух миллионов километров.

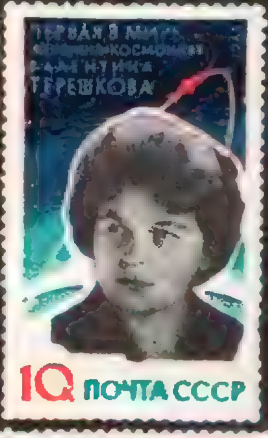
В результате этого полета была получена ценная медико-биологическая информация о поведении человека в сложных космических условиях, под влиянием перегрузок, вибрации и невесомости. Как и предполагали ученые, полет подтвердил, что организм женщины обладает большими резервами, позволяющими успешно преодолевать трудности, с которыми сопряжен полет человека в космос.

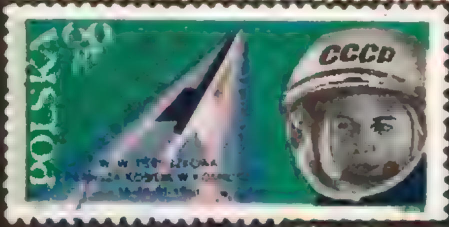
Полет еще продолжался, а советская почта уже выпустила в обращение марку с портретом Терешковой. В последующие годы вышло более тридцати марок, почтовых блоков и других советских филателистических материалов, посвященных этому событию. Более ста марок и почтовых блоков на эту же тему выпущено почтовыми ведомствами других стран.

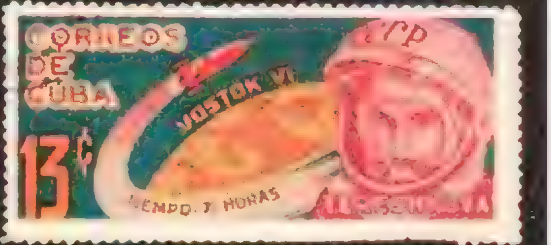
Мы приводим здесь несколько марок СССР и социалистических стран, рассказывающих о подвиге Валентины Терешковой.

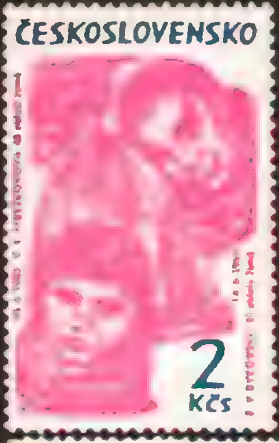
В. Рудов

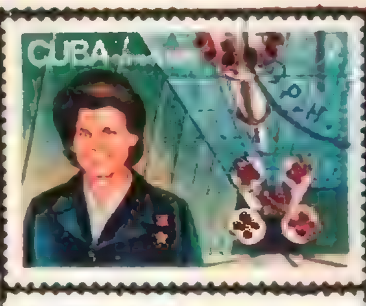

CUBA-CORREOS
1972
3

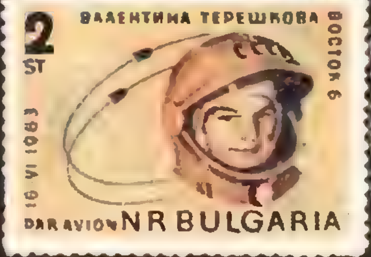

ТЕРЕШКОВА
10 ПОЧТА СССР

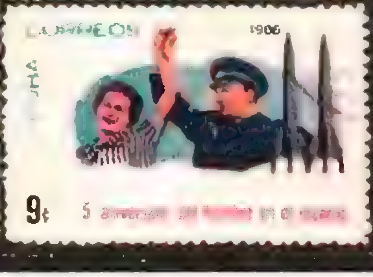

POLSKA
60
СССР


CORREOS DE CUBA
13¢
VOSTOK VI
TIEMPO 71 HORAS


ČESKOSLOVENSKO
2
Kčs




2
ST
ВАЛЕНТИНА ТЕРЕШКОВА
ВОСТОК 6
16 VI 1963
СССР
PAR AVION NR BULGARIA

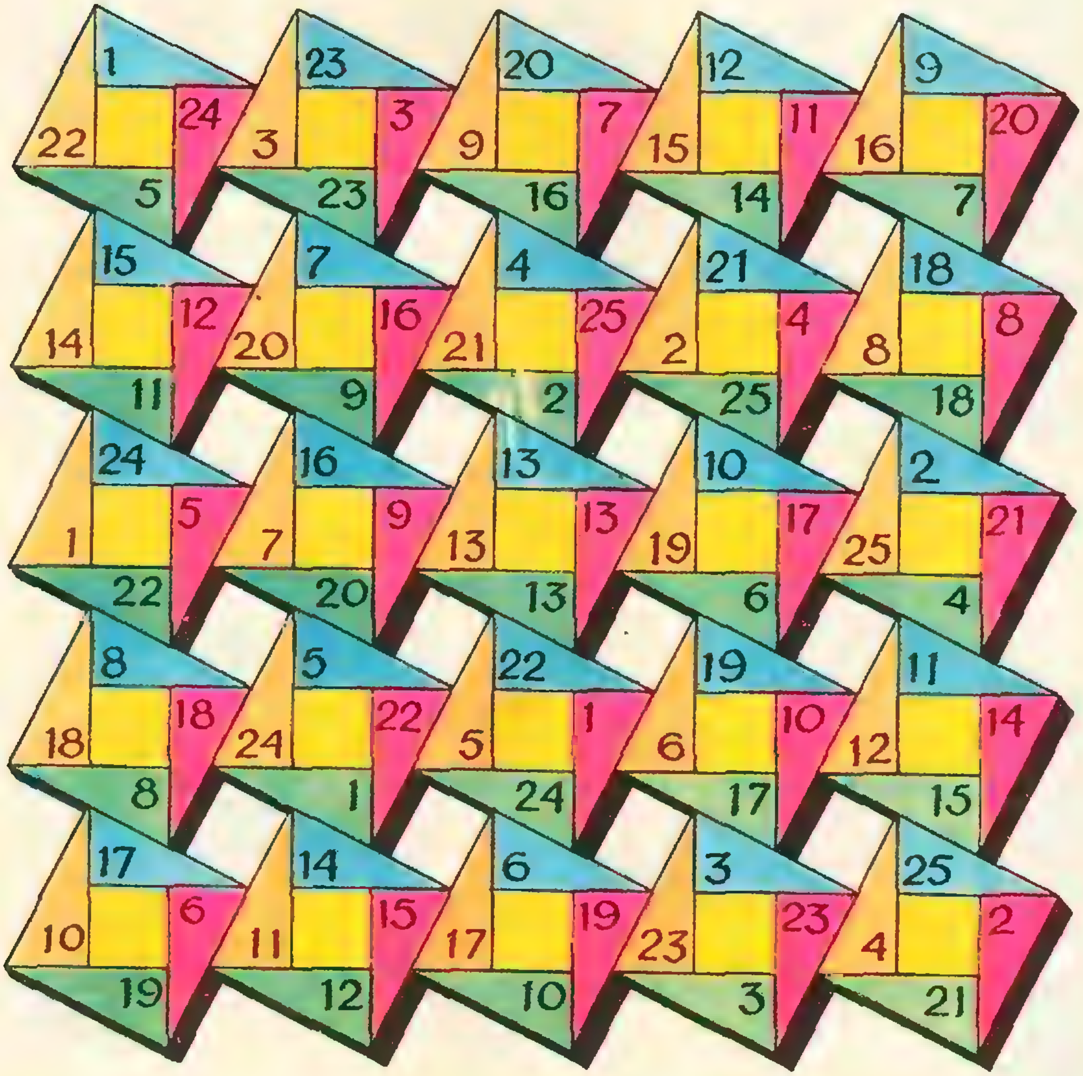


Цена 30 коп.
Индекс 70465

Этот рисунок составлен из четырех магических квадратов 5×5. Напоминаем, что магическим называется квадрат, у которого одинаковы суммы чисел, стоящих в строках, столбцах и диагоналях. Набор из четырех квадратов замечателен тем, что суммы чисел, стоящих в «одноименных» клетках этих квадратов, одинаковы.

Сумеете ли вы найти набор из трех магических квадратов с таким же свойством?

Е. Кривошеев


1 22 24 5
23 3 3 23
20 9 7 16
12 15 11 14
9 16 20 7
15 14 12 11
7 20 16 9
4 21 25 2
21 2 4 25
18 8 8 18
24 1 5 22
16 7 9 20
13 13 13 13
10 19 17 6
2 25 21 4
8 18 18 8
5 24 22 1
22 5 1 24
19 6 10 17
11 12 14 15
17 10 6 19
14 11 15 12
6 17 19 10
3 23 23 3
25 4 2 21

НОМЕР
11

Основан в 1970 году

Квант

11
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин
Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
(главный художник)
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *Е. Бланк.* Линейные и нелинейные физические системы
6 *А. Геронимус.* Сравнения по простому модулю

Лаборатория «Кванта»

11 *П. Канаев.* Простые опыты с мыльными пленками и пузырями

Математический кружок

13 *Л. Курляндчик.* Высокие степени

◆

17 *М. Мамикон.* Центр тяжести полушария

Задачник «Кванта»

18 М531—М535; Ф543—Ф547
20 Решения задач М482, М485, М487, М489, М490; Ф498—Ф501

По страницам школьных учебников

28 *А. Звонкин.* Что такое π?
32 *Ж. Раббот.* Знаете ли вы, что $\frac{220 \text{ вольт}}{127 \text{ вольт}} \approx \sqrt{3}$?
33 *А. Земляков, В. Орлов.* Трехфазный ток

«Квант» для младших школьников

38 Задачи
39 *В. Касаткин.* Сообразительная Аня

Практикум абитуриента

42 *И. Габович, П. Горнштейн.* Вооружившись методом координат
48 *Л. Баканина.* О силах трения

Спрашивайте — отвечаем

52 Интегралом — по счастливым билетам!

Рецензии, библиография

54 *Ю. Юшина.* Царство смекалки
57 *В. Комаров.* В лаборатории Вселенной

Информация

58 *В. Атласов, С. Зарипов и др.* РФМШ при Якутском университете
60 *А. Виленкин.* 10 лет Омскому НОУ
63 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*с. 10, 16, 31, 37, 47, 51*)

На первой странице обложки приведено несколько разбиений правильного шестиугольника на девять конгруэнтных частей. О том, как получены эти разбиения, вы можете прочитать на с. 16

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

Е. Бланк

Линейные и нелинейные физические системы

Явления, происходящие в физических системах, количественно описываются уравнениями, выражающими функциональные зависимости между различными физическими величинами. Характер этих зависимостей может быть самым разнообразным. Значительную группу среди них составляют линейные зависимости типа $y=f(x)=ax+b$, где a и b считаются постоянными. Очень часто соответствующим подбором системы отсчета, системы координат или начальных условий зависимость такого вида можно свести к прямой пропорциональности.

Примеров прямой пропорциональной зависимости между физическими величинами очень много. Так связаны между собой модуль силы упругости и величина деформации: $|\vec{F}|=kx$; заряд конденсатора и напряжение на нем: $q=CU$; напряжение на концах проводника и сила тока, текущего по проводнику: $U=RI$; поток магнитной индукции, пронизывающий контур, и сила тока в контуре $\Phi=LI$ и т. д. Коэффициенты пропорциональности в этих формулах — жесткость k, емкость C, сопротивление R, индуктивность L — постоянные величины, которые характеризуют свойства данной системы.

Когда свойства физической системы (например, сопротивление цепи) не зависят от ее состояния (от тока, текущего по цепи), говорят, что система линейна. В линейных системах соблюдается принцип суперпозиции: в результате нескольких одновременных воздействий система приходит в такое же состояние, как если бы эти воздействия следовали порознь одно за другим. Иными словами, результат какого-либо одного воздействия в присутствии другого (или других) оказывается таким же, как если бы это другое воздействие отсутствовало. Так, например, если в результате действия груза массы m_1 удлинение пружины равно x_1, а в результате действия груза массы m_2 удлинение равно x_2, то подвешенные к пружине оба груза (m_1+m_2) вызовут удлинение x_1+x_2.

На рисунке 1 приведены графики зависимости падения напряжения на резисторе с постоянным сопротивлением от тока (вольтамперная характеристика резистора, рис. 1, *а*), заряда конденсатора с постоянной емкостью от напряжения на его пластинах (кулонвольтная характеристика конденсатора, рис. 1, *б*), потока магнитной индукции через контур с

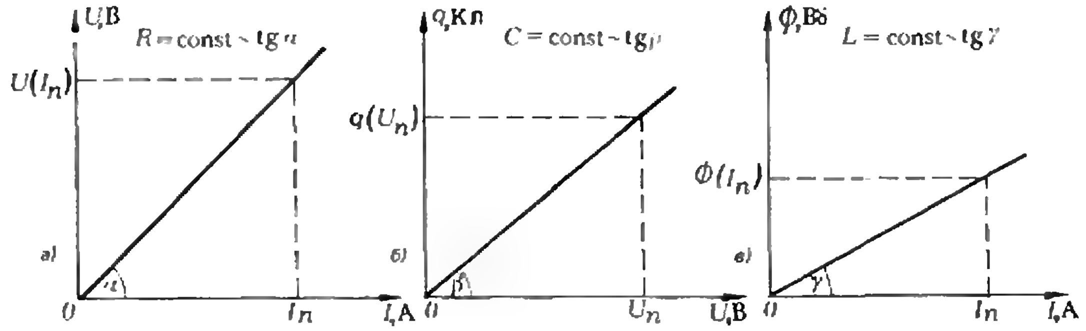


Рис. 1.

постоянной индуктивностью от тока (веберамперная характеристика катушки, рис. 1, *в*). Это — прямые линии; угол наклона каждой из них к оси абсцисс определяется, соответственно, *величиной* R, C *или* L. Нетрудно найти, что $R=U_I/I=\text{tg}\,\alpha$, $C=q_U/U=\text{tg}\,\beta$, $L=\Phi_I/I=\text{tg}\,\gamma$. Элементы физических систем, характеристики которых задаются графически прямыми линиями, часто называют *линейными*.

Однако мы знаем, что многие постоянные характеристики физических систем остаются действительно постоянными лишь в определенных условиях — при определенных ограничениях на величину воздействия. Так, коэффициент жесткости пружины k постоянен лишь при небольших значениях амплитуды смещения; сопротивление проводника при больших токах начинает зависеть от величины тока (при больших токах проводник сильно нагревается, а сопротивление его, как известно, зависит от температуры). Если в конденсаторе используется диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряженности электрического поля, создаваемого зарядами пластин, то емкость такого конденсатора уже не есть постоянная величина. И индуктивность катушки может зависеть от тока, текущего по обмотке, если сердечник сделан из ферромагнетика — материала, магнитная проницаемость которого зависит от индукции магнитного поля, создаваемого током, текущим по обмотке.

Характеристики таких элементов уже не линейные; поэтому подобные элементы называют *нелинейными*, а содержащие их системы — *нелинейными системами*. Таким образом, нелинейные системы — это системы, свойства которых (например, сопротивление цепи) зависят от состояния системы (от тока, текущего по цепи).

Как «появляется» эта нелинейность, проще всего понять из такого примера. При значительных деформациях закон Гука, как известно, нарушается; величина жесткости k начинает зависеть от величины смещения. В тех пределах, когда смещение не намного превышает «упругое» (то максимальное смещение, которое приводит еще к упругим деформациям), эту зависимость можно с хорошим приближением записать в виде $k=ax+b$. Тогда сила упругости оказывается связанной с величиной смещения соотношением $|\vec{F}|=(ax+b)x=ax^2+bx$, то есть явно нелинейной зависимостью.

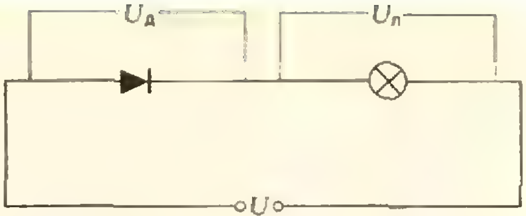


Рис. 2.

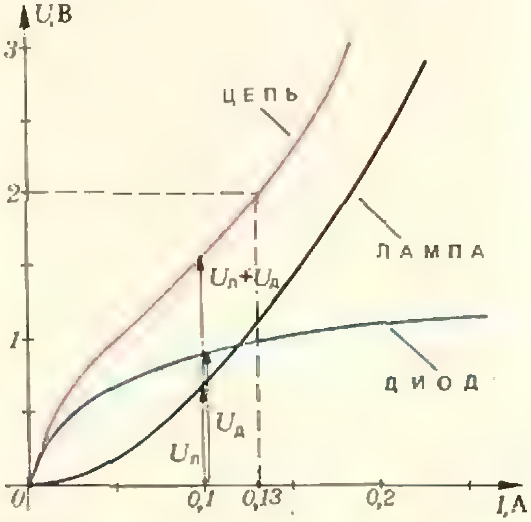


Рис. 3.

Расчет электрических цепей, содержащих нелинейные элементы, чаще всего производится графическим способом. Разберем в качестве примера такую простую задачу. На рисунке 2 приведена схема нелинейной системы, содержащей диод и лампу накаливания, вольтамперные характеристики которых заданы на рисунке 3. Цепь подключена к источнику постоянного напряжения $U=2$В. Какова сила тока в цепи?

Поскольку лампа и диод соединены последовательно, при данном значении тока в цепи падение напряжения на ее концах равно сумме падений напряжений на диоде и на лампе. Воспользовавшись этим, построим вольтамперную характеристику всей цепи (черная линия на рисунке 3). Теперь легко найти, что при $U=2$ В сила тока равна 0,13 А.

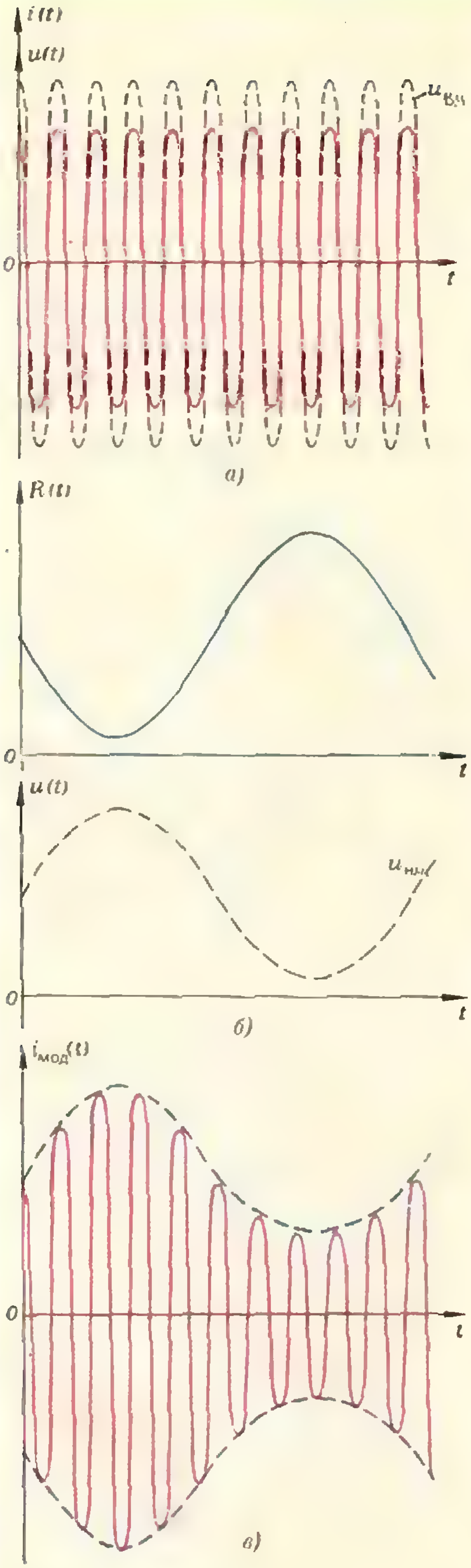


Рис. 4.

Нелинейные электрические и магнитные системы находят широкое применение в технике. Генераторы незатухающих колебаний, модуляторы и детекторы колебаний, преобразователи частоты и т. п. — устройства, принципиально осуществимые только на нелинейных элементах.

Поясним, например, необходимость нелинейных элементов для осуществления амплитудной модуляции колебаний. Как известно, при амплитудной модуляции амплитуда высокочастотных колебаний должна изменяться в соответствии с изменением величины напряжения полезного сигнала, например, сигнала звуковой частоты. Независимо от конкретной схемы, деталей, из которых она состоит, модулятор можно представить как некий нелинейный резистор — резистор, сопротивление которого зависит от напряжения управляющего (полезного) сигнала: с уменьшением этого напряжения сопротивление нарастает. Если резистор подключен к источнику переменного напряжения высокой (несущей) частоты, то колебания тока в резисторе повторяют колебания «сигнала» от источника (рис. 4, *а*). Если теперь на резистор подавать дополнительно переменное напряжение низкой частоты (полезный сигнал), то сопротивление резистора начинает «колебаться» с той же низкой частотой (рис. 4, *б*), и в результате этого амплитуда колебаний тока в резисторе будет увеличиваться при уменьшении сопротивления и уменьшаться при его увеличении. Иными словами, амплитуда колебаний несущей частоты будет в свою очередь «колебаться», следуя изменению величины полезного сигнала (рис. 4, *в*).

Ясно, что линейный резистор не обеспечил бы модуляции высокочастотных колебаний: в том режиме, который мы описали, результирующие колебания тока в резисторе представляли бы собой суперпозицию высокочастотных и низкочастотных колебаний, и амплитуда высокочастотных колебаний оставалась бы неизменной (рис. 5).

В Задачнике «Кванта» в этом номере журнала помещена задача Ф546. Схема, которая приведена в этой за-

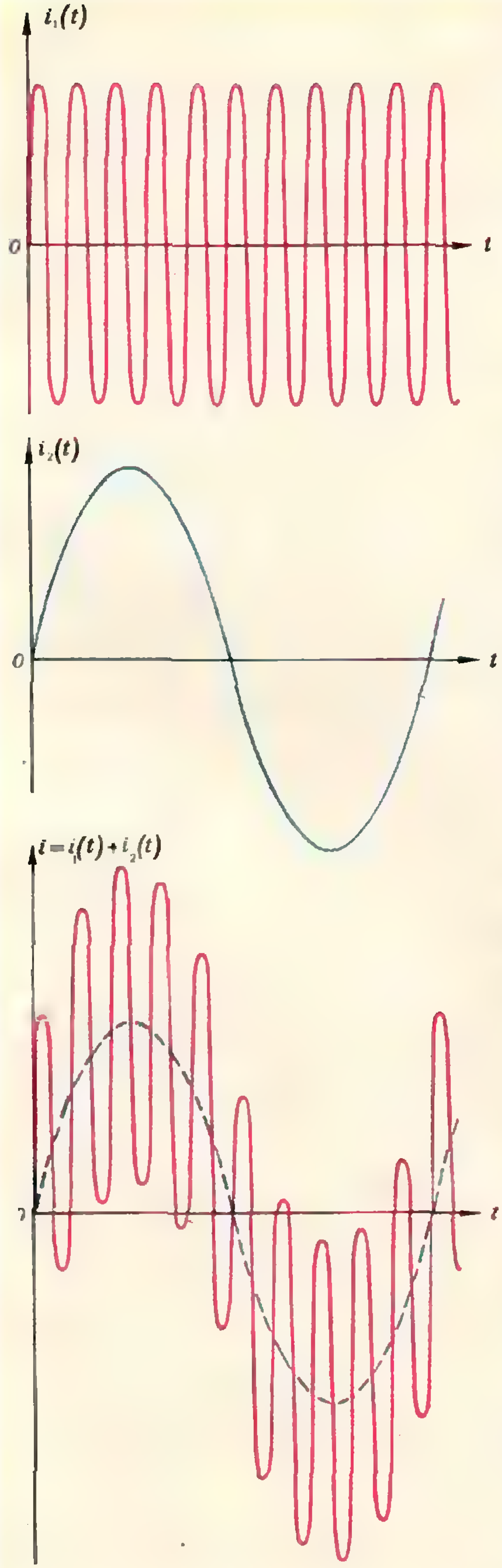


Рис. 5.

даче, — это принципиальная схема устройства магнитного усилителя. Магнитные усилители — еще один пример применения нелинейных элементов в технике. Задача Ф546 довольно трудная. Мы облегчим читателю ее решение следующей подсказкой: в магнитных усилителях «работает» нелинейная зависимость индуктивности катушки с ферромагнитным сердечником от тока.

В заключение следует отметить, что, строго говоря, все физические системы являются нелинейными, если пределы изменения их состояний *не ограничены. Это мы видели в* механических системах — при больших деформациях, в электромагнитных — при больших токах (напряжениях). Однако нередко даже в области малых изменений состояния системы ее приходится рассматривать как нелинейную. Так, сила сухого трения изменяется скачком при изменении знака скорости, сила тока в проводниках с односторонней проводимостью изменяется нелинейно при изменении знака напряжения.

Упражнения

1. На горизонтальной плоскости находится ящик массой $m = 10$ кг. Максимальная сила трения покоя $|\vec{f}| = 35$ Н. На *ящик могут действовать две взаимно перпендикулярные* силы $|\vec{F}_1| = 30$Н и $|\vec{F}_2| = 40$Н, лежащие в горизонтальной плоскости. Опишите движение ящика в случаях, когда на него действуют: а) только сила $\vec{F}_1$; б) только сила $\vec{F}_2$; в) обе силы одновременно.

2. Лампа и диод, вольтамперные характеристики которых приведены на рисунке 3, *соединены параллельно*. Ток в неразветвленной части цепи $I = 0,15$ А. Определите графически токи в лампе $I_л$ и в диоде $I_д$.

3. Резистор с сопротивлением 6 Ом и нелинейное сопротивление, вольтамперная характеристика которого описывается зависимостью $U = 2\sqrt{I}$, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $U = 4$В. Рассчитайте без построения графиков силу тока в цепи.

А. Геронимус

Сравнения по простому модулю

В статье «Сравнения и классы вычетов» *) было рассмотрено множество F_m классов вычетов по модулю m и были определены три операции — сложения, вычитания и умножения классов. Там было доказано, что в случае, когда модуль сравнения — простое число, можно определить и деление на любой ненулевой класс. Благодаря этому сравнения по простому модулю обладают рядом интересных и тонких свойств, которыми сравнения по произвольному модулю не обладают. Мы познакомимся здесь с некоторыми такими свойствами. В дальнейшем мы будем все время считать, что модуль — простое число; чтобы не забывать об этом, мы будем обозначать его через p.

Существование первообразного корня

Назовем *порядком* класса вычетов $\bar a \in F_p$ наименьшее натуральное число k, для которого $\bar a^k = \bar 1$. В конце статьи «Сравнения и классы вычетов» было сказано, что в множестве F_p существует класс, порядок которого равен $p-1$. Класс с таким свойством называется *первообразным корнем*. Теорема о существовании такого класса была впервые доказана Лежандром (1752—1833). Приведем доказательство теоремы Лежандра, близкое к доказательству самого Лежандра.

Докажем сначала, что если порядки l и m двух классов $\bar a$ и $\bar b$ взаимно просты, то порядок произведения $\bar a\bar b$ равен lm. Действительно, $(\bar a\bar b)^{lm} = \bar a^{lm}\cdot\bar b^{lm} = (\bar a^l)^m\cdot(\bar b^m)^l = \bar 1$ (так как $\bar a^l = \bar 1$ и $\bar b^m = \bar 1$). Порядок класса $\bar a\bar b$ должен быть поэтому делителем числа lm. Обозначим его через $l'm'$, где l' — делитель l, а m' — делитель m (l и m взаимно просты!) *). Итак,

$$\bar a^{l'm'}\cdot\bar b^{l'm'} = (\bar a\bar b)^{l'm'} = \bar 1.$$

Возведем обе части этого равенства в такую степень l'', что $l'l'' = l$. Получим тогда $(\bar a^l)^{m'}\cdot\bar b^{lm'} = \bar 1$, а так как l — порядок $\bar a$, то $(\bar a^l)^{m'} = \bar 1$ и потому $\bar b^{lm'} = 1$. Значит, lm' делится на m (порядок $\bar b$), но l взаимно просто с m, а m' — делитель m, поэтому $m' = m$, аналогично $l' = l$; наше утверждение доказано.

Перейдем теперь непосредственно к теореме.

Рассмотрим класс $\bar a$ с наибольшим возможным порядком N. Мы хотим доказать, что это и есть первообразный корень. Для этого достаточно убедиться, что любой другой класс $\bar b$ является степенью $\bar a$. Предположим, что порядок $\bar b$ равен n. Возможны два случая.

1) N делится на n. Рассмотрим n классов $\bar a^{k\,N/n}$ при $0 \leqslant k < n$. Все они являются различными корнями степени n из единицы, т. е. решениями уравнения $\bar x^n - \bar 1 = \bar 0$ (проверьте). Класс $\bar b$ также является корнем степени n из единицы по определению порядка. В приложении к этой статье мы докажем, что у любого многочлена степени n с коэффициентами из F_p и, в частности, у многочлена $\bar x^n - \bar 1$ не может быть больше, чем n корней. Поэтому $\bar b$ есть один из элементов $\bar a^{kN/n}$, то есть является степенью $\bar a$.

2) N не делится на n. Пусть r — наибольший общий делитель N и n.

---

*) См. «Квант» № 10.

*) Возможность такого представления произвольного числа lm следует из Основной теоремы арифметики, доказанной в приложении к этой статье.

Порядок класса $\overline{b}^r$ равен n/r (проверьте). Числа N и n/r взаимно просты. Поэтому порядок класса $\overline{ab}^r$ равен $N\cdot n/r > N$. Это противоречит максимальности N. Второй случай невозможен.

Теорема о существовании первообразного корня доказана.

Гипотеза Артина

Приведенное доказательство не конструктивно: мы не можем указать явно, какой именно из вычетов $\overline{1}, \ldots, \overline{p-1}$ является первообразным корнем по модулю p.

Американский математик Э. Артин (1898—1962) высказал такую гипотезу: если целое число n не является полным квадратом, то существует бесконечно много простых чисел p, для которых класс вычетов по mod p, содержащий n, является первообразным корнем по mod p. Эта гипотеза до сих пор не доказана. Если бы мы могли явно указать первообразные корни по mod p для всех p, было бы легко выяснить, верна ли эта гипотеза. (Проверьте, что если $n=m^2$ для какого-нибудь m, то простых чисел >2, о которых говорится в гипотезе, вовсе не существует.)

Извлечение корней

Теорема Лежандра позволяет выяснить, когда в множестве F_p можно извлечь корни.

Корнем степени n из класса вычетов $\overline{b}$ естественно назвать такой класс $\overline{x}$, что $\overline{x}^n = \overline{b}$.

Пусть $\overline{a}$ — какой-нибудь первообразный корень в F_p. Существует такое натуральное число k, что $\overline{b} = \overline{a}^k$. Если в соотношении $\overline{x}^n = \overline{b}$ заменить $\overline{x}$ на $\overline{a}^y$, то его можно переписать в виде $\overline{a}^{yn} = \overline{a}^k$ или $\overline{a}^{yn-k} = \overline{1}$.

Из последнего соотношения видно, что $yn-k$ делится на $p-1$.

Эта делимость равносильна следующему равенству в множестве F_{p-1}: $\overline{y}\,\overline{n} = \overline{k}$.

Обратно, если $\overline{m}$ в множестве F_{p-1} является решением уравнения $\overline{y}\,\overline{n}=\overline{k}$, то $\overline{a}^m$ является корнем степени n из $\overline{b}$ (в F_p).

Таким образом, задачу об извлечении корней в множестве F_p мы свели к задаче о делении в множестве F_{p-1}.

В статье «Сравнения и классы вычетов» было указано, что если d — наибольший общий делитель чисел n и $p-1$ и k делится на d, то у уравнения $\overline{y}\,\overline{n} = \overline{k}$ имеется ровно d решений; если же — не делится, то у уравнения $\overline{y}\,\overline{n} = \overline{k}$ вовсе нет решений.

Теперь вопрос о корнях степени n из класса вычетов $\overline{b}$ выяснен полностью:

Теорема. *Если индекс*[*] k *класса* $\overline{b} \in F_p$ *делится на наибольший общий делитель* d *чисел* n *и* $p-1$, *то существуют* d *различных корней степени* n *из класса* $\overline{b}$, *в противном случае из класса* $\overline{b}$ *нельзя извлечь корня степени* n.

Пример: $p = 11$.

Выпишем все степени класса $\overline{2}$ в множестве F_{11}. В таблице 1 в первой строчке выписан показатель степени k, а во второй — $\overline{2}^k$[**]. Видно, что получаются все 10 ненулевых классов по mod 11. Значит, $\overline{2}$ — первообразный корень, а числа в первой строчке — индексы (по основанию $\overline{2}$) классов во второй строчке.

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{2}^k \in F_{11}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$

Изучим вопрос об извлечении кубического корня. В этом случае $d=1$; значит, у каждого класса должен быть один кубический корень. Возьмем, например, класс $\overline{3}$. Его индекс равен $\overline{8}$. Нам нужно решить уравнение $\overline{3}y=\overline{8}$ в множестве F_{10}. Будем умножать все классы в F_{10} на $\overline{3}$ (табл. 2). Из таблицы видно, что ответ — $\overline{6}$, значит, в множестве F_{11} $\overline{2}^6=\overline{9}$ — кубический корень из $\overline{3}$. Действительно, $\overline{9}^3=\overline{3}$.

---

[*] Напомним (см. «Квант» № 10, с. 8), что индексом класса $\overline{b}$ по основанию $\overline{a}$ (где $\overline{a}$ — первообразный корень) называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить $\overline{b}$. В формулировке теоремы не существенно, какой первообразный корень выбран.

[**] Проще всего вычислять степени двойки (или другого элемента) последовательно: $\overline{2}^k = \overline{2}\cdot\overline{2}^{k-1}$; сначала же возводить 2 в степень k, а потом приводить по mod 11 — дело более трудоемкое.

Таблица 2

$\overline{k}\in F_{10}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$
$\overline{3}\overline{k}\in F_{10}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$	$\overline{0}$

Пусть теперь $n=5$, тогда $d=5$ и из всех классов, кроме классов $\overline{1}$ и $\overline{10}$ (с индексами 10 и 5), корень степени 5 не извлекается. Найдем сначала корни степени 5 из $\overline{1}$. Легко сообразить, что это все классы с четными индексами. (Действительно, класс с четным индексом $2r$ равен $\overline{2}^{2r}$; $(\overline{2}^{2r})^5 = (\overline{2}^r)^{10} = \overline{1}$ в силу малой теоремы Ферма для $p = 11$.) Таких классов ровно половина, пять штук — это $\overline{1}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$ и $\overline{9}$. По теореме в множестве F_{11} и должно быть пять корней степени 5 из $\overline{1}$.

Займемся теперь корнями степени 5 из $\overline{10}$. Один такой корень виден из таблицы — это $\overline{2}$, действительно, $\overline{2}^5 = \overline{10}$. Чтобы получить все корни, нужно умножить $\overline{2}$ на все корни степени 5 из $\overline{1}$, которые мы уже нашли. Действительно, если $\overline{x}^5 = \overline{1}$, то $(\overline{2}\overline{x})^6 = \overline{2}^5\cdot\overline{x}^5 = \overline{10}\cdot\overline{1} = \overline{10}$. Ответ: классы $\overline{2}$, $\overline{6}$, $\overline{7}$, $\overline{8}$, $\overline{10}$, то есть все классы с нечетными индексами. То, что $\overline{10}$ — корень степени 5 из самого себя, не удивительно — ведь $\overline{10} = -\overline{1}$.

Квадратичные вычеты и невычеты

Рассмотрим теперь частный случай — извлечение квадратных корней. Прежде всего нужно рассмотреть наибольший общий делитель d чисел 2 и $p-1$. Если $p = 2$, то $d = 1$; если $p > 2$, то p нечетно, значит, $p-1$ четно и $d = 2$. Рассмотрим случай нечетного p (случай $p=2$ вы легко исследуете сами). Мы выяснили, что из класса с четным индексом можно извлечь квадратный корень (причем их будет два для каждого класса), а из класса с нечетным индексом нельзя извлечь квадратного корня. Классы с четными индексами называются *квадратичными вычетами*, а с нечетными индексами — *квадратичными невычетами*. Так как среди всевозможных значений индекса от 1 до $p-1$ имеется $\frac{p-1}{2}$ четных чисел и $\frac{p-1}{2}$ нечетных чисел, то среди $p-1$ ненулевых классов квадратичных вычетов и квадратичных невычетов поровну. Интересно еще, что произведение вычета на вычет или невычета на невычет дает квадратичный вычет, а произведение квадратичного вычета на невычет дает невычет. Это следует из того, что при перемножении классов их индексы складываются. Аналогичные утверждения справедливы и для частного. Например, частное от деления невычета на невычет — обязательно квадратичный вычет.

Обратимся снова к $p=11$. Квадратичные вычеты — это элементы с четными индексами, то есть всевозможные корни степени 5 из $\overline{1}$, а квадратичные невычеты — это элементы с нечетными индексами, то есть все корни степени 5 из $-\overline{1}$. Такая скрытая симметрия имеет место для всех p, а не только для 11*).

Рациональные и иррациональные классы вычетов

Итак, не из всех классов можно извлечь корень. Например, квадратный корень, как мы убедились, можно извлечь только из половины ненулевых классов.

Такое явление имеет место и для обычных чисел. Вам хорошо известно, что в области рациональных чисел из числа 2, например, нельзя извлечь квадратного корня. Вы знаете также, что если расширить множество рациональных чисел и рассмотреть множество **R** всех вещественных чисел, то в этом большем множестве из числа 2 можно извлечь квадратный корень, и $\sqrt{2}$ является числом из множества **R**, только — иррациональным.

---

*) О квадратичных вычетах и невычетах можно прочесть в «Кванте» № 1 за 1973 год (с. 2—9).

Давайте поступим аналогичным образом и с классами вычетов. Для наглядности рассмотрим опять $p=11$. Мы видели, что класс $\bar{2}$ — квадратичный невычет, из него не извлекается квадратный корень. Построим большее множество $G\supset F_{11}$, в котором будет существовать квадратный корень из класса $\bar{2}$, то есть такой элемент α, что $\alpha^2=\bar{2}$.

Так же, как и при геометрических построениях, проведем анализ. Прежде всего уточним постановку задачи. Чтобы равенство $\alpha^2=\bar{2}$ имело смысл, естественно считать, что для любой пары элементов множества G определено их произведение. Потребуем также, чтобы была определена и сумма любых двух элементов в множестве G. В таком случае в G должны содержаться всевозможные двучлены $\bar{a}+\bar{b}\alpha$, где $\bar{a}$, $\bar{b}\in F_{11}$. Оказывается, этого уже вполне достаточно. Мы можем обычным образом определить сумму двучленов: $(\bar{a}+\bar{b}\alpha)+(\bar{c}+\bar{d}\alpha)=(\bar{a}+\bar{c})+(\bar{b}+\bar{d})\alpha$. Например, $(\bar{5}+\bar{2}\alpha)+\bar{9}\alpha=\bar{5}$.

При умножении возникают члены с α^2. Мы будем заменять α^2 на $\bar{2}$. Например, $(\bar{3}+\bar{7}\alpha)(\bar{5}+\bar{2}\alpha)=\bar{3}\cdot\bar{5}+(\bar{7}\cdot\bar{5}+\bar{2}\cdot\bar{3})\alpha+\bar{2}\cdot\bar{7}\alpha^2=\overline{10}+\bar{8}\alpha$.

В множестве G столько элементов $\bar{a}+\bar{b}\alpha$, сколько существует пар $\bar{a}$, $\bar{b}\in F_{11}$, то есть $11^2(=121)$. Поэтому для него принято обозначение F_{11^2}. Не нужно путать это множество с множеством F_{121} классов вычетов по модулю 121, в котором тоже 121 элемент. В отличие от F_{121}, в F_{11^2} существует частное от деления $\bar{a}+\bar{b}\alpha$ на $\bar{c}+\bar{d}\alpha$, если только $\bar{c}$ и $\bar{d}$ не равны одновременно нулю. Это утверждение доказывается в два этапа. Сначала рассмотрим случай, когда $\bar{d}=0$. Легко проверить, что $(\bar{a}+\bar{b}\alpha):\bar{c}=\bar{a}/\bar{c}+(\bar{b}/\bar{c})\alpha$. Общий случай сводится к этому, если умножить делимое и делитель на $\bar{c}-\bar{d}\alpha$. Тогда придется делить на $\bar{c}^2-\bar{2}\bar{d}^2$. Этот элемент множества F_{11} отличен от нуля, иначе бы мы имели $\bar{c}^2=\bar{2}\bar{d}^2$, $\bar{2}=\left(\frac{\bar{c}}{\bar{d}}\right)^2$, и $\bar{2}$ оказалось бы квадратичным вычетом в F_{11}. Поэтому деление возможно.

В множестве F_{11^2} извлекаются квадратные корни не только из $\bar{2}$, но и из всех классов $\bar{r}\in F_{11}$. Действительно, если $\bar{r}$ — квадратичный вычет, квадратный корень извлекается уже в F_{11}. Если же $\bar{r}$ — невычет, то, как мы видели раньше, частное от деления $\bar{r}$ на $\bar{2}$ является квадратичным вычетом и поэтому существует такой класс $\bar{s}$, что $\bar{r}=\bar{2}\bar{s}^2$. В таком случае $\sqrt{\bar{r}}=\sqrt{\bar{2}\cdot\bar{s}^2}=\bar{s}\alpha$.

Аналогичным образом можно построить F_{p^2} для произвольного p. В связи с извлечением корней более высоких степеней возникают множества F_{p^3}, F_{p^4} и т. д. В множестве F_{p^2} есть первообразный корень, то есть элемент максимального возможного порядка p^2-1. Интересно, что это утверждение мы фактически уже доказали: при доказательстве теоремы Лежандра мы использовали только существование четырех действий и конечность изучаемого множества.

Задачи

1. Найти все первообразные корни в множестве F_{13}.

2. Уравнение $\bar{x}^2+\bar{y}^2=\bar{0}$ имеет решение в множестве F_p $(p>2)$, отличное от $\bar{x}=\bar{y}=\bar{0}$, в том и только в том случае, когда остаток от деления $\bar{p}$ на 4 равен 1.

3. Сколько решений у уравнения $\bar{x}^2-\bar{5}\bar{x}+\bar{7}=\bar{0}$ в множестве F_5? а в F_7?

4. Сколько элементов являются кубами в F_{13}, F_5, F_{11}, в F_p? k-ми степенями?

5. Сколько первообразных корней в множестве F_p?

6. Сколько элементов в множестве F_{11^2} являются квадратами?

Приложение

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число $n>2$ может быть представлено в виде произведения простых множителей; с точностью до порядка множителей такое представление единственно.

А. Сначала методом математической индукции докажем существование представления. Для $n=2$, 3, 4 это очевидно. Рассмотрим теперь число n и предположим, что все числа, меньшие n, могут быть разложены в произведение простых. Если n — простое число, то $n=n$ — искомое представление. Если n — составное число, то $n=n_1n_2$, причем $n_1, n_2<n$. Применив предположение индукции к числам n_1 и n_2, получим соответствующее представление и для числа n.

В. Единственность представления доказывается сложнее. Вот одно из возможных доказательств. Применим снова метод индукции.

Для $n=2$, 3, 4 единственность имеет место. Предположим, что она имеет место для всех чисел, меньших n. Предположим далее, что число n представляется в виде произведения простых двумя способами:

$$n = p_1p_2 \dots p_k = q_1q_2 \dots q_m.$$

При этом равенство $p_i=q_j$ невозможно, иначе, сократив на $p_i=q_j$ обе части равенства, мы получили бы неединственность представления для меньшего числа $l=n/p_i=n/q_j$.

Предположим, что в обоих разложениях множители записаны в порядке возрастания ($p_i \geqslant p_{i-1}$ и $q_i \geqslant q_{i-1}$) и, кроме того, $p_1<q_1$.

Рассмотрим число $m = p_1q_2 \dots q_m$. Из $p_1<q_1$ следует $m<n$. Число $n-m$ делится на p_1, поэтому $n-m=p_1l_1 \dots l_z$, где l_i — простые числа. С другой стороны, $n-m=(q_1-p_1)\, q_2 \dots q_m=r_1 \dots r_s\, q_2 \dots q_m$ (где $r_1 \dots r_s=q_1-p_1$ — разложение числа q_1-p_1 на простые множители). Сравним эти два разложения числа $n-m$ на простые множители. $p_1 \neq r_i$, так как q_1-p_1 не делится на p_1 (иначе бы q_1 делилось на p_1). Кроме того, $p_1 \neq q_j$. Таким образом, мы получили два разных разложения числа $n-m<n$ в произведение простых множителей. Это противоречит предположению индукции.

Корни многочлена

Докажем, что у многочлена степени n с коэффициентами из F_p не может быть больше n попарно различных корней.

Для многочленов степени один наше утверждение верно. Воспользуемся индукцией. Предположим, что для многочленов степени меньшей n, утверждение верно.

Пусть у многочлена $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ по крайней мере n попарно различных корней $x_1, x_2, \dots, x_n$. Рассмотрим многочлен $Q_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$. Ясно, что у многочлена $R=P_n-Q_n$ степень не больше $n-1$, причем $x_1, x_2, \dots, x_n$ — его корни. Поэтому R должен тождественно равняться нулю. Следовательно, $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, и корней, отличающихся от $x_1, x_2, \dots, x_n$, у него нет.

Строительство и ... мыльные пленки

В настоящее время большое внимание уделяется разработке и внедрению в практику строительства легких конструкций. Оказывается, один из методов моделирования таких конструкций связан с ... мыльными пленками.

Как известно, именно мыльные пленки очень часто образуют поверхности самой причудливой формы и при этом с наименьшей площадью. Вот почему моделирование на мыльных пленках широко используется на первой стадии проектирования конструкций сложных форм.

На фотографии вы видите фрагмент декоративной композиции, которая экспонировалась в павильоне Советского Союза на Всемирной выставке 1975 года. Композицию отличают оригинальность формы, легкость, вызывающая у зрителя ощущение невесомости, эфемерности.

В. Колейчук

П. Канаев

Простые опыты с мыльными пленками и пузырями

Для опытов не требуется никакого сложного оборудования, поэтому их можно выполнять даже в домашних условиях.

Необходимые условия успешного проведения опытов — тщательная промывка используемой стеклянной посуды и приготовление хорошего мыльного раствора. Лучше всего раствор готовить из разведенного в воде шампуня с добавлением небольшого количества чистого глицерина и крепкого нашатырного спирта.

В качестве узкой трубочки для выдувания мыльных пузырей можно использовать пустой пластмассовый стержень от шариковой авторучки со снятым металлическим наконечником. Пузыри лучше выдувать небольших размеров и следить, чтобы на дне их не было капелек раствора. Если понадобится пузырь оторвать от конца трубки, это легко сделать быстрым движением руки вертикально вверх.

После того, как вы приготовите все необходимое и потренируетесь в выдувании мыльных пузырей, приступайте к конкретным опытам.

1. Выдуйте мыльный пузырь, оторвите его от конца трубки и сразу же начните быстро двигаться назад — сначала прямо, затем отклоняясь то вправо, то влево. Пузырь будет все время следовать за вами!

Такое поведение пузыря связано с тем, что при резком движении человека между ним и пузырем создается область пониженного давления воздуха — сюда и устремляется мыльный пузырь.

2. Возьмите широкую стеклянную трубку (диаметром не меньше 2 см). Вырежьте из фольги круг диаметром чуть больше диаметра трубки. Смочив фольгу мыльным раствором, приложите ее к торцу трубки; другим концом трубку опускайте в глубокий сосуд с водой. Вскоре вы увидите, что «клапан» из фольги приоткрывается — это «работает» образовавшийся на торце трубки мыльный пузырь, раздувающийся под действием сжатого воздуха в трубке. Чем глубже погружается трубка в воду, тем на больший угол открывается «клапан». При некоторой глубине погружения этот угол становится равным 90° (рис. 1).

3. Осторожно опустите мыльный пузырь на какую-нибудь плоскую смачиваемую поверхность (например, на воду, бумагу или стекло) — благодаря смачиванию нижняя часть пузыря растечется по поверхности, и пузырь примет форму полушара.

Теперь на проволочном кольце получите плоскую мыльную пленку и положите на нее мыльный пузырь, диаметр которого приблизительно равен диаметру кольца. Вы увидите, что и пузырь, и плоская пленка изменили свою форму — получилась двояковыпуклая линза, обе половинки которой симметричны относительно плоскости проволочного кольца.

4. Возьмите оправу очков без стекол и опустите ее в мыльный раствор — оправа затянется двумя

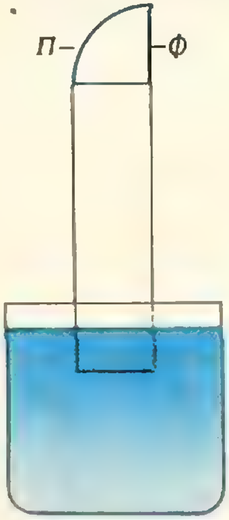


Рис. 1.

плоскими пленками. Если надеть такие очки, то окружающие предметы будут видны в естественном виде: не будет ни увеличения, ни уменьшения, ни ослабления видимости.

Видоизмените опыт. Снова затяните оправу пленками и, расположив их в горизонтальной плоскости, на каждую из них опустите по мыльному пузырю (как в предыдущем опыте). Вы получите очки с двояковыпуклыми мыльными линзами. Но вот что удивительно: через такие необыкновенные очки окружающие предметы просматриваются без всяких изменений, как и в случае с плоскими пленками. Почему?

Дело в том, что мыльные линзы, по существу, — воздушные, так как между тончайшими сферическими мыльными пленками находится воздух. Световые лучи, проходящие через такую линзу, практически не преломляются.

5. Можете ли вы получить плоскую мыльную пленку в пробирке, причем именно не на свободном конце, а внутри пробирки? Попробуйте это сделать. Предлагаем вам два способа.

а) Частично заполните пробирку водой. Возьмите полоску бумаги и, смочив ее мыльным раствором, проведите ею по торцу пробирки — торец затянется пленкой. Чтобы пленка вошла внутрь пробирки, наклоните пробирку и сквозь пленку вылейте часть воды. Сколько выльется воды по высоте, настолько и опустится пленка.

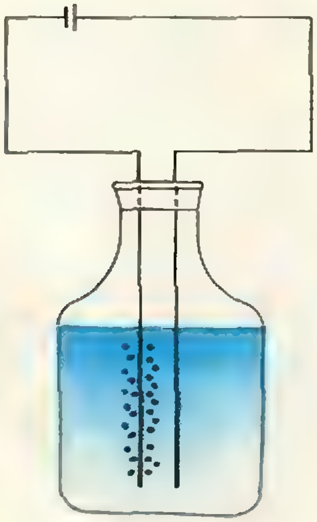


Рис. 2.

б) В пробирку налейте немного воды и нагрейте ее до кипения с помощью свечи или спиртовки. Отодвинув нагреватель, затяните отверстие мыльной пленкой. Через некоторое время вы увидите, что пленка будет постепенно опускаться вовнутрь пробирки.

Объясняется это тем, что водяные пары при охлаждении конденсируются, под пленкой создается разряжение, куда и устремляется пленка. Для ускорения процесса опускания пробирку можно охлаждать проточной водой.

6. Выдуйте на конце узкой трубочки мыльный пузырь. С помощью пластилина прикрепите свободный конец трубочки к лапке штатива или к какой-либо горизонтальной поперечине, расположенной на высоте примерно 20 см над поверхностью стола. С помощью медицинского шприца (или другой узкой трубочки) можно накачивать воздух в пузырь или выкачивать его. Будут ли происходить искажения формы пузыря?

Конечно, нет — это непосредственно следует из закона Паскаля.

7. Возьмите стеклянную баночку высотой 60 мм и наполните ее на $^2/_3$ мыльным раствором. Закройте баночку пробкой, куда вставлены два электрода из медной проволоки диаметром 1—2 мм и длиной 80 мм (рис. 2). Нижние концы электродов должны доходить до дна, но не соприкасаться с ним. Верхние концы согните под углом 90° и с помощью подводящих проводов подключите электроды к батарейке для карманного фонаря. На катоде начнут выделяться небольшие пузырьки газа, которые, поднимаясь вверх, образуют на поверхности раствора пену. Какой газ заключен в пузырьках? Будут ли выделяться пузырьки, если вместо мыльного раствора в баночку налить спирт, глицерин, керосин?

Чтобы ответить на эти вопросы, достаточно вспомнить, что при замыкании электрической цепи происходит электролиз воды, так что на катоде выделяется водород. А в спирте, глицерине и керосине пузырьки вообще не возникнут, поскольку продукты электролиза совсем другие.

Л. Курляндчик

Высокие степени

В этой статье мы будем сравнивать между собой числа. Постоянным будет вопрос: какое из чисел больше? Кое-кто из вас может подумать: «Что тут спрашивать! Всем ясно, что десять больше пяти, а сто меньше тысячи». Ну что же, прочитав эту заметку, вы, вероятно, согласитесь, что ответ на этот вопрос бывает очень и очень непростым.

Начнем с такой задачи.

Задача 1. *Какое число больше:* $2^{3^{100}}$ *или* $3^{2^{100}}$?

Решение. Докажем, что $2^{3^{100}} > 3^{2^{100}}$. Действительно, $2^{3^{100}} = 4^{\frac{3^{100}}{2}}$ Поэтому достаточно доказать, что $\frac{3^{100}}{2} > 2^{100}$ или что $(^3/_2)^{100} > 2$. Но уже $(^3/_2)^2 > 2$, так что $(^3/_2)^{100}$ и подавно больше 2. Из нашего решения видно, что $2^{3^x} > 3^{2^x}$. Из этого факта (его нетрудно проверить и непосредственно) легко вывести другое решение задачи.

Следующая задача чуть-чуть сложнее.

Задача 2. *Какое число больше:* $5^{10}+6^{10}$ *или* 7^{10}?

Первое решение. Докажем, что $5^{10}+6^{10} < 7^{10}$. Так как $5^{10}+6^{10} < 2\cdot 6^{10}$, то достаточно доказать, что $(^7/_6)^{10} > 2$. Последнее неравенство следует из неравенства Бернулли («Алгебра и начала анализа 9», п. 2):

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{10} = \left(1+\frac{1}{6}\right)^{10} > 1+10\cdot\frac{1}{6} > 2.$$

Второе решение. Заметим, что $5^3+6^3 = 341 < 343 = 7^3$.

Поэтому $\left(\frac{5}{7}\right)^3 + \left(\frac{6}{7}\right)^3 < 1$. Так как $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} < \left(\frac{5}{7}\right)^3$ и $\left(\frac{6}{7}\right)^{10} < \left(\frac{6}{7}\right)^3$: получаем $\left(\frac{5}{7}\right)^{10} + \left(\frac{6}{7}\right)^{10} < 1$. Значит, $5^{10}+6^{10} < 7^{10}$.

Задача 3. *Какое из десяти чисел* 1^{10}, 2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2, 10^1 *самое большое?*

Решение. Очевидно, что $2^9 > 1^{10}$. Докажем, что 3^8 больше 2^9. Действительно, $3^8 = 9^4 > 8^4 = 2^{12} > 2^9$. Теперь сравним 4^7 и 3^8: $4^7 > 3^8 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^7 > 3$. Осталось заметить, что $\left(\frac{4}{3}\right)^7 = \left(1+\frac{1}{3}\right)^7 > 1+7\cdot\frac{1}{3} > 3$.

Итак, из первых четырех чисел самое большое 4^7.

Докажем теперь, что $4^7 > 5^6 > 6^5 > 7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1$. Из $4^7 > 5^6 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^6 < 4$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^6 = \left(\frac{125}{64}\right)^2 < 2^2 = 4$ следует $4^7 > 5^6$.

Неравенства $5^6 > 6^5$ и $6^5 > 7^4$ доказываются аналогично.

Неравенства $7^4 > 8^3 > 9^2 > 10^1$ очевидны.

Таким образом, самое большое среди наших чисел — это 4^7. В конце статьи мы еще раз вернемся к этой задаче и приведем менее «выкладочное» решение.

Задача 4. *Какое число больше:*

$1^n+2^n+3^n+\ldots+9^n$ *или* 10^n?

Решение. Легко видеть, что при маленьких n $1^n+2^n+\ldots+9^n$ больше, чем 10^n. Действительно,

$$1+2+\ldots+9 > 10; \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2 > 10^2;$$

$$1^3+2^3+\ldots+9^3 > 9^3+8^3 = 729+512 > 1000 = 10^3.$$

Прежде чем рассматривать другие значения n, заметим, что если при некотором n $1^n+2^n+\ldots+9^n < 10^n$, то для всех $m > n$ тем более $1^m+2^m+\ldots+9^m < 10^m$. Действительно, при переходе к бо́льшим значениям показателей правая часть увеличивается в бо́льшее число раз, чем левая.

Докажем теперь, что $1^7+2^7+\ldots+9^7<10^7$.

Заметим, что $1^7+2^7<3^7$. Поэтому $1^7+2^7+3^7<2\cdot3^7<4^7$ (последнее неравенство можно обосновать при помощи неравенства Бернулли). Тогда $1^7+2^7+3^7+4^7<2\cdot4^7<5^7$ и так далее вплоть до $1^7+2^7+\ldots+8^7<2\cdot8^7$. Оказывается, верно также $2\cdot8^7<9^7$ и $2\cdot9^7<10^7$, но неравенство Бернулли здесь бессильно. Чтобы доказать эти неравенства, достаточно проверить, что $\left(\frac{9}{10}\right)^7<\frac{1}{2}$, а это мы предлагаем сделать непосредственным подсчетом.

Итак, при $n\geqslant7$

$$1^n+2^n+\ldots+9^n<10^n.$$

Оказывается, $1^5+2^5+3^5+\ldots+9^5>10^5$, поскольку $0{,}9^5+0{,}8^5+0{,}7^5>1$ (проверьте), а тогда и $1^4+2^4+\ldots+9^4>10^4$.

Чтобы завершить решение задачи, осталось выяснить, что больше: $1^6+2^6+\ldots+9^6$ или 10^6. Предлагаем вам сделать это самостоятельно.

(Ответ. $10^6>1^6+2^6+\ldots+9^6$.) Итак, $1^n+2^n+\ldots+9^n>10^n$ при $1\leqslant n\leqslant5$; при $n\geqslant6$ — «наоборот».

В следующей задаче появляются очень высокие степени.

Задача 5. *Какое число больше:*

$$1^1+2^2+3^3+\cdots+1000^{1000} \textit{ или } 2^{2^{2^{2^2}}}?$$

Решение. Во-первых, $2^{2^{2^{2^2}}}=2^{2^{2^4}}=2^{2^{16}}$. Так как $2^{10}=1024>10^3$ и $2^6=64$, получаем $2^{16}>64000$.

Значит, $2^{2^{2^{2^2}}}>2^{64\,000}$. С другой стороны, $1^1+2^2+3^2+\cdots+1000^{1000}<$

$$<\frac{1000^{1000}+1000^{1000}+\cdots+1000^{1000}}{1000}=$$

$$=1000^{1001}<(2^{10})^{1001}=2^{10\,010}.$$

Так как $2^{64\,000}>2^{10\,010}$, получаем

$$2^{2^{2^{2^2}}}>1^1+2^2+3^3+\cdots+1000^{1000}.$$

Как мы видим, $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}n$ с ростом n очень быстро растет. Но и число $\underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}}$ также растет очень быстро. Какое же из этих чисел больше?

Задача 6. *Что больше:* $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}n$ *или* $\underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}}$?

Решение. Давайте для удобства обозначим

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}\right\}n \text{ через } a_n,$$

$$\text{а } \underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}} \text{ через } b_n.$$

Легко вычислить несколько первых значений a_n: $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=16$, $a_4=65\,536$. $b_1=4$, однако уже b_2 вручную подсчитать очень тяжело. Тем не менее проверить, что $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$, $a_4<b_4$, совсем просто (сделайте это самостоятельно).

Сравним a_5 и b_5.

$$a_5=2^{a_4}=2^{65\,536};\quad b_5=22\,222^{22\,222}.$$

Докажем, что $b_5>a_5$. Действительно, $22\,222>1024=2^{10}$, поэтому $22\,222^{22\,222}>(2^{10})^{22\,222}=2^{222\,220}>2^{65\,536}$. Итак, при $1\leqslant n\leqslant5$ имеем $a_n<b_n$. Давайте теперь сравним a_6 и b_6:

$$a_6=2^{a_5}=2^{2^{65\,536}};\quad b_6=222\,222^{222\,222}.$$

$2^{65\,536}$ — очень большое число: $2^{65\,536}>10^{3\cdot6553}=10^{19\,659}$. Поэтому $a_6>2^{10^{19\,659}}=(2^{10^2})^{10^{19\,657}}>(10^{30})^{10^{19\,657}}$ и намного больше b_6. Попробуем теперь доказать, что $a_n>b_n$ при $n\geqslant6$. Оценим b_n сверху. Так как $\underbrace{22\ldots2}_{n}<10^n$, $b_n<(10^n)^{10^n}=10^{n\cdot10^n}$. В свою очередь, $10^{n\cdot10^n}<(2^4)^{n\cdot(2^4)^n}=2^{4n\cdot2^{4n}}<2^{2^n\cdot2^{4n}}=2^{2^{5n}}$. Таким образом, $b_n<2^{2^{5n}}$. Поэтому достаточно доказать, что $a_{n-2}>5n$ при $n\geqslant6$. Для $n=6$ это так: $a_4=2^{16}>5\cdot6$. Следовательно, $a_5=2^{a_4}>2a_4>2\cdot5\cdot6>5\cdot7$; $a_6=2^{a_5}>2a_5>2\cdot5\cdot7>5\cdot8$ и так далее.

Задача решена полностью.

Сейчас мы решим задачу M486 из Задачника «Кванта».

Задача 7. *Какое число больше:*

$$\left.2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n \text{ или } \left.3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n?$$

Эту задачу можно решить многими способами. Приведем один из них.

Решение. Для удобства обозначим $\left.2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$ через a_n, а $\left.3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$ через b_n. Заметим, что $a_{n+1}=2^{b_n}$; $b_{n+1}=3^{a_n}$.

Легко видеть, что $a_1=2$, $b_1=3$. Значит, $b_1>a_1$. Далее $a_2=2^3=8$, $b_2=3^2=9$. Поэтому $b_2>a_2$. Посчитаем a_3 и b_3. $a_3=2^{b_2}=512$; $b_3=3^{a_2}=$ $=6561$. Таким образом, $b_3>a_3$. Заметим, что $b_3>3a_3$. Выведем из этого, что $a_4>3b_4$. Действительно, $3b_4=3\cdot3^{a_3}<2^{a_3}\cdot4^{a_3}=2^{3a_3}<2^{b_3}=$ $=a_4$. Теперь легко понять, что и в общем случае из условия $3a_n<b_n$ следует, что $3b_{n+1}<a_{n+1}$, а из условия $3b_n<a_n$ — что $3a_{n+1}<b_{n+1}$.

Действительно, пусть $3a_n<b_n$. Тогда

$$3b_{n+1}=3\cdot3^{a_n}<2^{a_n}\cdot4^{a_n}=$$
$$=2^{3a_n}<2^{b_n}=a_{n+1}.$$

Если же $3b_n<a_n$, то $3a_{n+1}=3\cdot2^{b_n}<$ $<3^{b_n}\cdot3^{b_n}=3^{2b_n}<3^{a_n}=b_{n+1}$. Таким образом, мы получаем, что $b_n>a_n$ при нечетных n и $n=2$ и $a_n>b_n$ при четных $n\geqslant4$.

Все предыдущие решения были основаны на счастливых догадках. Более скучный, но зато более универсальный подход — использование логарифмов. Проиллюстрируем его на примере.

Задача 8. ***Найти степень четверки, наиболее близкую к числу***

$$2^{100}+3^{100}.$$

Решение. Во-первых, давайте попробуем оценить, во сколько раз число 3^{100} больше, чем 2^{100}. Для этого рассмотрим отношение этих чисел:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{100}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{50}>2^{50}=$$
$$=(2^{10})^5>(10^3)^5=10^{15}.$$

Значит, 2^{100} составляет менее, чем 0,000000000000001 от 3^{100}!

Теперь нам ясно, что число $2^{100}+3^{100}$ «практически» равно 3^{100}. Значит, $4^k\approx3^{100}$, где k — искомая степень. Поэтому $k\approx100\dfrac{\lg 3}{\lg 4}$. По таблице логарифмов находим, что $\lg 3\approx$ $\approx0{,}4771$, $\lg 4\approx0{,}6021$. Отсюда получаем, что $k\approx79$.

Наши рассуждения нельзя считать достаточными для доказательства. Пока они позволили нам найти ответ лишь приблизительно.

Приведем теперь строгое доказательство того, что 4^{79} — искомая степень.

Мы знаем, что значения логарифмов, приведенные в таблице В. М. Брадиса, имеют погрешности, не превосходящие половины единицы разряда последней цифры. (См. В. М. Брадис «Четырехзначные математические таблицы», с. 3.)

Поэтому $0{,}47705<\lg 3<0{,}47715$; $0{,}60205<\lg 4<0{,}60215$. Отсюда непосредственно умножая и округляя в нужную сторону, получаем $47{,}5<79\lg 4<47{,}6$ и $48{,}1<80\lg 4<48{,}2$. $\lg(2^{100}+3^{100})$ оценим следующим образом:

$$\lg(2^{100}+3^{100})=100\lg3+$$
$$+\lg(1+(^2/_3)^{100}).$$

Из $\lg(1+(^2/_3)^{100})<\lg(1+10^{-15})<$ $<\lg(1+10^{-2})<0{,}005$ (последнее неравенство при помощи таблиц) выводим $47{,}7<\lg(2^{100}+3^{100})<47{,}8$. Таким образом, $\lg(2^{100}+3^{100})-79\lg 4<$ $<0{,}3$, $80\lg 4-\lg(2^{100}+3^{100})>0{,}3$ и 4^{79} ближе к $2^{100}+3^{100}$, чем 4^{80}.

Иногда для сравнения больших чисел удается, рассмотрев подходящую функцию, использовать методы дифференциального исчисления.

Подробный рассказ об этом не входит в наши намерения. Мы снова ограничимся одним примером.

В задаче 3 требовалось отыскать среди чисел k^{11-k} $(k=1, 2, 3, \ldots, 10)$ максимальное.

Давайте рассмотрим функцию $f(x)=x^{11-x}$ $(x\in\,]0;\ \infty[)$.

Посчитаем производную этой функции. Для этого x^{11-x} преобразуем так: $x^{11-x}=e^{(11-x)\ln x}$. Значит,

$$f'(x)=(e^{(11-x)\ln x})'=e^{(11-x)\ln x}\times$$
$$\times[(11-x)\ln x]'=x^{11-x}\left[\frac{11-x}{x}-\ln x\right].$$

Ясно, что знак $f'(x)$ совпадает со знаком выражения, стоящего в скобке.

Функция $g(x)=\frac{11}{x}-\ln x-1$ на $]0;\ +\infty[$ убывает, причем $g(4)=1{,}75-\ln 4>0$, $g(5)=1{,}2-\ln 5<0$. (Докажите эти неравенства, воспользовавшись тем, что $3>e>2{,}5$.) Поэтому существует такое $x_0\in\ ]4;\ 5[$, что на промежутке $]0;\ x_0]$ функция f возрастает, а на $[x_0;\ \infty[$ — убывает. Значит, среди наших чисел самое большое либо $f(4)$, либо $f(5)$. Остается выбрать большее из них.

Задачи

9. Какое число больше:

а) 15^{30} или 30^{15}?

б) 2^{40} или 3^{33}?

в) 10^{1000} или 9^{1111}?

10. Какое число больше:

а) $5^{16}+6^{20}+7^{26}$ или 8^{24}?

б) $7^{15}+15^{7}$ или $6^{16}+16^{6}$?

в) $5^{5^{5^{5^{5}}}}$ или $6^{6^{6^{6}}}$?

11. Расположить в порядке возрастания числа

а) 2^{100}, 100^{50}, $3^{3^{3^{3}}}$, 1978^{1978}.

б) $\underbrace{111\ldots1}_{1978}{}^{\overbrace{11\ldots1}^{}_{1978}}$, $10^{10^{10^{10}}}$,

$5^{5^{5^{5^{5}}}}$, $2^{3^{4^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}}}$

12. Какое число больше:

а) $\left.\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}^{\frac{1}{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$ или

$\left.\frac{1}{3}^{\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$?

б) $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n+2$ или $\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\right\}n$?

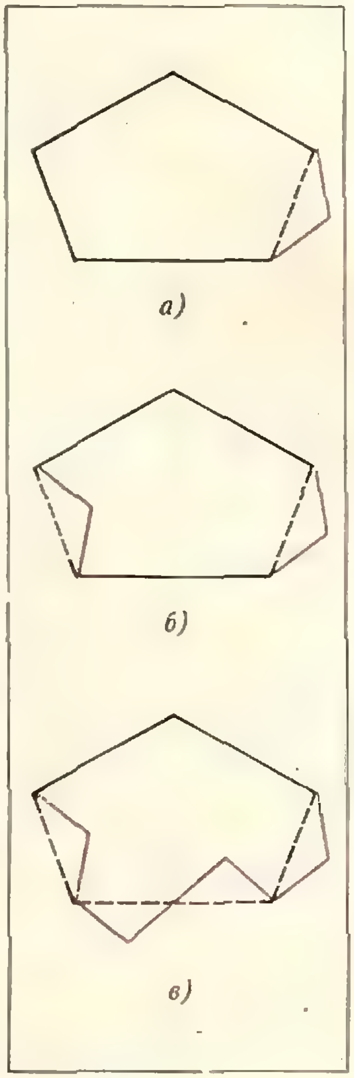
Новый калейдоскоп

Наш читатель Б. Ивякин прислал в редакцию следующую задачу: *разрезать правильный шестиугольник на 9 одинаковых частей.*

К задаче был приложен ответ, он изображен в центре первой страницы обложки нашего журнала: отрезками, соединяющими центр с вершинами, шестиугольник разбит на три ромба, каждый из которых разделен на три параллелограмма.

Когда я познакомился с этой задачей, то, естественно, начал искать другие решения. Довольно долго мне не удавалось нужным образом разбить шестиугольник, но, наконец, я нашел такое разбиение (оно изображено в верхней части рисунка на обложке). После этого мне захотелось «пошевелить» полученные пятиугольники. Результат оказался очень неожиданным — требуемые разбиения шестиугольника посыпались, как из рога изобилия. Пять из них изображены на обложке журнала.

Попробуем понять, что же происходит при таком «шевелении». Рассмотрим один из пятиугольников, примыкающих к границе данного шестиугольника, и немного изменим его правую боковую сторону (рис. 1а). Если мы таким образом изменим правые боковые стороны у всех пятиугольников, примыкающих к границе шестиугольника, то автоматически изменятся и их левые боковых стороны (рис. 1б). Если теперь проделать такое же изменение боковых сторон у трех центральных пятиугольников, то оно повлечет изменение формы «основания» у трех внешних пятиугольников (рис. 1в). Если теперь точно таким же образом изменить основания у остальных трех внешних пятиугольников, то при этом точно такую же форму примут и «основания» внутренних пятиугольников. В результате все девять частей вновь станут совершенно одинаковыми, и мы получаем новое разбиение шестиугольника на девять конгруэнтных частей. Форма такого разбиения может оказаться весьма причудливой, как это можно видеть из рисунка на обложке журнала. Многоугольники одного из разбиений очень похожи на зайчиков.



Попробуйте сами поэкспериментировать с такими разбиениями. Если у вас получатся интересные картинки, то присылайте нам. Лучшие картинки мы опубликуем.

А. Савин

Центр тяжести полушария

22 века назад Архимед придумал механический метод, с помощью которого впервые удалось найти объем шара и центр тяжести полушария. Еще раньше Демокрит и Евдокс установили, что объем конуса в три раза меньше объема описанного цилиндра, а центр тяжести конуса делит его высоту в отношении 3:1, считая от вершины.

Докажем, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра и что центр тяжести полушария делит его высоту в отношении 3:5, считая от центра шара.

Рассмотрим шар и описанный около него цилиндр. Плоскость рисунка 1 проходит через ось цилиндра, направленную горизонтально. Рассмотрим также конус с вершиной в центре шара O и основанием, общим с основанием полуцилиндра.

Проведем через произвольную точку A на оси полуцилиндра плоскость MN, перпендикулярную этой оси. В сечении с шаром она даст круг радиуса AP, с конусом — круг радиуса AB, с цилиндром — круг радиуса $AM=R$. Теорема Пифагора гласит, что $AP^2+AO^2=OP^2=AM^2$, а так как угол при вершине конуса прямой и $AO=AB$, $AP^2+AB^2=AM^2$.

Взяв это соотношение π раз, усматриваем, что сечения шара и конуса в сумме имеют площадь, равную сечению цилиндра:

$$S_ш + S_к = S_ц. \qquad (1)$$

Так как (1) верно для любой точки A на оси полуцилиндра, из принципа Кавальери («Алгебра и начала анализа 10», п. 107, или «Квант», 1977, № 2, с. 7, 10) находим, что объемы полушария $V_ш$ и конуса $V_к$ в сумме равны объему полуцилиндра $V_ц$:

$$V_ш + V_к = V_ц. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь ось цилиндра как рычаг с серединой в центре O. Перенесем сечение цилиндра в правую сторону рисунка в точку A', симметричную точке A относительно центра O. С помощью (2) устанавливаем, что сечения шара и конуса, подвешенные вместе в точке A, уравновешивают сечение цилиндра, подвешенное в точке A'.

Если теперь заполнить кругами все сечения шара и конуса слева, а сечения полуцилиндра — симметрично справа от точки O, то из равновесия каждых трех таких кругов следует, что полушарие и конус вместе уравновешивают полуцилиндр относительно центра O (рис. 2).

Но центр тяжести полуцилиндра находится на середине C его оси, и центр тяжести K конуса, как было упомянуто выше, на расстоянии $OK = (3/4)\,R$ от вершины. Пусть центр тяжести полушария будет в точке X. Тогда по правилу рычага условие равновесия этих трех тел имеет вид:

$$|OX|\cdot V_ш + |OK|\cdot V_к = |OC|\cdot V_ц. \qquad (3)$$

Но $V_к = (1/3)\,V_ц$, а из соотношения между объемами (2) находим $V_ш = V_ц - V_к = (2/3)\,V_ц$, то есть объем полушария в полтора раза меньше объема описанного полуцилиндра. Поэтому условие равновесия (3) принимает вид:

$$(2/3)V_ц\,|OX| + (1/3)V_ц \times (3/4)R = V_ц\cdot(1/2)\,R.$$

Отсюда получаем

$$|OX| = (3/8)\,R,$$

то есть центр тяжести полушария делит высоту полушария в отношении 3:5, считая от центра шара.

Как этим методом найти центр тяжести сегмента шара или сегмента эллипсоида, легко сообразит и сам читатель.

М. Мамикон

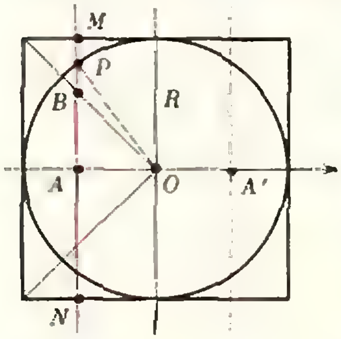


Рис. 1.

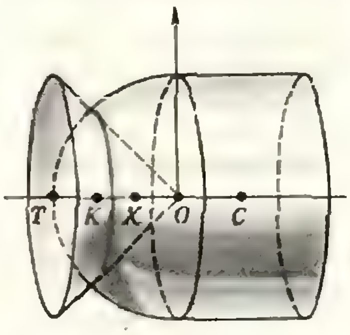


Рис. 2.

От редакции: В № 5 журнала «Квант» за 1977 г. было опубликовано два решения задачи об объеме шара — «механическое» решение Архимеда и геометрическое решение М. Мамикона. Данная заметка является логическим продолжением этой статьи.

задачник кванта

Задачи
M531—M535; Ф543—Ф547

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 января 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса напишите на конверте номера задач, решения которых вы посылаете (например, «M531, M534» или «Ф543»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

M531. Из пунктов A и B не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов A и B, они опять развернулись и второй раз встретились в точке D; здесь они вновь развернулись, и т. д. В какой точке отрезка AB произошла их 1978-я встреча?

Н. Васильев

M532. Положим $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и $b_n=\sqrt{4n+2}$. Докажите, что для любого натурального n

а) $[a_n]=[b_n]$, где $[x]$ — целая часть числа x;

б) $0<b_n-a_n<\dfrac{1}{16n\sqrt{n}}$.

M533*. Назовем выпуклый многоугольник *особым*, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника найдется вершина A, обладающая таким свойством: для любого $\varepsilon>0$ вершину A можно сдвинуть на расстояние, меньшее ε (не меняя остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.

В. Болтянский

M534. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от $\triangle ABC$ трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники (рис. 1). Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилежащих к сторонам $\triangle ABC$, равна площади четвертого.

В. Косьянчук

M535. Пусть на плоскости задана система из трех бесконечных в обе стороны последовательностей точек A_k, B_l, C_m (индексы k, l и m пробегают все множество целых чисел). Назовем такую систему *триграммой*, если для любых k и m прямой A_kC_m

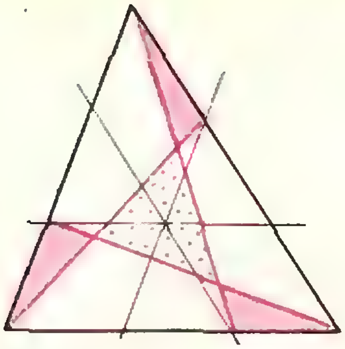


Рис. 1.

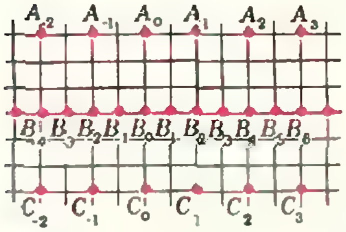

A_{-2}
A_{-1}
A_0
A_1
A_2
A_3
B_{-4} B_{-3} B_{-2} B_{-1} B_0 B_1 B_2 B_3 B_4 B_5 B_6
C_{-2}
C_{-1}
C_0
C_1
C_2
C_3

Рис. 2.

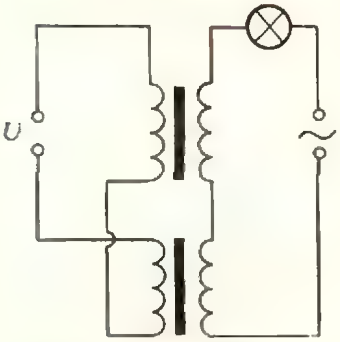


Рис. 3.

принадлежит еще одна точка B_{k+m} этой системы.

а) Проверьте, что система, изображенная на рисунке 2, является триграммой.

б) Докажите, что для любых трех различных прямых a, b и c существует триграмма, для которой $A_k \in a$, $B_l \in b$, $C_m \in c$ (при всех k, l, m).

в) Докажите, что если все точки A_k и C_m триграммы лежат, соответственно, на прямых a и c, то все точки последовательности B_l также лежат на одной прямой.

Задачи б) и в) советуем сначала решить для случая, когда прямые a и c параллельны.

г) Придумайте ограниченную триграмму (все точки которой лежат в пределах некоторого круга).

В. Батырев

Ф543. На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом 45° световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла n.

II Международная олимпиада по физике, 1968 г.

Ф544. Оценить скорость ракеты с космонавтом при выходе из плотных слоев атмосферы.

Ф545. Два воздушных пузырька радиусов $r_1 = r_2 = 3$ мм в баке с водой сливаются в один. Найти радиус получившегося пузырька сразу же после его образования и через большое время после этого, если теплопроводность воды невелика, а ее теплоемкость очень большая. Считать, что пузырьки находятся вблизи поверхности воды.

Журнал «KLM» (Венгрия)

Ф546. Первичные обмотки двух одинаковых трансформаторов соединяются последовательно друг с другом и с лампочкой, рассчитанной на напряжение сети 220 В (рис. 3). Затем их подключают к источнику переменного тока с напряжением 220 В. При этом оказывается, что лампочка не горит. Если же затем вторичные обмотки трансформаторов (содержащие большое число витков) соединить так, как показано на рисунке 3, и подключить их к источнику постоянного тока, то при увеличении напряжения источника от 0 до 30 В лампочка будет гореть тем ярче, чем больше напряжение источника. Объяснить описанный опыт.

Е. Бланк

Ф547. Фотографии шаровых сгустков светящейся плазмы, летящих равнозамедленно до остановки, имеют вид полос длины l. Максимальная ширина полос $d \ll l$. Расстояние между плазмой и объективом фотоаппарата L, фокусное расстояние объектива F. Минимальное время «засветки», необходимое для того, чтобы на фотографии появилось изображение, равно τ. Определить ускорение сгустков. Объектив фотоаппарата остается открытым до полной остановки сгустков.

В. Сергиенко

Решения задач

М482, М485, М487, М489—М490; Ф498—Ф501

М482. *Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника не меньше 2a, но меньше 3a, где a — длина ребра тетраэдра.*

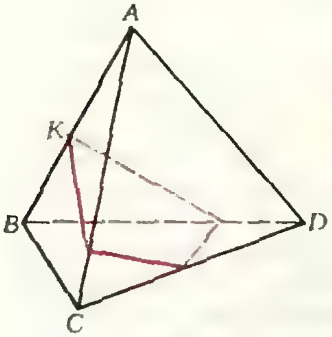


Рис. 1.

Докажем сначала, что периметр четырехугольника $p \geqslant 2a$. Развертка тетраэдра (рис. 2) изображена на рисунке 2. При развертке контур четырехугольного сечения превратился в красную ломаную K_1K_2. Видно, что периметр p будет равен $2a$ лишь тогда, когда секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра, а во всех остальных случаях $p > 2a$.

Доказательство неравенства $p < 3a$ легче всего получить, рассматривая сразу семейство сечений тетраэдра параллельными плоскостями. Пусть плоскость сечения перемещается параллельно самой себе; мы рассматриваем такой интервал значений $l \in [b_1; b_2]$ (см. рис. 2), что при $b_1 < l < b_2$ сечение остается четырехугольником, а при $l = b_1$ и $l = b_2$ оно становится треугольником (рис. 3). Длина каждой стороны сечения, а значит и периметр p сечения, будет линейной функцией от l : $p\,(l) = kl + c$ (k, c — некоторые постоянные). Наибольшее значение такая функция принимает на концах отрезка $[b_1; b_2]$, когда сечение — треугольник. Но длина любого отрезка с концами на сторонах равностороннего треугольника не больше длины его стороны a, и поэтому $p < 3a$.

Н. Васильев, В. Произволов

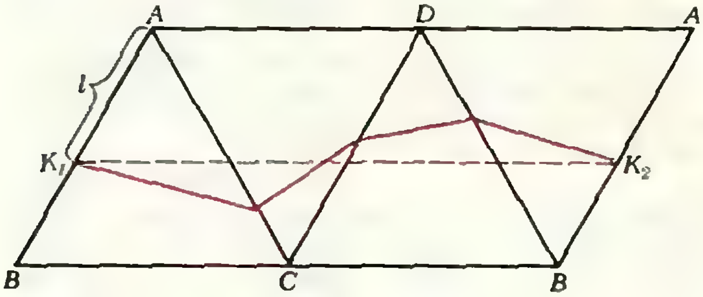


Рис. 2.

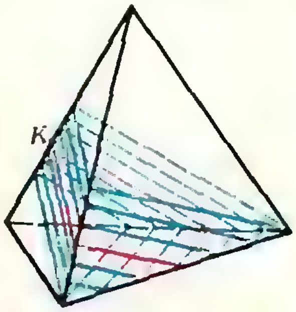


Рис. 3.

М485. *а) Докажите, что число e заключено между числами* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *и* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *при любом натуральном n.*

б) Докажите, что последовательность $c_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *монотонно возрастает, а последовательность* $d_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *монотонно убывает.*

в) Разделим отрезок $[a_n;\ b_n]$ *на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число e?*

а) Докажем, что последовательность (a_n) монотонно возрастает. Действительно,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = $$
$$= \frac{n}{n-1}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Согласно неравенству Бернулли *),

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

откуда

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1.$$

Докажем теперь, что последовательность (b_n) монотонно

---

*) Докажите его самостоятельно. См. также «Алгебра и начала анализа 9», п. 2.

г) Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на восемь равных частей. В какой из них лежит e?

д) А если отрезок $[a_n; b_n]$ разделить на 2^k равных частей (в этой задаче интересно получить ответ для достаточно больших n, например, для $n > 2^k$)? (Напомним, что $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718\ldots$, — см. учебник «Алгебра и начала анализа 10», пп. 109,113.)

убывает. Имеем

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}.$$

Вновь применяя неравенство Бернулли, получим

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} > 1+\frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1},$$

то есть $\dfrac{b_{n-1}}{b_n} > 1$.

Поскольку $e = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, из доказанного следует, что

$$a_n < e < b_n.$$

д) Решим задачу д) — задачи б), в) и г) будут следовать из этого решения.

Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на 2^k равных частей. Длина одной такой части равна

$$\Delta = \frac{b_n - a_n}{2^k} = \frac{1}{2^k\cdot n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Середине отрезка $[a_n; b_n]$ соответствует число $a_n + \dfrac{b_n - a_n}{2} = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = d_n$. Легко видеть, что 2^{k-1}-й из полученных отрезочков имеет правым концом число d_n, и левым концом — число $t_n = d_n - \Delta =$

$$= \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2^k\cdot n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k\cdot n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ ($k \geqslant 2$). (При $k = 2$ число t_n совпадает с числом c_n из пункта б) задачи.)

Докажем, что при достаточно больших n (а именно, при $n > 3\cdot 2^{k-2}$) число e лежит на 2^{k-1}-м отрезочке длины Δ. Для этого достаточно показать, что при таких n последовательность левых концов (t_n) этого отрезочка монотонно возрастает, а последовательность (d_n) правых концов монотонно убывает (поскольку $e = \lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} d_n$).

Имеем

$$\frac{d_{n-1}}{d_n} = \left[\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right] :$$

$$: \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{2n-1}{2n+1}\left(1-\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Аналогично неравенству Бернулли, можно доказать более точное неравенство:

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh + \frac{(n-1)\,n}{2}\,h^2$$

(здесь n — натуральное, а $h > 0$); сделайте это самостоятельно. Из него

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geqslant 1 + \frac{n}{n^2-1} + \frac{n(n-1)}{2(n^2-1)^2} =$$

$$= \frac{2n^3 - 4n^2 + n - 2}{2(n-1)(n+1)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{d_{n-1}}{d_n} \geqslant \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n^3+4n^2+n-2}{2(n-1)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{4n^4+6n^3-2n^2-5n+2}{4n^4+6n^3-2n^2-6n-2} > 1$$

при любом $n \in N$. Значит, последовательность (d_n) монотонно убывает.

Перейдем теперь к последовательности (t_n). Имеем

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \left[\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k \cdot n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] : \left[\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k(n-1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right] = \frac{2^k \cdot n + 2^{k-1}-1}{2^k \cdot (n-1) + 2^{k-1}-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Но $(1-h)^n \geqslant 1 - nh + \frac{(n-1)^2}{2} h^2$ при $0 \quad h \quad \frac{1}{(n-1)^2}$

(это неравенство доказывается аналогично неравенству Бернулли). Поэтому

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} \geqslant \frac{2^k \cdot n + 2^{k-1}-1}{2^k \cdot (n-1) + 2^{k-1}-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)^2}{2n^4}\right) =$$

$$= \frac{2^k \cdot n + 2^{k-1}-1}{2^k \cdot (n-1) + 2^{k-1}-1} \cdot \frac{2n^4-2n^3+n^2-2n+1}{2n^4}.$$

Нас интересует, когда $\frac{t_n}{t_{n-1}} > 1$, то есть когда

$$\left(n+\frac{1}{2}-2^{-k}\right) \cdot (2n^4-2n^3+n^2-2n+1) >$$

$$> \left(n-1+\frac{1}{2}-2^{-k}\right) \cdot 2n^4.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$2^{1-k} \cdot n^3 - \left(\frac{3}{2}+2^{-k}\right)n^2 + 2^{1-k} \cdot n + \frac{1}{2} - 2^{-k} > 0,$$

которое следует из неравенства

$$2^{1-k} \cdot n^3 \geqslant \left(\frac{3}{2}+2^{-k}\right)n^2.$$

Таким образом, при $n \geqslant 3 \cdot 2^{k-2} + \frac{1}{2}$, или $n > 3 \cdot 2^{k-2}$,

последовательность (t_n) становится монотонно возрастающей. Из этого следует наше утверждение: число e лежит внутри 2^{k-1}-го отрезочка длины Δ, если $n > 3 \cdot 2^{k-2}$.

Из решения задачи д) следует, что уже $\frac{c_4}{c_1} > 1$. Первые же три члена этой последовательности: $\frac{5}{2}$, $\frac{3^4}{2^5}$, $\frac{13 \cdot 2^4}{3^4}$ — очевидно, составляют возрастающую цепочку.

Итак, в задаче в) число e попадает во второй из четырех равных по длине отрезков, а в задаче в) — в четвертый (для $n > 6$).

С. Голубев, Р. Ушаков

◆

M487. *На данных окружностях γ_1 и γ_2 построить по хорде так, чтобы эти хорды были гомотетичны*

Пусть нам удалось построить нужную гомотетию H и пусть $H(\gamma_1)$ пересекается с γ_2 в точках B и C (рис. 4). Проведем в точке A общую к γ_1 и $H(\gamma_1)$ касательную; обозначим через D точку пересечения этой касательной с *с заданным центром A, принадлежащим γ_1, и чтобы длина хорды окружности γ_2 равнялась заданной величине a**).

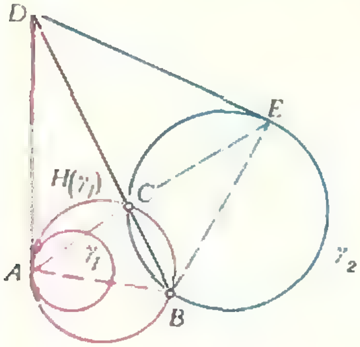


Рис. 4.

(BC). Из точки D проведем касательную DE к окружности γ_2. Легко сообразить, что отрезки AD и DE имеют одинаковую длину. (Действительно, из подобия треугольников ABD и ACD следует, что $|AD|^2 = |DC|\cdot|DB|$, а из подобия треугольников BDE и CDE — что $|DE|^2 = |DC|\cdot|DB|$.) Пусть, наоборот, нам удалось построить такую точку D, что отрезки касательных DA и DE к окружностям γ_1 и γ_2 равны по длине. Пусть O_2 — центр γ_2, а r_2 — ее радиус. Заметим, что все хорды окружности γ_2 длины a касаются концентрической с γ_2 окружности γ_3 радиуса $r_3 = \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ (рис. 5). Проведя из точки D касательные к этой окружности, получим два возможных положения хорды BC окружности γ_2 (длины a). (Если $a = 2r_2$, то хорда — единственная; ее мы получим, соединив D с центром O_2; больше же $2r_2$ длина хорды a, разумеется, быть не может.) Соединив точки B и C с точкой A, получим гомотетичную BC хорду B_1C_1 окружности γ_1 (см. рис. 5, на этом рисунке изображено одно из решений).

Остается построить точку D. Проведем через точку A перпендикуляр m к прямой l, касающейся в точке A окружности γ_1. Отложим на m отрезок AO длины r_2 (рис. 6). Поскольку $|DA| = |DE|$, треугольники ADO и EDO_2 конгруэнтны, так что точка D равноудалена от точек O и O_2. Это дает возможность ее отыскать, если касательная l и серединный перпендикуляр n к отрезку OO_2 пересекаются (как на рисунке 6). Если же l и n параллельны, то в качестве искомой хорды нужно взять отрезок параллельной l *касательной к упомянутой выше окружности* γ_3 (рис. 7).

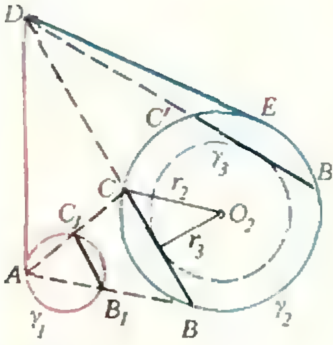


Рис. 5.

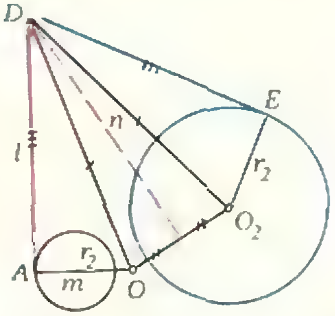


Рис. 6.

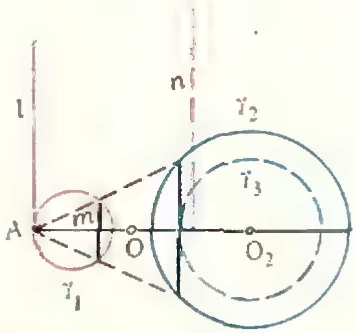


Рис. 7.

Л. Лиманов

◆

M489. *Даны три числа a, b, c. Построим три последовательности (a_n), (b_n), (c_n), у которых $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$ и*

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

В качестве наводящего соображения рассмотрим вместо чисел a_1, b_1, c_1 точки A_1, B_1, C_1, о которых сначала *предположим*, что они *не* лежат на одной прямой. Числам a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} сопоставим середины A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} соответствующих сторон треугольника $A_nB_nC_n$. Мы получим три последовательности точек на плоскости. Легко понять, что отрезки медиан треугольника $A_1B_1C_1$, лежащие внутри $\triangle A_2B_2C_2$, являются медианами в $\triangle A_2B_2C_2$. Поэтому точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают. Отсюда ясно, что если вместо исходной задачи решать аналогичную задачу для *точек на плоскости*, то соответствующий предел существует и совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника $A_1B_1C_1$ (и всех последующих треугольников). Эта точка есть *центр тяжести* системы трех исходных точек.

Если исходные точки лежат на одной прямой, то справедливость аналогичного утверждения следует из «*соображений непрерывности*». *Она вытекает* также из следующего рассуждения. Если A', B', C' — проекции точек A, B, C на координатную ось и a', b', c' — их координаты,

---

*) Решение задачи **M486** см. в статье Л. Курляндчика «Высокие степени» (с. 13); решение задачи **M488** будет опубликовано позже.

для любого $n=1, 2, 3, \ldots$ Докажите, что все эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

то координата проекции центра тяжести точек A, B, C на эту ось равна среднему арифметическому координат проекций исходных точек, т. е. $\frac{a'+b'+c'}{3}$. (Заметим еще, что координата проекции середины отрезка равна полусумме координат проекций концов отрезка.) Поскольку для любых трех точек a, b, c на прямой можно выбрать три точки на плоскости, проекциями которых служат точки a, b, c, то из справедливости утверждения на плоскости следует его справедливость на прямой.

Теперь легко дать аналитическое доказательство того, что число $d=\frac{a+b+c}{3}$ является общим пределом указанных последовательностей. Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$|a_n-d|=2\,|a_{n+1}-d|,\quad |b_n-d|=2\,|b_{n+1}-d|,\quad |c_n-d|=2\,|c_{n+1}-d|$$

(с каждым шагом последовательности вдвое приближаются к пределу).

Заметим, что для любого n

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2}+\frac{c_n+a_n}{2}+\frac{a_n+b_n}{2}=a_n+b_n+c_n.$$

Отсюда видно, что $d=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}$ для любого n. Имеем:

$$|a_n-d|=\left|a_n-\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\right|=\left|\frac{2a_n-b_n-c_n}{3}\right|=\left|\frac{b_n+c_n-2a_n}{3}\right|=2\left|\frac{b_n+c_n}{2}-\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\right|=2\,|a_{n+1}-d|.$$

Два другие равенства проверяются аналогично.

В заключение заметим следующее. Среднее арифметическое двух чисел, рассматриваемое как операция, неассоциативно (т. е., вообще говоря,

$$\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}\neq\frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}\Bigg),$$

и среднее арифметическое трех чисел, вообще говоря, не выражается как конечная комбинация средних арифметических этих чисел, взятых по два (докажите это!). Тем не менее, как мы видели, используя предельный переход, среднее арифметическое трех чисел через среднее арифметическое двоек чисел выразить можно. Аналогичные предельные соотношения связывают средние арифметические $k+1$ и k чисел для любого целого $k\geqslant 2$.

И. Бурмистрович

◆

М490. *p — простое нечетное число. Дано $p-1$ целых чисел, не делящихся на p. Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p.*

Будем писать $a\equiv b$, если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на p (как известно, в этом случае говорят, что *a сравнимо с b по модулю p* — см. статью «Сравнения и классы вычетов» в «Кванте» № 10). Тогда очевидно, что если p — нечетное простое число, то существует такое целое число s, $0\leqslant 2s<p-1$, что $2s\equiv a_1+\ldots+a_{p-1}$ (продумайте это!).

Для доказательства нам понадобится лемма, которая однажды уже публиковалась в «Кванте» («Квант», 1971, № 8, с. 43):

Лемма. *Пусть даны r целых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_r$, не делящихся на p; $0 < r < p$, p — простое. Тогда из этих чисел можно составить по крайней мере $r + 1$ сумм, дающих различные остатки при делении на p* (при этом разрешается брать сумму «пустого множества слагаемых», которая считается равной нулю, суммы «из одного слагаемого», из двух, ..., из всех r слагаемых).

Доказательство этой леммы мы приведем несколько ниже, а сейчас покажем, как с ее помощью решается наша задача.

В силу леммы из чисел $a_1, \ldots, a_{p-1}$ можно составить по крайней мере p сумм, дающих при делении на p различные остатки. Поскольку всего различных остатков при делении на p ровно p штук: $0, 1, \ldots, p-1$, среди этих сумм найдется сумма, дающая при делении на p остаток s. Пусть эта сумма $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$; тогда $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \equiv s$. Возьмем теперь все остальные числа, не вошедшие слагаемыми в сумму $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$; пусть это числа $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$. Поскольку $a_1 + \ldots + a_{p-1} \equiv 2s$ и $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \equiv s$, получаем, что $a_{j_1} + \cdots + a_{j_l} \equiv s$. Поменяв числа $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$ на противоположные, получим число $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} - a_{j_1} - \cdots - a_{j_l}$, сравнимое с нулем по модулю p, то есть делящееся на p.

Для завершения решения задачи нам осталось доказать лемму. Сделаем это по индукции.

При $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно для $r = k < p - 1$ и неверно для $r = k + 1$, и придем к противоречию. Итак, пусть суммы из k слагаемых $b_1, b_2, \ldots, b_k$ дают при делении на p $k + 1$ различных остатков $0, s_1, \ldots, s_k$. Тогда, поскольку после присоединения b_{k+1} количество различных сумм не должно увеличиваться, все суммы $0 + b_{k+1}$, $s_1 + b_{k+1}, \ldots, s_k + b_{k+1}$ по модулю p содержатся в множестве $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$. Другими словами, если к любому элементу этого множества прибавить b_{k+1}, то снова получится элемент того же множества. Таким образом, это множество заведомо содержит элементы 0, $b_{k+1}, 2b_{k+1}, \ldots, (p-1)\,b_{k+1}$. Но ясно, что все эти элементы различны (по модулю p): разность $ib_{k+1} - jb_{k+1} = (i - j)\,b_{k+1}$, где $0 < i - j < p$, не может делиться на p, поскольку p — простое. Значит, множество $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$ содержит все p различных элементов, хотя мы предполагали, что $k + 1 < p$. Лемма доказана.

Ф. Вайнштейн,
В. Гальперин

◆

Ф498. *Диаметр тонкостенного цилиндрического стакана равен d, высота — h. Стенки и дно стакана одинаковой толщины. В стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?*

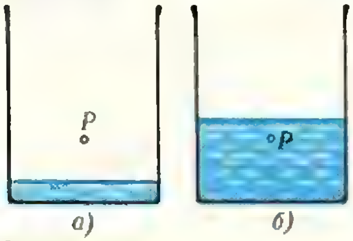


Рис. 8

Наинизшее положение центр тяжести системы занимает тогда, когда он находится на уровне воды в стакане. Действительно, если уровень воды лежит ниже центра тяжести системы (точка P на рисунке 8, *а*), то центр тяжести понижается при доливании в стакан воды (при этом увеличивается масса ниже центра тяжести). Если же уровень воды лежит выше центра тяжести системы (рис. 8, *б*), то центр тяжести опустится, если вылить из стакана воду, лежащую выше него.

Найдем положение центра тяжести системы, когда он находится на минимальной высоте (рис. 9). Если центр тяжести системы (точка P) находится на высоте y над дном стакана, то центр тяжести воды (точка P_1) находится на высоте $y/2$ от дна. Центр тяжести боковых стенок стакана (точка P_2) находится на высоте $h/2$, центр тяжести дна (точка P_3) — на дне. Обозначим через m_1 массу воды в стакане, через m_2 — массу стенок стакана и через m_3 — массу дна. Тогда

$$(m_1 + m_2 + m_3)\,y = m_1 y/2 + m_2 h/2 \qquad (*)$$

(потенциальная энергия $(m_1 + m_2 + m_3)\,gy$ системы рав-

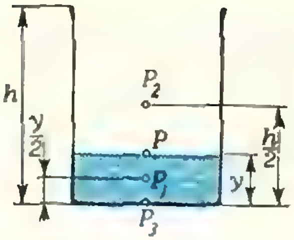


Рис. 9.

на сумме потенциальных энергий воды, стенок стакана и дна: $m_1gy/2 + m_2gh/2 + 0$).

Пусть ρ — плотность воды, μ — масса единицы площади стенок и дна. Тогда $m_1 = \frac{\pi d^2}{4} y\rho$, $m_2 = \pi dh\mu$, $m_3 = \frac{\pi d^2}{4}\mu$.

Используя эти выражения, получим из (*) следующее уравнение для y:

$$y^2 d\rho + \mu(8h + 2d)y - 4h^2\mu = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$y = \frac{1}{d\rho}\{\sqrt{\mu^2(4h + d)^2 + 4h^2\mu d\rho} - \mu(4h + d)\}.$$

◆

Ф499. *Два стеклянных шара радиусов r и R соединены точкой длинной стеклянной трубкой и наполнены воздухом. Посередине трубки находится капля ртути. Можно ли с помощью этого прибора измерять температуру окружающего воздуха?*

Прибор сможет служить термометром, если объемы воздуха V_1 и V_2, разделенные каплей ртути, будут зависеть от температуры.

Рассмотрим сначала, зависит ли V_1 от T (и V_2 от T) при горизонтальном расположении прибора. Если капля ртути находится в равновесии при температуре T, то давления слева и справа от нее должны быть одинаковы: $p_1 = p_2$. Обозначим через m_1 и m_2 массы воздуха, соответственно, слева и справа от капли и через μ — молярную массу воздуха. Тогда

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu V_1}RT, \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu V_2}RT, \tag{1}$$

так что при $p_1 = p_2$ имеем:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2}, \text{ или } \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Мы видим, что при горизонтальном расположении прибора V_1/V_2 не зависит от T. Сумма $V_1 + V_2$ тоже постоянна. Следовательно, ни V_1, ни V_2 не зависят от температуры*). Термометром прибор служить не может.

При вертикальном расположении прибора давление под каплей должно быть выше давления над ней, так чтобы выполнялось условие равновесия:

$$p_1 s = p_2 s + mg, \tag{2}$$

где m — масса капли, s — площадь сечения трубки, p_1 и p_2 — давления воздуха, соответственно, ниже и выше капли. Подставляя в (2) выражения (1) для p_1 и p_2, получим

$$\frac{m_1}{V_1} - \frac{m_2}{V_2} = \frac{mg\mu}{sRT}.$$

И так как $V_1 + V_2 = \text{const}$, ясно, что в этом случае как V_1, так и V_2 зависят от температуры. Прибор может служить термометром.

◆

Ф500. *На столбе на высоте h над землей висит звонок. На каком расстоянии от столба звук слышен громче всего, если скорость звука равна c, а скорость ветра, дующего горизонтально, равна v?*

Звук, излучаемый звонком, распространяется в виде сферических волн, центр которых движется горизонтально со скоростью ветра $|\vec{v}|$. Так как по мере увеличения радиуса волнового фронта интенсивность звука убывает, ясно, что громче всего звонок слышен в той точке на земле, в которую звук попадает, пройдя минимальное расстояние от центра сферической волны. Это — та точка, в которой сферическая волна касается поверхности земли. Так как к моменту касания волновой фронт проходит расстояние $h = ct$, где t — время, через которое излученная волна коснется поверхности земли, то $t = h/c$. За это время центр волны сместится по направлению ветра на расстояние $l = |\vec{v}|\,t = h\,|\vec{v}|/c$. На таком расстоянии от столба звук и слышен громче всего.

---

*) В действительности при изменении температуры меняется объем капли ртути, и это приводит к изменению объемов V_1 и V_2. Однако, поскольку объем капли ртути много меньше V_1 и V_2, этим изменением можно пренебречь.

◆

Ф501. *На краю стола высоты H стоит шар радиуса R, причем $R \ll H$. Шар начинает соскальзывать со стола без трения. На каком расстоянии от стола упадет шар?*

До тех пор, пока шар соскальзывает со стола, касаясь его в точке A, центр тяжести шара движется по окружности радиуса R (расстояние между центром и точкой A все время равно R). При этом в каждый момент времени скорость центра тяжести (точки O) направлена перпендикулярно радиусу, проведенному в точку A; центростремительное ускорение точке O сообщают две силы — сила тяжести и сила реакции стола. В тот момент, когда шар отрывается от стола, сила реакции равна нулю. Значит, в этот момент центростремительное ускорение точке O сообщает только сила тяжести.

Пусть в момент отрыва шар касается стола точкой P (рис. 10), скорость точки O в этот момент равна $\vec{v}$. Соласно II закону Ньютона в этот момент (см. рис. 10)

$$\frac{mv^2}{R} = m|\vec{g}|\cos\alpha$$

(m — масса шара). Согласно закону сохранения энергии

$$m|\vec{g}|R = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + m|\vec{g}|R\cos\alpha.$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R}.$$

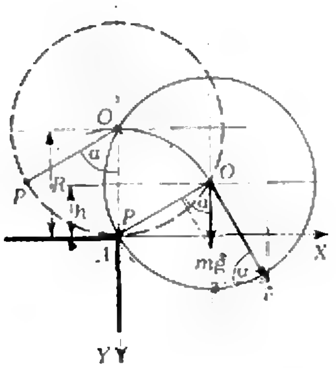


Рис. 10.

Итак, в момент отрыва от стола центр шара движется со скоростью $\vec{v}$, проекция которой на ось X (см. рис. 10) равна $|\vec{v}|\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R}$, а на ось Y — $|\vec{v}|\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}|\vec{g}|R}$. В дальнейшем шар движется как тело, брошенное под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}$. Координаты x и y центра шара меняются со временем так:

$$x = |\vec{v}|\,t\cos\alpha = \frac{2}{3}\,t\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R},$$

$$y = |\vec{v}|\,t\sin\alpha + \frac{|\vec{g}|t^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,t\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R} + \frac{|\vec{g}|\,t^2}{2}$$

(мы считаем, что в начальный момент координата y равна нулю, пренебрегая величиной $h = R\cos\alpha$). В тот момент, когда шар касается земли, $x = x_{\max}$, $y = H$. Если это происходит через время t_0 от момента отрыва шара от стола, то

$$H = \frac{\sqrt{5}}{3}\,t_0\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R} + \frac{|\vec{g}|t_0^2}{2},$$

откуда

$$t_0 \approx \frac{1}{3g}\left(3\sqrt{2|\vec{g}|H} - \sqrt{\frac{10}{3}|\vec{g}|R}\right).$$

Следовательно,

$$x_{\max} = \frac{2}{3}\,t_0\sqrt{\frac{2}{3}|\vec{g}|R} \approx \frac{4}{3}\sqrt{\frac{RH}{3}} - \frac{4}{27}R\sqrt{5}.$$

И. Слободецкий

А. Звонкин

Что такое π?

Число π впервые появляется в школе в 5 классе — в учебнике «Математика 5» (п. 59), о нем говорится в учебнике «Геометрия 8» (п. 118) и в учебнике «Алгебра и начала анализа 9» (п. 33). Однако доказательства существования числа π в этих учебниках нет. Мы приводим его в этой статье.

Длина отрезка

Длиной отрезка называется расстояние между его концами («Геометрия 6», п. 7).

На практике длины отрезков измеряют с помощью измерительных приборов — линейки, рулетки и т. п. Теоретический анализ этого процесса приводит к математической конструкции, называемой *процессом измерения*, и вполне заслуживает отдельной статьи.

Коротко говоря, процесс измерения состоит в следующем:

1) выбирается произвольный отрезок — *единица длины;*

2) единица длины откладывается в измеряемом отрезке столько раз, сколько можно;

3) если при этом от измеряемого отрезка остается остаток, то единица длины делится на равные части и полученная часть единицы откладывается в остатке;

4) и так далее.

Самое интересное здесь скрыто в четвертом пункте. Оказывается, процесс измерения может кончиться за конечное число шагов (в этом случае измеряемый отрезок и единица длины называются *соизмеримыми*), а может и продолжаться бесконечно.

Таким образом, даже при измерении длины отрезка может понадобиться предельный переход. Вполне естественно, что он будет необходим нам и при определении длины окружности. При этом мы будем считать, что мы уже знаем, что такое длина отрезка и, тем самым, периметр многоугольника.

Читатель может спросить: а нельзя ли измерить длину окружности следующим простым способом — обмотать ее ниткой, затем нитку развернуть и приложить к линейке? К сожалению, для превращения этого практического способа измерения в строгую математическую конструкцию требуются довольно изысканные математические средства, выходящие за рамки школьной программы.

Плохие определения длины окружности

Теорема может быть верной или неверной — определение ни верным, ни неверным быть не может. Определение может быть противоречивым (если не существует объектов, удовлетворяющих ему), некорректным (если оно определяет не то, что мы хотели) и неудобным.

Мы дадим сейчас несколько определений длины окружности. Все определения будут строиться по одной и той же схеме: тем или иным способом будет выбираться последовательность (Π_n) вписанных в окружность многоугольников и длиной окружности будет называться $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где P_n — периметр многоугольника Π_n. Друг от друга определения будут отличаться разным выбором последовательно (Π_n).

Дадим сначала несколько плохих определений.

«Определение» 1. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — произ-

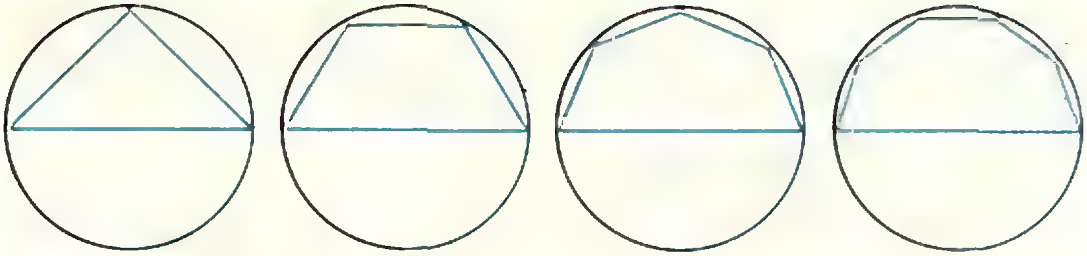


Рис. 1.

вольная последовательность вписанных многоугольников.

Это определение никуда не годится. Например, если при всех n многоугольник Π_n — это один и тот же вписанный в окружность квадрат, то (P_n) — постоянная последовательность, и в качестве длины окружности у нас получится периметр вписанного квадрата. Если же в последовательности (Π_n) стоят по очереди квадраты и правильные треугольники, то последовательность (P_n) предела не имеет (докажите!).

Обозначим через $\varphi(n)$ число сторон многоугольника Π_n, через $\psi(n)$ — длину его наибольшей стороны.

«Определение» 2. $L=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty$ *).

Оказывается, и это определение некорректно. На рисунке 1 изображена последовательность (Π_n), удовлетворяющая «определению» 2 и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не совпадает с тем, что мы хотели бы считать длиной окружности. Нетрудно также построить пример последовательности (Π_n), удовлетворяющей «определению» 2, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не существует (постройте!).

«Определение» 3. $L=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)=0$.

К сожалению, и этот вариант не годится. На рисунке 2 изображена последовательность (Π_n), удовлетворяющая «определению» 3 и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=0$. Как и в «определениях» 1, 2, легко построить такую (Π_n), что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не существует.

Хорошие определения длины окружности

Определение 4. $L=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, *что при всех n центр окружности* лежит внутри Π_n и $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)=+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n)=0$.

Можно доказать, что для любой (Π_n), удовлетворяющей определению 4, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ существует, причем он не зависит от выбора исходной последовательности (Π_n). Однако доказать это очень трудно. Поэтому определение 4 неудобно. Кроме того, оно некрасиво: уж очень много в нем разнородных требований.

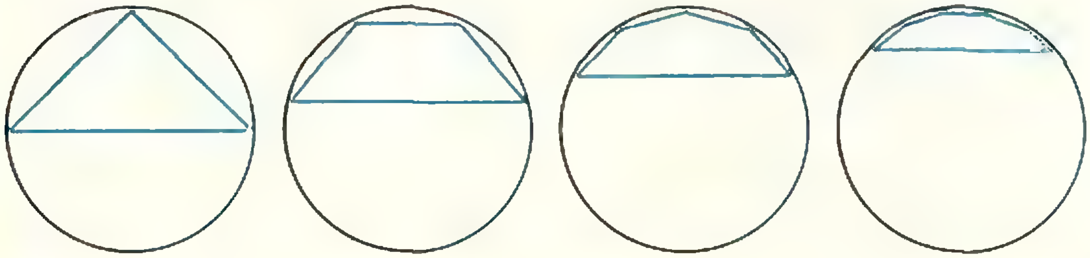


Рис. 2.

---

*) То есть $\varphi(n)$ становится сколь угодно большим.

Определение 5. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где Π_n — правильный вписанный n-угольник (ср. «Алгебра и начала анализа 9», п. 33).

В отличие от определений 1—3, в данном случае предел действительно существует. Докажем это.

Теорема. *Последовательность (P_n) возрастает и ограничена.*

Доказательство мы разобьем на ряд шагов, которые представим в виде задач. При их решении важно обойтись без тригонометрии, так как определение тригонометрических функций опирается на понятие длины окружности.

Задачи

1. Прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общий катет AC и $\widehat{BAC} < \widehat{DAC}$. Доказать, что $|AB| < |AD|$.

2. У прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ гипотенузы AB и A_1B_1 конгруэнтны и $\widehat{BAC} < \widehat{B_1A_1C_1}$. Доказать, что $|A_1C_1| < |AC|$.

3. Острый центральный угол AOB разделен радиусами $OM_1, OM_2, \ldots, OM_{k-1}$ на k конгруэнтных частей (рис. 3). Точка C — проекция точки A на $[OB]$, точка N_i — проекция точки M_i на $[AC]$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$. Доказать, что $|AN_1| < |N_1N_2| < \ldots < |N_{k-1}C|$.

4. Доказать, что $P_{n+1} > P_n$.

5. Доказать, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего меньше, чем периметр внешнего. Покажите, что без условия выпуклости это утверждение неверно.

Итак, последовательность (P_n) возрастает (задача 4) и ограничена (для любого n периметр P_n меньше, чем периметр описанного квадрата — задача 5). По теореме Вейерштрасса*) она имеет предел. Значит, определение 5 корректно: *любая окружность имеет* (единственную) *длину*.

Число π

Обозначим длину окружности через L, ее диаметр — через d, радиус — через r, длину стороны правильного вписанного n-угольника — через a_n.

Теорема. *Отношение $\frac{L}{d}$ одинаково для всех окружностей.*

Поскольку

$$\frac{L}{d} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{d} =$$

$$= \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{d} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2r} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{r}n\right),$$

достаточно доказать, что одинаково для всех окружностей отношение $\frac{a_n}{r}$, а это вытекает из подобия треугольников, изображенных на рисунке 4.

Вот это самое отношение длины окружности к диаметру и принято обозначать греческой буквой π.

Буква π — первая буква греческого слова *περιφερια* («окружность»). Впервые это обозначение использовал в 1706 году английский математик У. Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1736 года) стал систематически употреблять Л. Эйлер.

---

*) «Алгебра и начала анализа 9», п. 32.

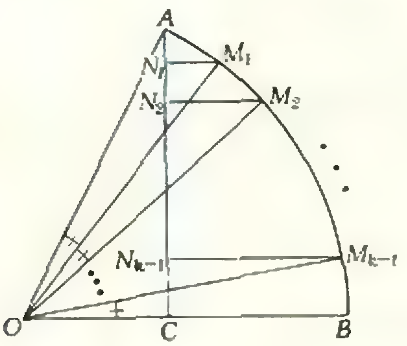


Рис. 3.

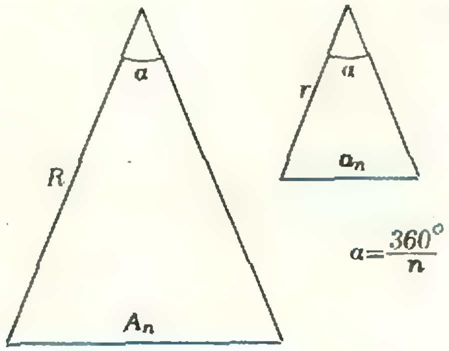


Рис. 4.

Другие хорошие определения

Разумеется, определение 5 не является единственно возможным. В определении 4 был указан эквивалентный вариант. Приведем еще несколько.

Определение 6. Пусть Δ_n — правильный описанный n-угольник, Q_n — его периметр; длиной окружности называется $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n$.

Последовательность (Q_n) является, конечно, убывающей.

Определение 7. Длина окружности — число $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2^n}$: предел последовательности периметров правильных вписанных 2^n-угольников (Π_{2^2} — вписанный квадрат, Π_{2^3} — правильный вписанный восьмиугольник и т. д.).

В данном случае монотонность последовательности периметров очевидна; однако само определение довольно искусственно — не понятно, откуда взялось 2^n, получится ли тот же предел для Π_{3^n}.

Особняком стоит

Определение 8. Длина окружности — это число, которое больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного многоугольника.

Это очень хорошее определение. К сожалению, доказательство существования такого числа опирается на теорему, отсутствующую в школьном курсе математики. Однако в предположении, что оно существует, можно доказать его единственность.

⁂

Определение — только первый шаг. Дальше надо заняться способами вычисления числа π, его свойствами — но об этом нужен отдельный разговор.

О числе π можно прочесть много интересного в книге Ф. Кымпан «История числа π» (М., «Наука», 1971).

Задачи наших читателей

1. Доказать, что число

$$246^{133^{77}} + 77^{246^{133}} + 133^{77^{246}}$$

делится на 190.

2. Найти две последние цифры числа 2^{2000}.

А. Пуляев
(г. Донецк)

3. Доказать, что число

$$5^{3^{4m}} - 2^{2^{4n+2}}$$

делится на 11 при любых натуральных m и n

С. Майзус
(г. Запорожье)

4. Доказать, что при $n \geqslant 2$, $l=0, 1, \ldots, 2n-2$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \times \cos^l \frac{k\pi}{2n+1} = 0.$$

М. Левин
(г. Таллин)

5. Площадь треугольника равна S. Найти наименьшее значение длины

а) наибольшей стороны;

б) средней стороны.

А. Халамайзер
(г. Москва)

6. Дана окружность и точки A и B на ней. На хорде AB, как на основании, строится равнобедренный треугольник с вершиной на большей из двух дуг, стягиваемых хордой. На его боковой стороне опять строится равнобедренный треугольник с вершиной на большей из двух дуг, стягиваемых этой боковой стороной, и т. д. Доказать, что эти равнобедренные треугольники становятся все более близкими по форме к равностороннему треугольнику.

Э. Ясиновый
(г. Куйбышев)

7. Решить уравнение

$$\frac{1}{x+y+z+3} = \overline{0,0xyz}.$$

И. Михалкович
(Минская обл.)

Ниже мы публикуем две заметки о гармонических колебаниях. Гармонические колебания изучаются в начале 10 класса на уроках математики («Алгебра и начала анлиза 10», § 16). Но они интересны не только с математической точки зрения — мы часто встречаемся с ними в самых разнообразных процессах в природе и технике — не даром гармонические колебания изучаются и на уроках физики («Физика 10», § 5, 6), в частности, в теме переменный электрический ток. Именно этой теме посвящены обе заметки. Их объединяет и математическое содержание: обе существенно опираются на так называемые векторные диаграммы гармонических колебаний.

Ж. Раббот

Знаете ли вы, что $\dfrac{220\ \text{вольт}}{127\ \text{вольт}} \approx \sqrt{3}$?

В сети переменного тока, как вы знаете, — напряжение 220 или 127 вольт. Оказывается, отношение 220 к 127 с большой точностью равно $\sqrt{3}$. В этом легко убедиться, разделив «столбиком» 220 на 127 и сравнив полученный результат 1,7322... со значением числа $\sqrt{3}$, взятым из таблиц: 1,7321...

В школьном физическом кабинете имеется напряжение 380 или 220 вольт. Если и в этом случае выполнить деление, вновь получим

$$380:220 \approx 1{,}73 \approx \sqrt{3}.$$

Случайно ли это?

Разобраться в этом нам поможет математика, точнее — результаты упражнений 69, 70 из учебника «Алгебра и начала анализа 10». Напомним нужные нам понятия и результаты:

а) Пусть точка $P(t)$ движется по окружности радиуса A против часовой стрелки так, что вектор $\vec{OP}(t)$ равномерно вращается вокруг начала координат O, проходя за единицу времени ω радиан ($\omega > 0$). Тогда проекция точки $P(t)$ на ось абсцисс совершает гармонические колебания с частотой ω и амплитудой A. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ вектор $\vec{OP}(0)$ составлял с положительным направлением оси $\vec{Ox}$ угол φ ($\varphi \in [0;\ 2\pi[$). Очевидно, вектор $\vec{OP}(0)$ определяет амплитуду $A = |\vec{OP}|$ и начальную фазу $\varphi = \vec{OP}(0); \vec{Ox}$ гармонического колебания. Этот вектор называется *векторной диаграммой* гармонического колебания.

б) Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты — гармоническое колебание той же частоты. Векторная диаграмма суммы двух гармонических колебаний (рис. 1) равна сумме векторных диаграмм этих колебаний *). Аналогично — для разности (рис. 2).

Вернемся теперь в наш физический кабинет. На распределительном щитке имеется 4 клеммы: три «фазы» и «нуль». Напряжение на них подается от трехфазного генератора электрического тока. Мы не будем останавливаться на работе трехфазного генератора **), а лишь поясним отмеченный в заглавии нашей заметки факт с помощью векторных диаграмм.

Зависимость от времени напряжения между каждой из трех «фаз» и «нулем» — гармоническое колебание. Эти три колебания имеют одну

---

*) См. «Алгебра и начала анализа 10», п. 82, упр. 69, 70 и «Квант», 1976, № 11, с. 44. См. также «Физика 10», § 26.

**) Об этом рассказано в заметке А. Землякова и В. Орлова (с. 33).

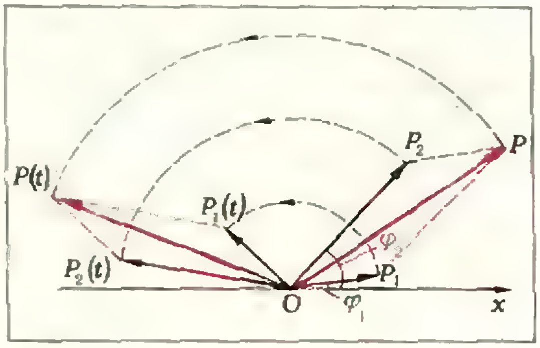


Рис. 1.

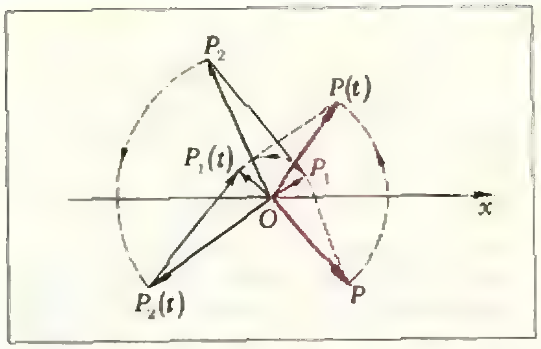


Рис. 2.

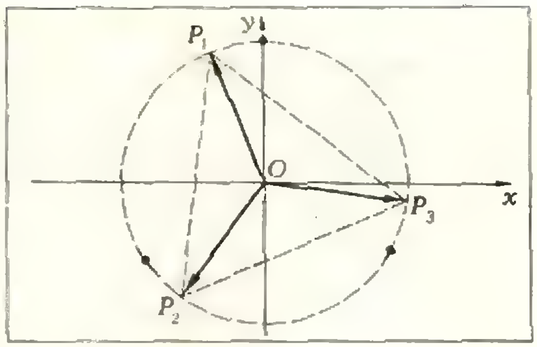


Рис. 3.

и ту же частоту ω и амплитуду A, но так отличаются фазами, что концы их векторных диаграмм образуют правильный треугольник (см. $\triangle P_1P_2P_3$ на рис. 3).

Напряжение между двумя «фазами» (например, между первой и второй) — тоже гармоническое колебание. Оно равно разности гармонических колебаний, соответствующих этим фазам. Поэтому его векторная диаграмма — разность векторных диаграмм $\overrightarrow{OP}_1$ и $\overrightarrow{OP}_2$ (рис. 3). Значит, амплитуда A_{12} этого напряжения равна длине стороны правильного треугольника $P_1P_2P_3$. Амплитуда A_{10} напряжения между «фазой» (скажем, первой) и «нулем» — длина вектора $\overrightarrow{OP}_1$, то есть $^2/_3$ высоты правильного треугольника $P_1P_2P_3$.

Таким образом, отношение амплитуды A_{12} к A_{10} равно отношению длины стороны правильного треугольника к $^2/_3$ его высоты. Но последнее отношение, конечно, равно $\sqrt{3}$*).

Так как действующее значение напряжения переменного тока пропорционально амплитуде напряжения, то поставленный нами вопрос исчерпан — понятно, почему $220/127 \approx \sqrt{3}$.

---

*) Мы доказали, что отношение реальных напряжений в электрической цепи в точности равно $\sqrt{3}$. С другой стороны, $\frac{220}{127}$ равно $\sqrt{3}$ только приближенно. Отсюда вытекает, что если первое напряжение в цепи равно в точности 220 В, то второе равно не 127 В, а $\frac{220}{\sqrt{3}}$ В. В реальной же сети случайные отклонения напряжения все равно превосходят $\left|\frac{220}{127} - \sqrt{3}\right|$.

А. Земляков, В. Орлов

Трехфазный ток

Промышленные генераторы (например те, что установлены на гидроэлектростанциях) дают на самом деле не просто переменный ток (т. е. ток, меняющийся по гармоническому закону $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$), а ток с тремя разными фазами. В первой части заметки мы расскажем, как получается такой «трехфазный» ток, а во второй — почему его целесообразно использовать в электродвигателях. Как и в предыдущей заметке, здесь решающую роль играет тот же математический прием: сложение векторных диаграмм гармонических колебаний.

1. Генераторы переменного тока

Если проволочная рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле, то поток магнитной индукции через рамку меняется по гармоническому закону:

$$\Phi(t) = (\vec{B} \cdot \vec{n}) \cdot S = BS\cos\omega t,$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, S — ограниченная рамкой площадь,

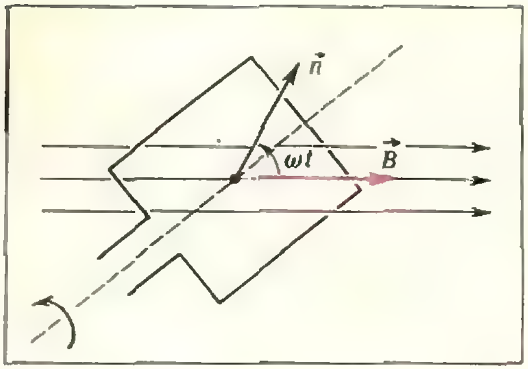


Рис. 1.

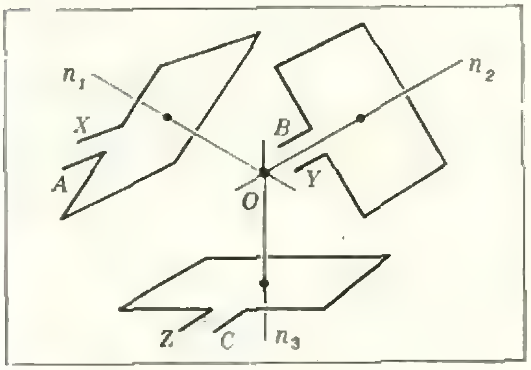
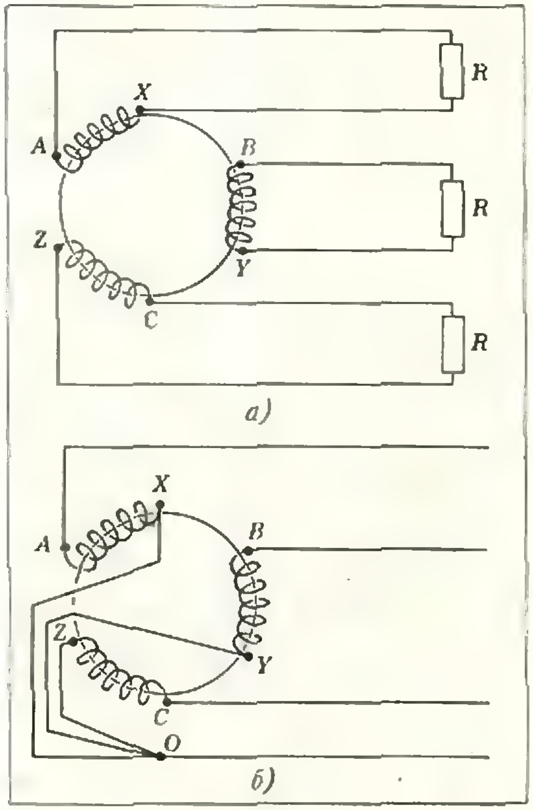


Рис. 2.



а)

б)

Рис. 3.

$\vec n$ — единичная нормаль к плоскости рамки, которая поворачивается с угловой скоростью ω и в момент времени t образует с вектором $\vec B$ угол ωt; мы считаем, что ось вращения рамки перпендикулярна вектору $\vec B$ (рис. 1). В результате действия силы Лоренца свободные заряды, движущиеся в поле вместе с рамкой, начинают перемещаться вдоль проводников рамки, в которой возникает ЭДС индукции, равная

$$e = -\Phi'(t) = \omega BS \sin \omega t.$$

Напряжение между концами рамки также будет меняться по гармоническому закону, и в соответствующей замкнутой цепи возникает переменный электрический ток:

$$i(t) = I\cos(\omega t + \varphi).$$

Такова простейшая модель *генератора переменного электрического тока* (ср. «Физика 10», § 21).

В промышленных генераторах вращается не рамка, а магнитное поле, и ЭДС создается в неподвижной обмотке, причем на самом деле сразу в трех одинаковых обмотках, расположенных под углом 120° одна к другой (рис. 2). Это приводит к тому, что получающиеся электрические колебания сдвинуты по фазе друг относительно друга на $2\pi/3$ — например, для ЭДС индукции можно записать:

$$e_1 = \mathscr{E} \sin \omega t,$$

$$e_2 = \mathscr{E} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_3 = \mathscr{E} \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

(объясните). Соответствующая система токов называется *трехфазной*; она была предложена в 1888 году русским электротехником М. О. Доливо-Добровольским и ныне применяется во всем мире. Зачем же нужна трехфазная система токов? Каковы ее преимущества?

Прежде всего объясним, как подключается нагрузка к трехфазному генератору. Если ко всем трем обмоткам подсоединить одинаковые нагрузки (рис. 3а), то амплитуда силы тока во всех трех цепях будет одна и та же:

$$i_1 = I\cos(\omega t + \varphi),$$

$$i_2 = I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_3 = I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Складывая эти гармонические колебания с помощью векторных диаграмм *) (рис. 4), получим: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Поэтому, если провода X, Y и Z объединить в один провод (как на рисунке 3б), то сила тока в нем будет равна нулю! Именно так и передается ток от трехфазных генераторов — по трем линиям A, B, C и по нулевому проводу 0. При симметричной нагрузке (как выше) нулевой провод не нужен, но если нагрузка не симметрична, как, например, в осветительной сети в домах (рис. 5), то в нулевом проводе возникает небольшой «компенсационный» ток.

Главное преимущество, которое дает трехфазная система токов, заключается в простоте электрических двигателей трехфазного тока, принцип действия которых мы сейчас рассмотрим.

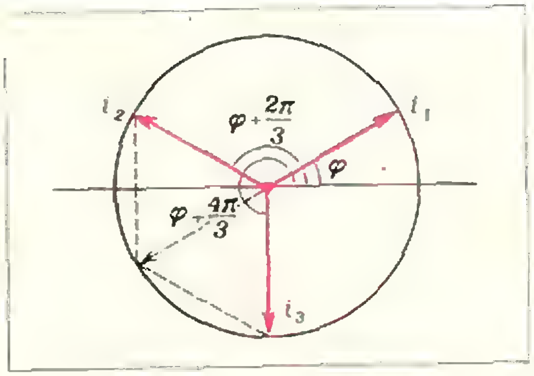


Рис. 4.

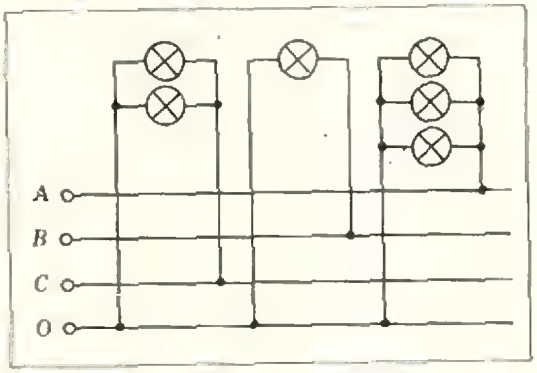


Рис. 5.

2. Электродвигатели переменного тока

Пусть по обмотке L течет переменный ток частоты ω. Тогда он создает переменное магнитное поле, которое вблизи оси обмотки L (рис. 6) приблизительно однородно и направлено вдоль $\vec{n}$, причем индукция поля также меняется по гармоническому закону, так что можно записать вектор индукции в виде

$$\vec{B} = B\cos\omega t\cdot\vec{n}.$$

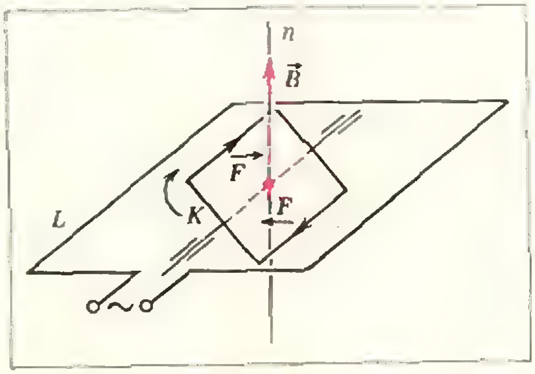


Рис. 6.

Если поместить около оси n замкнутую металлическую рамку K с осью вращения, перпендикулярной n (рис. 6), то в рамке возникнет индукционный ток, и на нее будут действовать силы Ампера («Физика 9», п. 120),

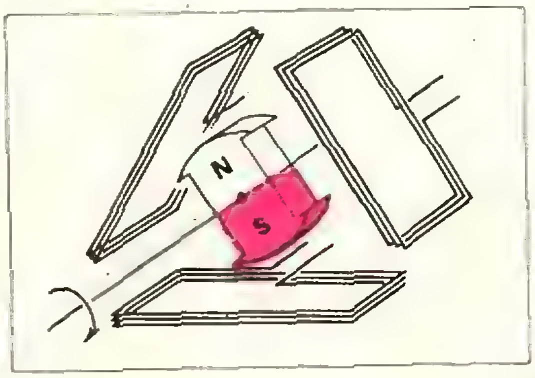


Рис. 7.

---

*) См. «Физика 10», § 26; «Алгебра и начала анализа 10», п. 82, упр. 69—70; «Квант», 1976, № 11, ст. «Сложение гармонических колебаний».

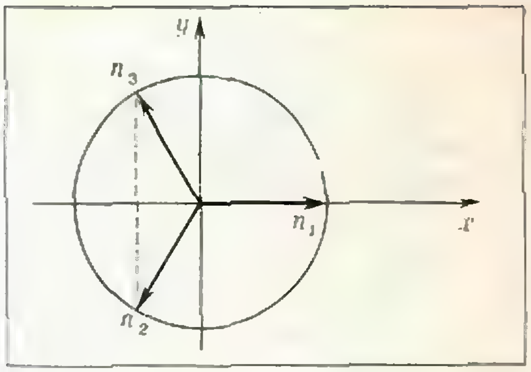


Рис. 8.

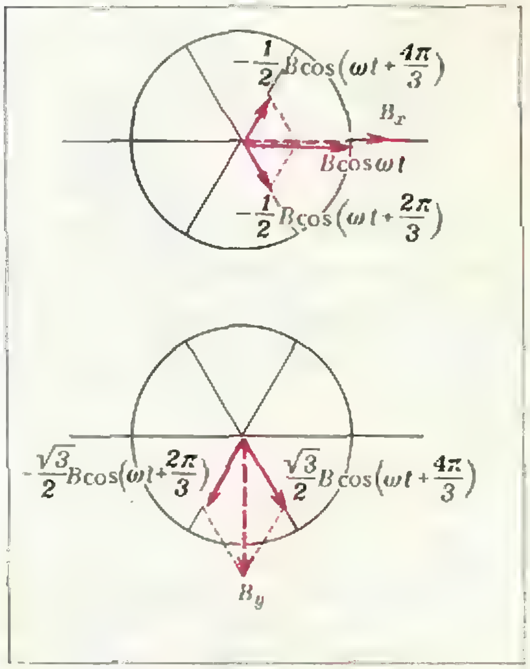

$-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$
B_x
$B\cos\omega t$
$-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$
B_y

Рис. 9.

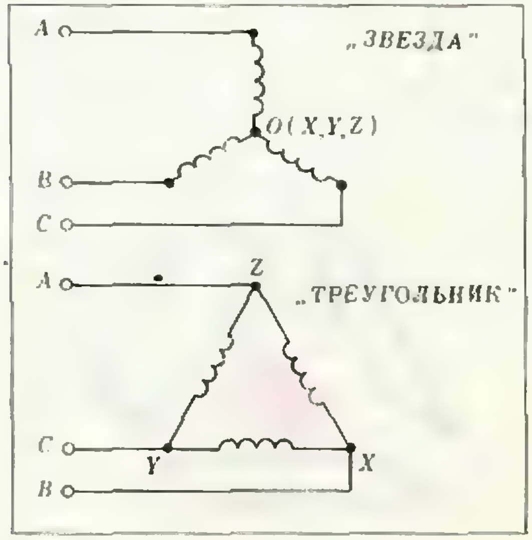

A
„ЗВЕЗДА"
O(X,Y,Z)
B
C
A
Z
„ТРЕУГОЛЬНИК"
C
Y
X
B

Рис. 10.

направленные перпендикулярно направлению тока и вектору $\vec{B}$. Эти силы создают вращающий момент, поворачивающий рамку около ее оси. Однако в положении, когда рамка перпендикулярна оси n, этот вращающий момент равен нулю; чтобы вращение началось, необходимо вывести рамку из этого положения — впоследствии рамка будет проходить это положение по инерции, хотя и неравномерно, но будет вращаться. Таков принцип работы электродвигателей однофазного переменного тока.

Оказывается, если подключить трехфазный ток к трем обмоткам, расположенным под углом 120° одна к другой, как показано на рисунке 7, то магнитное поле вблизи точки O пересечения осей симметрии обмоток постоянно по величине и будет равномерно вращаться с угловой скоростью ω.

Чтобы обосновать это, найдем сумму $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$ векторов магнитной индукции, создаваемых токами в обмотках AX, BY, CZ:

$$\vec{B}_1 = B\cos\omega t\cdot t\cdot\vec{n}_1,$$

$$\vec{B}_2 = B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\vec{n}_2,$$

$$\vec{B}_3 = B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\vec{n}_3,$$

где $\vec{n}_i$ — соответствующие единичные нормали. Введем на плоскости, проходящей через оси обмоток, систему координат, направив ось Ox вдоль вектора $\vec{n}_1$; координаты векторов $\vec{n}_2$ в этой системе будут (см. рис. 8)

$$\vec{n}_1=(1;\ 0),$$

$$\vec{n}_2=\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\vec{n}_3=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Используя формулы для векторов $\vec{B}_i$, отсюда находим координаты суммы $\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3=\vec{B}$:

$$B_x = B\cos\omega t-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$B_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Складывая гармонические колебания, записанные в правых частях этих формул, с помощью векторных диаграмм (рис. 9), получаем:

$$B_x = \frac{3}{2} B\cos\omega t,$$

$$B_y = \frac{3}{2} B\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2} B\sin\omega t.$$

Следовательно,

$$\vec{B} = (B_x;\ B_y) = \left(\frac{3}{2} B\cos\omega t;\ \frac{3}{2} B\sin\omega t\right),$$

т. е. вектор магнитной индукции суммарного поля имеет длину $3B/2$ и равномерно вращается с угловой скоростью ω.

Если поместить в это вращающееся поле замкнутую металлическую рамку (ротор) на оси, направленной вдоль оси, около которой вращается вектор магнитной индукции суммарного поля, то поток магнитной индукции через рамку будет меняться, и в рамке возникнет индукционный ток. Появляющиеся силы Ампера создают вращающийся момент, который, как легко увидеть, используя правило Ленца («Физика 9», п. 125), все время разгоняет рамку в направлении вращения магнитного поля. По мере приближения скорости вращения рамки к скорости вращения поля момент сил, действующих на рамку, уменьшается (объясните). При достижении ротором угловой скорости ω момент сил становится равным 0; вследствие трения вращение ротора замедляется, вновь возвращающий момент сил «подгоняет» ротор, и так далее. В среднем ротор будет вращаться, несколько запаздывая по сравнению с полем, асинхронно с ним — с меньшей угловой скоростью. Электродвигатели такого типа называются *асинхронными*.

Трехфазный асинхронный двигатель является симметричной нагрузкой, поэтому для его питания достаточно трехпроводной линии (см. п. 1). На практике обмотки двигателя подключают по схемам «звезды» или «треугольника», как показано на рисунке 10. Асинхронные двигатели просты в изготовлении и надежны в эксплуатации, поэтому большая часть (около 95%!) всех электродвигателей, используемых в нашей стране и за рубежом, относится к этому типу. Первый трехфазный асинхронный двигатель был сконструирован М. О. Доливо-Добровольским.

Вопросы

1. Сколько оборотов в минуту делает ротор асинхронного двигателя, если частота переменного тока равра 50 гц, а запаздывание ротора по сравнению с магнитным полем в скорости вращения составляет 5%?

2. Что произойдет, если после подключения асинхронного двигателя по схеме звезды или треугольника поменять друг с другом провода *A* и *B*?

3. Как следует подключать обмотки асинхронного двигателя, рассчитанного на напряжение 220 в, к сети трехфазного тока с напряжениями: а) 220 в/127 в, б) 380 в/220 в? (См. статью Ж. Раббота на с. 32.)

Активный эскадрон

Группу коней, размещенных на бесконечной шахматной доске, назовем *эскадроном*, если конями этой группы можно последовательно сделать бесконечное число ходов так, чтобы после каждого хода каждый из них находился под защитой хотя бы одного коня этой же группы. Очевидно, что эскадрон не может состоять менее, чем из трех коней. В самом деле, в составе эскадрона, кроме коня, совершающего ход, должен быть конь, защищающий его до совершения хода и после совершения хода. Вспомнив о том, что шахматный конь при своем ходе меняет цвет занимаемого поля, можно утверждать, что обе упомянутые функции не могут быть выполнены одним конем. Эскадрон назовем *активным*, если, перемещаясь по шахматной доске, он может занять одним из своих коней любое наперед заданное поле. Найдите минимальный активный эскадрон.

В. Чванов

«Квант» для младших школьников

Задачи

1. а) Докажите, что если к произвольному числу с нечетным количеством цифр приписать его еще раз, то полученное число разделится на одиннадцать.

б) Докажите, что если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученное число также разделится на одиннадцать.

2. При каких натуральных n число n^4+n^2+1 является простым?

3. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. В каждом кинотеатре восемь сеансов. В разных кинотеатрах сеансы начинаются в одно и то же время. На каждый сеанс шестеро школьников шли вместе, а седьмой (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый школьник побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не присутствовал ни один из этих школьников.

КИНОТЕАТР
ВИТЯЗЬ

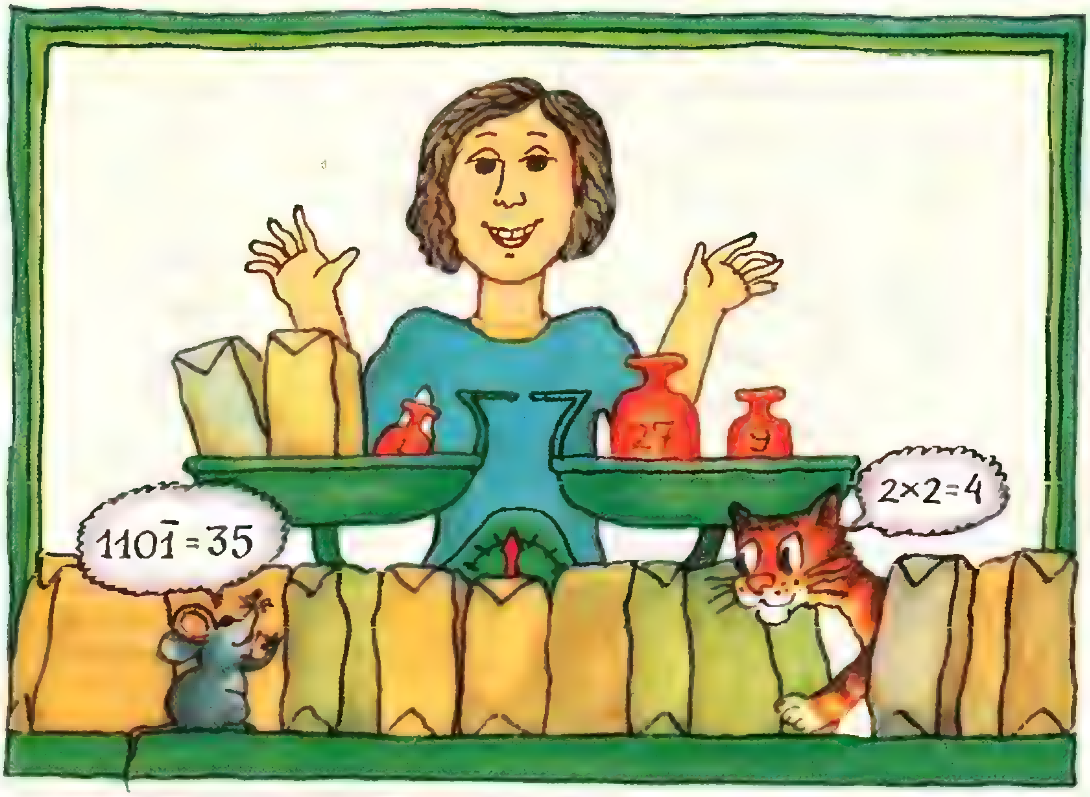
4. Беседуя с гостями в конце 1975 года, хозяин пошутил, что люди часто не любят называть свой возраст.

— Я бы, например, на вопрос о возрасте сказал, что мой возраст является делителем моего года рождения.

— Хоть я и значительно моложе,— сказал один из гостей,— но могу то же утверждать и о своем возрасте.

Далее выяснилось, что сын хозяина мог сказать то же о себе в 1961 году, а один из внуков, недавно получивший офицерское звание,— в 1963. А вот покойный отец хозяина мог бы сказать то же о себе в 1962 году.

В какие же годы родились названные лица?



В. Касаткин

Сообразительная Аня

Поводом для этого рассказа послужил доклад, который сделала нынешним летом на традиционных сборах «Малой академии наук» школьников Крыма Аня Шаховская. Живет Аня в поселке Научный вблизи Бахчисарая. Сейчас она учится в восьмом классе. Аня на год моложе Малой академии — ей в этом году исполнилось 14 лет.

Однажды летом, когда Аня была в туристском лагере, ее назначили ответственной за выдачу продуктов туристам.

— Смотри не ошибись, подсчитывай все верно, — напутствовал ее начальник лагеря, — вычислительной машины у нас нет.

— Не волнуйтесь, я что-нибудь придумаю.

И Аня придумала. В ближайшем магазине ей удалось раздобыть чашечные весы и несколько гирь.

Утром все сбежались смотреть, как Аня отпускает крупу туристам. К сожалению, Ане удалось найти только 5 гирь — массой в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и 81 г. Тем не менее Аня, по-видимому, не испытывала затруднений. Она ловко расставляла гири то на пустой чаше весов, то на чаше с пакетами крупы. При этом она делала какие-то непонятные, на первый взгляд, записи. Отпустив 35 г крупы, она записала: $110\bar{1}$; после взвешивания 52 г появилась запись: $1\bar{1}0\bar{1}1$; в следующую строчку она записала $1\bar{1}01$ и сказала:

— Все, последние 100 грамм я взвесила. Работа закончена.

После этого она взяла в руки счеты необычной конструкции и, заглядывая в сделанные записи, начала быстро на них работать. Это было удивительное зрелище.

Через несколько минут Аня закончила вычисления и удовлетворенно заметила:

— Все верно, ни одной ошибки.

Многочисленным зрителям захотелось разобраться, как работала Аня. По их просьбе она рассказала:

Мы привыкли к тому, что в любой системе счисления для цифр используются только целые положительные числа (и цифра 0). Можно, однако, представить себе систему счисления, в которой в роли цифр будут использоваться и целые отрицательные числа. Поскольку массы гирь, которые оказались в моем распоряжении, были степенями тройки, я вспомнила о так называемой *уравновешенной троичной системе*.

Основанием системы является число 3, в роли цифр используются значки: 1, 0 и $\bar{1}$ (читается: «единица с чертой»). Записи, которые я делала, и были записями чисел в этой системе. Вот как их надо понимать:

$$110\bar{1}=1\cdot3^3+1\cdot3^2+0\cdot3^1-1\cdot3^0=35,$$

$$1\bar{1}0\bar{1}1=1\cdot3^4-1\cdot3^3+0\cdot3^2-1\cdot3^1+1\cdot3^0=52,$$

$$11\bar{1}01=1\cdot3^4+1\cdot3^3-1\cdot3^2+0\cdot3^1+1\cdot3^0=100.$$

Если я ставила гирю на чашу с крупой, то ее масса вычиталась, и при записи я писала в разряде, соответствующем массе гири, цифру «$\bar{1}$». Если мне нужно взвесить, например, 24 г, то на чашу весов без груза (без крупы) я положу гирю в 27 г, а на другую чашу — гирю в 3 г и запишу: $10\bar{1}0=1\cdot3^3+0\cdot3^2-1\cdot3^1+0\cdot3^0=24$.

Записи чисел в этой системе могут начинаться и цифрой «$\bar{1}$» — так записываются отрицательные числа. Пример:

$$\bar{1}1\bar{1}=-1\cdot3^2+1\cdot3^1-1\cdot3^0=-7.$$

Над числами, записанными в уравновешенной троичной системе счисления, нетрудно производить действия сложения и умножения.

Вот как просто выглядят таблицы сложения и умножения цифр:

Таблица сложения

+	1	0	$\bar{1}$
1	$1\bar{1}$	1	0
0	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}1$

Таблица умножения

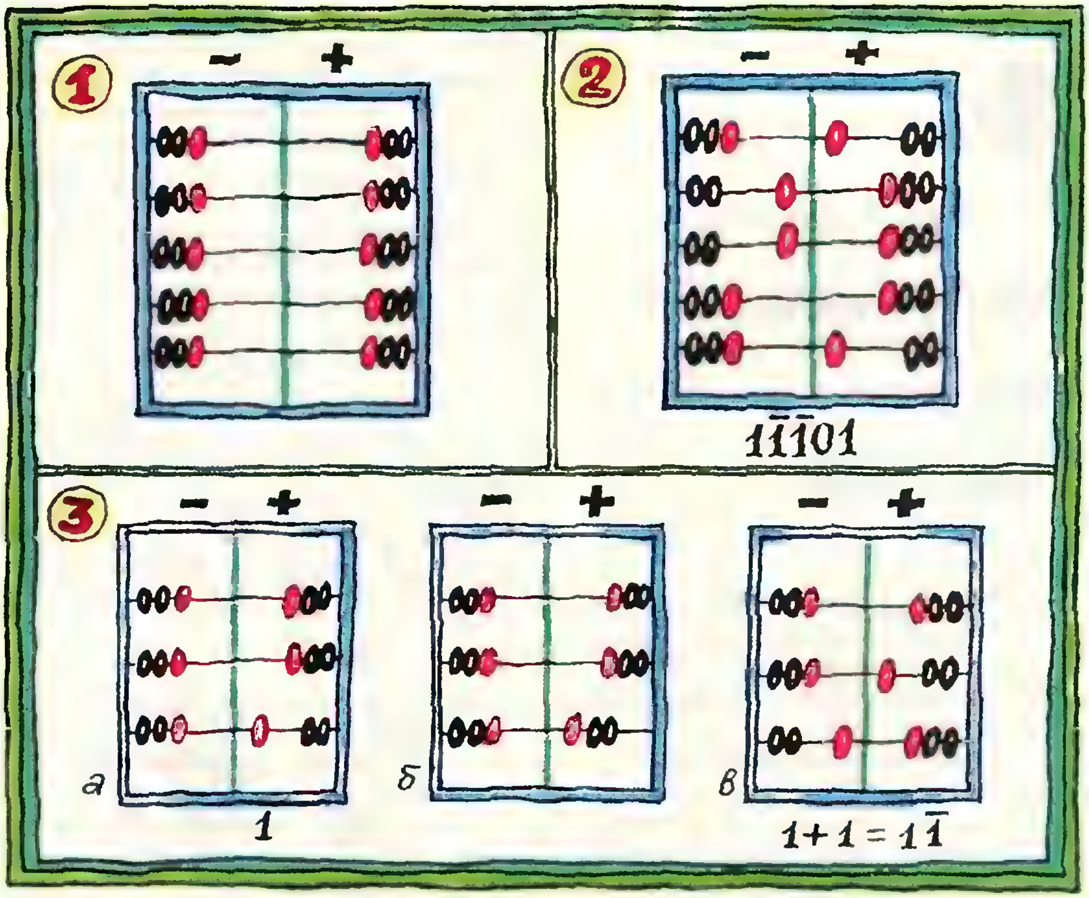
×	1	0	$\bar{1}$
1	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1

Несколько примеров на сложение и умножение:

$$+\begin{array}{r}111\\101\\\hline 1\bar{1}0\bar{1}\end{array}\qquad +\begin{array}{r}\bar{1}110\\\bar{1}10\\\hline \bar{1}1\bar{1}0\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}1\bar{1}\\\bar{1}1\\\hline 1\bar{1}\\\bar{1}1\\\hline \bar{1}\bar{1}\end{array}$$

Чтобы упростить работу, я использовала счеты, специально придуманные мною для сложения чисел в уравновешенной троичной системе. Эти счеты изображены на рисунке 1. Главная особенность — вертикальная перегородка, слева от которой расположены «отрицательные» косточки, а справа — «положительные». На рисунке 2 на счетах отложено число $11\bar{1}01$. Вторая особенность — черные косточки скреплены друг с другом.

Научимся прибавлять на этих счетах единицу. Пусть нам нужно найти сумму 1+1. Как это делается, видно из рисунков 3, *а* — *в*. На рисунке 3, *б* скрепленные черные косточки придвинуты к уже отложенной косточке; поэтому, сбрасывая с проволочки все три косточки вправо, мы должны на этой же проволочке отложить одну отрицательную косточку, а на следующей проволочке — одну «положительную» косточку (она, как ей это и положено, заменяет сброшенные косточки первой проволочки) — см. рис. 3, *в*. Результат можно проверить, заглянув в таблицу сложения цифр. Рассуждая аналогично, можно научиться складывать отрицательные единицы.



Заметим, что если на счетах есть по косточке с обеих сторон вертикальной перегородки, то их следует сбросить: $1+\bar{1}=0$. Небольшая тренировка — и вы научитесь пользоваться этими необычными счетами.

Не думайте, что система счисления, о которой я вам рассказала,— только математическая забава. В СССР и Чехословакии построены ЭВМ, работающие на этой системе счисления. Советская машина называется «Сетунь» (по имени подмосковной реки). Ее создали инженеры и математики вычислительного центра Московского университета. Их привлекли две особенности этой системы счисления: отсутствие «правил знаков» при выполнении арифметических действий над числами и простота получения противоположного числа — число, противоположное данному, получается, если каждую цифру «1» данного числа заменить на «$\bar{1}$» и наоборот.

За изобретенные счеты и хороший доклад об уравновешенной троичной системе Аню Шаховскую избрали действительным членом Малой академии наук.

И. Габович, П. Горнштейн

Вооружившись методом координат

О применении координатного метода к решению геометрических задач в «Кванте» уже писалось *). В настоящей статье затронуты новые аспекты этой важной темы.

Задача 1 (МИЭМ, 1977 г.). *При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка A (1; 2) переходит в A_1 (6; 5), а B (1; 4) — в B_1 (4; 5). Найти образ точки C (1; 3). Найти образ ещё одной точки (по вашему усмотрению). Найти величину угла α и координаты точки M.*

Решение. Отметим на координатной плоскости точки A, A_1, B, B_1 и C (рис. 1). Для определения координат (x; y) точки M воспользуется тем, что поворот является перемещением и поэтому $|MA|^2=|MA_1|^2$ и $|MB|^2=|MB_1|^2$, т. е.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x-6)^2+(y-5)^2\\(x-1)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-5)^2.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x=2$ и $y=6$.

Пусть $R_M^{\alpha}(C)=C_1$. Определим координаты (x_1; y_1) точки C_1. Точка C, как нетрудно заметить, является серединой $[AB]$, и поэтому ее образ — точка C_1 — является серединой $[A_1B_1]$. Учитывая это, получаем, что точка C_1 имеет координаты (5; 5).

Определим теперь величину угла α. Заметив, что абсциссы точек A и B одинаковы ($[AB]\,||\,Oy$) и ординаты точек A_1 и B_1 одинаковы ($[A_1B_1]\,||\,Ox$), заключаем, что модуль угла поворота равен $\frac{\pi}{2}$. Так как поворот на 90°, совмещающий $[MA]$ с $[MA_1]$, направлен против часовой стрелки, $\alpha=+\frac{\pi}{2}$.

Осталось найти образ еще одной точки («по нашему усмотрению»). Проще всего, конечно, взять точку M (2; 6), образ которой совпадает с ней самой. Задача решена.

Чтобы научиться решать подобные задачи (они часто попадаются на экзаменах), вычислим образ еще одной точки (D).

Пусть D (3; 1) и $R_M^{\frac{\pi}{2}}(D)=D_1$. Определим координаты ($x$; y) точки D_1. Для этого воспользуемся равенствами

$$|MD_1|^2=|MD|^2 \text{ и } |A_1D_1|^2=|AD|^2,$$

равносильными системе

$$\begin{cases}(2-x)^2+(6-y)^2=26\\(6-x^2)+(5-y)^2=5.\end{cases} \qquad (1)$$

Решая систему (1), находим

$$\begin{cases}x_1=7\\y_1=7\end{cases} \quad \begin{cases}x_2=\frac{101}{17}\\y_2=\frac{47}{17}.\end{cases}$$

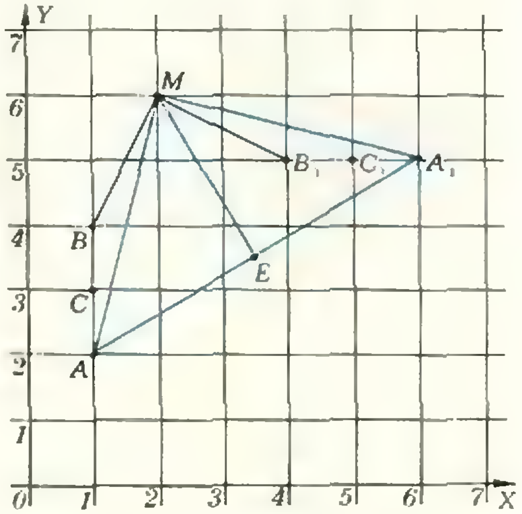


Рис. 1.

---

*) № 11 за 1977 г.

Теперь необходимо выяснить, какое из полученных решений является координатами точки D_1. Взглянув на чертеж, читатель сразу увидит, что правильным является первое решение, а второе — постороннее. На экзамене, однако, требуется строгое обоснование выбора правильного решения. Прежде чем привести это обоснование, выясним геометрический смысл полученных решений и объясним, почему их два.

Первое уравнение системы (1) есть уравнение окружности с центром в точке M и радиусом, равным $|MD|$ (рис. 2). Второе уравнение системы (1) — уравнение окружности с центром в точке A_1 и радиусом, равным $|AD|$. Вторая окружность пересекает первую в двух точках — $D_1'(7;\ 7)$ и $D_1''\left(\frac{101}{17};\ \frac{47}{17}\right)$, одна из которых является образом точки D. (Если же точка D принадлежит, например, (MA), то вторая окружность будет касаться первой, и мы получим одно решение системы (1), которое и будет искомым.)

Ясно, что $\triangle DMD_1'$ и $\triangle DMD_1''$ — равнобедренные и лишь один из углов $\widehat{DMD_1'}$, $\widehat{DMD_1''}$ равен α $\left(\text{в нашей задаче } \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$. Определим, какой. Рассмотрим $\triangle DMD_1'$. Найдем $|DD_1'|$:

$$|DD_1'|=\sqrt{(7-3)^2+(7-1)^2}=\sqrt{52}.$$

Пусть F — середина $[DD_1']$, тогда $|DF|=\frac{1}{2}\sqrt{52}$. Из $\triangle DMF$:

$$\sin\widehat{DMF}=\frac{|DF|}{|DM|}=\frac{\sqrt{52}}{2\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\widehat{DMF}=\frac{\pi}{4}\Longrightarrow\widehat{DMD_1'}=\frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Из двух точек, получающихся при отыскании образа некоторой точки N $(a;\ b)$, естественно выбрать для проверки ту, координаты которой «проще» (это облегчает вычисления). Если выяснится, что выбранная для проверки точка дает нужное решение, то она и является образом точки N. Если — не дает, то, естественно, образом точки является вторая точка.

Задача 2 (МФТИ, 1977 г.). *На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$. Вершины A и B квадрата лежат на графике функции $y=x^2$, и вершины C и D — на графике функции $y=x-4$. Определить длину стороны квадрата.*

Решение. На координатной плоскости (рис. 3) изображены графики функций $y=x^2$, $y=x-4$ и квадрат $ABCD$, расположенный так, как указано в условии. Поскольку прямая $y=x-4$ перпендикулярна прямой $y=-x$, $[AC]\parallel(Ox)$ и $[BD]\parallel(Oy)$ Пусть $|AC|=l$ и $A\ (x_1;\ y_1)$, тогда:

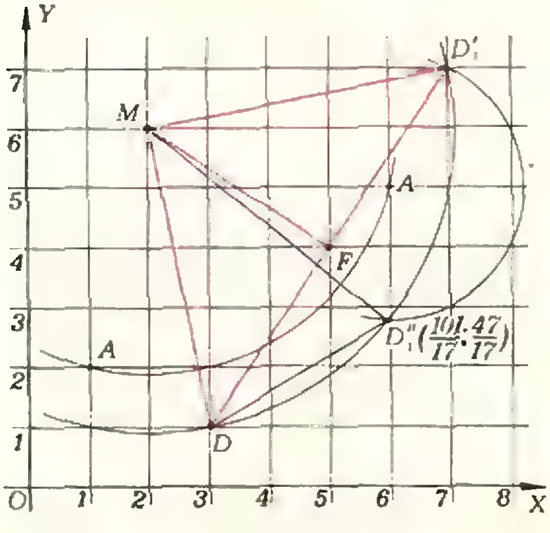


Рис. 2.

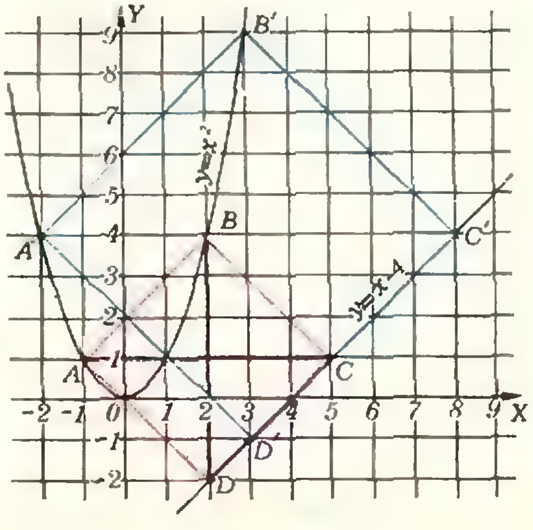


Рис. 3.

$C\,(x_1+l;\ y_1)$; $B\left(x_1+\frac{l}{2};\ \ y_1+\frac{l}{2}\right)$; $D\left(x_1+\frac{l}{2};\ y_1-\frac{l}{2}\right)$. Найдем l. Учитывая, что вершины A и B лежат на графике функции $y=x^2$, а вершина D принадлежит графику функции $y=x—4$, составляем систему:

$$\begin{cases} y_1=x_1^2 \\ y_1+\frac{l}{2}=\left(x_1+\frac{l}{2}\right)^2 \\ y_1-\frac{l}{2}=x_1+\frac{l}{2}-4\ . \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1=x_1^2 \\ x_1^2+\frac{l}{2}=\left(x_1+\frac{l}{2}\right)^2 \\ x_1^2-\frac{l}{2}=x_1+\frac{l}{2}-4. \end{cases} \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы (2) находим x_1:

$$x_1=\frac{2-l}{4}.$$

Найденное значение x_1 подставляем в последнее уравнение системы (2):

$$\left(\frac{2-l}{4}\right)^2-\frac{l}{2}=\frac{2-l}{4}+\frac{l}{2}-4,$$

откуда $l_1=6$ и $l_2=10$.

Таким образом, для стороны квадрата мы получили два значения: $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$, т. е. задача имеет два решения (на рисунке 3 им соответствуют два квадрата: красный и синий).

Задача 3 (МГУ, физфак, 1977 г.). *Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ $((KK_1)\,||\,(LL_1)\,||\,(MM_1)\,||\,(NN_1))$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка KA равна $\frac{1}{4}$. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка M_1B равна $\frac{2}{5}$. Через центр куба O и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины K_1 на плоскость α. Найти длину отрезка AP.*

Решение. Для решения этой задачи с помощью метода координат нет необходимости строить сечение куба плоскостью α. (Это сечение, однако, изображено на рисунке 4, а ниже мы объясним, как его построить). В качестве системы координат мы возьмем систему $Lxyz$, где оси Lx, Ly, Lz направлены по $[LK)$, $[LM)$, $[LL_1)$ соответственно.

Треугольник AK_1P — прямоугольный, так как $[K_1P]\perp\alpha$ по условию. Поэтому

$$|AP|=\sqrt{|AK_1|^2-|K_1P|^2}. \qquad (3)$$

Найдем координаты точек A, B, O и K_1: $A\left(\frac{3}{4};\ 0;\ 0\right)$; $B\left(0;\ 1;\ \frac{3}{5}\right)$; $O\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ и $K_1\,(1;\ 0;\ 1)$.

Из $\triangle KK_1A$ находим $|AK_1|^2=1\frac{1}{16}$. Длину отрезка K_1P найдем, как расстояние от точки K_1 до плоскости α, воспользовавшись формулой

$$\rho(K_1;\alpha)=\frac{|ax_0+bx_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad (4)$$

где $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — координаты точки K_1, а числа a, b, c и d — коэффициенты уравнения

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (5)$$

определяющего плоскость α (см. «Квант», 1977 г., № 3, с. 38).

Чтобы найти значения a, b, c и d, подставим в уравнение (5) координаты точек A, B и O. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a+d=0 \\ b+\frac{3}{5}c+d=0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+d=0\,. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a=-\frac{4}{3}d$; $b=-\frac{3}{2}\,d$ и $c=\frac{5}{6}\,d$.

Подставив найденные значения a, b и c в (5), после элементарных преобразований получаем уравнение плоскости α:

$$8x+9y-5z-6=0.$$

Теперь по формуле (4) определим

$$|K_1P|=\rho(K_1;\alpha)=$$
$$=\frac{|8\cdot1+9\cdot0-5\cdot1-6|}{\sqrt{64+81+25}}=\frac{3}{\sqrt{170}}.$$

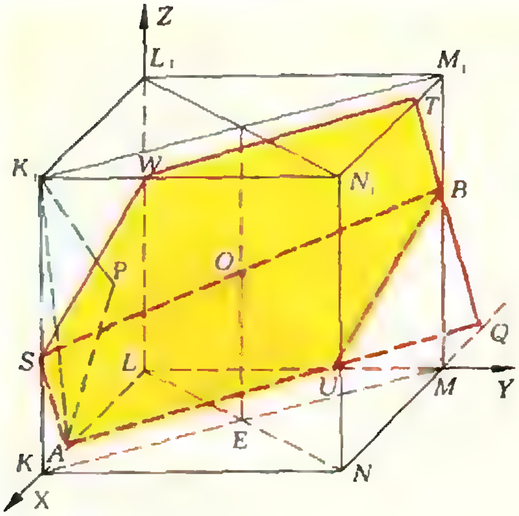


Рис. 4.

И, наконец, из (3) находим $|AP|$:

$$|AP| = \sqrt{\frac{17}{16} - \frac{9}{170}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1373}{85}}.$$

Замечание. На «чистовике» решения этой задачи приводить чертеж не обязательно. Полезно, однако, сделать чертеж на черновике. Ради большей наглядности мы приводим здесь построение сечения данного куба плоскостью α (рис. 4). Находим точку S, в которой прямая OB, принадлежащая α, пересечет ребро KK_1. $[SA]$ — отрезок, по которому α пересекает грань KK_1L_1L. Ясно, что α пересекает грань NN_1M_1M по отрезку BT, параллельному $[AS]$. $Q=(BT)\cap(MN)$; очевидно, $Q\in\alpha$ и $Q\in(KLM)$, $(AQ)=\alpha\cap\cap(KLM)$; находим $U=(AQ)\cap(LM)$. Теперь уже построение сечения не вызывает затруднений.

Задача 4 (МГУ, мехмат, 1977 г.). *Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, и другая проходит через точку C и середину ребра AB.*

Решение*). $SABC$ (рис. 5) — данная в условии пирамида. Точки E и F — середины ребер BC и AB соответственно. Введем систему координат, как показано на рисунке *), и определим координаты вершин пирамиды и точек E и F: $A\,(0;\ 4\sqrt{2};\ 0)$; $B\,(2\sqrt{6};\ 2\sqrt{2};\ 0)$ (абсцисса точки B находится как высота равностороннего треугольника из соотношения $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где h — высота и a — сторона треугольника); $C\ (0;\ 0;\ 0)$; $S\ (0;\ 0;\ 2)$; $E\ (\sqrt{6};\ \sqrt{2};\ 0)$ и $F(\sqrt{6};\ 3\sqrt{2};\ 0)$. Угол между скрещивающимися прямыми находится с помощью скалярного умножения векторов $\overrightarrow{SE}$ и $\overrightarrow{CF}$ (см. «Квант», 1978, № 2, с. 60); он равен $\frac{\pi}{4}$.

Для определения расстояния между скрещивающимися прямыми проведем в (ABC) через точку E прямую, параллельную (CF); G — точка, в которой эта прямая пересекает сторону AB. Очевидно, что координаты G будут $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2};\ \frac{5\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$ (проверьте самостоятельно).

Пересекающиеся прямые SE и EG (или, что то же, три точки: S, E, G) определяют некоторую плоскость

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad (6)$$

которая параллельна прямой CF (так как $(EG)\parallel(CF)$) и содержит (SE). Поэтому расстояние от любой точки (CF) до (SEG) равно расстоянию между скрещивающимися прямыми SE и CF.

Определим теперь значения коэффициентов a, b, c и d в уравнении (6).

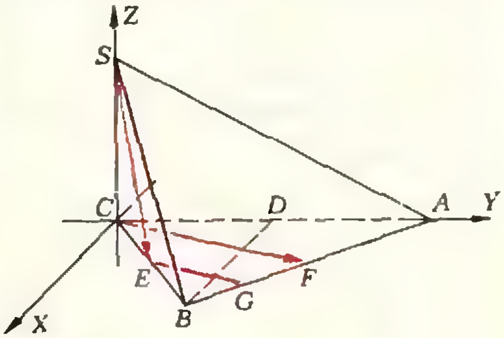


Рис. 5.

---

*) В «Кванте», 1978 г., № 2, с. 59—60 изложены два решения этой задачи: непосредственно геометрическое и векторное.

*) Здесь чертеж простой, и его целесообразно привести в «чистовике» решения.

Подставив в уравнение (6) координаты точек S, E и G, получаем систему

$$\begin{cases} 2c - d = 0 \\ \sqrt{6}a + \sqrt{2}b - d = 0 \\ \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}b + d = 0, \end{cases}$$

из которой находим: $a = -\frac{\sqrt{6}}{4}d$; $b = \frac{\sqrt{2}}{4}d$ и $c = -\frac{1}{2}d$.

Подставив найденные значения a, b и c в (6), после элементарных преобразований получаем уравнение

$$\sqrt{6}x - \sqrt{2}y + 2z - 4 = 0.$$

В качестве произвольной точки прямой (CF) выберем точку C и определим (аналогично тому, как мы это сделали в предыдущей задаче) ее расстояние до (SEG):

$$\rho(c; (SEG)) = \frac{|-4|}{\sqrt{6+2+4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, искомое расстояние между скрещивающимися прямыми SE и CF равно $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5 (МФТИ, 1976 г.). *Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$ см, а высота — 3 см. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найти длину ребра куба.*

Решение. Пусть ребро CD куба лежит в грани SMP (это не нарушает общности). Введем систему координат $Axyz$, где оси Ax, Ay, Az направлены по ребрам куба $[AB)$, $[AD)$, $[AA_1)$ соответственно (рис. 6). Пусть $|AB| = m$. Очевидно, точка C имеет координаты $(m; m; 0)$. Если длина диагонали куба равна a, то его ребра имеют длину $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Из этого и $|SA| = 3$ легко вывести, что в выбранной нами системе координат точка S имеет координаты $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Пусть

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (7)$$

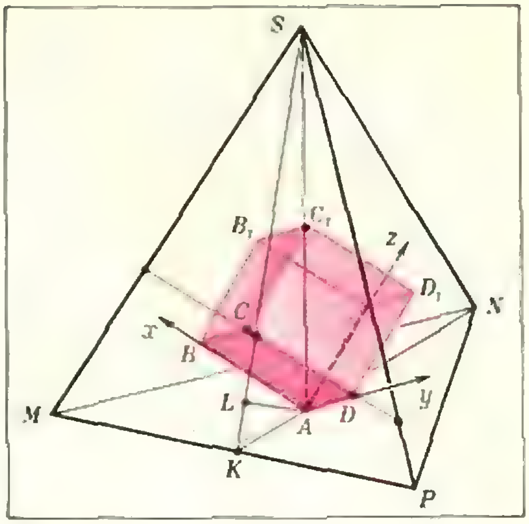


Рис. 6.

— уравнение плоскости грани SMP в выбранной нами системе координат. Так как (SMP) не проходит через начало координат, $d \neq 0$. Коэффициенты в уравнении (7) определяются (как это уже делалось выше) из того, что точки C, D и S принадлежат плоскости (7). Имеем

$$\begin{cases} ma + mb + d = 0 \\ mb + d = 0 \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}c + d = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a = 0, \; b = -\frac{d}{m}, \; c = \frac{\sqrt{3} - m}{m\sqrt{3}}d.$$

Подставив найденные значения a, b и c в (7), приходим к уравнению

$$\sqrt{3}y + (m - \sqrt{3})z - m\sqrt{3} = 0.$$

Воспользовавшись формулой (4), найдем расстояние от точки A $(0; 0; 0)$ до плоскости грани SMP:

$$\rho\,(A; (SMP)) = \frac{|-m\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + (m - \sqrt{3})^2}} = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}}. \qquad (8)$$

Определим теперь то же расстояние другим способом. Проведем в грани SMP апофему SK пирамиды и соединим точку K с точкой A. В $\triangle SAK$ проведем $[AL] \perp [SK]$; $|AL|$ — расстояние точки A до грани SMP (обоснуйте!).

Так как данная пирамида правильная,

$$|AK| = \frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{6} = \sqrt{2}.$$

Из $\triangle SAK$:

$$|SK| = \sqrt{11},$$

$$|AL| = \frac{|SA|\cdot|AK|}{|SK|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Приравняв полученное в (8) выражение для $\rho(A;(SMP))$ найденному значению $|AL|$, получаем уравнение

$$\frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2-2m\sqrt{3}+6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}},$$

из которого и находим m:

$$m = \frac{6}{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\text{ см}.$$

Задачи

1. (МГУ, физфак, 1977). Длина ребра куба $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ ($(AA_1)\|(BB_1)\|(CC_1)\|\|(DD_1)$) равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина $[BF]$ равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

2. (МГУ, мехмат, 1977). Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды SC перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

3. (МФТИ, 1976). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3 см, а высота $4\sqrt{3}$ см. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найти длину ребра призмы.

4. (МФТИ, 1977). Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти ($x>0$; $y>0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси OX, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найти длины сторон треугольника.

5. (НГУ, 1977). В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, острый угол A которого имеет величину 60°, длины сторон AB и BC равны, соответственно, a и $2a$. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, их длина равна a. Через вершины A, B_1 и D_1 параллелепипеда проведена плоскость. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

6. (НГУ, 1977). Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, длина диагонали равна 10. На плоскости выбрана точка O, удаленная от вершин B и D на одинаковое расстояние, равное 13. Найти расстояние от точки O до ближайшей вершины прямоугольника.

7. (НГУ, 1977). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны $3a$ и $4a$ соответственно. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину a. Через середины ребер AB, SC и точку, лежащую на ребре AC и удаленную от вершины A на расстояние a, проведена плоскость. Определить величину двугранного угла, образованного этой плоскостью и плоскостью основания.

Числовые ребусы

1. Поставьте вместо звездочек цифры так, чтобы получились правильно выполненные примеры на деление.

а)
```
 _***   | **
   **   |------
 -----  |*, ****
   _***
    ***
   -----
    _***
     ***
    -----
     _***
      ***
     -----
```

б)
```
 _****** | **
   **    |----
 ------- |***4
   _***
     **
    ----
    _**
     **
    ----
```

Л. Мочалов

2. Найдите наименьшую и наибольшую СКОРОСТЬ в следующих ребусах:

а) СКО·Р=ОСТЬ;
б) С·КОР=ОСТЬ;
в) СКОР : О=СТЬ;
г) СКОР : ОСТ=Ь;
д) С=КОРО : СТЬ.

3. Найдите наибольший ЗНАМЕНАТЕЛЬ, если
ЗНА+МЕНА=ТЕЛЬ.

(В примерах 2 и 3 одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.)

В. Радунский

Л. Баканина

О силах трения

Многие школьники, поступающие в вузы, часто испытывают затруднения при решении задач, в которых действуют силы трения.

Вспомним об основных особенностях сил так называемого *сухого трения* — трения между двумя твердыми телами. Эти силы возникают всегда при непосредственном соприкосновении тел, направлены вдоль поверхности соприкосновения и действуют на каждое из соприкасающихся тел, причем действуют так, чтобы препятствовать движению одного тела относительно другого — если это силы трения скольжения, или так, чтобы препятствовать самому возникновению этого движения — если речь идет о силах трения покоя.

Абсолютная величина силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ зависит от вида трущихся поверхностей и силы $\vec{N}$ нормального давления одного тела на другое:

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| = \mu \left|\vec{N}\right|,$$

где μ — коэффициент трения.

Сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. п.}}$ всегда уравновешивает все остальные силы, действующие на тело вдоль поверхности соприкосновения. Ее абсолютная величина может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального значения $\left|\vec{F}_{\text{тр. п. max}}\right|$, которое обычно считают равным $\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right|$:

$$0 \leqslant \left|\vec{F}_{\text{тр. п.}}\right| \leqslant \left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right|.$$

При решении задач прежде всего необходимо разобраться, с какими именно силами трения — покоя или скольжения — мы имеем дело. Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На горизонтальном столе лежит два бруска массой $M_1 = 7$ кг и $M_2 = 10$ кг, связанные нитью. Еще одна нить, привязанная к бруску массой M_1, переброшена через блок, укрепленный на краю стола, и к ней подвешен груз массой $m = 1$ кг (рис. 1). Коэффициент трения между брусками и столом $\mu = 0,1$. Определите натяжения обеих нитей и силы трения, действующие на каждый из брусков.*

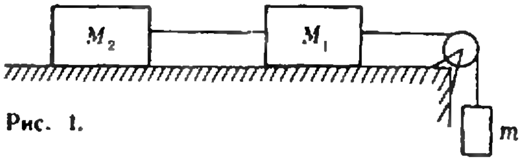


Рис. 1.

Во-первых, выясним, будут двигаться бруски или нет. Они могут начать двигаться под действием силы натяжения $\vec{T}_1$ правой нити, и она, по абсолютной величине, не может превысить силу тяжести груза массой m:

$$\left|\vec{T}_1\right| \leqslant m\left|\vec{g}\right| = 10 \text{ Н}.$$

Максимальное значение силы трения покоя для обоих брусков

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. п. max}}\right| = \mu (M_1 + M_2)\left|\vec{g}\right| = 17 \text{ Н}.$$

Так как $|\vec{T}_1| < |\vec{F}_{\text{тр. п. max}}|$, бруски покоятся. Очевидно, что покоится и груз массой m; следовательно,

$$|\vec{T}_1| = m|\vec{g}| = 10 \text{ Н}.$$

Теперь рассмотрим по отдельности бруски массой M_1 и M_2. На правый брусок действуют силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр. 1}}$ (рис. 2)*).

---

*) Нас интересуют только те силы, которые дают горизонтальные проекции, отличные от нуля.

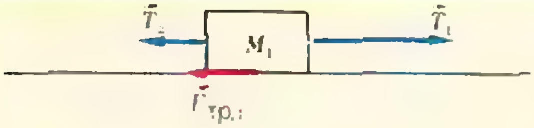


Рис. 2.

Максимальное значение силы трения

$$|\vec F_{тр.\,1\,max}| = \mu M_1 |\vec g| = 7\ Н < |\vec T_1| = 10\ Н,$$

значит, одна только сила трения не может уравновесить брусок. Как только она достигнет своего наибольшего значения, натянется вторая нить—появится сила натяжения $\vec T_2$.

Первый брусок будет покоиться, если

$$|\vec T_1| = |\vec F_{тр.\,1}| + |\vec T_2|,$$

где

$$|\vec F_{тр.\,1}| = |\vec F_{тр.\,1\,max}| = 7Н .$$

Отсюда

$$|\vec T_2| = |\vec T_1| - |\vec F_{тр.\,1\,max}| = 3\ Н.$$

На второй брусок действуют две силы: сила натяжения нити $\vec T_2$ и сила трения $\vec F_{тр.\,2}$ (рис. 3). Поскольку

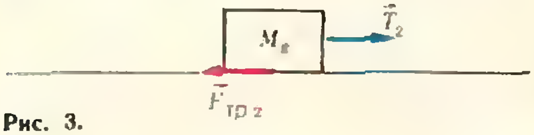


Рис. 3.

$$|\vec F_{тр.\,2\,max}| = \mu M_2 |\vec g| = 10\ Н > |\vec T_2| = 3\ Н,$$

сила трения $\vec F_{тр.\,2}$ может уравновесить силу $\vec T_2$:

$$|\vec F_{тр.\,2}| = |\vec T_2| = 3\ Н.$$

Задача 2. *Брусок лежит на доске. Доску приподнимают за один край. Как зависит абсолютная величина силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски α (рис. 4)? Коэффициент трения между бруском и доской μ, масса бруска m.*

При достаточно малых углах наклона брусок покоится на доске. При этом сила трения покоя $\vec F_{тр.\,п.}$ уравновешивает силу $\vec F$ — составляющую силы тяжести бруска, направленную вдоль наклонной плоскости:

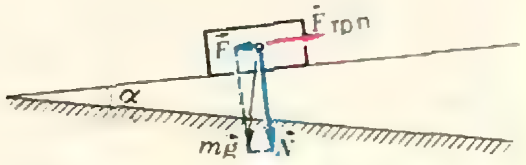


Рис. 4.

$$|\vec F_{тр.\,п.}| = |\vec F| = m|\vec g|\sin\alpha.$$

С увеличением угла α сила трения покоя растет, и при некотором угле α_0 она достигает своего максимального значения $|\vec F_{тр.\,п.max}| = |\vec F_{тр.\,ск.}| = \mu|\vec N|$:

$$m|\vec g|\sin\alpha_0 = \mu m|\vec g|\cos\alpha_0.$$

Отсюда

$\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu$, и $|\vec F_{тр.\,п.\,max}| =$

$$= m|\vec g|\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

При дальнейшем увеличении угла α тело скользит по доске, и сила трения является силой трения скольжения:

$$|\vec F_{тр.\,ск.}| = \mu|\vec N| = \mu m|\vec g|\cos\alpha.$$

График зависимости абсолютной величины силы трения от угла наклона доски α показан на рисунке 5: до угла α_0 сила трения возрастает по закону синуса, а дальше она убывает по закону косинуса.

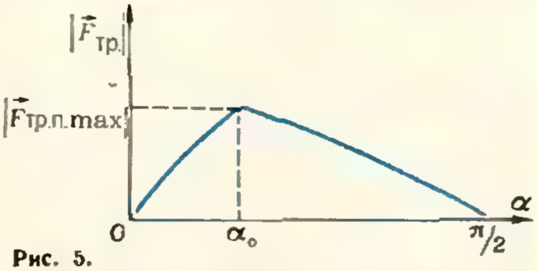


Рис. 5.

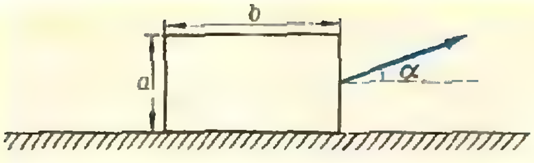


Рис. 6.

Задача 3. *Прямоугольный брусок, размеры которого показаны на рисунке 6, тянут равномерно по горизонтальной плоскости за веревку, угол наклона которой α можно менять. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ. При какой величине угла α_0 брусок начнет приподниматься?*

Рассмотрим все силы, которые действуют на брусок. Это сила натяжения веревки $\vec{T}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ (равная по абсолютной величине силе нормального давления) и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ (так как брусок движется). При угле наклона α_0, когда брусок начнет приподниматься, силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ проходят через точку A (рис. 7).

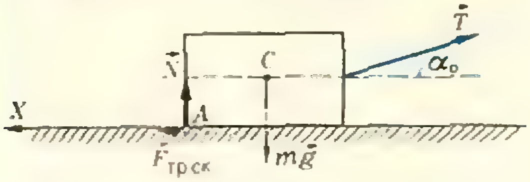


Рис. 7.

Так как брусок движется равномерно и прямолинейно, сумма действующих на него сил и сумма моментов этих сил относительно любой оси должны быть равны нулю. Следовательно, равны нулю сумма проекций всех сил на ось X:

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| - \left|\vec{T}\right| \cos\alpha_0 = 0$$

и сумма моментов сил относительно центра тяжести C:

$$\left|\vec{T}\right| \sin\alpha_0 \cdot \frac{b}{2} - \left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| \frac{a}{2} - \left|\vec{N}\right| \frac{b}{2} = 0.$$

Из этих двух уравнений с учетом того, что $\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| = \mu \left|\vec{N}\right|$, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{a}{b} + \frac{1}{\mu},$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Задача 4. *Ребенок скатывается с горки на санках. Высота горки $H=15$ м, угол наклона к горизонту $\alpha=30^\circ$, а коэффициент трения линейно нарастает вдоль пути от $\mu_1=0$ у вершины горы до $\mu_2=0{,}4$ у подножия. Какую скорость будут иметь санки у подножия горы?*

Так как абсолютная величина силы трения скольжения при движении санок изменяется, а значит, движение санок не будет равноускоренным, задачу проще и удобнее решать с помощью закона сохранения энергии:

$$m\left|\vec{g}\right| H = \frac{mv^2}{2} + A.$$

Здесь $m\left|\vec{g}\right|H$ — потенциальная энергия санок на вершине горы, $mv^2/2$ — их кинетическая энергия у подножия и A — работа против силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$.

Для определения A нарисуем график зависимости $\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right|$ от пути s (рис. 8). У вершины горы

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск. 1}}\right| = \mu_1 m \left|\vec{g}\right| \cos\alpha = 0,$$

у подножия

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск. 2}}\right| = \mu_2 m \left|\vec{g}\right| \cos\alpha,$$

весь путь

$$s_0 = H/\sin\alpha.$$

Работа A численно равна площади заштрихованного треугольника на рисунке 8:

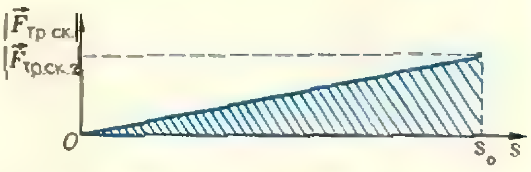


Рис. 8.

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{F}_{\text{тр. ск. 2}}\right| s_0 = \frac{1}{2}\mu_2 m \left|\vec{g}\right| H \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда из закона сохранения энер-

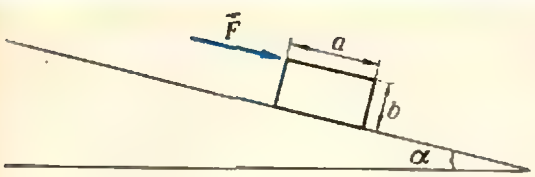


Рис. 9.

гии получаем:

$$|\vec v| = \sqrt{2|\vec g|H\left(1-\frac{\mu_2 \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)} \approx$$

$$\approx 14 \text{ м/с}.$$

Упражнения

1. Брусок массой m, размеры которого показаны на рисунке 9, стоит на наклонной плоскости с углом наклона α. На брусок начинает действовать сила $\vec F$, параллельная наклонной плоскости. При каком абсолютном значении этой силы брусок опрокинется? Известно, что соскальзывать с наклонной плоскости брусок при этом не будет.

2. Какую работу нужно затратить, чтобы втащить сани с грузом (общей массой $m=30$ кг) на горку высотой $H=10$ м? Угол наклона горки к горизонту $\alpha=30°$, а коэффициент трения между санями и горкой линейно убывает вдоль пути от $\mu_1=0,5$ у подножия до $\mu_2=0,1$ у вершины.

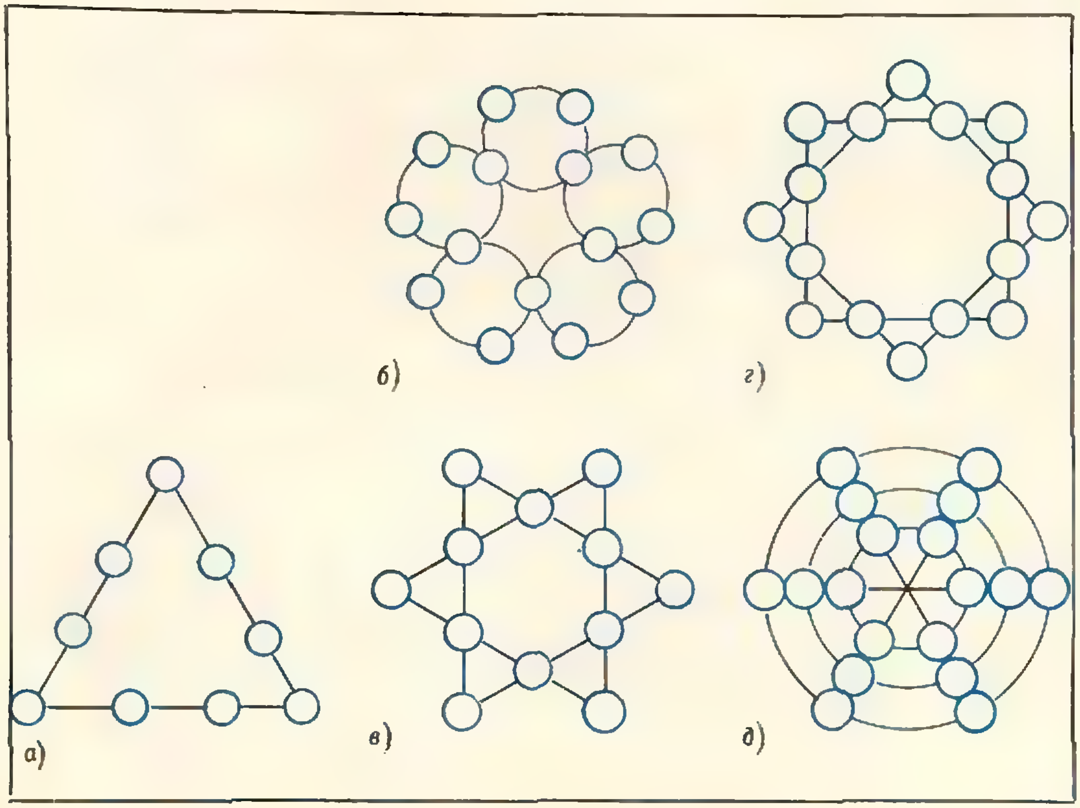
3. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H=2$ м по доске, наклоненной под углом $\alpha=45°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения мешка о доску и горизонтальную поверхность $\mu=0,5$. На каком расстоянии от конца доски мешок остановится?

Головоломки на суммы чисел и их квадратов

В каждой из фигур заполните кружочки последовательными натуральными числами 1, 2, 3,..., так, чтобы были одинаковыми суммы чисел, а также суммы их квадратов:

а) по сторонам треугольника;
б) по окружностям;
в) по треугольникам;
г) по квадратам;
д) по окружностям и диаметрам.

В. Долгов



Интегралом — по счастливым билетам!

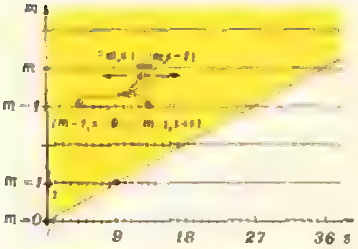
В редакцию пришло письмо от нашего старого читателя Б. Ивякина. В нем он задает следующий вопрос:

«В журнале было помещено несколько статей о счастливых билетах. Однако окончательной формулы ни в одной из них не получено. Хотя мне ясно, что задать число счастливых 2n-значных билетов простой формулой нельзя, мне все-таки кажется, что такая формула должна существовать. Прав я или нет?»

Обычно мы не отвечаем на такие неопределенные вопросы. Однако Борису повезло — после получения его письма мы получили сразу два ответа на его вопрос.

Мы думаем, что и другим читателям будет интересна содержащаяся в них формула.

(Напоминаем, что счастливым называется билет, у которого сумма первых трех цифр равна сумме последних трех.)



Много ли счастливых билетов? Часто ли они попадаются?

Этот вопрос уже обсуждался на страницах нашего журнала; было выяснено, что из миллиона билетов с шестизначными номерами (от 000 000 до 999 999) счастливых — 55 252, т. е. приблизительно один из каждых 18 билетов является счастливым.

Как водится у математиков, решалась и более общая задача — о количестве C_{2n} *счастливых 2n-значных чисел* (ясно, что под этим понимается; например, 0 035 120 115 — счастливое десятизначное число). Явной формулы для C_{2n} установлено не было — были получены лишь рекуррентные соотношения («Квант», 1976, № 12, с. 68).

Но вот в редакцию пришли два письма. Первое прислали в феврале М. Мнацаканян и А. Меликян, а второе — в марте Р. Айдагулов. И в том, и в другом содержится одна и та же явная формула для C_{2n}. Вот эта замечательная формула:

$$C_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{2n}dx. \qquad (1)$$

Интересно, что эта формула была получена совсем разными методами: М. Мнацаканян и А. Меликян пользуются производящими функциями (т. е. функциональным анализом), в то время как Р. Айдагулов опирается на метод тригонометрических сумм (аналитическая теория чисел). К сожалению, их доказательства, хотя и не сложные, все же выходят за рамки школьной математики и не могут быть опубликованы в нашем журнале. Сейчас мы дадим элементарное доказательство формулы (1), воспользовавшись рекуррентными соотношениями, о которых говорилось выше. Напомним их.

Для этого обозначим через $P_m(s)$ количество m-значных чисел ($m=1, 2, 3, \dots$), сумма цифр каждого из которых равна s. Таким образом, $P_m(s)=0$ при $s<0$ и $s>9m$. Очевидно, $P_m(0)=1$.

Так как m-значное число с суммой цифр s получается из $(m-1)$-значного числа с суммой цифр j (где $s-9\leqslant j\leqslant s$) добавлением цифры $s-j$, можно написать

$$P_m(s)=\sum_{j=s-9}^{s}P_{m-1}(j).$$

Это и есть соотношения, о которых говорилось выше. Подставив в них $s+1$ вместо s, после вычитания получим

$$P_m(s+1)-P_m(s)=P_{m-1}(s+1)-P_{m-1}(s-9). \qquad (2)$$

Как пользоваться этим соотношением для вычисления $P_m(s)$? Взгляните на рис. 1. Если при фиксированном m известны все $P_{m-1}(s)$ (т. е. вся $(m-1)$-я строчка) и хотя бы один элемент $P_m(s_0)$ m-й строчки, то формула (2) позволяет, двигаясь вправо и влево, вычислить остальные элементы m-й строчки (поясните!). Но для любого m

$$P_m(0)=1 \qquad (2')$$

и

$$P_1(s)=\begin{cases}1, & \text{если } 0\leqslant s\leqslant 9,\\ 0, & \text{если } s<0 \text{ или } s>9.\end{cases} \qquad (2'')$$

Таким образом, формулы (2), (2′), (2″) позволяют вычислить все числа $P_m(s)$.

Возьмем теперь любое счастливое $2n$-значное число и заменим последние n цифр их дополнениями до 9. Тогда получится $2n$-значное число, сумма цифр которого равна $9n$. Легко понять, что

$$C_{2n} = P_{2n}(9n). \tag{3}$$

Формула (3) дает возможность вычислить число C_{2n}.

Чтобы доказать (1), положим

$$\overline{P}_m(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^m \cos(9m-2s)\,x\,dx. \tag{4}$$

Оказывается,

$$\overline{P}_m(s) = P_m(s). \tag{5}$$

Из формул (3), (5) и (4) сразу следует (1). Таким образом, нам остается доказать (5), для чего достаточно проверить, что числа $P_m(s)$ удовлетворяют равенствам (2), (2′), (2″). Подставляя (4) в (2), получим соотношение

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^m [\cos(9m-2s-2)\,x-\cos(9m-2s)\,x]\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{m-1} [\cos(9m-9-2s-2)\,x-\cos(9m-9-2s+18)\,x]\,dx\right\},$$

равносильное соотношению

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{m-1}\left[\frac{\sin 10x}{\sin x}\{\cos(9m-2s-2)\,x-\cos(9m-2s)\,x\}-\{\cos(9m-2s-11)\,x-\cos(9m-2s+9)\,x\}\right]dx = 0,$$

которое верно (легко сосчитать, что тригонометрическое *выражение в квадратной скобке тождественно равно нулю*).

Таким образом, рекуррентное соотношение (2) для $\overline{P}_m(s)$ выполнено. Осталось проверить базис индукции (2′) и (2″). Второе из этих соотношений проверяется непосредственно (например, при $m=1$ и $s>9$ подынтегральное выражение преобразуется в сумму косинусов углов кратных x), а вот (2′) доказывается не так просто, и нам придется предпринять обходной маневр.

Вспомним, что вместо (2′) достаточно проверить любое другое *соотношение на m-й строчке, например* $\overline{P}_m(10m) = 0$

Это уже не сложное (но громоздкое) упражнение на тригонометрические преобразования, которое мы оставим читателю. На этом доказательство формулы (5) заканчивается.

Внимательный читатель, наверное, задал себе вопрос — откуда взялась формула (4)? Конечно, формально можно считать, что мы ее угадали так же, как мы «угадали» формулу (1). На самом же деле формула (4), как и формула (1), была извлечена из письма М. Мнацаканяна и А. Меликяна, т. е. использовался готовый результат. Ведь наш метод доказательства, в отличие от метода Р. Айдагулова и метода М. Мнацаканяна и А. Меликяна, не дает возможности обнаружить формулу (1), а только позволяет проверить ее.

В заключение предлагаем читателям доказать следующее обобщение формулы (1) для числа счастливых $2n$-значных чисел в системе счисления по основанию k:

$$C_{2n}^k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin kx}{\sin x}\right)^{2n} dx.$$

Царство смекалки

В этом году в издательстве «Наука» была переиздана одна из старых и очень хороших русских популярных книг по математике, по которой учились и которую любили наши деды — книга преподавателя гимназии Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки».

Е. И. Игнатьева по праву можно назвать классиком занимательного математического жанра. В своей книге, первое издание которой вышло в 1908 году, он собрал большое количество разнообразных задач на сообразительность по арифметике и геометрии. Второе издание книги появилось в 1911 году. С тех пор эта книга не переиздавалась. Особенностью книги был ее литературный стиль, язык автора. Конечно, для настоящего издания некоторая трансформация задач и их условий была необходима. Однако, все же хотелось бы, чтобы классиков переиздавали более бережно — иначе неизбежна утрата аромата времени.

За 70 лет популярная математическая литература, изданная на русском языке, сильно обогатилась, и теперь многие задачи из книги Игнатьева широко известны. Тем не менее эта книга, несомненно, представляет большой интерес и сейчас — и не только исторический.

О целях книги, о том, как надо изучать математику и как надо учить математике, о роли задач на смекалку очень хорошо рассказал сам Игнатьев в своих «Предисловиях» к первому и второму изданиям книги. Ниже публикуются отрывки из них.

«Станет ли кто в наше время отрицать настоятельную необходимость самого широкого распространения и популяризации математических знаний? Первоначальные математические познания должны входить с самых ранних лет в наше образование и воспитание. Само собой разумеется при этом, что умственную самодеятельность, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью.

* * *

Относительно математики в нашем обществе еще до сих пор существуют самые странные предрассудки. Одни говорят, что заниматься математикой могут только исключительные, одаренные совсем особыми способностями умы, другие утверждают, что для этого необходима особая, так сказать, «математическая память» для запоминания формул и т. д.

Нельзя, конечно, спорить против того, что существуют умы с резко выраженными склонностями к той или иной стороне умственной деятельности. Но точно так же никоим образом нельзя утверждать, что существуют хотя маломальски нормальные умы, которые совсем не способны к восприятию и полному усвоению необходимых математических знаний, хотя бы, скажем, в размерах курса средней школы.

Будем справедливы и признаем, наконец, что выражение «неспособен к математике» есть прежде всего горький продукт нашего неумения, а, пожалуй, иногда и легкомысленного нежелания поставить в семье и школе преподавание математики на должную высоту.

Еще менее можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминания (зазубривания?) каких-то формул или правил, науку сознательной и последовательной логической мысли обращать в какой-то механический, бессознательный процесс. А между тем, как далеко может заходить дело в этом отношении, свидетельствует известный русский математик В. П. Ермаков. Вот что, между прочим, сообщал он в одном из своих докладов Киевскому физико-математическому обществу.

«Когда мне пришлось студентам читать интегральное исчисление, то в первый же год произошел эпизод, который навсегда сохранится в моей памяти.

Прочитавши часть теории, я для пояснения даю задачи. Я прошу студентов решать задачи в тетрадях. По мере решения я пишу полученные результаты на доске. Однажды для пояснения способов понижения биномиальных интегралов я написал на доске подходящую задачу. И вот вижу, что некоторые студенты вынимают из карманов какие-то тетрадки и смотрят в них.

— Что это?

— Общие формулы.

— Зачем?

— Нам прежний профессор советовал иметь список общих формул и по нему решать частные примеры. Ведь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память все сорок общих формул.

— Заучивать в математике никаких формул не следует. Но я нахожу также неуместным пользование справочными пособиями и нахождение интегралов по общим формулам подстановкою в них данных значений показателей и коэффициентов. Ведь не с неба свалились к нам общие формулы; для вывода их вы употребили ряд рассуждений; применяйте те же рассуждения к частным примерам.

Таким образом оказалось возможным находить всякие интегралы и без общих формул. Пришлось, впрочем, некоторые выкладки видоизменить так, чтобы они непосредственно могли быть приложены к частным примерам.

Получилась еще и та выгода, что на каждом частном примере студенты повторяли все те же рассуждения, которые необходимы для вывода общей формулы. От частого повторения приобретался навык, и в результате — быстрота решения задач.

Этот эпизод заставил меня глубже вникнуть в сущность математики.

В молодых летах и я обращал все внимание на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о том, чтобы убедиться в его строгости. Вот добрался до окончательного результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процесс доказательства быстро испарялся. Но потом забывались и формулы, а часто эти формулы оказывались необходимыми при дальнейших занятиях. Что же оставалось делать? Собирать библиотеку из справочных книг? Но на это не хватало средств, да и не было помещения для библиотеки. Поневоле приходилось припоминать самый процесс, при помощи которого выводилась та или иная формула. Таким образом, вместо формул, мало-помалу я пришел к самим доказательствам. Оказалось, что легче припомнить процесс математического мышления, чем голые формулы. Да и нет надобности помнить целиком весь процесс мышления, достаточно наметить этапные пункты, по которым должна идти наша мысль. И вот уже несколько лет, как я твержу своим слушателям: *в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления.* [...]

Если выражен процесс математического мышления, то получение самих формул является уже делом чисто механическим. В механизме же алгебраических действий ученики должны приобрести навыки еще в средней школе.

Я пришел к тому убеждению, что указанный мною принцип должен быть применен и в средней школе...»

Продолжим мысль В. П. Ермакова и скажем: указанный принцип должен в особенности лечь в основание начального — как семейного, так и школьного — образования в области математических знаний. Не натаскивайте ни ребят, ни юношей на различных «табличках» сложения, вычитания, умножения, на механическом запоминании разных «правил» и формул, а прежде всего приучайте охотно и сознательно мыслить. Остальное приложится. Не мучьте никого длиннейшими скучнейшими и механическими вычислениями и упражнениями.

Когда они понадобятся кому-либо в жизни, он их проделает сам, — да на это ныне есть всякие счетные машины, таблицы и иные приспособления.

* * *

Пытаясь перенести читателя в «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаем себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полноте. Для этого понадобилась бы не одна такая книга: так велика и обширна область только тех отделов математики, которые можно подвести под общее заглавие «математических игр и развлечений».

Чтобы читатели смогли оценить нестандартный характер книги, мы публикуем из нее две задачи вместе с решениями самого Игнатьева.

1. Как гусь с аистом задачу решали

Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуй, сто гусей!» А передний старый гусь ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если б нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей, а теперь... Вот и рассчитай-ка, сколько нас?»

Решение. Полетел однокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и с какой стороны ни принимался, никак не мог этой задачи решить. Вот увидел гусь на берегу пруда аиста: ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист — птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стоит и все думает, видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стаю товарищей встретил и какую ему гусь-вожак загадку задал, а он никак этой задачи решить не может.

— Гм!... — откашлялся аист, — попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять. Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! — ответил гусь.

— Ну вот. Как тебе сказали? Если бы к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист. — Вот что я тебе начерчу здесь на прибрежном песке.

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой же черты, затем четверть черты, да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось то, что показано на рисунке 1.

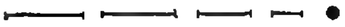


Рис. 1.

Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, посмотрел, но ничего не понял.

—Понимаешь? — спросил аст.

— Нет еще! — ответил уныло гусь.

— Эх, ты! Ну, вот смотри: как тебе сказали, — стая, да еще стая, да половина стаи, да четверть стаи, да ты, гусь, — так я и нарисовал: черту, да еще черту, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую точку, т. е. тебя. Понял?

— Понял! — весело проговорил гусь.

— Если к встреченной тобою стае прибавить еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, да тебя, гуся, то сколько получится?

— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже точку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист носом изобразил на песке то, что показано на рисунке 2.

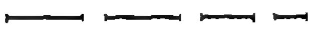


Рис. 2.

— Теперь сообрази-ка, — продолжал аист, — четверть стаи да полстаи — сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстаи, вдвое больше, чем линия четверти стаи, т. е. в половине заключается две четверти. Значит, половина да четверть стаи — это все равно, что три четверти стаи!

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну, а в целой стае сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Но мы имеем здесь стаю, да еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, и это составит 99 гусей. Значит, если перевести все на четверти, то сколько всех четвертей будет?

Гусь подумал и ответил

— Стая — это все равно что 4 четверти стаи, да еще стая — еще 4 четверти стаи, всего 8 четвертей; да в половине стаи 2 четверти: всего 10 четвертей; да еще четверть стаи: всего 11 четвертей стаи, и это составит 99 гусей.

Так! — сказал аист. — Теперь скажи, что же ты, в конце концов, получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в одиннадцати четвертях встреченной мною стаи заключается 99 гусей.

— А, значит, в одной четверти стаи сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стаи — 9 гусей.

— Ну, а в целой стае сколько?

— В целой заключается четыре четверти... Я встретил *36 гусей* — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам, небось, не мог дойти!... Эх, ты... гусь!

2. Крестьянин и черт

Идет крестьянин и плачется: «Эхма! Жизнь моя горькая! Заела нужда совсем! Вот в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они еще деньги получают? Право, хоть бы кто помочь мне захотел».

Только успел это сказать, как глядь, а перед ним черт стоит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. И это совсем нетрудно. Вот видишь этот мост через реку?

— Вижу! — говорит крестьянин, а сам заробел.

— Ну, так стоит тебе перейти только через мост — у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдешь назад, опять станет вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

— Ой ли? — говорит крестьянин.

— Верное слово! — уверяет черт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе удваиваю деньги, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки. Иначе не согласен.

— Ну, что же, это не беда! — говорит крестьянин. — Раз деньги все будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не дать? Ну-ка, попробуем!

Перешел он через мост один раз, посчитал деньги. Действительно, стало вдвое больше. Бросил он 24 копейки черту и перешел через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, отдал черту и перешел через мост в третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько 24 копейки, которые по уговору он должен был отдать черту. Отдал он их и остался без копейки.

Сколько же у крестьянина было денег сначала?

Решение. Задача разрешается очень легко, если только решение ее начать с конца, приняв во внимание, что после третьего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., которые он должен был отдать.

В самом деле, если после последнего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значит, перед этим переходом у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились после того, как он отдал 24 коп., значит, всего денег у него было 36 коп. Следовательно, второй переход он начал с 18 коп., а эти 18 коп. получились у него после того, как он в первый раз перешел мост и отдал 24 коп. Значит, всего после первого перехода у него было денег 18 да 24 коп., т. е. 42 коп. Отсюда ясно, что перед тем, как первый раз вступить на мост, крестьянин имел в кармане 21 коп. собственных денег.

Прогадал крестьянин! Видно, что на чужой счет всегда надо еще свой ум иметь.

Ю. Юшина

В лаборатории Вселенной

Несколько лет назад известный советский физик академик Л. А. Арцимович выступил в печати со статьей «Будущее принадлежит астрофизике». На чем был основан подобный прогноз?

Дело в том, что научно-технический прогресс требует все более широкого развертывания фундаментальных научных исследований для изучения основополагающих закономерностей окружающего нас мира. Одним из важнейших направлений таких исследований является изучение строения материи на всех уровнях ее существования — от элементарных частиц до гигантских космических миров и их систем. Много в этом направлении уже сделано, но еще больше предстоит сделать.

Для того чтобы сегодня проникнуть в неизвестное, обычных исследований уже недостаточно: необходимо изучать материю в предельных, экстремальных состояниях. Температуры в десятки и сотни миллионов градусов; давления в десятки и сотни миллионов атмосфер; чудовищные энергии, эквивалентные энергии взрыва термоядерного заряда с массой, равной десяткам и сотням тысяч солнечных масс; колоссальные плотности в десятки и сотни миллиардов тонн вещества в кубическом сантиметре — вот тот далеко не полный перечень явлений и условий, которые привлекают внимание современных физиков.

Воспроизвести подобные условия в земных лабораториях практически невозможно.

Лаборатория, где такие условия реализуются, существует. Это — лаборатория Вселенной. Здесь можно изучать такие физические процессы, такие состояния материи, такие источники энергии, которые обычным земным исследованиям совершенно недоступны.

«В «космической лаборатории» можно наблюдать проявление гигантских сил тяготения, исследовать вещество в условиях неосуществимых на Земле гравитационных и магнитных полей. Вместе с тем изучение мира звезд и галактик обогащает нас новыми знаниями о строении Вселенной, а это имеет важное значение для формирования научного мировоззрения...» — так пишет известный популяризатор астрономии Е. П. Левитан в своей новой книге «Астрофизика — школьникам» *).

Эта книга, как видно из ее названия, адресована школьникам, интересующимся астрономией и физикой, — эти две науки сегодня тесно связаны друг с другом.

«Астрофизика — школьникам» — отнюдь не учебник, она не повторяет школьного курса астрономии, хотя учитывает его построение и его основные идеи. Это — книга для чтения, причем углубленного, заинтересованного, требующего внимания и побуждающего к размышлениям.

Книга Левитана знакомит читателя с основами фундаментальных теорий и принципов астрофизики, с эволюционными идеями, которые буквально пронизывают современную астрофизику. В ней рассказывается о различных методах наблюдения космических объектов и теоретических исследованиях, о замечательных и во многом неожиданных открытиях, находящихся на переднем крае астрофизики XX века.

В частности, отдельные разделы книги посвящены активности ядер галактик, выбрасывающих огромные количества вещества и выделяющих колоссальные количества энергии; квазарам — поразительным своеобразным объектам, подобных которым ни астрономия, ни физика до недавнего времени не знали; нейтронным звездам (пульсарам), обладающим ядерной плотностью, а также совершенно необычным объектам, «сконструированным» теоретиками, — так называемым черным дырам, способным вбирать в себя окружающее вещество и, в то же время, не выпускать наружу ни частиц, ни электромагнитных излучений.

С интересом будет прочитана глава, посвященная геометрии Вселенной и структуре Метагалактики, а также современным представлениям о происхождении и эволюции Вселенной. Это и есть передовая линия современной астрофизики — открытия, которые удалось сделать в этой области в последние десятилетия, еще требуют теоретического и философского осмысления.

Одно из главных достоинств книги Левитана состоит в том, что астрономические знания преподносятся читателю не как законченные нерушимые истины — наука о Вселенной представлена в ее развитии и становлении. Обсуждаются сложные и нерешенные проблемы, дискуссионные вопросы, приводятся различные точки зрения, обрисовываются пути и перспективы дальнейших исследований.

Живо и интересно написанная книга, небольшая по объему, но весьма емкая по содержанию, несомненно будет способствовать более глубокому пониманию окружающего нас мира, современного состояния науки о Вселенной, формированию диалектико-материалистического мировоззрения.

В. Комаров

---

*) М., «Просвещение», 1977.

РФМШ при Якутском университете

Якутия — это край алмазов, северного сияния и вечной мерзлоты, морозной зимней ночи и ослепительного летнего солнца. В этот-то край шесть лет назад и приехал Исмаил Шахбазович Алиев, кандидат физико-математических наук, ученик академика Анатолия Ивановича Мальцева. Уже двадцать лет он работает со студентами, а находит он их... на школьной скамье.

Сначала была летняя физико-математическая школа на берегу великой реки Лены, в одном из пригородов города Якутска. В нее летом 1972 года собрались ребята более чем из тридцати районов Якутии. Целый месяц они жили в здании средней школы, отдыхали и работали — группа студентов ЯГУ проводила для них олимпиады, придумывала интересные задачки.

Победители олимпиад в летней школе и стали первыми учениками Республиканской физико-математической школы (РФМШ) при Якутском государственном университете.

Директор школы Исмаил Шахбазович много рассказывал нам о своем учителе — Анатолии Ивановиче Мальцеве, мы все его очень полюбили и назвали себя «шкимцами», что означает «ребята из школы им. Мальцева».

Школа-интернат расположена в студенческом городке университета. Мы занимаем всего-навсего один этаж студенческого общежития. В первый год существования в школе было всего три класса: восьмой, девятый и десятый. Но первое же выступление на Республиканской математической олимпиаде принесло команде ФМШ первое место. Этот успех дал понять окружающим, что мы существуем и нужны. С тех пор мы стараемся постоянно быть первыми.

В газете «Молодежь Якутии» ежегодно печатаются задачи заочной физико-математической и химической олимпиады, которые придумывают сами шкимцы и их наставники. По результатам этой олимпиады и идет новый набор в РФМШ. Все наши ребята-фымышата приезжают из районов, из таежных наслегов, они впервые начинают жизнь без родных, в незнакомом городе. Основная часть из них вообще впервые оказывается в городе. Все это, естественно, приводит к тому, что они начинают скучать. Но система воспитания, отношения между учениками и учителями, ритм жизни в нашей школе таковы, что к концу первого месяца ребята, увлекшись учебой, иногда даже забывают послать весточку домой.

Самое главное то, что в нашей школе ребят учат самостоятельно работать, мыслить, то есть делать свои собственные выводы из прочитанного и услышанного. Программа обучения по математике включает некоторые вопросы, изучаемые в университете. Так например, читаются курсы «Теория чисел», «Теория Галуа», «Теория графов», «Проективная геометрия», «Комбинаторика» и «Математическая логика». В школе работает науч-

▲ **Праздник «Посвящение в шкимцы».**

◄ **В физическом кабинете.**

▼ **Летний лагерь. Старший друг рядом.**

ное общество учащихся, которое мы называем ШНО — школьное научное общество. Кроме этого, в школе работает кружок «Квант», на котором разбираются самые интересные и трудные статьи из журнала.

Это все учебные занятия. Но жизнь шкимцев разнообразна и интересна. У нас есть традиционные праздники, которые придумали ребята первого выпуска и их учителя. Эти праздники очень своеобразны. Например, на праздник «Посвящение в шкимцы» приглашаются все выпускники, преподаватели и гости школы. Ребята каждого класса выступают с оригинальными захватывающими номерами, в которых они используют всю свою выдумку, математическую и физическую изобретательность. Есть и постоянный номер концертной программы «Защита фантастического проекта». Это значит, что ребята из каждого класса должны придумать проект нашей будущей физико-математической школы Якутии — какой она будет в 2000-м году, или как будет выглядеть ФМШ в подводном царстве или в космическом пространстве, как будут проходить уроки, как будут выглядеть учебные классы и т. д.

В конце праздника директор школы вручает школьникам ученические билеты, в которых напечатана эмблема нашей школы — знак конъюнкции, из которой, как лучи солнца, выходят струны народного музыкального инструмента Якутии — хомуса. Это символ того, что познавать глубины математики — все равно, что слушать прекрасную музыку.

Наша школа еще совсем юная по сравнению с такими, можно сказать, ветеранами, как Московская или Новосибирская ФМШ. Она похожа на молодой зелененький росточек великого знания, выросший на вечной мерзлоте. И эмблема нашей школы имеет цвет этого росточка. Этот удивительный цвет Исмаил Шахбазович назвал цветом математики — вечно юной, постоянно развивающейся науки.

Самое замечательное в истории нашей школы то, что создавалась она молодежью, в стремительном порыве, с комсомольским задором. Сейчас РФМШ и молодежь Якутского университета взаимно обогащают и дополняют друг друга. Именно из-за такой взаимосвязи кафедра высшей алгебры и геометрии в Якутском университете, возглавляемая Исмаилом Шахбазовичем, ныне стала комсомольской. Это явилось первым результатом создания нашей РФМШ.

В. Атласов, С. Зарипов,
Н. Карамышева, Т. Слепцова,
Г. Чернецова

10 лет Омскому НОУ

Омское городское научное общество учащихся было создано в 1968 году. База для функционирования этого общества вполне достаточная — в Омске сейчас 11 вузов. В совет кураторов НОУ входят представители горкома ВЛКСМ, гороно, областного совета молодых ученых, областного совета по научно-исследовательской работе студентов.

Основой Омского НОУ являются кружки при кафедрах вузов, работающие под руководством преподавателей и студентов (как правило, в прошлом — членов НОУ). В последнее время появились новые формы работы: вечерняя школа при институте инженеров железнодорожного транспорта, «четверговая» математическая школа при университете, а также два математических кружка в школах № 88 и № 118, запланирована организация летней математической школы с участием лекторов из омских вузов. Всего в секции математики НОУ работают примерно 700 школьников.

Наиболее активным членам НОУ по окончании школы выдается «направление-рекомендация» для поступления в вуз. (Например, в 1977 году только по секции математики таких рекомендаций было выдано более 60.) Как показывает десятилетний опыт, 90% из этих членов НОУ поступают в вузы Омска и становятся лучшими студентами, а остальные поступают в ведущие вузы других городов.

Таким образом, Омское НОУ дает школьникам города возможность совершенствовать свои знания в избранной области, приобретать умения и навыки творческой, научно-исследовательской и изобретательской деятельности.

В апреле этого года состоялась 10-я конференция НОУ. Она началась впервые проводимой *командной* олимпиадой школ города по математике. На этой олимпиаде стоит остановиться подробнее.

Всюду уже стали традицией «личные» олимпиады учащихся, на которых каждый школьник «борется» сам за себя, — решает набор из 4—5 задач в одиночку. Студенческие же олимпиады в Омске проводятся по командному принципу: группа студентов вместе решает набор из 15—20 задач. Такая форма работы ближе к той, которая ждет выпускника вуза в научно-исследовательских институтах, лабораториях и т. п. И вот омичи решили посмотреть — а смогут ли школьники образовать пусть маленькую, но самостоятельную «научно-исследовательскую лабораторию»?

2-го апреля к 10 часам утра в актовом зале политехнического института собрались команды (по 5 участников) более чем 90 школ, причем некоторые школы прислали по две команды. Командам было предложено 18 задач и дано 4 часа на их решение. (Тексты большинства задач приведены в конце статьи, после каждой задачи указано, сколько очков давалось за ее полное решение и сколько команд эту задачу решили; «расценки» задач команды знали.)

Все задачи не решила ни одна команда. Это выяснилось на следующий день, когда жюри олимпиады, возглавляемое старшим преподавателем политехнического института В. Н. Сергеевым и доцентом Омского университета Г. Ш. Фридманом, закончило проверку решений. На первое место вышла команда школы № 69 (В. Буренков, Л. Иванова, С. Кокаулин, М. Ланкина и С. Степанов). Их работа произвела на жюри особенно приятное впечатление — ребята написали решения не всех задач, но зато написанные ими решения были верны. Такая способность критически оценить собственную работу — очень ценное качество исследователя; оно наверняка пригодится ребятам в будущем.

Второе место заняла первая команда школы № 88 (В. Князева, И. Лоскутов, О. Лучко, С. Ресеичук и А. Фильков), а третье — первая команда школы № 92 (Е. Каржавцев, В. Панфилов, В. Прасолов, Е. Растопчин и В. Троцук). Вторые команды этих школ выступили менее удачно. Упомянем еще о четвертом месте. На нем неожиданно оказалась «сборная» команда из двух школьников (!) П. Михеева (школа № 77) и А. Мажорова (школа № 88). Эти ребята были запасными в своих командах, а когда все пришли, они объединились в «команду» и написали работу — как выяснилось, удачно.

3 апреля состоялось заседание секции руководителей НОУ. Собравшиеся говорили о том, что их волновало: как лучше готовить подрастающее поколение к трудовой деятельности, прививать им навыки общественно полезной работы, как сделать их достойными членами нашего общества. Руководители секций рассказали о работе за год, обсудили планы на будущее. Видимо, надо расширить рамки НОУ, привлечь к работе не только вузы, но и школы, научно-исследовательские и конструкторские учреждения.

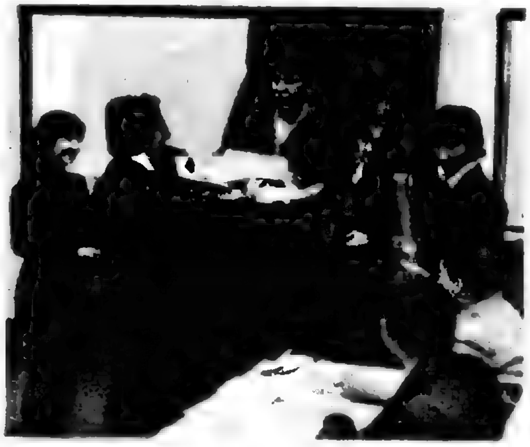
5 апреля на конференции работала секция математики. Было заслушано более 20 докладов, подготовленных учащимися в кружках при разных вузах города. Остановимся подробнее на докладе «Математические принципы построения стереоизображений» Е. Воробьевой (школа № 73). Лена рассказала, как можно без стереофотоаппарата и моделей рас-

На командной математической олимпиаде.

Жюри за работой.

Кубок и торт получает команда школы № 69 — победитель олимпиады.

Вручение премий лучшим докладчикам.



считывать и создавать стереопары с изображением пространственных моделей многогранников, наглядные объемные иллюстрации к школьному курсу стереометрии. Затем всем присутствующим раздали очки с поляризаторами, и на алюминиевом экране через стереопроектор было продемонстрировано более 30 снимков; это вызвало бурную реакцию зала.

По окончании работы секции состоялось подведение итогов олимпиады, награждение команд школ-победителей, награждение докладчиков, выдача «направлений-рекомендаций» в вуз. Команда школы № 69, занявшая первое место в олимпиаде, получила переходящий кубок горкома ВЛКСМ, первые три призера олимпиады (команды школ №№ 69, 88 и 92) были награждены грамотами горкома ВЛКСМ и ...тортами. За активное участие в конференции более 20 школьников были награждены дипломами обкома ВЛКСМ, обкома профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений, областного совета по научно-исследовательской работе студентов.

Премии «Кванта» (номера журнала с памятными надписями) по итогам олимпиады получили команда школы № 69 — единственная, решившая задачу № 1, команда школы № 92—

за единственное решение задачи № 10, а также П. Михеев и А. Мажоров — за смелость, настойчивость и высокие результаты. За активное участие в конференции также премии получили Е. Воробьева, Н. Рыбина (школа № 125), С. Дорошевич (школа № 72) и ж.-д. школа № 13.

23 апреля в вузах Омска прошли заседания остальных секций юбилейной конференции НОУ. Учащиеся городских школ представили еще 92 доклада по физической, медицинской, биологической, инженерной и др. тематике. Многие доклады были настоящими исследованиями, семь докладов, подготовленных членами кружка при Сибирском автомобильно-дорожном институте, были отчетами об исследованиях работы двигателей.

Нередко школьники пробуют свои силы сразу в нескольких кружках. Например, Е. Булавко (школа № 112) сделала один доклад на тему «Определение основных токсичных компонентов в отработанных газах ДВС газохроматическим методом», а вместе со своей подругой Т. Кривопузковой — еще один, по определению содержания стронция в картофеле и растениях. Применение удобрений в сельском хозяйстве полезно, однако вместе с удобрениями в почву попадают, в частности, соли стронция, которые накапливаются в клубнях картофеля, в растениях. Определить содержание стронция позволяет спектральный метод, известный любому старшекласснику. Как конкретно это делается — и было рассказано и показано девушками, подготовившими доклад в кружке при сельскохозяйственном институте.

Куда пойдут дальше все эти ребята — они решат сами. Но можно быть уверенным в том, что этот выбор, как и выбор сотен других активных членов научного общества учащихся Омска, будет осознанным.

Задачи олимпиады

1. Пусть $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Построить график функции

$$y=\lim_{n\to\infty}\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n}$$

(5 очков, 1 команда).

2. Пусть в точках A_1, A_2, ..., A_n сосредоточены электрические заряды, соответственно, q_1, q_2, ..., q_n, и O — некоторая точка. В электростатике вектор

$$\vec{d}=\sum_{i=1}^{n}q_i\overrightarrow{OA_i}$$

называют *дипольным моментом* системы зарядов относительно точки O. Показать, что если сумма зарядов равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора точки O (3 очка, 0 команд).

3. Пусть $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_6x^6$ — некоторый многочлен шестой степени. Известно, что $f(k)=f(-k)$ для $k=1$, 2, 3. Доказать, что $f(x)$ — четная функция (3 очка, 4 команды).

4. На сколько частей и как нужно разделить отрезок данной длины a, чтобы произведение длин всех полученных отрезков было наибольшим? (10 очков, 2 команды).

5. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать что

$$\min\left\{\sqrt[m]{n};\ \sqrt[n]{m}\right\}\leqslant\sqrt[3]{3}$$

(2 очка, 0 команд).

6. Доказать, что три произведения $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$, составленные из положительных чисел $a<1$, $b<1$, $c<1$, не могут одновременно быть больше 1/4 (2 очка, 3 команды).

8. Найти множество точек на плоскости, равноудаленных от двух отрезков $(-1\leqslant x\leqslant 4,\ y=0)$ и $(-6\leqslant y\leqslant 2,\ x=0)$. Расстояние до отрезка — расстояние до ближайшей точки отрезка (4 очка, 7 команд).

9. Найти остаток от деления многочлена $2x^{123769}+2x^{27345}+x^{1384}-3x^{792}+x^{29}-x^7$ на многочлен x^2-1 (4 очка, 2 команды).

10. Построить график функции $y=\ln(x+\ln(x+\ldots))$ (7 очков, 1 команда).

11. Найти объем фигуры, образованной при пересечении двух круговых цилиндров радиуса R, если их оси пересекаются друг с другом под прямым углом (6 очков, 0 команд).

13. В равнобедренный треугольник с площадью S вписана окружность. Угол при вершине треугольника α. При каком α площадь вписанной окружности максимальна? (3 очка, 3 команды).

14. Турист поднялся на гору, отдохнул там и спустился вниз по той же тропе. Подъем и отдых заняли больше суток, а все путешествие меньше двух суток. Доказать, что есть место, на котором турист находился в одно и то же время суток (3 очка, 4 команды).

15. Решить уравнение $(\sqrt{3}-1)\sin 3x+2\sin 2x+2\sin x=0$ (5 очков, 6 команд).

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна CD, длины сторон $|AB|=a$, $|CD|=b$, $|AD|=c$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD? (5 очков, 4 команды).

17. Решить уравнение

$$\left(\frac{9}{4}\right)^y-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^y+2=0$$

(2 очка, 52 команды).

18. У трех геологов имеются 2 лошади. Расстояние до лагеря 13,5 км. Как быстро они могут добраться до лагеря, если скорость человека 4 км/ч, а лошади 6 км/ч? (На одну лошадь вдвоем садиться нельзя, лошадей без проводника пускать нельзя.) (5 очков, 6 команд).

А. Виленкин
Фото автора

Высокие степени

9. в) $10^{1000} < 9^{1111}$. Воспользуйтесь неравенством $\left(1+\frac{1}{9}\right)^9 < 3$.

Что такое π?

1. В ABD сторона AD лежит против тупого угла. 2. Постройте угол CAB_1, для которого $\widehat{CAB_1} = \widehat{C_1A_1B_1}$. Пусть $(AB_1) \cap (CB) = D$. Примените задачу 1. 3. Пусть P_i — проекция точки M_i на $[M_{i+1}N_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \ldots, k-2$), P_{k-1} — проекция точки M_{k-1} на $[BC]$. Примените задачу 2 к треугольникам AM_1N_1, $M_1M_2P_1$, $M_2M_3P_2, \ldots$ $M_{k-2}M_{k-1}P_{k-2}$, $M_{k-1}BP_{k-1}$. 4. Из задачи 3 вытекает, что $|AN_1| < \frac{|AC|}{k}$. Если $\widehat{AOB} = \frac{180^\circ}{n}$ и $k = n+1$, то $|AC| = \frac{a_n}{2}$, $|N_1C| = \frac{a_{n+1}}{2}$ (a_i — сторона многоугольника Π_i). В этом случае $\frac{a_n}{2} - \frac{a_{n+1}}{2} < \frac{\frac{a_n}{2}}{n+2}$,

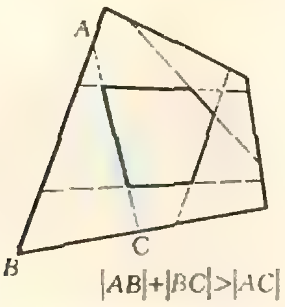


Рис. 1.

5. Идея доказательства показана на рисунке 1. При каждом «отрезании» периметр внешнего многоугольника уменьшается, так как ломаная заменяется отрезком.

Вооружившись методом координат

1. $\frac{11}{\sqrt{170}}$.
2. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
3. $3\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ см.
4. $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$.
5. $a\sqrt{2}$.
6. $\frac{1}{5}\sqrt{1345}$.
7. $\arccos\frac{6}{7}$.

О силах трения

1. $|\vec{F}| = \frac{m|\vec{g}|}{2}\left(\frac{a}{b}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$.

2. $A = m|\vec{g}|H\left(1 + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right) \approx$ $\approx 4{,}5$ кДж.

3. $l = H\left(\frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg}\alpha\right) \times$ $\times(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2 = 0{,}25$ м.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 29)

1. Указание. $1976 = 8 \cdot 13 \cdot 19$. 2. Существуют; это те и только те числа, которые оканчиваются (в десятичной записи) одной из четырех комбинаций цифр: 2326, 4826, 7326 или 9826. 3. Указание. Исходное число имеет вид $3n+2$, полным квадратом не является. 4. (3), (6, 5, 4), (11).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант», № 10)

1. Отцу сейчас 40 лет.

2. См. рисунок 2.

3. Поскольку коробка — не куб, можно считать, что $a > b > c$. После развертки параллелепипеда задача сводится к такой плоской задаче для прямоугольника со сторонами длины $(a+c)$ и $(b+c)$: *отметить на сторонах прямоугольника по точке так, чтобы длина образовавшейся ломаной была минимальной.* Решением

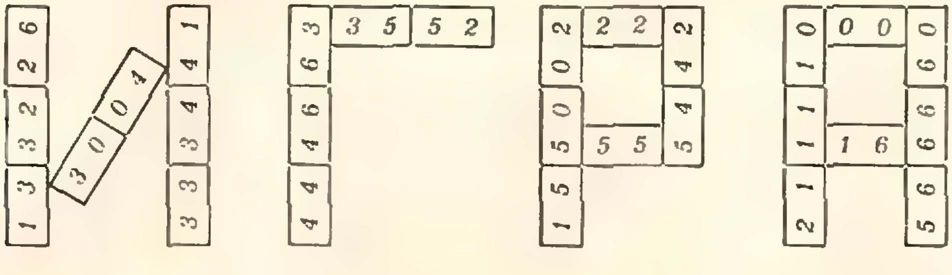


Рис. 2.

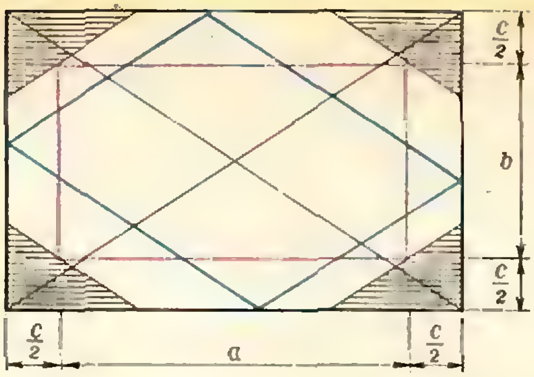


Рис. 3.

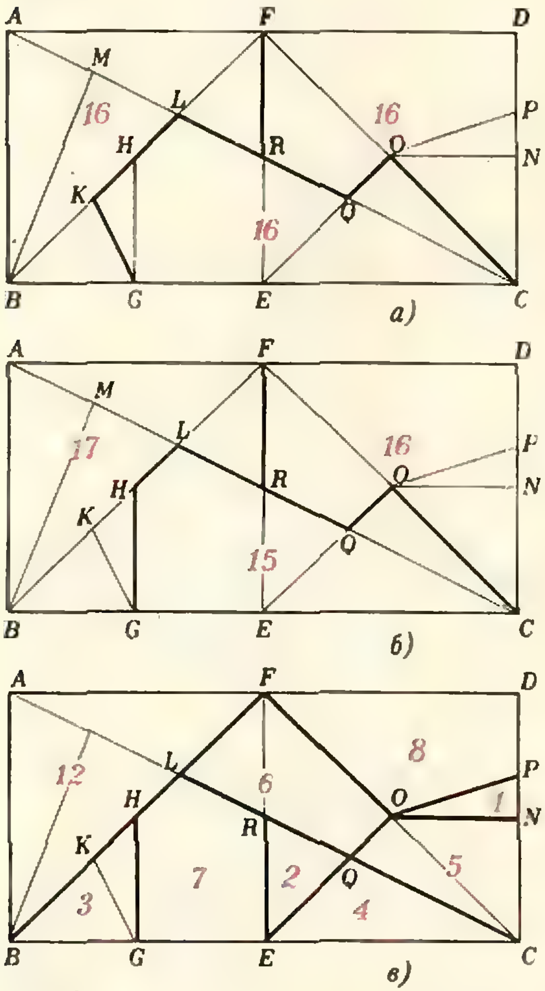


Рис. 4.

этой задачи является ломаная, звенья которой параллельны диагоналям прямоугольника, а длина равна

$$L = 2\sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}$$

(см. рис. 3).

Для решения исходной задачи необходимо, чтобы все звенья ломаной пересекали границу прямоугольника со сторонами a и b. В этом случае должно выполняться следующее неравенство:

$$ab > c^2 \text{ (докажите это!).}$$

4. Если два разных фасона платьев — одной и той же расцветки, то продавщица не сможет составить витрину так, как ей бы хотелось.

Математика — будущему рабочему
(см. «Квант» № 10, с. 90)

I курс

1. Биссектриса пересекает боковую сторону. 2. 2. 5. Самая легкая — корзина, самый тяжелый — саквояж.

II курс

1. Нельзя. 2. $a = 6$, $b = 4{,}5$.

III курс

1. 2. 2. $\dfrac{2h}{\sqrt{3}}$. 4. Существует.

Стомахион
(см. «Квант» № 8)

2. а) См. рис. 4, *а*; б) см. рис. 4, *б*; в) см. рис. 4, *в*.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

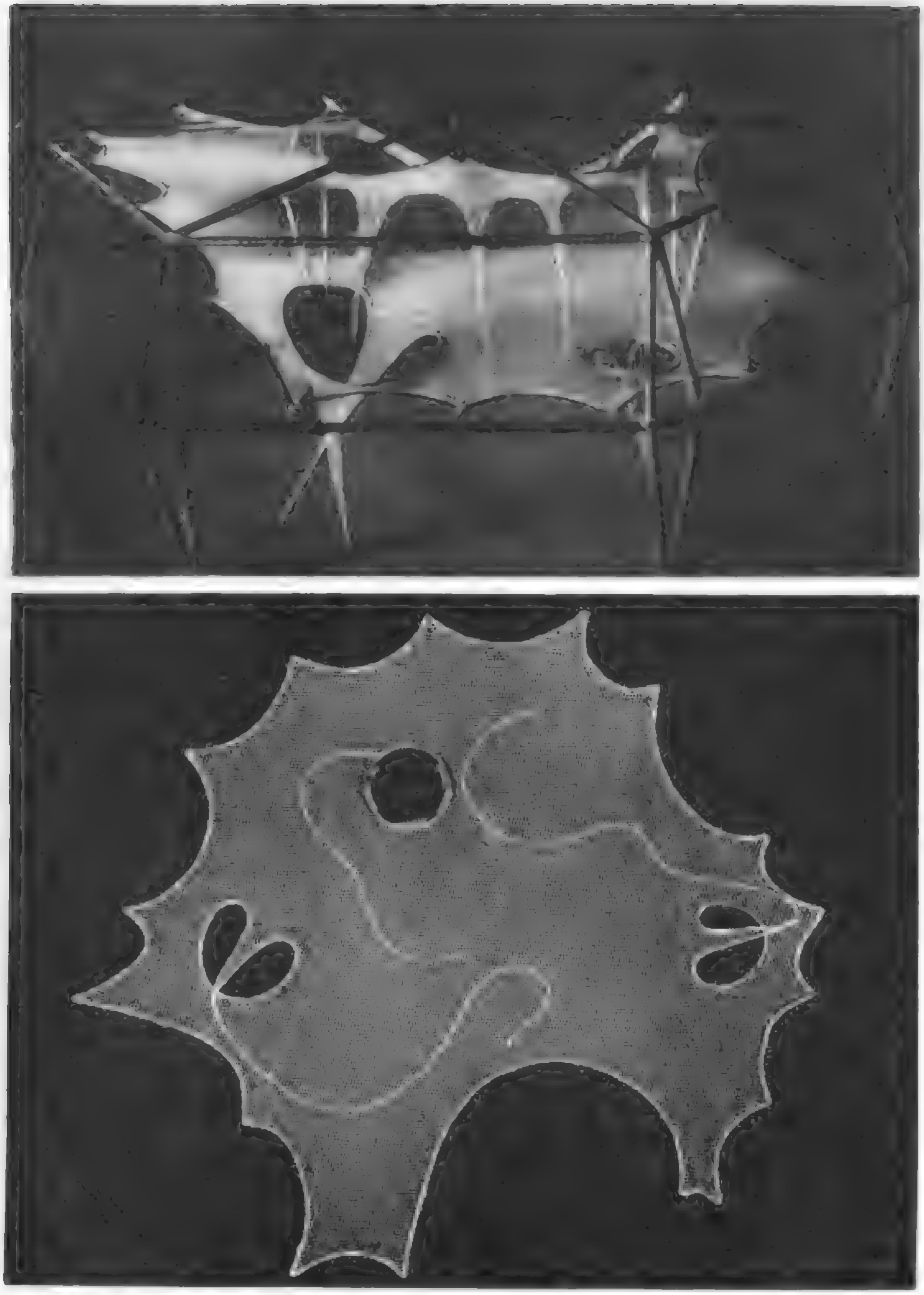
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Бутусова, А. Ипатова

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/VIII-78
Подписано в печать 9/X-78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,48 Т-17250
Цена 30 коп. Заказ 1956 Тираж 301145

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

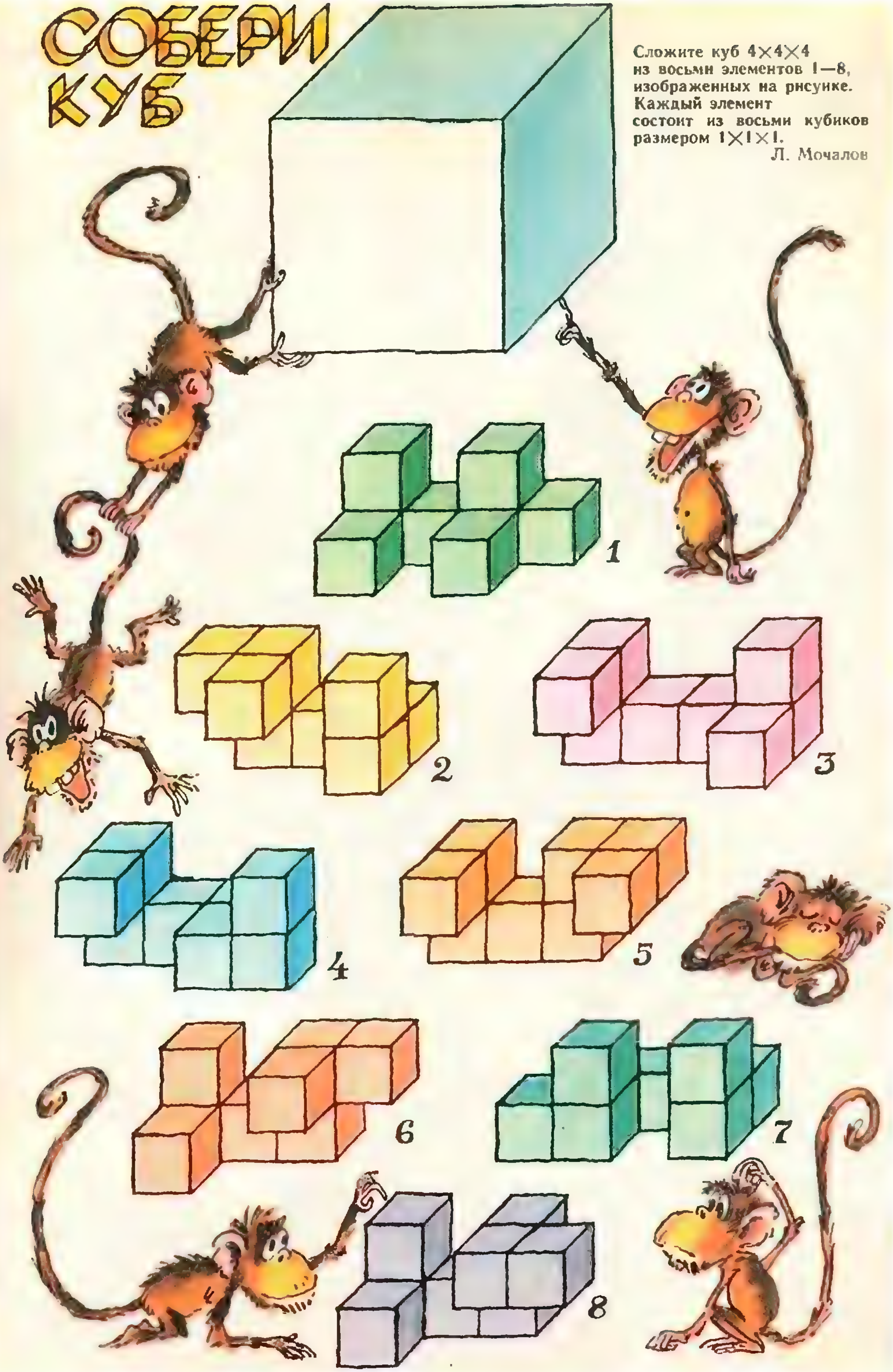


На этой фотографии изображены объемная сетчатая модель и плоская развертка, по которым были выполнены декоративные композиции в экспозиции советского павильона на Всемирной выставке ЭКСПО-75 в Японии (подробнее см. на с. 10).

СОБЕРИ КУБ

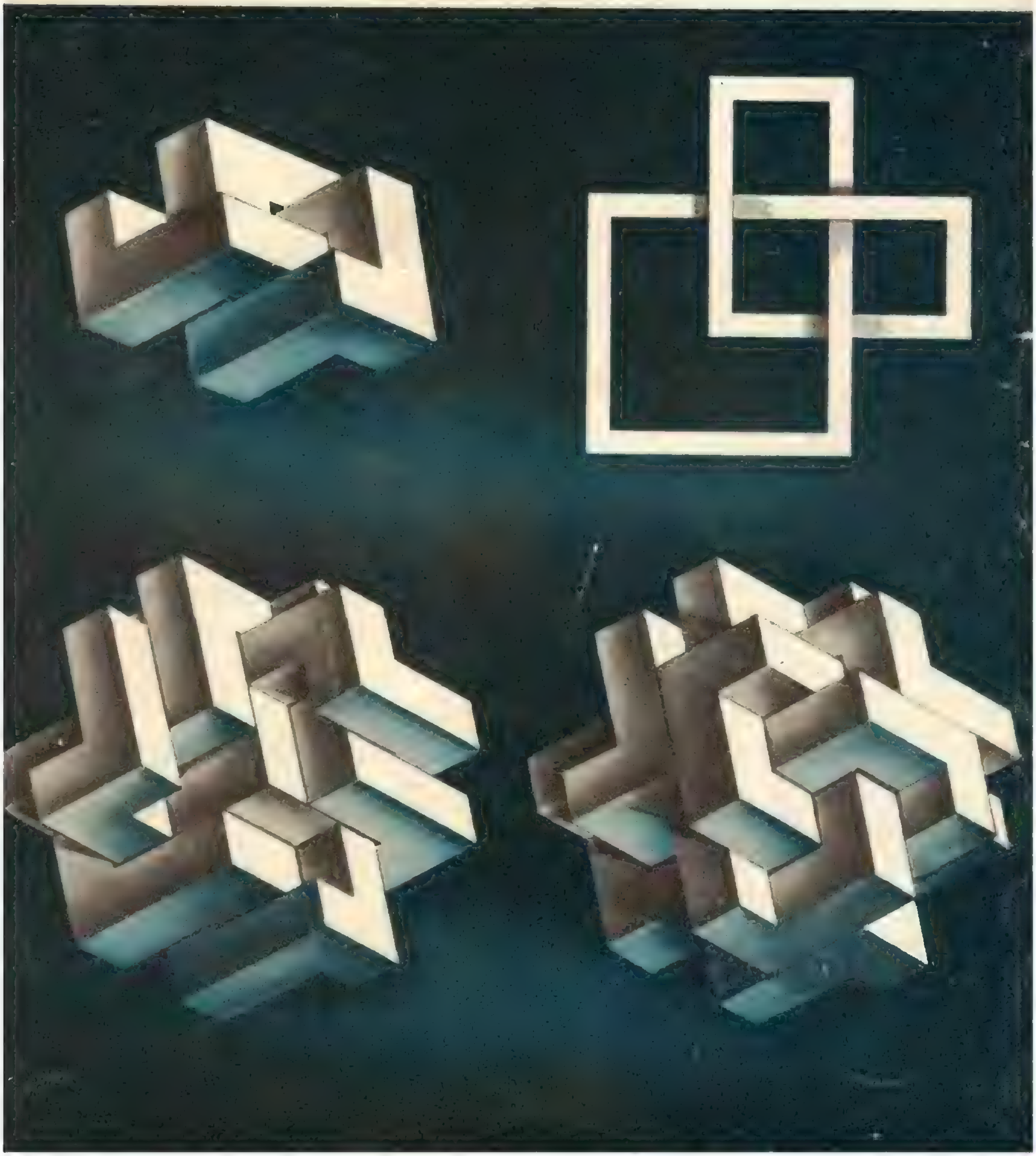
Сложите куб 4×4×4 из восьми элементов 1—8, изображенных на рисунке. Каждый элемент состоит из восьми кубиков размером 1×1×1.

Л. Мочалов



Цена 30 коп.

На этом рисунке изображены фигуры, составленные из картонных моделей трилистного узла. Вверху слева показана отдельная модель трилистника, выполненная из картона в виде замысловато склеенных параллелепипедов. Рядом с ней (вверху справа) показана обычная схема трилистного узла. Внизу слева — фигура, составленная из трех трилистных узлов, сгруппированных вокруг центрального кубика. Рядом — та же фигура, к которой добавлен четвертый трилистник; за ним кубик уж не виден. Об узлах вы можете прочитать в статье. Узел на столе «математика» («Квант» № 7 за 1975 г.).



НОМЕР
12

Основан в 1970 году

Квант

12
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

В НОМЕРЕ:

2 *А. Геронимус.* Диофантовы уравнения по простому модулю

7 *В. Кравцов, И. Сербин.* Уголковые отражатели

10 *Е. Гик.* Существует ли бесконечная шахматная партия?

Лаборатория «Кванта»

13 *В. Мильман.* Почему сгоревшая спичка изогнута?

Математический кружок

15 *Г. Гальперин, А. Кушниренко.* Спутники и задача уплощения

Задачник «Кванта»

22 Задачи М536—М540; Ф548—Ф552

24 Решения задач М491—М493; Ф503, Ф505—Ф507

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта» (*с. 12, 36, 41, 53*)

По страницам школьных учебников

34 *А. Земляков.* Еще 17 вопросов

«Квант» для младших школьников

37 Задачи

38 *В. Махров.* Старые знакомые

Практикум абитуриента

40 *И. Горев.* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

42 *Л. Табачников.* Элементы статики деформируемых тел

47 *В. Тонян.* О подготовительных отделениях при вузах ◆

50 *В. Березин.* Стереографическая проекция и астролябия

Рецензии, библиография

54 *И. Зорич.* Будущим создателям космической техники

Информация

55 *В. Скворцов.* XX Международная математическая олимпиада школьников

56 *Н. Васильев.* Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике

57 **Ответы, указания, решения**

61 Напечатано в 1978 году

На первой странице обложки плоская равномерная решетка спроецирована на сферическую поверхность из полюса сферы. (Плоскость касается сферы в другом полюсе.) Эта проекция является обратной к стереографической проекции (см. с. 50). Рисунок выполнен автоматической чертежной машиной.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука». «Квант». 1978

А. Геронимус

Диофантовы уравнения по простому модулю

«Достопочтеннейший Дионисий, зная, что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука.

Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним незнаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет тебе удобопонятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение».

Таким посвящением открывается «Арифметика» Диофанта Александрийского.

В этой книге Диофант (он жил предположительно в III в.) суммировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных (т. е. с несколькими переменными) алгебраических уравнений в целых или рациональных числах. С тех пор эти уравнения стали называться *диофантовыми*.

Вот примеры таких уравнений:
$x^2 + y^2 = z^2, \qquad x^2 = y^3 + 5y + 7.$

Интерес к диофантовым уравнениям связан, видимо, с самой природой человека — сохранившиеся документы обнаруживают его следы в глубине тысячелетий. Еще в Древнем Вавилоне занимались поисками *пифагоровых троек* — целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

«Арифметика» Диофанта легла в основу теории чисел нового времени. Со времен Ферма (XVII в.) диофантовы уравнения стали предметом глубоких исследований самых выдающихся математиков и неослабного интереса всех любителей чисел, не уступающих в рвении достопочтеннейшему Дионисию.

Росло и растет могущество задач, о котором говорится в посвящении. Теория диофантовых уравнений пропиталась связями едва ли не со всеми областями современной математики.

Только в одном Диофант ошибся — предмет не стал удобопонятным.

Вероятно, последним, кто разделял эту надежду, был знаменитый немецкий математик Давид Гильберт. В 1900 году в докладе на Втором Международном конгрессе математиков он сформулировал 23 проблемы из разных областей математики. Десятая проблема формулировалась так: *указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное диофантово уравнение в целых числах.*

Длительный период исследований завершился в 1969 году отрицательным решением этой проблемы: оказалось, что общего способа, о котором говорится в ее формулировке, вообще не существует *).

В связи с диофантовыми уравнениями ставились и более простые задачи. При их решении возникали очень красивые теории. О началах одной из них — теории диофантовых уравнений по простому модулю — мы расскажем в этой статье. Чтобы этот рассказ был вам понятен, советуем перечитать статьи «Сравнения и классы вычетов» (№ 10) и «Сравнения по простому модулю» (№ 11).

Переход к уравнениям по простому модулю

Рассмотрим какое-нибудь диофантово уравнение. Предположим, что оно имеет решение, и рассмотрим вместо входящих в решение чисел их классы вычетов по mod p. Легко видеть, что полученный набор будет являться решением *приведенного уравнения* — уравнения, получающегося из данного заменой каждого коэффициента на его класс вычетов по mod p. Поэтому необходимым условием существования решения у диофантова уравнения является существование решения приведенного уравнения по mod p при всех p *).

---

*) Подробнее об этом см. «Квант», 1970, № 7.

В этом разделе мы приведем два примера перехода к mod p, а в следующем изучим диофантовы уравнения по mod p (т. е. уравнения с коэффициентами в множесте F_p) сами по себе. Их теория гораздо проще, чем теория обычных диофантовых уравнений. Множество F_p конечно, и установить, имеет ли данное диофантово уравнение решение, можно простым перебором. Поэтому не так удивительно, что для множества F_p имеются общие теоремы, гарантирующие существование решений. Мы сформулируем и обсудим эти теоремы в следующих разделах.

Каковы целочисленные решения уравнения

$$35x^4+24y^3=100\,000? \qquad (1)$$

Приведем это уравнение по mod 3. $35\equiv 2 \pmod 3$, $24\equiv 0 \pmod 3$, $100\,000\equiv 1 \pmod 3$; поэтому по mod 3 уравнение (1) принимает вид

$$\bar{2}x^4=\bar{1}. \qquad (2)$$

$\bar{2}x^4$ при $x\in F_3$ принимает значения $\bar{0}$ и $\bar{2}$ (проверьте), поэтому у уравнения (2) нет решений, значит, нет решений и у уравнения (1).

Рассмотрим пример посложнее:

$$5x^3+11y^3+13z^3=0. \qquad (3)$$

У этого уравнения есть одно очевидное решение: $x=y=z=0$. Постараемся доказать, что других решений у него нет.

Естественно рассмотреть уравнение (3) по модулю 5, 11 или 13 — тогда один из трех членов обратится в $\bar{0}$. Какой же именно модуль нам выбрать?

Ответить на этот вопрос нам поможет решение задачи 4 статьи «Сравнения по простому модулю». Из него следует, что в множествах F_5 и F_{11} все элементы являются кубами, а в множестве F_{13} только 5 элементов являются кубами.

После приведения уравнения (3) по модулю 5 оно принимает вид

$$\bar{y}^3+\bar{3}\bar{z}^3=\bar{0}. \qquad (4)$$

Поскольку любой элемент множества F_5 является кубом и в F_5 возможно деление, для любых $\bar{a}$ и $\bar{b}$ найдутся такие $\bar{y}$ и $\bar{z}$, что $\bar{y}^3=\bar{a}$ и $\bar{3}\bar{z}^3=\bar{b}$. Поэтому в множестве F_5 у уравнения (4) существует много ненулевых решений (соответствующих парам $\bar{a}$, $\bar{b}$, для которых $\bar{a}+\bar{b}=\bar{0}$). Аналогичный результат верен и для F_{11}. Поэтому у нас нет надежды, рассматривая уравнение (3) по модулю 5 или 11, доказать, что оно имеет только нулевое решение.

Рассмотрим уравнение (3) по mod 13:

$$\bar{5}x^3+\overline{11}y^3=\bar{0}. \qquad (5)$$

В множестве F_{13} кубами являются только элементы $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{5}$, $\bar{8}$, $\overline{12}$. Составим таблицу возможных значений выражения $\bar{5}\bar{a}+\overline{11}\bar{b}$, где $\bar{a}$, $\bar{b}\in\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{8}, \overline{12}\}$ (в пересечении стоит сумма $\bar{5}\bar{a}+\overline{11}\bar{b}$). Из таблицы видно, что единственным решением уравнения (5) является $x=y=\bar{0}$.

	$\bar{a}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\overline{12}$
$\bar{b}$	$\bar{5}\bar{a}$ $\overline{11}\bar{b}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\overline{12}$	$\bar{1}$	$\bar{8}$
$\bar{1}$	$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{6}$
$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\overline{11}$
$\bar{8}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\bar{2}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$	$\bar{5}$
$\overline{12}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{7}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\overline{10}$

Значит, для любого решения x_0, y_0, z_0 уравнения (3) x_0 и y_0 делятся на 13: $x_0=13x_1$, $y_0=13y_1$. Подставив эти выражения для x_0 и y_0 в (3), мы получим $5\cdot 13^3x_1^3+11\cdot 13^3y_1^3+13z_0^3=0$, откуда z_0 делится на 13: $z_0=13z_1$. Подставив и сократив на 13^3, получим $5x_1^3+11y_1^3+13z_1^3=0$. Отсюда следует, что $x_1=13x_2$, $y_1=13y_2$, $z_1=13z_2$, и т. д. Таким образом, x_0, y_0, z_0 делятся на любую степень 13, что возможно, только если $x_0=y_0=z_0=0$.

---

*) О вычислениях «по модулю» говорится также в статье М. И. Башмакова («Квант», 1971, № 3).

Теоремы Шевалле и Варнинга

Знание множества F_{13} позволило нам сообразить, какой именно модуль сравнения стоит выбрать для исследования уравнения (3).

А что будет, если в уравнении не три переменные, а четыре или пять? Что будет, если степень уравнения — не 3, а 4, 5 или 6? Чувствуется, что если число переменных увеличивается, то наши шансы доказать невозможность решения исходного уравнения, рассматривая его по какому-нибудь модулю, падают; если же увеличивается его степень — растут. Это интуитивное соображение можно уточнить.

Справедлива следующая замечательная Теорема Шевалле: *рассмотрим многочлен $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в множестве F_p; пусть $x_1=x_2=\ldots=x_n=\bar 0$ — решение уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$; если степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ меньше n, то у уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ есть и ненулевое решение.*

Теорема Шевалле сразу следует из такой теоремы Варнинга: *если степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из F_p меньше n, то число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ делится на p.*

Действительно, по теореме Варнинга число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ равно 0 или $\geqslant p$. Но первый случай исключен, так как у уравнения есть нулевое решение. Значит, у него есть еще по крайней мере $p-1$ решение.

Доказательство теоремы Варнинга настолько просто и красиво, что мы приведем его здесь, но сначала поговорим

О некоторых суммах, равных нулю

Чему равна сумма $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p$ всех элементов множества F_p? Умножим все слагаемые на какой-нибудь элемент $\bar a$ из F_p, не равный $\bar 0$ и $\bar 1$. Тогда сумма умножится на этот же элемент: $\bar a\bar b_1+\bar a\bar b_2+\ldots+\bar a\bar b_p=\bar a(\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p)$. С другой стороны, при умножении всех элементов множества F_p на какой-нибудь элемент $(\neq\bar 0)$, мы снова получим все элементы из F_p; поэтому $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar a\bar b_1+\bar a\bar b_2+\ldots+\bar a\bar b_b$. Итак, $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar a(\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p)$. Значит, $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar 0$.

А чему равна сумма $\bar b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2$ квадратов элементов множества F_p? Умножим снова все его элементы на какой-нибудь элемент $\bar a$ $(\neq\bar 0, \bar 1)$. Тогда сумма по тем же причинам, что и раньше, останется прежней: $(\bar a\bar b_1)^2+(\bar a\bar b_2)^2+\ldots+(\bar a\bar b_p)^2=\bar b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2$; с другой стороны $(\bar a\bar b_1)^2+(\bar a\bar b_2)^2+\ldots+(\bar a\bar b_p)^2=\bar a^2(b_1^2+\ldots+\bar b_p^2)$. Если $\bar a^2\neq\bar 0, \bar 1$, то $b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2=\bar 0$.

И вообще: если в множестве F_p найдется такой элемент $\bar a$, что $\bar a^k\neq\bar 0, \bar 1$, то сумма k-х степеней всех элементов из F_p равна $\bar 0$.

Ясно, что если $\bar a^k=\bar 1$ для первообразного корня $\bar a$ из F_p, то тем более $\bar b^k=\bar 1$ для всех остальных элементов $\bar b\neq\bar 0$. Если $\bar a$ — первообразный корень, то $\bar a^k=\bar 1$ в том и только в том случае, когда k делится на $p-1$. В частности, если $0<k<p-1$, то $\bar a^k\neq\bar 1$ и сумма k-х степеней равна $\bar 0$. Поскольку $\bar 0^{p-1}+\bar 1^{p-1}+\ldots+\overline{p-1}^{p-1}=\overline{p-1}$, а $x^p=x$ для $x\in F_p$ (Малая теорема Ферма), мы нашли сумму k-х степеней элементов из F_p для любого $k\neq 0$:

$$\bar b_1^k+\bar b_2^k+\ldots\bar b_p^k=$$

$$=\begin{cases}\bar 0, \text{ если } k\not\equiv 0 \pmod{p-1},\\ \overline{p-1}, \text{ если } k\equiv 0 \pmod{p-1} \text{ и } k\neq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь некоторый одночлен $q = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_t^{k_t}$ и всевозможные упорядоченные наборы $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle$, где $\bar c_i \in F_p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таких наборов p^n. Будем считать, что $t \leqslant n$. Тогда для каждого набора можно вычислить значение одночлена q, принимаемое на этом наборе: нужно подставить вместо $x_1, x_2, \ldots, x_t$ первые t чисел набора. Чему равна сумма всех этих p^n значений? (Решенная нами задача о сумме k-х степеней является частным случаем этой задачи: $q = x_1^k$, $n = 1$.) Мы предоставляем читателю исследовать этот вопрос.

Для дальнейшего нам понадобится только, что если $t < n$ или $0 < k_i < p - 1$ для некоторого i, то искомая сумма равна $\bar 0$. Это вы без труда докажете сами.

Доказательство теоремы Варнинга

Обозначим степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через m, число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar 0$ через $N(R)$. Нам надо из условия $m < n$ вывести, что $N(R)$ делится на p.

В множестве M всевозможных упорядоченных наборов элементов из F_p длины n рассмотрим подмножество M_R решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar 0$. Подмножество M_R состоит из наборов $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle$, для которых $R(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n) = 0$.

Рассмотрим функцию f_R, которая каждому элементу $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle \in M$ сопоставляет число 1, если $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle \in M_R$, и число 0, если с $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle \notin M_R$.

(Функция, определенная на некотором множестве M и принимающая значение 1 на некотором подмножестве $A \subset M$ и значение 0 на остальных элементах из M, называется *характеристической функцией* подмножества A. Таким образом, функция f_R является характеристической функцией подмножества M_R.)

Из самого определения функции f_R следует, что число решений $N(R)$ уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar 0$ равно сумме значений функции f_R по всем элементам множества M. Это утверждение, казалось бы, ничего не добавляет к определению f_R. Тем не менее читатель увидит, что замена множества M_R функцией f_R является ключевой в доказательстве.

Рассмотрим теперь функцию $\bar f_R$, которая отличается от функции f_R тем, что вместо чисел 1 и 0 принимает на решениях и нерешениях соответственно значения $\bar 1$ и $\bar 0$ из F_p. Сумма $S(\bar f_R)$ значений функции $\bar f_R$ по всем наборам $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle$ равна классу вычетов $\overline{N(R)}$ (по mod p) числа $N(R)$. Поэтому для доказательства теоремы Варнинга достаточно убедиться, что $S(\bar f_R) = \bar 0$.

Воспользовавшись Малой теоремой Ферма, представим функцию $\bar f_R$ многочленом. Для этого рассмотрим многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar 1 - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{p-1}$. Если $R(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n) \neq 0$, то по Малой теореме Ферма $R(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n)^{p-1} = \bar 1$ и $Q(\bar c_1, c_2, \ldots, c_n) = \bar 0$. Если $R(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n) = \bar 0$, то $R(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n)^{p-1} = \bar 0$ и $Q(\bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n) = \bar 1$. Поэтому $\bar f_R = Q$.

Многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является суммой одночленов: $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_l$.

Нам достаточно проверить, что суммы значений каждого из одночленов $q_1, q_2, \ldots, q_l$ по всем наборам $\langle \bar c_1, \bar c_2, \ldots, \bar c_n \rangle$ равны $\bar 0$. Тогда и сумма $S(\bar f_R) = S(Q)$ будет равна $\bar 0$, поскольку $S(Q) = S(q_1) + S(q_2) + \ldots + S(q_l)$.

Возьмем, например, одночлен $q_1 = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_t^{k_t}$. Степень многочлена Q равна $(p - 1)m$. Поэтому степень одночлена q_1 меньше $(p - 1)n$ (по условию теоремы $m < n$). Значит, $k_1 + k_2 + \ldots + k_t < (p - 1)n$. Из этого неравенства следует, что либо $t < n$, либо среди $k_1, k_2, \ldots, k_t$ найдется показатель k_i, для которого $0 < k_i < p - 1$. Равенство $S(q_1) = \bar 0$ следует теперь из результата, сформулированного в конце предыдущего раздела.

Теорема Вейля — Лэнга

Выше мы уже говорили, что если у диофантова уравнения есть решение, то у любого приведенного уравнения (по любому простому модулю p) тоже есть решение.

Утверждение: «Если у диофантова уравнения есть ненулевое решение, то у любого приведенного уравнения есть ненулевое решение», не верно. Например, уравнение

$$x^2+y^2-3xy-9=0$$

имеет ненулевое решение ($x=3$, $y=0$), но по модулю 3 приведенное уравнение

$$x^2+y^2=\bar{0}$$

таких решений не имеет.

Тем не менее ясно, что если у диофантова уравнения есть ненулевое решение, то для всех p, начиная с некоторого, у приведенного уравнения тоже есть ненулевое решение.

Обратное неверно: уравнение

$$x^2+y^2+z^2=\bar{0} \qquad (6)$$

по теореме Шевалле имеет ненулевое решение в любом F_p, а уравнение

$$x^2+y^2+z^2=0$$

ненулевых решений (не только в **Z**, но и в **R**) не имеет *).

Рассмотрим теперь снова диофантово уравнение

$$R(x_1, x_2, \dots, x_n)=0,$$

коэффициенты которого — целые числа. Интересно знать, каково множество тех простых p, для которых существует решение по mod p. Ответ на этот вопрос дает замечательная

Теорема Вейля — Лэнга. *Если многочлен $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ абсолютно неприводим, то уравнение $R(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ имеет решения по простому модулю p для всех p, начиная с некоторого.*

Под *абсолютно неприводимым многочленом* мы будем понимать такой многочлен, который нельзя разложить в произведение двух многочленов по модулю p для всех p, начиная с некоторого.

Условие абсолютной неприводимости в формулировке теоремы существенно: из задачи 2 к статье «Сравнения по простому модулю» следует, что уравнение $x_1^2+x_2^2=0$ разрешимо при $p=4k+1$ и неразрешимо при $p=4k+3$. Простых чисел вида $p=4k+3$ бесконечно много, поэтому заключение теоремы для многочлена $x_1^2+x_2^2$ не верно. Разумеется, для него неверна и посылка: из разрешимости уравнения $x_1^2+x_2^2=0$ по модулю $p=4k+1$ (а простых чисел этого вида тоже бесконечно много) следует, что оно разложимо на множители по этому модулю.

Можно доказать, что «подавляющее большинство» многочленов абсолютно неприводимы.

В отличие от теоремы Варнинга, доказательство теоремы Вейля — Лэнга в общем случае очень трудно.

Рассмотрим один очень частный случай уравнения $R(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$: когда многочлен R — первой степени: $R(x_1, x_2, \dots, x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n+b$ (хотя бы один из коэффициентов a_i предполагается отличным от 0). Легко видеть, что в этом случае $N(R)=p^{n-1}$. Действительно, можно считать (переставив, если нужно, неизвестные), что $a_1\neq\bar{0}$; тогда, придавая $x_2, \dots, x_n$ всевозможные значения из F_p и положив $x_1=-a_1^{-1}(a_2x_2+\dots+a_nx_n+b)$, мы получим решение.

Теорему Вейля — Лэнга можно уточнить: при больших p

$$|N(R)-p^{n-1}|<c\cdot p^{\frac{n-1}{2}},$$

где c — некоторое число, зависящее от многочлена R.

Первоначальное доказательство Вейля основано на открытых им глубоких связях между, казалось бы, далекими вопросами: дискретной, и даже конечной, задачей о числе решений уравнения $R(x_1, x_2, \dots, x_n)=0$ по простому модулю и геометрическим строением непрерывного множества комплексных решений этого уравнения, то есть тех наборов комплексных чисел $\langle d_1, d_2, \dots, d_n\rangle$, для которых $R(d_1, d_2, \dots, d_n)=0$.

Недавно элементарное (не использующее никаких косвенных методов), но тем не менее весьма сложное доказательство теоремы Вейля — Лэнга дал свердловский математик С. А. Степанов.

---

*) Это не очень интересный пример: читатель может проверить, что по модулю 8 уравнение (6) ненулевых решений не имеет. В упомянутой статье М. И. Башмакова указан пример диофантова уравнения ($3x^3+4y^3+5z^3=0$), не имеющего ненулевых решений, для которого приведенное уравнение имеет ненулевое решение по любому модулю.

В. Кравцов, И. Сербин

Уголковые отражатели

Уголковые отражатели — это устройства, которые применяются для отражения радиолокационных или оптических лучей в направлении, противоположном первоначальному. Еще в недавнем прошлом оптические уголковые отражатели использовались только как скромное дорожное предупредительное устройство — на велосипедах, автомобилях, поездах, на дорожных указателях. Назывались они катафотами *). В настоящее время уголковые отражатели находят очень широкое применение: они используются и в навигационной радиолокации, и в метеорологии, и в космических исследованиях.

Как же «работает» уголковый отражатель?

Устройство его очень просто. На рисунке 1 приведены различные типы уголковых отражателей. Это может быть треугольная призма, две боковые грани которой взаимно перпендикулярны (рис. 1, *а*). Эти грани ($OAA'O'$ и $OBB'O'$) с внутренних сторон покрыты тонким слоем материала, хорошо отражающего свет. Уголковый отражатель может представлять собой четырехгранную пирамиду (рис. 1, *б*), три взаимно перпендикулярные грани которой (AOB, BOC и AOC) посеребрены. Радиолокационные уголковые отражатели — это три взаимно перпендикулярные плоские пластины (рис. 1, *в*), изготовленные из материала, хорошо отражающего радиоволны.

Как видно, уголковый отражатель можно схематично представить как систему взаимно перпендикулярных плоских зеркал. Чтобы лучше понять принцип действия отражателя, рассмотрим, как изменяет ход световых лучей система из двух таких зеркал ($З_1$ и $З_2$ на рисунке 2).

Луч S, падающий на зеркало $З_1$ под углом φ_1, отражается от него (в точке A), попадает на зеркало $З_2$ под углом φ_2 и отражается от него (в точке B). Легко видеть, что в результате отражений луч «поворачивается» на угол $2\varphi_1 + 2\varphi_2 = 180°$, то есть луч отраженный параллелен лучу падающему и направлен в противоположную сторону.

Роль двух таких зеркал выполняют в отражателе-призме (рис. 1, *а*) грани $OAA'O'$ и $OBB'O'$. Луч света, падающий на грань-«гипотенузу» $BAA'B'$, после отражений в призме выходит строго в обратном направлении. Отметим, что преломление луча на грани-гипотенузе не сказывается

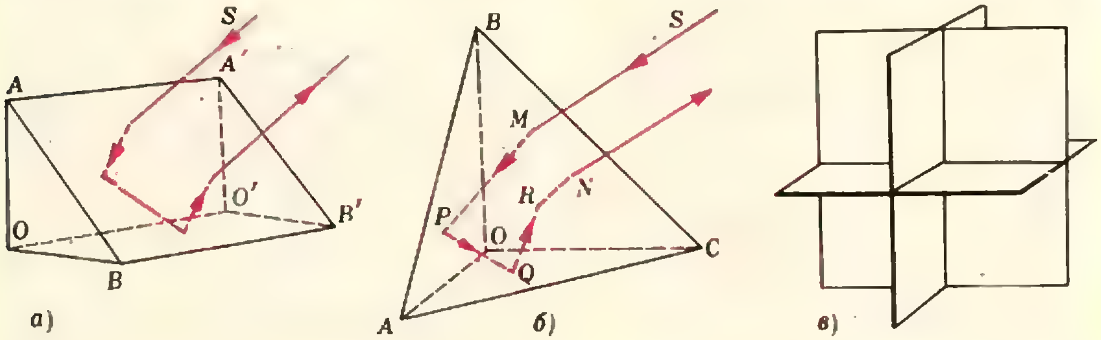


Рис. 1.

---

*) «Катафот» (греч.) — отражатель света назад к источнику.

на «оборачивающем» действии отражателя (рис. 3). (Очевидно, что если луч падающий и луч отраженный параллельны друг другу по одну сторону от преломляющей грани $BAA'B'$ — внутри угла, то они параллельны и по другую ее сторону.)

Однако отражатель, состоящий из двух взаимно перпендикулярных зеркал, «обращает» только те лучи, которые лежат в плоскости, перпендикулярной к ребру двугранного угла, образованного зеркалами. Этого недостатка лишен отражатель, состоящий из трех взаимно перпендикулярных зеркал. Покажем, что всякий луч, попавший на такой отражатель и испытавший последовательно отражения от всех трех зеркал, изменит свое направление на прямо противоположное.

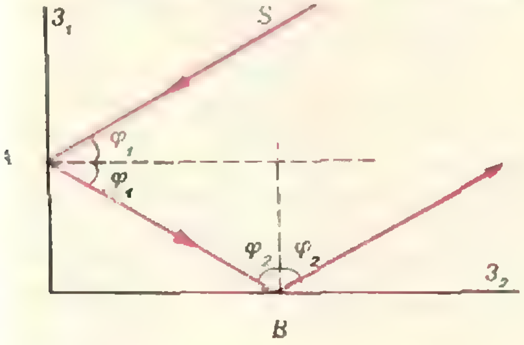


Рис. 2.

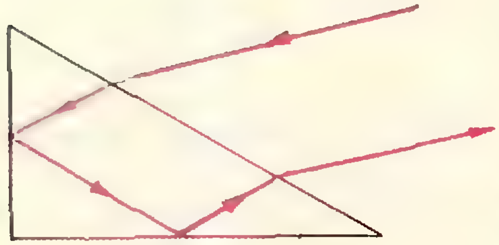


Рис. 3.

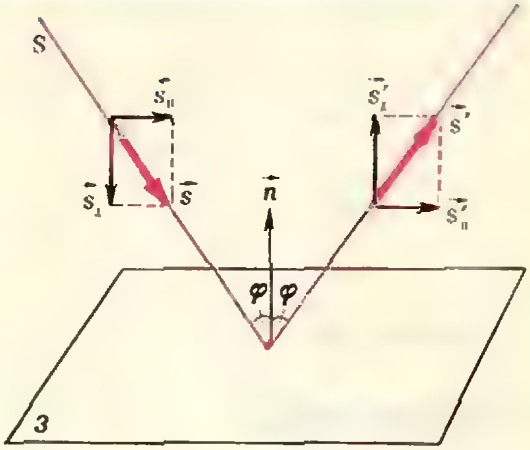


Рис. 4.

Для этого предварительно рассмотрим, как изменяется единичный вектор, определяющий направление луча, при отражении луча от плоского зеркала. На рисунке 4 $З$ — плоское зеркало, S — луч, падающий на зеркало под углом φ, $\vec{s}$ — единичный вектор, определяющий направление падающего луча, $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости зеркала, $\vec{s}'$ — единичный вектор, определяющий направление отраженного луча (векторы $\vec{s}$, $\vec{n}$ и $\vec{s}'$ лежат в одной плоскости). Представим каждый из векторов $\vec{s}$ и $\vec{s}'$ в виде суммы двух векторов (будем называть их «составляющими»):

$$\vec{s} = \vec{s}_{\parallel} + \vec{s}_{\perp}, \quad \vec{s}' = \vec{s}'_{\parallel} + \vec{s}'_{\perp},$$

где составляющие $\vec{s}_{\parallel}$ и $\vec{s}'_{\parallel}$ параллельны плоскости $З$, а $\vec{s}_{\perp}$ и $\vec{s}'_{\perp}$ перпендикулярны к этой плоскости. Из закона отражения света следует, что $\vec{s}'_{\parallel} = \vec{s}_{\parallel}$, а $\vec{s}'_{\perp} = -\vec{s}_{\perp}$, то есть при отражении луча составляющая вектора $\vec{s}$, параллельная плоскости зеркала, не меняется, а составляющая, перпендикулярная к этой плоскости, меняет знак на противоположный.

Теперь рассмотрим три взаимно перпендикулярных плоских зеркала — $З_1$, $З_2$ и $З_3$ на рисунке 5. Пусть S — луч, падающий на систему этих зеркал; $\vec{s}$ — единичный вектор в направлении луча S. Представим $\vec{s}$ как сумму трех составляющих $\vec{s}_x$, $\vec{s}_y$ и $\vec{s}_z$, параллельных осям X, Y и Z соответственно. После первого отражения — отражения от зеркала $З_1$ — луч идет по направлению, определяемому единичным вектором $\vec{s}'$. Составляющие вектора $\vec{s}'$-это — $\vec{s}_x, \vec{s}_y, \vec{s}_z$, (составляющая $\vec{s}_x$ вектора $\vec{s}$, перпендикулярная к плоскости зеркала $З_1$, меняет знак на противопо-

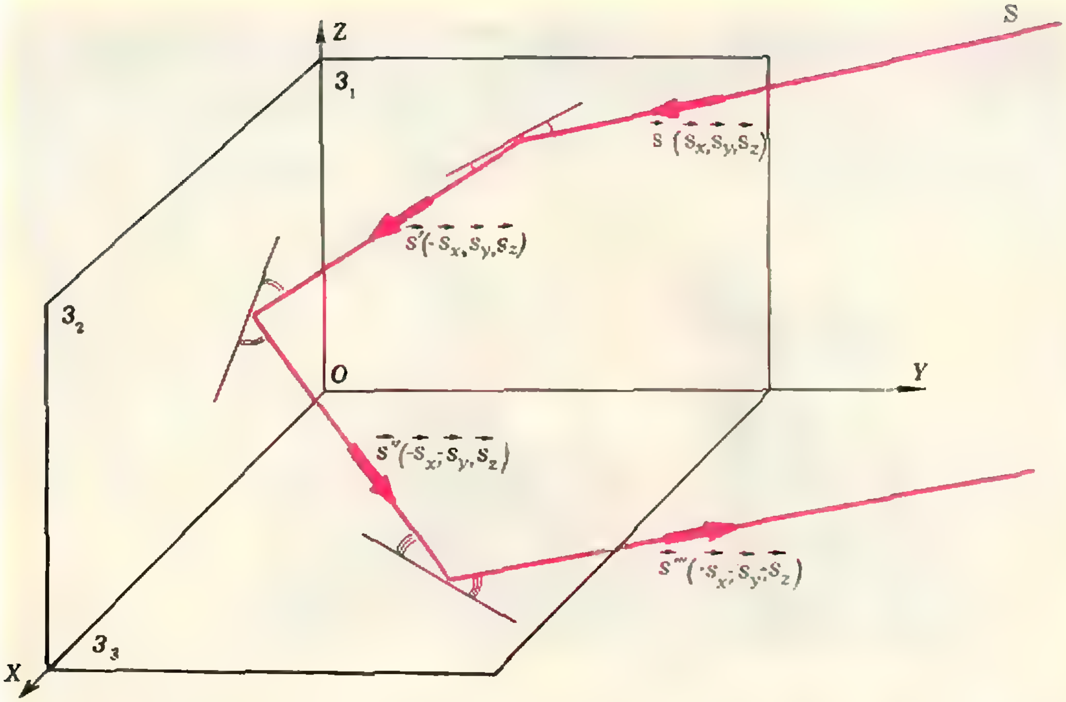

Z
З₁
З₂
З₃
O
Y
X
S
$\vec{s}(\vec{s}_x, \vec{s}_y, \vec{s}_z)$
$\vec{s}'(-\vec{s}_x, \vec{s}_y, \vec{s}_z)$
$\vec{s}''(-\vec{s}_x, -\vec{s}_y, \vec{s}_z)$
$\vec{s}'''(-\vec{s}_x, -\vec{s}_y, -\vec{s}_z)$

Рис. 5.

ложный, а составляющие $\vec{s}_y$ и $\vec{s}_z$, параллельные этой плоскости, остаются неизменными). Проследив последовательные отражения луча от зеркал $З_2$ и $З_3$, мы убедимся, что после третьего отражения (от $З_3$) луч идет по направлению, задаваемому единичным вектором $\vec{s}'''$, составляющие которого равны соответственно $-\vec{s}_x, -\vec{s}_y, -\vec{s}_z$. Значит, любой луч, попадающий на систему трех взаимно перпендикулярных зеркал, отражается этой системой в направлении, противоположном первоначальному.

Такую систему зеркал образуют три взаимно перпендикулярные посеребренные грани уголкового отражателя-пирамиды (см. рис. 1, *б*). Наличие «закрывающей» угол грани *ABC* не нарушает действия отражающих граней *AOB*, *BOC* и *AOC*.

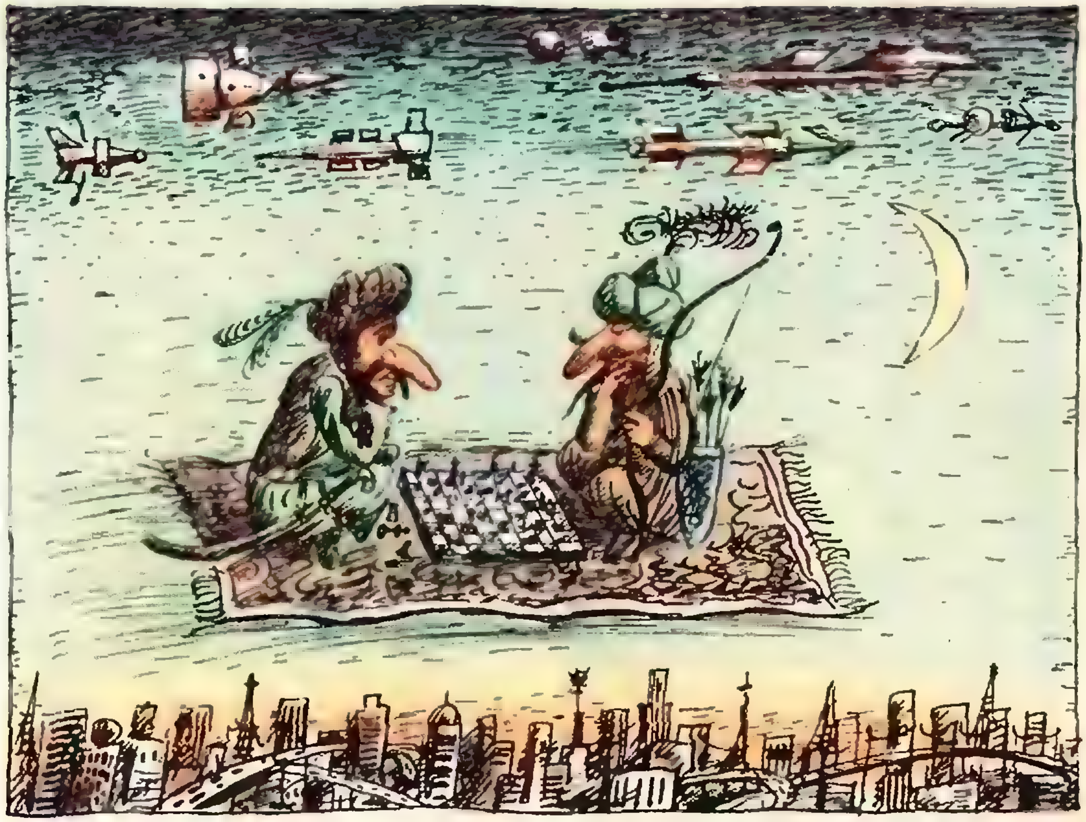
Мы уже говорили о том, какое широкое применение находят уголковые отражатели. Самые «старые» из них, катафоты, можно представить себе как набор отражателей-призм, скомпанованных таким образом, что ребра двугранных углов, образованных отражающими гранями, лежат в одной плоскости и повернуты друг относительно друга под всевозможными углами. Каждая такая призма отражает «назад» лучи, перпендикулярные к ребру двугранного угла. Оттого катафот и кажется светящимся.

В повседневной практике уголковые отражатели типа изображенного на рисунке 1, *в* используются в навигационной радиолокации. Например, бакены и буйки, снабженные такими отражателями, становятся более заметными для радиолокаторов. С помощью отражателей, прикрепленных к метеорологическим шарам-зондам, радиолокационным методом определяются скорость и направление ветра на большой высоте.

Уникальны по своему применению оптические уголковые отражатели в космических исследованиях. Помещенный на искусственный спутник или на космический корабль отражатель позволяет с очень большой точностью определять расстояния до этих объектов. При этом в качестве луча-локатора используется луч лазера.

В 1969 году уголковый отражатель был доставлен экипажем американского космического корабля Аполлон-11 на Луну. Через год на Луне появился второй уголковый отражатель — установленный на советском автоматическом самоходном аппарате

(Окончание см. на с. 46)



Е. Гик

Существует ли бесконечная шахматная партия?

Новые правила проведения матча на первенство мира по шахматам в принципе допускают ситуацию, при которой матч может продолжаться до бесконечности или до полного истощения одного или обоих участников.

А может ли сама шахматная партия длиться бесконечно долго?

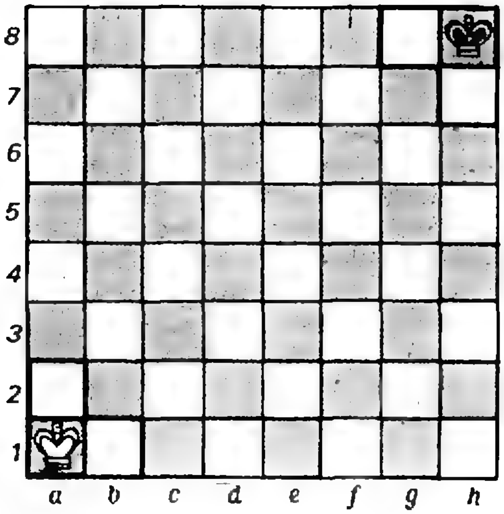
Если на доске возникла матовая позиция, то ясно, что сколь долго бы ни длилась данная партия до наступления этой позиции, она окончится за конечное число ходов. Таким образом, результативная партия не может быть бесконечной. В ничейной же позиции партия могла бы продолжиться бесконечно, если бы в правилах шахмат не было специальных оговорок.

Напомним известное правило о ничьих в шахматной партии: если на доске три раза или более возникает *одна и та же позиция*, то в этот момент вы имеете право потребовать ничью. Говоря, что позиция *одна и та же*, мы имеем в виду, что одни и те же фигуры занимают одни и те же поля. При этом очередь хода должна быть за одной и той же стороной и внутренние возможности позиции тоже должны быть одинаковыми (это касается рокировки и взятия пешек «на проходе»).

Будем считать, что при троекратном повторении позиции *ничья наступает автоматически*. Тогда из конечности числа шахматных позиций следует, что продолжительность шахматной партии ограничена сверху. Обозначим число различных позиций на доске через A.

Упражнение 1. *Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для A.*

Ясно, что тогда ни одна партия не может продолжаться более чем $3A$ ходов (под ходом мы понимаем два



полухода — белых и черных). Действительно, за это время по крайней мере одна позиция повторится трижды (при очереди хода у одной и той же стороны), и, если партия не закончилась раньше, то в игру вмешается судья и зафиксирует ничью. Следовательно, при нашем предположении (которого нет в шахматном кодексе!), правило о троекратном повторении позиции исключает бесконечную партию.

Предположим теперь, что ничья наступает при *троекратном повторении* не одной и той же позиции, а *одной и той же серии ходов подряд*. Покажем, что при этом условии может существовать бесконечная шахматная партия, т. е. существует такая партия, в которой никакая серия ходов не повторяется три раза подряд.

Рассмотрим простейший случай, когда на доске перемещаются только короли. Более того, каждому из них разрешим маневрировать всего на трех полях! Пусть белый король перемещается в левом нижнем углу — по полям a1, a2, b1, а черный в правом верхнем — по полям h8, h7, g8 и других фигур на доске нет. Обозначим ход каждого короля по часовой стрелке через 1, а против часовой стрелки через 2. *Если начальное положение королей зафиксировано, то всякому их передвижению соответствует определенная последовательность из единиц и двоек. Верно и обратное: любая последовательность из единиц и двоек задает некоторое передвижение королей*. Если, например, короли стоят на угловых полях (белый — на a1, черный — на h8), то последовательности 12 21 21 12 21 12 соответствуют такие ходы: 1. Кр a1— a2 (первый член последовательности 1 — белый король идет по часовой стрелке) 1 ... Кр h8 — g8 (второй член 2 — черный король идет против часовой стрелки) 2. Кр a2 — a1 Кр g8 — h8 3. Кр a1 — b1 Кр h8 — h7. 4. Кр b1 — a1 Кр h7 — h8 5. Кр a1 — b1 Кр h8 — h7 6. Кр b1 — a1 Кр h7 — h8.

Таким образом, на языке математики наша задача может быть сформулирована так: *доказать, что существует такая бесконечная последовательность, состоящая из цифр 1 и 2, в которой нет трех одинаковых рядом стоящих групп цифр*. В книге А. М. и И. М. Ягломов *) доказано, что существуют сколь угодно длинные последовательности, состоящие из цифр 1 и 2, в которых нет одинаковых рядом стоящих трех цифр.

В «Кванте» была напечатана статья Г. Гуревича **), в которой было доказано, что существуют бесконечные последовательности, состоящие из цифр 1 и 2, в которых нет одинаковых рядом стоящих трех цифр. Следовательно, существует и бесконечная партия, в которой ни одна серия ходов не встречается три раза подряд.

Укажем теперь правила шахматного кодекса, которые исключают существование бесконечной партии.

Это, во-первых, «правило пятидесяти ходов»: если в течение 50 ходов подряд на доске не была взята ни одна фигура и ни одна пешка не сделала хода, то партия считается законченной вничью. Во-вторых, партия считается ничейной в том случае, если на доске возникла позиция, в которой выигрыш невозможен (король против короля, король против короля и легкой фигуры, король и слон против короля и слона «того же цвета»).

---

*) А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., Гостехиздат, 1954. Задача 123б).

**) «Квант», 1975, № 9.

Пользуясь этими правилами, можно оценить число ходов самой длинной шахматной партии. Произведем соответствующие расчеты. Шестнадцать пешек в процессе игры могут сделать максимум $16 \times 6 = 96$ ходов. Пусть все эти ходы сделаны — тогда пешки взяли по крайней мере 8 фигур (если пешки, стоящие на одной вертикали, проходят «сквозь друг друга», то осуществляется хотя бы одно взятие). Если было произведено ровно 8 взятий, то еще могут быть взяты $2 \times 7 - 8 = 6$ оставшихся фигур и $2 \times 8 = 16$ превращенных фигур, итого $6 + 16 = 22$. Таким образом, общее число взятий и движений пешек не более $96 + 22 = 118$.

Упражнение 2. *Докажите, что если число движений пешек меньше 96, то общее число движений и взятий может только уменьшиться.*

Поскольку между каждым продвижением пешки или взятием может быть сделано не более 50 ходов (точнее говоря, на 50-м ходу пешка должна продвинуться или фигура должна быть взята), а после последнего взятия партия сразу прекращается (на доске остались одни короли!), то общая продолжительность партии не более $50 \times 118 = 5900$ ходов.

Более тонкий (чисто шахматный!) анализ показывает, что самая длинная шахматная партия продолжается на два хода меньше — 5898.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М496—М505 и Ф493—Ф507 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В большинстве присланных нам писем задача **М500а)** решалась правильно. Остальные задачи решили: *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) 6, 9, 0б), в), 1, 3; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) 9; *А. Агаев* (С. Покровка АзССР) 7, 9, 0б); *Д. Агаев* (с. Зарнава АзССР) 9; *С. Азнабаев* (Новотроицк) 7, 9, 0б), в), 2; *К. Аминов* (Казань) 6, 9, 0б), в); *И. Артюшкин* (Пенза) 6, 8, 9; *К. Архангельский* (Киев) 7, 9, 0б), в); *Б. Баасандорж* (МНР) 9; *А. Бадалян* (пос. Берд Арм. ССР) 8, 9, 0б), в), 1—3, 5а); *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 6, 9, 2; *Ю. Балаян* (Баку) 7, 9, 0б); *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) 7, 8, 0б), 3, 5а); *В. Батырев* (Москва) 6—9, 0б), 2, 4а), 4б), 5а), 5б); *Б. Бегун* (Москва) 6, 9; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) 9, 0б), в), 2; *А. Белов* (Ленинград) 6—9; *Л. Беляев* (Харьков) 6; *Г. Бокк* (Воронеж) 6, 7, 9, 0б), г), 1—3, 5а); *В. Болотников* (Харьков) 7, 9, 1, 2, 5а); *А. Бондарев* (Харьков), 6, 9, 0б); *А. Боричев* (Ленинград) 6, 3, 5а); *И. Бородин* (Соликамск) 9, 0б), в); *О. Бохонов* (Кобрин) 6, 7, 9, 3; *А. Бржезинска* (ПНР) 3; *А. Броварник* (Кривой Рог) 9; *С. Буга* (Москва) 6, 8, 9, 0б); *А. Васильев* (Саратов) 6, 9; *С. Васильев* (Калинин) 2, 3; *С. Васильев* (Саратов) 9, 0б); *В. Виноградов* (Казань) 6, 9, 2, 5а); *И. Власов* (Мичуринск) 9; *Д. Володько* (Долгопрудный) 9, 0б), в); *М. Гайсинский* (Ташкент) 9; *В. Галактионов* (Пенза) 6; *А. Галенко* (Пенза) 6, 3, 5а); *А. Гильман* (Москва) 6—9, 0б), в), 1—3, 4а), 5а); *Ю. Глухов* (Щелково) 6, 8, 9, 1; *М. Гоганов* (Караганда) 6, 9, 2; *А. Головин* (Москва) 9; *О. Головинская* (Киев) 5а); *О. Гордиенко* (Павлодар) 6, 9, 0б), в); *М. Горелов* (Белорецк) 1—3, 4а), 5а); *Е. Горелова* (Саратов) 2; *Е. Горшкова* (Пермь) 0б), в); *Г. Грабарник* (Ташкент) 6, 7, 9, 0б), в), 1, 2, 5а); *Н. Гринберг* (Киев) 6, 9; *В. Грищенко* (Павлодар) 9; *В. Губа* (Вологда) 6—9, 0б), в), 1—3, 4а)—в), 5а); *С. Гузов* (Львов) 1; *А. Даценко* (Харьков) 6, 9, 0в); *В. Джалоян* (с. Чншан Арм. ССР) 9, 0б), в), 1—3; *В. Цимантман* (Баку) 6, 9, 1—3, 5а); *О. Дмитриев* (Саратов) 6, 9, 0б); *А. Дороговцев* (Киев) 6, 7; *В. Дубинин* (Ворошиловград) 2; *И. Елишевич* (Чернигов) 6, 9, 1; *Н. Жернаков* (Золотоноша Черкасской обл.) 6, 7, 9, 2, 3, 5а); *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского края) 6; *С. Забаринов* (д. Харчн Ивановской обл.) 2; *Е. Задумова* (Саратов) 2; *В. Заев* (пос. Печенга Мурманской обл.) 6, 8, 2, 3; *И. Зверович* (Минск) 9; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 6, 9, 0б), в); *А. Золотарев* (Николаев) 6; *М. Ибрагимов* (Шуша) 6, 9, 3; *О. Ижболдин* (Ленинград) 6—9; *Р. Измайлов* (Баку) 8—3, 5г); *А. Ильин* (Фруизе) 9, 0б); *Ф. Кабды аиров* (Алма-Ата) 7, 9, 0б), 1, 2; *С. Калашников* (Рязань) 9; *А. Каплан* (Сумгаит) 6, 7, 9, 1, 3, 5а); *Г. Карагулян* (Ереван) 7, 9, 1, 2, 4а)—в), 5а); *А. Кац* (Ташкент) 9; *Г. Квернадзе* (Тбилиси) 9; *А. Келарев*

(*Продолжение см. на с. 36*)

В. Мильман

Почему сгоревшая спичка изогнута?

Известно, что играть со спичками опасно, — это может привести к пожару. Но давайте все-таки, соблюдая самые тщательные меры предосторожности, проведем серию простых опытов с горящими спичками. Мы предлагаем вам понаблюдать, как меняется форма спички при горении.

Прежде чем приступить к опытам, обеспечим их полную безопасность. Спички нужно будет держать пинцетом над тазом с водой, который должен стоять на металлическом листе. Выполнив соответствующие приготовления, приступим к опытам.

Опыт 1. Держим зажженную спичку горизонтально. Пламя передвигается по спичке, и по мере его перемещения сгоревшая часть спички поднимается. У разных спичек высота этого подъема различна. Некоторые спички при этом закручиваются (рис. 1). Важно отметить, что «загибается» уже остывший (обгоревший) участок спички.

Опыт 2. Зажженную спичку держим в пламени плиты. Обгоревшая спичка почти не загибается.

Опыт 3. Посмотрим, как горят разные по толщине спички. Утолщенные спички загибаются больше обычных, а лучинки, отколотые от спички, — меньше.

Посмотрим еще раз внимательно на горящую спичку, расположенную горизонтально. Пламя медленно продвигается вдоль спички; при этом древесина, находящаяся в пламени, еще ровная (не загибается). Цвет этой части спички — черный. Значит, температура этого участка сравнительно невелика — не выше $500 \div 600^\circ$C. Сразу за пламенем движется узкий (≈ 2 мм) красный поясок. Это — зона с максимальной температурой ($\sim 700 \div 750^\circ$C), в которой только что закончилось горение. Если посмотреть на этот поясок сбоку, «в профиль», то видно, что верхняя его часть раскалена докрасна, а нижняя — черного цвета. Значит, верхняя часть спички начинает остывать, имея более высокую температуру, и поэтому дольше сохраняет красный цвет. Причина такого неравномерного горения — конвекционные потоки воздуха.

Может быть, именно этим — разностью температур верхней и нижней частей спички — и объясняется тот факт, что горящая спичка загибается? Причем загибается так, что выпуклость всегда направлена в сторону более низкой (при горении) температуры. Это предположение подтверждается такими опытами: если осторожно (так, чтобы она не погасла) дуть сверху на горящую спичку, то после сгорания получается почти ровный уголек — мы сдуваем пламя вниз, температуры верхней и нижней частей выравниваются; если к горящей спичке прикоснуться снизу холодным металлическим предметом (например, гвоздем) и подержать его немного (так, чтобы спичка не погасла), то спичка будет загибаться сильнее, чем при обычном горении.

Итак, качественно наше предположение о причинах, вызывающих

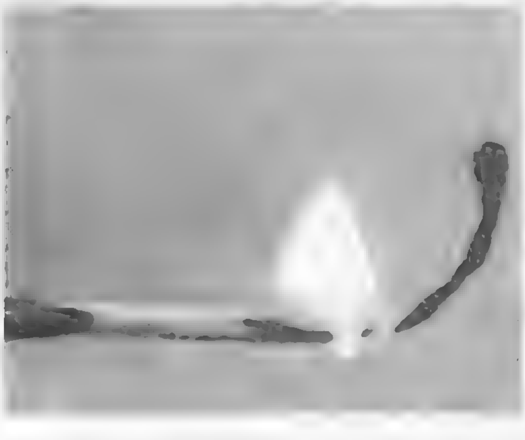


Рис. 1.

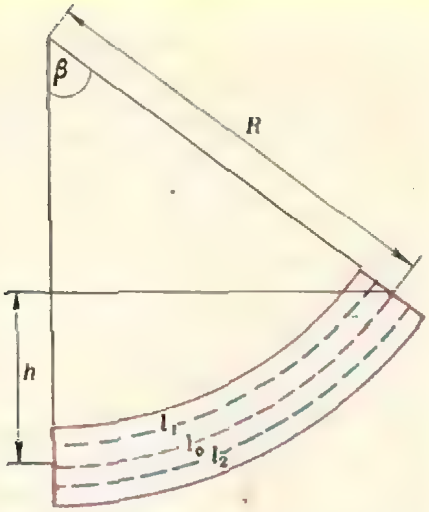


Рис. 2.

загибание спички, как будто оправдывается. Попробуем произвести количественную оценку. Для этого воспользуемся следующей моделью.

Условно разделим спичку горизонтальной плоскостью на две части. Во время горения температура верхней части выше, чем нижней, но их длины одинаковы. При остывании верхняя, более нагретая часть сжимается (укорачивается) сильнее, чем нижняя, так как разность температур этой части спички и окружающего воздуха больше. Поэтому длина верхней части остывшей спички будет меньше, чем длина нижней ее части, и спичка изогнется выпуклостью вниз (в сторону более холодной при горении части). Такая модель напоминает биметаллическую пластинку — пластинку из двух сваренных металлов с разными коэффициентами теплового расширения. Основываясь на этой модели, оценим разность температур верхней и нижней частей спички в области красного пояска.

Пусть l_0 — длина спички, d — ее толщина. Для приближенной оценки можно считать, что в результате горения эти размеры почти не меняются. Однако длины верхней и нижней частей сгоревшей изогнутой спички не одинаковы. Разность длин средних сечений этих частей равна

$$l_2 - l_1 = l_0\alpha\Delta t, \qquad (1)$$

где α — коэффициент теплового расширения древесины, Δt — разность максимальных температур верхней и нижней частей спички;

$$l_1 = \beta\left(R - \frac{d}{4}\right), \quad l_2 = \beta\left(R + \frac{d}{4}\right),$$

$$l_2 - l_1 = \frac{\beta d}{2} = \frac{l_0}{R}\,\frac{d}{2} \qquad (2)$$

(см. рис. 2). Сравнивая (1) и (2), получаем выражение для R:

$$R = \frac{d}{2\alpha\Delta t}. \qquad (3)$$

Измерить величину R нелегко, но через R можно выразить легко измеряемую величину h (см. рис. 2):

$$h = R(1 - \cos\beta) = R\left(1 - \cos\frac{l_0}{R}\right).$$

Для нашей оценки с достаточно хорошим приближением можно считать, что $1 - \cos\beta = \frac{\beta^2}{2}$ *), и $h = \frac{l_0^2}{2R}$. Подставив в это выражение значение R (см. (3)), получим

$$h = \frac{l_0^2\alpha\Delta t}{d}.$$

Отсюда находим Δt:

$$\Delta t = \frac{h}{l_0^2}\,\frac{d}{\alpha}. \qquad (4)$$

Итак, чтобы оценить величину Δt, нам нужно экспериментально найти отношение h/l_0^2. Результаты измерений показывают, что с достаточно хорошим приближением можно считать

$$h/l_0^2 = \text{const} \approx 10^{-2}.$$

Принимая $d = 1$ мм, $\alpha = (5 \div 10) \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, по формуле (4) находим $\Delta t = (100 \div 200)$ (град).

Измерения Δt, сделанные с помощью термопары, дали значения $t_{\text{верхн}} = (730 \pm 10)$°C, $t_{\text{нижн}} = (650 \pm 10)$°C и $\Delta t = (80 \pm 20)$°C. Как видно, сделанная нами теоретическая оценка неплохо согласуется с этими данными. Так что можно считать, что рассмотренная модель, которая никоим образом не учитывает химической природы процесса горения, верна.

Возможно, наблюдая за горящей спичкой, вы предложите какое-нибудь другое объяснение причин ее загибания. Тогда постарайтесь обосновать и проверить свои предположения. И проводя свои эксперименты, помните: НЕОБХОДИМО СОБЛЮДАТЬ ОСТОРОЖНОСТЬ!

---

*) Погрешность формулы не превышает 1% при $\beta < 38°$ и 10% — при $\beta < 60°$.

Г. Гальперин, А. Кушниренко

Спутники и задача уплощения

Большинство задач, с которыми школьники сталкиваются на олимпиадах, конкурсах и страницах математических книг и журналов — это задачи так называемого олимпиадного типа: их решение, как правило, основывается на одной-единственной идее. В работе профессионала-математика такие задачи возникают достаточно часто, но столь же часто математику приходится иметь дело с задачами, в решении которых нужно использовать несколько рассуждений совершенно разного типа.

В этой статье мы хотим познакомить читателя с решением одной такой неолимпиадной задачи.

1. Уплощение и ориентированный объем

Иногда три небесных тела оказываются на одной прямой. Если это Солнце, Земля и Луна, то астрономы называют такое явление *затмением*, а если три произвольных тела — то *сизигией*.

Затмения, сизигии и другие редкие расположения небесных тел издавна интересуют астрономов и математиков. В этой статье мы будем заниматься одним из таких редких явлений — попаданием четырех небесных тел в одну плоскость; назовем это явление *уплощением*. Точнее говоря, мы будем решать задачу об уплощении в космической системе, состоящей из планеты и трех ее спутников.

Задача. *Вокруг планеты O по трем различным круговым орбитам с центром O равномерно вращаются три ее спутника P_1, P_2 и P_3 с угловыми скоростями ω_1, ω_2 и ω_3. Обязательно ли найдется момент времени, в который произойдет уплощение?*

Оказывается, что при некоторых значениях угловых скоростей момент уплощения рано или поздно наступает при любых начальных положениях спутников, а при некоторых других угловых скоростях удается подобрать такие начальные положения спутников, что момент уплощения не наступает никогда.

Поставленный выше вопрос для трех конкретных значений угловых скоростей:

а) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$;
б) $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$;
в) $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$

составил содержание задачи **М495** из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 3).

Приступая к изучению уплощений, мы прежде всего должны научиться описывать уплощение алгебраически. Возникает

Вопрос 1. *Как, зная координаты трех точек в пространстве, определить, лежат ли эти точки в плоскости, проходящей через начало координат?*

Рассмотрим сначала вопрос полегче.

Вопрос 2. *Как, зная координаты двух точек на плоскости, определить, лежат ли эти точки на прямой, проходящей через начало координат?*

Ответ. Обозначим координаты данных точек M_1 и M_2 через $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$. Мы утверждаем, что *прямая M_1M_2 тогда и только тогда проходит через начало координат, когда выражение $x_1y_2 - y_1x_2$ обращается в нуль.*

Действительно, если $x_1y_2 = y_1x_2$, то при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ можно написать $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$, т. е. точки M_1, M_2 расположены на прямой $y = kx$.

Обратно: если M_1 и M_2 лежат на прямой $y = kx$ и $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$ и $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$. (Случаи $x_1 = x_2 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ разберите сами.)

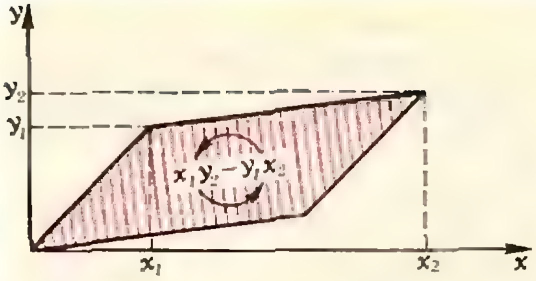


Рис. 1.

Упражнение. Докажите, что число $|x_1y_2-y_1x_2|$ равно площади параллелограмма со сторонами OM_1 и OM_2.

Это упражнение поясняет, почему выражение $x_1y_2-x_2y_1$ называют *ориентированной площадью параллелограмма* (рис. 1).

Вернемся к вопросу 1.

Утверждение 1. *Три точки $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $P_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ пространства расположены в плоскости, проходящей через начало координат, тогда и только тогда, когда выражение*

$$z_1(x_2y_3-x_3y_2)-z_2(x_1y_3-x_3y_1)+$$
$$+z_3(x_1y_2-x_2y_1) \qquad (*)$$

обращается в нуль.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге У. Сойера «Прелюдия к математике»*). Геометрический же смысл его весьма прост: выражение (*) есть так называемый *ориентированный объем параллелепипеда*, построенного на ребрах OP_1, OP_2, OP_3, где O — начало координат. (Модуль ориентированного объема равен обычному объему.)

Из утверждения 1 мы получаем, что *уплощение точек O (0; 0; 0), $P_1(x_1;y_1;z_1)$, $P_2(x_2;y_2;z_2)$ и $P_3(x_3;y_3;z_3)$ происходит тогда и только тогда, когда выражение (*) обращается в нуль.*

Подготовительная работа проведена: мы можем приступать к изучению случаев а)—в).

2. Простейший случай: $\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$

Положение спутника P_1 в момент времени t обозначим через $P_1(t)$; координаты точки $P_1(t)$ обозначим через $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$. Аналогично введем точки $P_2(t)$, $P_3(t)$ и их координаты.

Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OP_1}(t)$, $\overrightarrow{OP_2}(t)$, $\overrightarrow{OP_3}(t)$, обозначим через $V(t)$. Мы получим явное выражение для $V(t)$, если заменим в выражении (*) x_1 на $x_1(t)$, x_2 на $x_2(t)$ и т. д.:

$$\begin{aligned} V(t) = {} & z_1(t)\,[x_2(t)\,y_3(t) - \\ & - x_3(t)\,y_2(t)] - \\ & - z_2(t)\,[x_1(t)\,y_3(t) - \\ & - x_3(t)\,y_1(t)] + \\ & + z_3(t)\,[x_1(t)\,y_2(t) - \\ & - x_2(t)\,y_1(t)]. \end{aligned} \qquad (**)$$

Точка $P_1(t)$ совершает равномерное круговое движение вокруг точки O с угловой скоростью $\omega_1=1$. Поэтому при любом t точки $P_1(t)$ и $P_1(t+\pi)$ лежат в противоположных концах некоторого диаметра орбиты, т. е. $\overrightarrow{OP_1}(t+\pi)=-\overrightarrow{OP_1}(t)$, или

$$x_1(t+\pi)=-x_1(t),$$
$$y_1(t+\pi)=-y_1(t),$$
$$z_1(t+\pi)=-z_1(t).$$

То же самое справедливо и для остальных двух точек ($\omega_2=\omega_3=1$). Отсюда и из формулы (**) мы получаем, что

$$V(t+\pi)=-V(t).$$

Про функцию $V(t)$ нам известно довольно мало, однако все же известно, что это — непрерывная функция. Следовательно, *между моментами t и $t+\pi$, в которые знаки функции V разные, найдется хотя бы один момент t, в который $V(t)=0$.* В этот самый момент и происходит уплощение.

Замечание. Фраза, выделенная выше курсивом, использует очень важную теорему анализа: *если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция V принимает в точках a и b значения разных знаков, то в некоторой точке отрезка $[a;\ b]$ функция V обращается в нуль.*

3. Случай $\omega_1=\omega_2=1$, $\omega_3=2$

Проведем через точки O, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ плоскость $\pi(t)$. Она пересечет орбиту спутника P_3 в двух точках — концах диаметра $D(t)$ (рис. 2). (То, что мы сделали, разумеется,

---

*) М., «Просвещение», 1965.

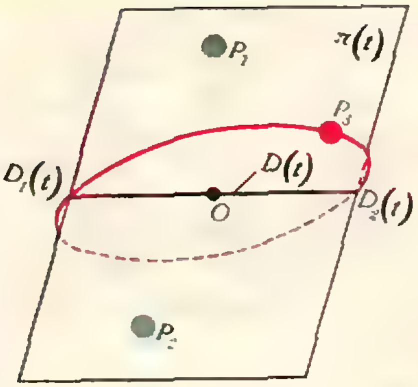


Рис. 2.

имеет смысл только тогда, когда точки O, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ в момент времени t не находятся на одной прямой. Если же в момент времени t_0 точки O, $P_1(t_0)$, $P_2(t_0)$ лежат на одной прямой, то t_0 — момент уплощения.) С течением времени диаметр $D(t)$ вращается, но, разумеется, неравномерно.

Обозначим концы диаметра $D(t)$ через $D_1(t)$ и $D_2(t)$. Момент уплощения соответствует попаданию равномерно вращающейся точки $P_3(t)$ в одну из точек $D_1(t)$, $D_2(t)$.

Поскольку ω_1 и ω_2 — целые числа, диаметр $D(t)$ вращается хотя и неравномерно, но периодически: $D(t+2\pi) = D(t)$ (так как $P_1(t+2\pi) = P_1(t)$, $P_2(t+2\pi) = P_2(t)$). Но и $P_3(t+2\pi) = P_3(t)$, так что можно ограничиться рассмотрением движения за время 2π. Таким образом, у диаметра $D(t)$ существует средняя угловая скорость вращения, равная средней угловой скорости его вращения за время 2π; обозначим ее через ω.

Спрашивается: как связана скорость ω с ω_1 и ω_2?

Утверждение 2. *Если спутники P_1 и P_2 имеют близкие орбиты и вращаются по ним в одном направлении, то $\omega = \omega_1 + \omega_2$.*

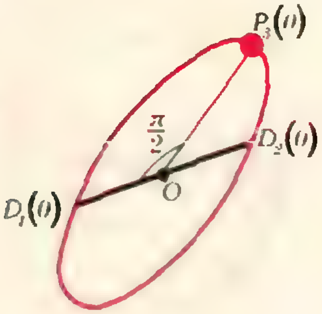


Рис. 3.

Поэтому если $\omega_3 > \omega_1 + \omega_2$, то точка $P_3(t)$, вращаясь в среднем быстрее диаметра $D(t)$, в некоторые моменты будет обгонять его концы $D_1(t)$ и $D_2(t)$. Эти моменты обгона и есть моменты уплощения. Аналогично, моменты уплощения имеются и в случае $\omega_3 < \omega_1 + \omega_2$.

К сожалению, мы не умеем доказывать утверждение 2 чисто геометрически. Поэтому вывод, который мы из него сделали, читатель должен рассматривать как правдоподобный, но не доказанный. Этот вывод показывает, что если мы ищем движение без уплощения, то стоит рассматривать только случай $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$.

В нашем случае средняя угловая скорость ω вращения диаметра $D(t)$ равна 2 и совпадает с угловой скоростью вращения спутника P_3. Запустим спутник P_3 так, чтобы при $t = 0$ сдвиг фаз между $P_3(0)$ и $D_1(0)$ был равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 3). Если бы диаметр $D(t)$ вращался равномерно, то этот сдвиг был бы неизменен. Если же вращение $D(t)$ неравномерно, но мало отличается от равномерного, то естественно ожидать, что сдвиг фаз между $P_3(t)$ и $D(t)$ будет периодически колебаться около значения $\frac{\pi}{2}$ и поэтому никогда не станет равным нулю.

А теперь, формально не опираясь на предыдущие рассуждения, приведем пример трех спутников P_1, P_2 и P_3, вращающихся вокруг своей планеты равномерно с угловыми скоростями $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$ и без уплощений.

Рассмотрим сферу S единичного радиуса. Пусть планета находится в центре O этой сферы, а спутники P_i вращаются по ее большим окружностям γ_i. Пусть $A \in \gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3$. Поместим в момент времени $t = 0$ спутник P_1 в точку A, спутник P_2 — в точку B орбиты γ_2 такую, что $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$, спутник P_3 — в точку C орбиты γ_3 такую, что $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2}$ (рис. 4). Тогда $D(0) = K_2 \cap K_3$, где K_2 и K_3 — два больших круга с границами γ_2 и γ_3 соответственно, $D_1(0) = A$, $D_2(0) = \bar{A}$ ($\bar{A}$ — вторая общая точка пересечения γ_1, γ_2 и γ_3, диаметрально противоположная точке A), так что $P_3(0) = C$ не совпадает ни с $D_1(0)$, ни с $D_2(0)$.

Посмотрим, где будут находиться точки $P_3(t)$, $D_1(t)$ и $D_2(t)$ в разные моменты времени. При $0 < t < \frac{\pi}{4}$ точка $P_1(t)$ лежит внутри дуги $AA_{\pi/4}$, точка $P_2(t)$ — внутри дуги $BB_{\pi/4}$, конец $D_1(t)$ диаметра $D(t)$ — внутри дуги AC, противоположный конец $D_2(t)$ диаметра $D(t)$ — внутри симметричной дуги $\overline{A}\overline{C}$, и, наконец, точка $P_3(t)$ — внутри дуги $C\overline{A}$ (рис. 5). *При* $t = \frac{\pi}{4}$ *точки* $P_1(t)$, $P_2(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$ и $P_3(t)$ расположены соответственно в точках $A_{\pi/4}$, $B_{\pi/4}$, C, $\overline{C}$ и $\overline{A}$ (рис. 6). Аналогичным образом легко указать положения этих точек на интервалах $\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$, …, $\frac{7}{4}\pi < t < 2\pi$ и в концах этих интервалов и убедиться, что точка $P_3(t)$ в промежутке времени от 0 до 2π никогда не совпадает ни с $D_1(t)$, ни с $D_2(t)$. Поскольку этим промежутком времени рассматриваемое движение полностью описывается, в построенном примере моменты уплощения отсутствуют.

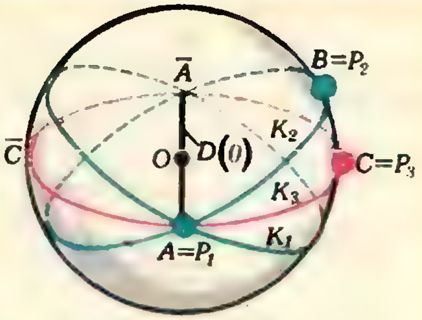


Рис. 4.

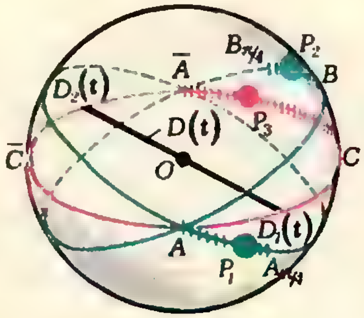


Рис. 5.

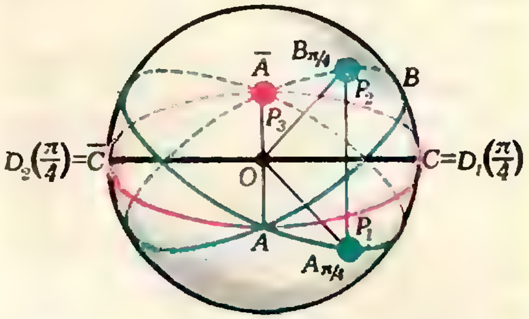


Рис. 6.

4. Нули функции и определенный интеграл

Чтобы установить, что в какой-то момент времени t_0 происходит уплощение, достаточно показать, что введенная в п. 2 функция $V(t)$ при $t = t_0$ обращается в нуль. Но как, вообще говоря, можно установить, имеет ли данная функция на данном промежутке нуль? Вы знаете, как это сделать для квадратного трехчлена; вам известны нули основных тригонометрических функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. Вы можете ответить на вопрос о нулях функций посложнее — например, функции $\alpha \cos t + \beta \cos 2t + \gamma \cos 3t$. Однако уже для функции $\alpha \cos t + \beta \cos 2t +$

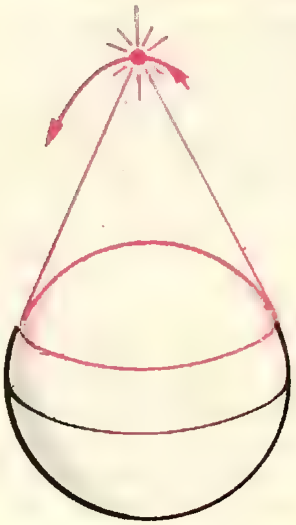


Рис. 7.

$+\gamma\cos 7t$ элементарные методы не дают возможности ответить на вопрос о существовании нулей.

Оказывается, воспользовавшись понятием *определенного интеграла* (см. «Алгебра и начала анализа 10» или «Квант», 1977, № 5) можно доказать, что на заданном промежутке та или иная функция обращается в нуль.

Утверждение 3. *Если* $\int\limits_a^b f(t)dt = 0$ *и функция* f *непрерывна на отрезке* $[a;\ b]$, *то она на этом отрезке имеет нуль.*

Доказательство. На отрезке $[a;\ b]$ функция f либо имеет нуль, либо на всем этом отрезке принимает значения только одного знака (см. замечание в конце п. 2). Из определения интеграла следует, что если функция f во всех точках отрезка $[a;\ b]$ положительна, то и интеграл от нее на этом отрезке положителен, а если f всюду на $[a;\ b]$ отрицательна, то и интеграл от нее также отрицателен.

Утверждение 3 доказано.

Пример. Докажем, что при любых α, β, γ функция $f(t) = \alpha\cos t + \beta\cos 2t + \gamma\cos 7t$ имеет нуль на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Действительно, одной из первообразных для функции $\cos nt$ является функция $\frac{1}{n}\sin nt$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int\limits_0^{2\pi} (\alpha\cos t + \beta\cos 2t + \gamma\cos 7t)\,dt = \left(\alpha\sin t + \frac{1}{2}\beta\sin 2t + \frac{1}{7}\gamma\sin 7t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

так что существование у функции $\alpha\cos t + \beta\cos 2t + \gamma\cos 7t$ нуля на отрезке $[0;\ 2\pi]$ следует из утверждения 3.

Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что для доказательства существования момента уплощения достаточно показать, что

$$\int\limits_0^{2\pi} V(t)\,dt = 0.$$

5. Самый интересный случай: $\omega_1=2$, $\omega_2=3$, $\omega_3=4$

В этом параграфе мы, пользуясь утверждением 3, докажем, что в случае $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$ момент уплощения всегда существует.

Найдем общий вид функции $V(t)$. Для этого найдем общий вид координат $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ точек $P_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) как функций от времени. Мы сейчас покажем, что каждая координата точки $P_i(t)$ совершает гармоническое колебание, т. е. имеет вид

$$\alpha\sin\omega_i t + \beta\cos\omega_i t. \qquad (***)$$

Формула (***) непосредственно вытекает из такой леммы:

Лемма. а) *Пусть* $\vec u$ *и* $\vec v$ *— два взаимно перпендикулярных вектора одинаковой длины* R *в пространстве. Тогда конец вектора*

$$\vec w(t) = \vec u\cos\omega t + \vec v\sin\omega t$$

равномерно вращается с угловой скоростью ω *по окружности радиуса* R, *расположенной в плоскости векторов* $\vec u$ *и* $\vec v$.

б) *Наоборот, если точка* $P(t)$ *равномерно вращается с угловой скоростью* ω *по окружности с центром* O *радиуса* R, *то в плоскости, которой принадлежит эта окружность, найдутся два взаимно перпендикулярных вектора* $\vec u$ *и* $\vec v$ *одинаковой длины такие, что*

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec u\cos\omega t + \vec v\sin\omega t.$$

Доказательство. а) Поскольку векторы $\vec u\cos\omega t$ и $\vec v\sin\omega t$ взаимно перпендикулярны, по теореме Пифагора

$$|\vec w(t)|^2 = |\vec u|^2(\cos\omega t)^2 + |\vec v|^2(\sin\omega t)^2 = R^2.$$

Следовательно, конец вектора $\vec w(t)$ движется по окружности радиуса R.

Скорость конца вектора $\vec w(t)$ есть вектор

$$\vec v\omega\cos\omega t - \vec u\omega\sin\omega t,$$

а потому величина скорости в каждый момент времени одна и та же и равна ωR, так что конец вектора $\vec{w}(t)$ вращается равномерно.

б) В качестве вектора $\vec{u}$ надо взять вектор $\overrightarrow{OP}(0)$, а в качестве вектора $\vec{v}$ — вектор $\overrightarrow{OP}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$. Лемма доказана.

Для получения общего вида функции $V(t)$ обратимся к выражению (*). Это выражение есть сумма шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех сомножителей, каждый из которых, в свою очередь, является суммой вида (***). После раскрытия скобок в каждом произведении у нас получится сумма сорока восьми членов вида

$$\lambda p_1(t)\, p_2(t)\, p_3(t), \qquad (****)$$

где λ — число, а $p_i(t)$ — либо $\sin \omega_i(t)$, либо $\cos \omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. К счастью, нам вовсе не нужно выписывать явно эти 48 членов, так как значения коэффициентов λ для нас окажутся не важными (так же как не важны были значения коэффициентов в примере из предыдущего параграфа).

После приведения подобных членов получаем, что $V(t)$ есть сумма нескольких слагаемых вида (****). Чтобы показать, что $\int\limits_0^{2\pi} V(t)\,dt = 0$, достаточно проверить, что интеграл от каждого слагаемого (****) в выражении $V(t)$ равен нулю.

Преобразуем произведение $p_1(t)\, p_2(t)\, p_3(t)$ в сумму. Возможны различные случаи, в зависимости от того, сколько раз — один, два или три — в это произведение входит синус. Например

$$\begin{aligned}
(\sin \omega_1 t \sin \omega_2 t) \sin \omega_3 t &= \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\omega_1 - \omega_2)\, t - \\
&\quad - \cos(\omega_1 + \omega_2)\, t) \sin \omega_3 t = \\
&= \frac{1}{4}\,[\sin(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)\, t + \\
&\quad + \sin(\omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\, t - \\
&\quad - \sin(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)\, t - \\
&\quad - \sin(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)\, t].
\end{aligned}$$

Преобразовав аналогично остальные произведения, мы получим, что $V(t)$ есть сумма членов вида $\mu \sin \nu t$ или $\mu \cos \nu t$, где $\nu = \pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$ со всевозможными комбинациями знаков. При целых значениях ν, отличных от нуля, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin \nu t\, dt = \left(-\frac{\cos \nu t}{\nu}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0;$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos \nu t\, dt = \left(\frac{\sin \nu t}{\nu}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Разумеется, только что сделанные выкладки можно проводить лишь при $\nu \neq 0$. Однако при любой комбинации знаков сумма $\nu = \pm 2 \pm 3 \pm 4$ отлична от нуля. Поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} V(t)\, dt = 0.$$

Следовательно, найдется такое значение $t_0 \in [0;\, 2\pi]$, что $V(t_0) = 0$, т. е. обязательно найдется момент уплощения.

6. Задача о спутниках-солнцах

Разумеется, читатель заметил, что все рассуждения п. 5 останутся справедливыми, если в качестве ω_1, ω_2, ω_3 взять любые целые числа, для которых ни одна из сумм вида $\pm\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3$ не равна 0.

Мы умеем доказывать, но, к сожалению, не элементарно, следующую теорему о планете и трех спутниках:

Теорема. *Пусть ω_3 — наибольшая угловая скорость среди угловых скоростей ω_i, $i = 1, 2, 3$.*

1) Если $\omega_3 \neq \omega_1 + \omega_2$, то для любых начальных расположений орбит и спутников на них всегда найдется момент уплощения.

2) Если $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, то для некоторых начальных расположений орбит и спутников на них моментов уплощения не бывает.

Используя этот результат, можно решить еще одну задачу (о спутниках-солнцах).

Вокруг сферической планеты с центром O нужно запустить с постоянными ненулевыми угловыми скоростями по круговым орбитам (с центрами в O) несколько точечных спутников-солнц таким образом, чтобы в каж-

дый момент времени все точки планеты были освещены лучами, исходящими во все стороны от спутников. Каково минимальное необходимое число спутников-солнц? (Считается, что планета не вращается; спутник-солнце разрешается запускать на сколь угодно большое расстояние от планеты, однако он освещает «шапочку» на ней, которая всегда меньше полусферы; см. рис. 7.)

Существенным условием в формулировке задачи является условие положительности угловых скоростей спутников-солнц. При нулевых угловых скоростях получается намного более простая и менее интересная задача об освещении сферической планеты несколькими неподвижными точечными прожекторами. Наименьшее необходимое в этом случае число прожекторов — четыре.

Задача о спутниках-солнцах — сугубо математическая. Похожая практическая задача — создание системы глобальной радиосвязи на Земле — решается с помощью запуска трех спутников; правда, при этом не обеспечивается связь с полярными областями Земли.

Решение задачи о спутниках-солнцах. Нетрудно сообразить, что ни одного, ни двух спутников для освещения планеты не хватит — в каждый момент будут существовать неосвещенные точки (докажите это). Покажем, что и трех спутников мало.

Действительно, в каждый момент времени на планете найдутся две диаметрально противоположные точки A и B, которые не освещаются в этот момент спутниками P_1 и P_2. Такими точками, например, являются концы диаметра планеты, перпендикулярного к плоскости, проведенной через точки O, P_1 и P_2 (вспомните, что один спутник не может осветить сразу целую полусферу). Но спутник P_3 не сможет в этот же момент осветить сразу обе точки A и B — ведь они диаметрально противоположны! Поэтому какая-то из точек A или B не будет в этот момент освещена ни одним из спутников.

Хватит ли четырех спутников-солнц? Если окажется, что в некоторый момент времени какие-то три из четырех спутников P_1, P_2, P_3, P_4 будут находиться в одной плоскости с планетой O, то полностью применимы рассуждения предыдущего абзаца. Если же такого уплощения не происходит, надо пробовать строить пример нужного нам движения или доказывать, что его все-таки нет. Итак, в случае, когда происходит уплощение хотя бы одной тройки спутников, в момент уплощения планета не освещена полностью. Значит, надо выяснить, существуют ли такие положительные угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4, при которых никогда не происходит уплощение ни одной тройки спутников. Ответ на этот вопрос нам дает сформулированная выше теорема: *в любой тройке, выбранной из чисел* ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, *максимальное число должно равняться сумме двух оставшихся*. Пусть, для определенности, $0 < \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3 \leqslant \omega_4$. Тогда для тройки ω_1, ω_2, ω_3 должно быть $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, для тройки ω_1, ω_2,ω_4 должно быть $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2$, откуда $\omega_3 = \omega_4$. Но для тройки ω_1, ω_3, ω_4 должно быть $\omega_4 = \omega_3 + \omega_1$, откуда $\omega_1 = 0$, что противоречит условию $\omega_1 > 0$. Тем самым доказано, что искомых четырех положительных чисел не существует. Следовательно, примера нужного нам движения четырех спутников по круговым орбитам, при котором планета была бы в каждый момент полностью освещена, построить нельзя; четырех спутников также недостаточно для осуществления поставленной в задаче цели.

Однако пяти вращающихся по круговым орбитам спутников для полного освещения всей планеты в каждый момент времени уже хватает (мы предлагаем читателям самостоятельно построить соответствующий пример).

Кроме того, мы предлагаем читателям доказать утверждение пункта 2) теоремы для случая, когда ω_1, ω_2, ω_3 — целые числа. По-видимому, это можно сделать элементарно.

задачник Кванта

Задачи

М536—М540; Ф548—Ф552

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант».

После адреса напишите на конверте номера задач, решения которых вы посылаете (например, «М536, М537», или «Ф548»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Задачи М537—М540 предлагались на XX Международной математической олимпиаде (см. с. 55).

М536. а) Докажите, что любой прямоугольник размером $m\times 2n$ клеток можно замостить двумя слоями костяшек домино (плиток 1×2 клетки) так, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две разные плитки нижнего слоя.
б) Прямоугольник размером $2k\times 2n$ клеток уже замощен одним слоем костяшек домино. Докажите, что его можно замостить вторым слоем так, чтобы выполнялось то же условие (т. е. чтобы плитки разных слоев не совпадали).

М537. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB и AC этого треугольника в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

М538. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$, $g(1)<g(2)<\ldots<g(n)\ldots$ и $g(n)=f(f(n))+1$ для всех $n\geqslant 1$. Определите $f(240)$.

М539. Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB, PC взаимно перпендикулярны. Пусть Q — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC, диагонально противоположная к P. Определите геометрическое место точек Q.

М540.* Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, ..., 1978.

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

Ф548. Реактивная тележка массы m описывает мертвую петлю по вертикальной круговой дорожке радиуса R с постоянной линейной скоростью v. Какая работа совершается силой трения при перемещении тележки из самого нижнего положения в самое верхнее? Коэффициент трения между тележкой и дорожкой равен μ.

О. Савченко

Ф549. Два шарика с массами m_1 и m_2 соединены пружинкой жесткости k; пружинка расположена горизонтально и не деформирована. Шарикам одновременно сообщаются скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, как показано на рисунке 1, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Найти максимальную высоту подъема системы и наибольшую деформацию пружинки.

Ф550. На шероховатый медный конус (покрытый мелкой насечкой, как напильник) надеты две шайбы: алюминиевая с отверстием радиуса $r=1$ см и железная с отверстием радиуса $R=3$ см. Расстояние между шайбами $a=6$ см. На сколько изменится это расстояние, если конус и шайбы нагреть на $\Delta t=200$ К? Тепловые коэффициенты линейного расширения меди, алюминия и железа равны, соответственно, $\beta_1=2{,}5\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$, $\beta_2=1{,}7\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\beta_3=10^{-5}$ К$^{-1}$. Конус расположен вертикально, вершиной вверх.

Г. Коткин

Ф551. Груз массы m подвешен к двум пружинкам с жесткостью k_1 и k_2 с помощью нити и блока (рис. 2). Найти период малых колебаний груза. Нить и блок считать невесомыми.

И. Слободецкий

Ф552. Вольт-амперная характеристика неоновой лампы показана на рисунке 3. При каком значении R сопротивления резистора, включенного в цепь, изображенную на рисунке 4, неоновая лампа (*н. л*) не будет гаснуть после замыкания ключа K?

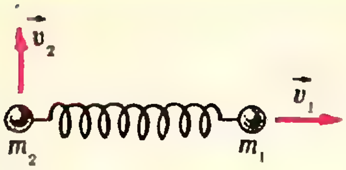


Рис. 1.

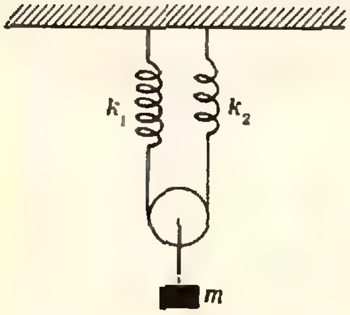


Рис. 2.

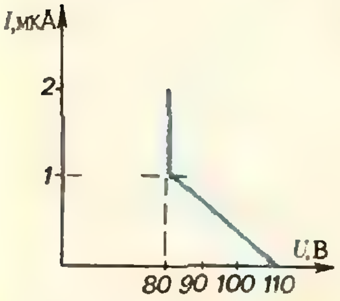


Рис. 3.

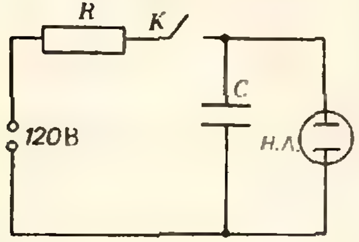


Рис. 4.

Решения задач

М491—М493; Ф503, Ф505—Ф507

М491. *Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа.* (*Например,* 16, 24, 36, 54, 81.)

а) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.

б) При каких натуральных n сумма квадратов n последовательных членов прогрессии делится на сумму этих n членов?

Мы вначале решим задачу М491 — докажем утверждение пункта а) и ответим на вопрос пункта б), а затем сформулируем утверждение, из которого будут следовать оба пункта задачи.

а) Обозначим три последовательных члена нашей прогрессии через a_1, a_2, a_3 (все a_i — целые числа). Поскольку $a_1a_3 = a_2^2$, получаем

$$(a_1+a_2+a_3)^2 = (a_1^2+a_2^2+a_3^2)+2a_2(a_1+a_2+a_3).$$

Следовательно

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2 = (a_1+a_2+a_3)(a_1-a_2+a_3)$$

— что и требовалось доказать.

б) Легко привести пример геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов четырех последовательных членов не будет делиться на сумму этих членов: у прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, ... сумма $1^2+2^2+4^2+8^2=85$ не делится на сумму $1+2+4+8=15$. Вообще, у этой прогрессии сумма квадратов первых $2k$ членов $1+2^2+2^4+\ldots+2^{4k-2}=(2^{4k}-1)/3$ не делится на сумму этих членов $1+2+2^2+\ldots+2^{2k-1}=2^{2k}-1$, поскольку $2^{2k}+1$ не делится на 3 ни при каком k. Поэтому четные n не годятся. Если же n нечетно ($n=2k+1$), то сумма квадратов n последовательных членов нашей прогрессии обязательно делится на сумму этих членов. Справедливость этого утверждения вытекает из тождества

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2k+1}^2=(a_1+a_2+\cdots+a_{2k+1})\times$$
$$\times(a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots-a_{2k}+a_{2k+1}),$$

которое нетрудно доказать, например, по индукции.

А теперь сформулируем и докажем утверждение, о котором было сказано выше.

Теорема. *Если числа k и n взаимно просты, то сумма k-х степеней n последовательных членов геометрической прогрессии, все члены которой — целые числа, обязательно делится на сумму этих n членов.*

(Поскольку числа 3 и 2 взаимно просты, из этого утверждения следует пункт а) задачи М491 и ответ на пункт б) — *при нечетных n.*)

Доказательство. Обозначим эти n последовательных членов прогрессии через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы хотим доказать, что сумма $a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k$ делится на сумму $a_1+a_2+\ldots+a_n$ (при условии, что k и n взаимно просты). Пусть q — знаменатель прогрессии. Тогда

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1(1+q+\cdots+q^{n-1}),$$
$$a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k=a_1^k(1+q^k+\cdots+q^{(n-1)k}).$$

Докажем, что *если k и n взаимно просты, то многочлен $1+x^k+\ldots+x^{(n-1)k}$ делится на многочлен $1+x+\ldots+x^{n-1}$* *). При доказательстве нам понадобятся две вспомогательные леммы.

---

*) Здесь и всюду ниже, говоря о делимости многочленов, мы имеем в виду, что все коэффициенты частного — целые числа.

Лемма 1. *Если числа k и n взаимно просты, то числа k, $2k$, $3k$, ..., $(n-1)k$ при делении на n дают разные остатки.*

Лемма 2. *Если числа l и m дают одинаковые остатки при делении на n, то многочлен $x^l - x^m$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^{n-1}$.*

Лемма 1 доказывается методом «от противного». В самом деле, если при некоторых i и j $(0 < i < j < n)$ числа ik и jk дают одинаковый остаток при делении на n, то число $(j - i)k$ нацело делится на n. Но число $j - i < n$; значит, числа k и n должны иметь общий делитель, отличный от единицы, — противоречие с взаимной простотой k и n.

Так как число различных остатков (не нулевых!) от деления на n равно $n - 1$, из леммы 1 следует, что *если числа k и n взаимно просты, то среди остатков от деления на n чисел k, $2k$, ..., $(n-1)k$ все числа от 1 до $n-1$ встречаются по одному разу.*

Докажем лемму 2. Пусть $l > m$ и $l = m + pn$. Многочлен $x^m - x^l = (1 - x^{pn})x^m$ делится на $1 - x^n$:

$$1 - x^{pn} = (1 - x^n)\,(1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{(p-1)n}),$$

а $1 - x^n$ делится на $(1 - x)$, причем

$$(1 - x^n) = (1 - x)\,(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.

Перейдем теперь к доказательству того, что многочлен $1 + x^k + \cdots + x^{(n-1)k}$ делится на $1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Обозначим через k_i остаток от деления на n числа ik. Тогда по лемме 2 многочлен $(x^k - x^{k_1}) + (x^{2k} - x^{k_2}) + \cdots + (x^{(n-1)k} - x^{k_{n-1}})$ делится на многочлен $1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Остается заметить, что в силу следствия из леммы 1 многочлен $1 + x^{k_1} + x^{k_2} + \cdots + x^{k_{n-1}}$ совпадает с многочленом $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ и, значит, делится на него. Таким образом,

$$1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(n-1)k} = (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \times$$
$$\times (c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_px^p),$$

где $p = (k-1)(n-1)$, и $c_0, c_1, \ldots, c_p$ — некоторые целые числа. Следовательно,

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = a_1^k\left(1 + q^k + \cdots + q^{(n-1)k}\right) =$$
$$= a_1^k\left(1 + q + \cdots + q^{n-1}\right)\left(c_0 + c_1q + c_2q^2 + \cdots +\right.$$
$$\left.+ c_pq^p\right) = \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \times$$
$$\times\left(c_0a_1^{k-1} + c_1a_1^{k-1}q + \cdots + c_pa_1^{k-1}q^p\right).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что числа $a_1^{k-1}q$, $a_1^{k-1}q^2, \ldots, a_1^{k-1}q^p$ — целые. Действительно, число $a_1^{k-1}q$ — целое, поскольку оно представляется в виде произведения целых чисел: $a_1^{k-1}q = a_1^{k-2}\cdot a_2$. Аналогично, $a_1^{k-1}q^2 = a_1^{k-2}a_3, \ldots$ $\ldots, a_1^{k-1}q^p = \left(a_1q^{n-1}\right)^{k-1} = a_n^{k-1}$.

Попробуйте построить примеры, показывающие, что требование взаимной простоты k и n в утверждении теоремы существенно.

А. Агаев, Г. Гуревич,
Ф. Кадиров

◆

М492. *В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что вершины A_1, B_1 и C_1 лежат, соответственно, на сторонах BC,*

Мы приведем два решения этой задачи: первое — более «механическое», второе — более «геометрическое».

Первое решение. Поместим в вершины треугольника ABC грузы масс a; b и c так, чтобы центр тяжести этой системы масс попал в точку P. Для этого достаточно

CA и AB), причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, пересекаются в одной точке Q, причем точки P, Q и центр тяжести треугольника ABC лежат на одной прямой.

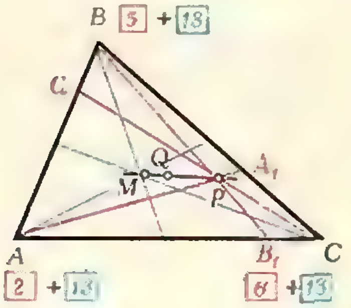
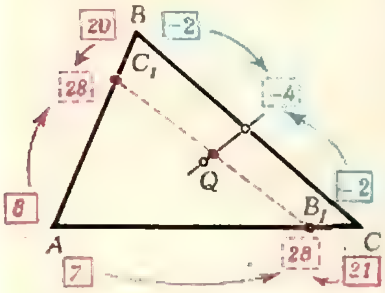


Рис. 1.



$a=2$, $b=5$, $c=6$

Рис. 2.

выполнения двух условий: условия $\frac{|AB_1|}{|B_1C|}=\frac{c}{a}$, гарантирующего принадлежность центра тяжести прямой BB_1, и условия $\frac{|AC_1|}{|C_1B|}=\frac{b}{a}$, гарантирующего принадлежность центра тяжести прямой CC_1. (Тогда $\frac{|BA_1|}{|A_1C|}=\frac{c}{b}$; тем самым мы попутно доказали *теорему Чевы:*

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\cdot\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|BC_1|}{|C_1A|}=1.\Big)$$

Добавим теперь в каждую вершину груз массы $m=a+b+c$ (рис. 1). Центр тяжести Q всей системы грузов можно найти, соединив точки P (центр тяжести первоначальной системы) и M (центр тяжести «добавляемой» системы, т. е. центр тяжести треугольника ABC) отрезком и поделив его в отношении $\frac{a+b+c}{3m}=\frac{1}{3}$, считая от точки M.

С другой стороны, массы в вершинах A $(2a+b+c)$, B $(2b+a+c)$, C $(2c+a+b)$ можно распределить на «подсистемы» так: части масс A $(a+c)$ и B $((a+c)\,b/a)$ заменить массой C_1 $((a+c)(a+b)/a)$; части масс $A(a+b)$ и C $((a+b)\,c/a)$ — массой B_1 $((a+c)(a+b)/a)$. Образовавшиеся в точках B_1 и C_1 две равные массы имеют центр тяжести посередине $[B_1C_1]$. Массы, оставшиеся в вершинах B и C, тоже оказываются равными (хотя они могут получиться и отрицательными, как на рисунке 2):

$$m+b-\frac{(a+c)\,b}{a}=m+c-\frac{(a+b)\,c}{a}=m-\frac{bc}{a},$$

и поэтому их центр тяжести находится посередине $[BC]$. Значит, центр тяжести Q всей системы лежит на прямой, соединяющей середины отрезков B_1C_1 и BC.

Аналогично доказывается, что Q лежит на двух других прямых, упоминаемых в условии. Чтобы перевести наше механическое решение на математический язык, достаточно дать определение «центра тяжести» системы масс. Пусть A_i — точки плоскости, m_i — произвольные числа $(i=1, 2, \ldots, n)$, «общая масса» $m_1+m_2+\ldots+m_n=M\neq 0$. *Центр тяжести* $C=C\,\{A_i\,(m_i)\}$ определяется условием: для некоторой (а тогда и для любой) точки O плоскости $\overrightarrow{OC}=\left(m_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n}\right)/M$. (Это определение годится и для отрицательных m_i.) Нетрудно проверить единственный факт, которым мы пользуемся в решении: если $m_i=m_i'+m_i''$, $\Sigma m_i'=M'$ и $\Sigma m_i''=M''$, то центр тяжести $C=C\,\{A_i\,(m_i)\}$ лежит на прямой $C'C''$, где $C'=C\,\{A_i\,(m_i')\}$, $C''=C\,\{A_i\,(m_i'')\}$, причем $\overrightarrow{OC}=(M'\overrightarrow{OC'}+M''\overrightarrow{OC''})/M$.

Подробнее о «барицентрическом исчислении», которым мы воспользовались в этом решении, см. в книге М. Б. Балка «Геометрические приложения понятия о центре тяжести».

Второе решение. Обозначим середины сторон BC, AC и AB, соответственно, через X, Y и Z, а середины сторон B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 — через X_1, Y_1 и Z_1 (рис. 3). Поместим в точки A, B, C и P единичные массы и будем искать центр тяжести этой системы материальных точек.

Пусть X_2, Y_2 и Z_2 — середины отрезков AP, BP и CP. Так как центр тяжести точек B и C находится в точке X, а центр тяжести точек A и P — в точке X_2, то центр тяжести всей системы лежит на прямой XX_2. По аналогичным причинам он лежит на прямых YY_2 и ZZ_2. Поскольку центр тяжести системы материальных точек существует, единствен и должен принадлежать всем этим прямым одновременно, эти три прямые пересекаются в одной точке; обозначим ее через Q (см. рис. 3)

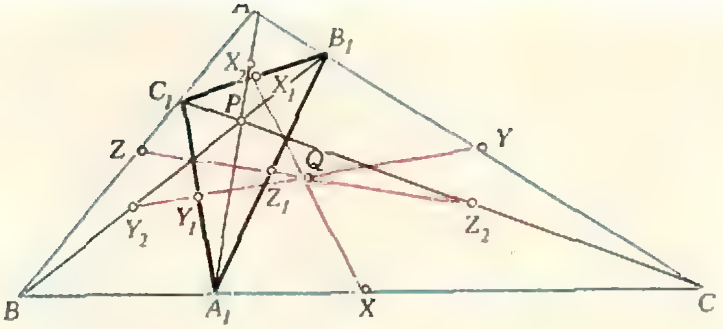


Рис. 3.

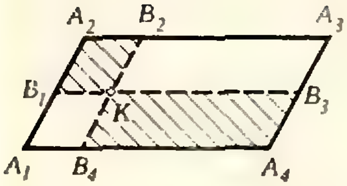


Рис. 4.

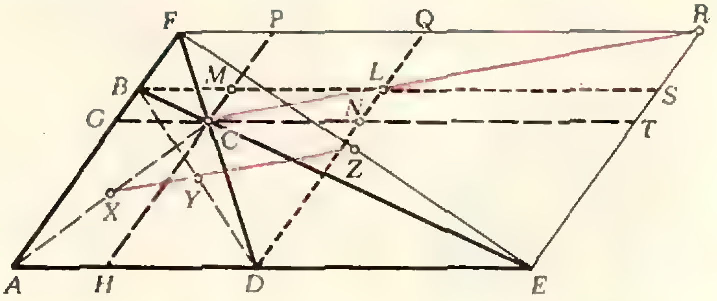


Рис. 5.

С другой стороны, если S — центр тяжести треугольника ABC (т. е. точка пересечения его медиан), то центр тяжести системы точек $\{A, B, C, P\}$ лежит на отрезке PS. Выше мы показали, что центр тяжести этой системы находится в точке Q; значит $Q \in [PS]$. Более того, так как для отыскания центра тяжести системы $\{A, B, C, P\}$ последним способом мы должны поместить в точку S массу в три единицы, точка Q делит отрезок PS в отношении $3:1$.

Если мы покажем, что прямые XX_2, YY_2, ZZ_2 проходят, соответственно, через точки X_1, Y_1 и Z_1, то задача будет решена. Последнее утверждение вытекает из следующей теоремы, примененной к четырехугольникам PA_1BC_1, PB_1AC_1 и PA_1CB_1:

Теорема Гаусса. *Если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.*

Для доказательства принадлежности трех точек прямой будем использовать следующий, почти очевидный, критерий (необходимое и достаточное условие); докажите его самостоятельно.

Пусть K — внутренняя точка параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$. Проведем через K прямые, параллельные сторонам параллелограмма, и обозначим через B_1, B_2, B_3, B_4 точки пересечения этих прямых с его сторонами (рис. 4). Точка K лежит на диагонали A_1A_3 параллелограмма тогда и только тогда, когда $S_{KB_1A_2B_2} = S_{KB_3A_4B_4}$ (через S мы здесь обозначаем площадь).

Доказательство теоремы Гаусса. Обозначим вершины четырехугольника через A, B, C, D, точки пересечения продолжений его противоположных сторон через E и F, а середины диагоналей AC, BD и отрезка EF, соответственно, через X, Y и Z. Проведем через точки D, C и F прямые, параллельные прямым AF и AE, и введем обозначения, как на рисунке 5.

Очевидно, что точки C, L и R гомотетичны, соответственно, точкам X, Y и Z с центром гомотетии A и коэффициентом гомотетии 2. Поэтому принадлежность точек X, Y, Z одной прямой равносильна принадлежности одной прямой точек C, L и R.

Из приведенного выше критерия следует, что точка L принадлежит прямой CR, если выполнено равенство $S_{LMPQ} = S_{LNTS}$. Докажем, что это действительно так.

Поскольку точка C принадлежит диагоналям параллелограммов $AFQD$ и $ABSE$ (см. рис. 5), имеем: $S_{AGCH} = S_{CNQP}$ и $S_{AGCH} = S_{CMST}$. Поэтому $S_{CNQP} = S_{CMST}$, и, следовательно, $S_{LMPQ} = S_{LNTS}$, что и требовалось. Решение закончено.

Ф. Вайнштейн, Н. Васильев

◆

М493. *Докажите неравенства*
$$0{,}785n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0{,}79n^2.$$

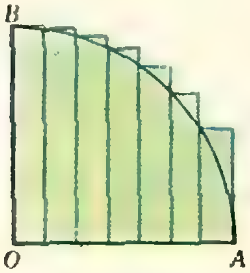


Рис. 6.

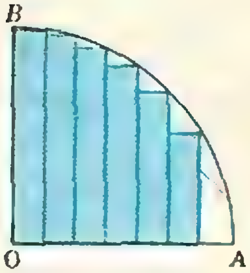


Рис. 7.

Возьмем четверть круга единичного радиуса: O — центр круга, $[OA]$ — радиус, $|OA| = 1$ (рис. 6). Разделим отрезок OA на n конгруэнтных частей (n — произвольное натуральное число). На получившихся первых $n-1$ отрезках деления (считая от точки O) построим по прямоугольнику так, чтобы правые верхние вершины всех прямоугольников лежали на дуге окружности BA, ограничивающей нашу «четверть круга» (см. рис. 6). Мы получим $n-1$ прямоугольников, сумма площадей которых меньше площади четверти круга единичного радиуса, то есть меньше $\frac{\pi}{4} < 0{,}79$. Поскольку эта сумма равна

$$\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right),$$

из сказанного следует правое неравенство.

Чтобы доказать левое неравенство, поступим следующим образом. Построим по прямоугольнику теперь уже на всех отрезках, получивших при делении $[OA]$ — всего n прямоугольников, причем так, чтобы все левые верхние вершины прямоугольников лежали на дуге BA окружности (рис. 7). Мы получим изображенную на рисунке 7 ступенчатую фигуру, площадь которой уже больше площади четверти круга единичного радиуса, то есть больше $\frac{\pi}{4} > 0{,}785$. Площадь ступенчатой фигуры равна сумме площадей n прямоугольников с основаниями длины $\frac{1}{n}$ и высотами длины

$$1,\ \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2},\ \sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2},\ \ldots,\ \sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

соответственно:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2-2^2}{n^2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}}\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{n^2}\left(n + \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right) > 0{,}785,$$

откуда

$$0{,}785\,n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}.$$

А. Сивацкий

◆

Ф503. *К вертикальной оси привязана нить длины $2l$, на конце и в середине которой прикреплены одинаковые шарики (рис. 8). Ось приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каком значении угловой скорости участки OA и AB начнут отклоняться от вертикали? Каким будет отношение малых углов отклонения участков нити OA и AB от вертикали?*

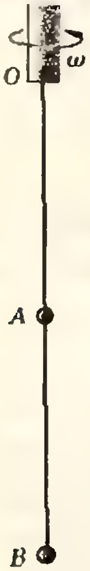


Рис. 8.

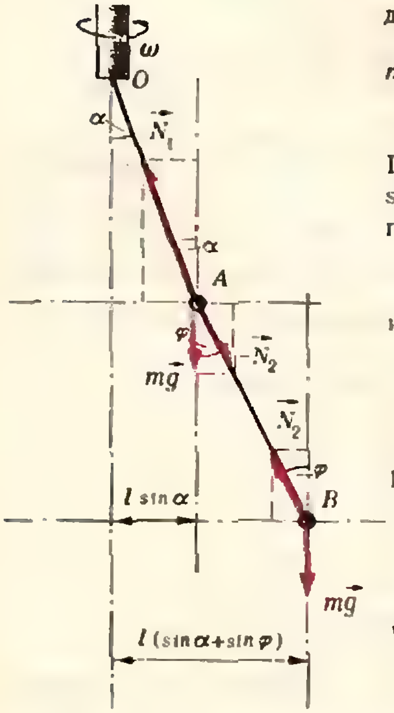


Рис. 9.

Форма такого «двойного» вращающегося маятника определяется двумя углами α и φ отклонения нитей от вертикали (рис. 9). Поскольку нас интересует значение той угловой скорости ω, при которой нити начинают отклоняться от вертикали, мы будем рассматривать движение маятника при условии, что углы α и φ малы.

Пусть при некоторой угловой скорости вращения ω нити OA и AB отклонились от вертикали на малые углы α и φ соответственно (рис. 9). При этом шарики вращаются равномерно с угловой скоростью ω по окружностям, лежащим в горизонтальных плоскостях. Радиусы этих окружностей равны соответственно $r_1 = l\sin\alpha$ и $r_2 = l(\sin\alpha + \sin\varphi)$, где l — длина каждой нити. Центростремительное ускорение $\omega^2 r_1$ верхнему шарику сообщает равнодействующая приложенных к нему сил — силы тяжести $m\vec g$ (m — масса шарика), силы $\vec N_1$ натяжения нити OA и силы $\vec N_2$ натяжения нити AB. Центростремительное ускорение $\omega^2 r_2$ нижнему шарику сообщает равнодействующая сил $m\vec g$ и $\vec N_2$. Найдем силы $\vec N_1$ и $\vec N_2$.

Нижний шарик не перемещается в вертикальном направлении; следовательно (см. рис. 9),

$$|m\vec g| = |\vec N_2|\cos\varphi \Rightarrow |\vec N_2| = \frac{|m\vec g|}{\cos\varphi}.$$

Верхний шарик также не перемещается в вертикальном направлении; следовательно,

$$|m\vec g| + |\vec N_2|\cos\varphi = 2|m\vec g| = |\vec N_1|\cos\alpha \Rightarrow |\vec N_1| = \frac{2|m\vec g|}{\cos\alpha}.$$

Теперь запишем уравнение движения шариков по окружности: для нижнего шарика —

$$m\omega^2 l(\sin\alpha + \sin\varphi) = |\vec N_2|\sin\varphi = |m\vec g|\operatorname{tg}\varphi, \qquad (1)$$

для верхнего шарика —

$$m\omega^2 l\sin\alpha = |\vec N_1|\sin\alpha - |\vec N_2|\sin\varphi =$$

$$= 2|m\vec g|\operatorname{tg}\alpha - |m\vec g|\operatorname{tg}\varphi. \qquad (2)$$

Поскольку углы α и φ малы, можем считать $\sin\alpha = \alpha$, $\sin\varphi = \varphi$, $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$, $\operatorname{tg}\varphi = \varphi$. С учетом этого из (1) и (2) получаем

$$\omega^2 l(\alpha + \varphi) = |\vec g|\varphi, \quad \omega^2 l\,\alpha = |\vec g|(2\alpha - \varphi),$$

или

$$\omega^2 l\alpha + \varphi(\omega^2 l - |\vec g|) = 0,$$

$$(\omega^2 l - 2|\vec g|)\,\alpha + \varphi|\vec g| = 0.$$

Из этих двух выражений находим:

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{|\vec g| - \omega^2 l}{\omega^2 l} = \frac{|\vec g|}{2|\vec g| - \omega^2 l}, \qquad (3)$$

что позволяет записать следующее уравнение для ω^2:

$$(\omega^2)^2 l^2 - 4|\vec g|\, l\omega^2 + 2|\vec g|^2 = 0.$$

Отсюда находим

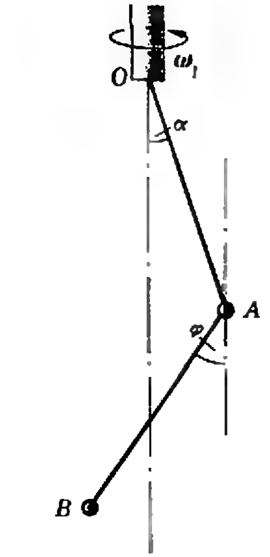


Рис. 10.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{|\vec{g}|}{l}(2 \pm \sqrt{2}),$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}(2+\sqrt{2})}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}(2-\sqrt{2})}$$

(значения $\omega_1' = -\omega_1$ и $\omega_2' = -\omega_2$ соответствуют вращению в противоположную сторону). Поскольку $\omega_2 < \omega_1$, естественно считать, что нити маятника начинают отклоняться от вертикали при угловой скорости вращения $\omega = \omega_2$.

Найдем отношение малых углов отклонения нитей OA и AB от вертикали. Из выражения (3) имеем

$$\text{при } \omega = \omega_1 - \frac{\alpha}{\varphi} = -\sqrt{2},$$

$$\text{при } \omega = \omega_2 - \frac{\alpha}{\varphi} = \sqrt{2}.$$

Тот факт, что при $\omega = \omega_1$ $\frac{\alpha}{\varphi} < 0$, означает, что при такой угловой скорости нити OA и AB отклонены от вертикали в противоположные стороны (рис. 10.).

Г. Бугаенко

◆

Ф505. *Рассмотрим схему зарядки конденсатора от батареи (рис. 11). Конденсатор заряжается до напряжения батареи U, приобретая энергию $\frac{C_1U^2}{2}$ и заряд $q = C_1U$. Этот заряд потребляется от батареи, которая, таким образом, совершает работу $qU = C_1U^2$. Коэффициент полезного действия равен 1/2. Найти способ зарядки конденсатора до напряжения батареи с бо́льшим КПД. Не разрешается использовать дополнительные источники энергии.*

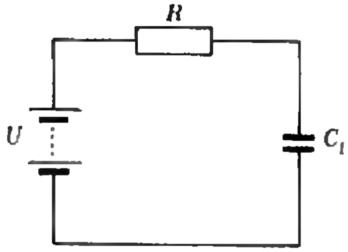


Рис. 11.

1. Возьмем еще один конденсатор, емкость которого $C_2 = nC_1$ (n — некоторое число), и включим его в цепь последовательно с конденсатором емкости C_1 (рис. 12). Емкость в такой цепи равна $C = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{n}{n+1}C_1$. Заряды, которые приобретут конденсаторы, равны

$$q_1 = q_2 = \frac{n}{n+1}C_1U,$$

а напряжения на конденсаторах —

$$U_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{n}{n+1}U, \quad U_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{1}{n+1}U.$$

Отключив заряженные конденсаторы от батареи, соберем цепь, показанную на рисунке 13. Напряжения на конденсаторах в такой цепи $U_1' = U_2' = \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{q_2'}{nC_1}$, где q_1', q_2' — заряды, которые установятся на конденсаторах. Согласно закону сохранения зарядов $q_1' + q_2' = q_1 + q_2 = \frac{2n}{n+1}C_1U$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} q_1' + q_2' = \frac{2n}{n+1}C_1U, \\ \frac{q_1'}{C_1} = \frac{q_2'}{nC_1}, \end{cases}$$

найдем: $q_1' = \frac{2n}{(n+1)^2}C_1U$, $U_1' = \frac{2n}{(n+1)^2}U$.

Теперь конденсатор C_1, заряженный до напряжения U_1', вновь подключим к батарее (см. рис. 11). При этом он

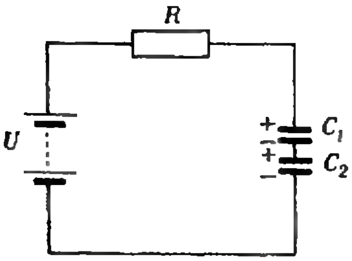


Рис. 12.

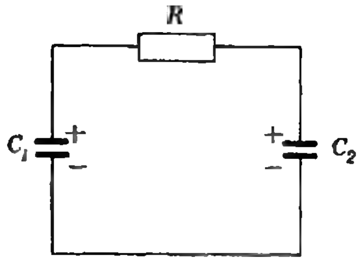


Рис. 13.

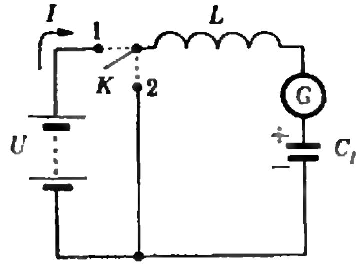


Рис. 14.

дозарядится до напряжения U. Заряд конденсатора увеличится на

$$\Delta q = C_1(U - U_1') = \frac{n^2+1}{(n+1)^2}C_1U.$$

Таким образом, суммарный заряд Q, который получил конденсатор C_1 от батареи, равен

$$Q = q_1 + \Delta q = \frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}C_1U.$$

Энергия, которую приобрел конденсатор, равна

$$\Pi = \frac{C_1U^2}{2}.$$

Работа A, совершенная батареей при зарядке конденсатора до напряжения U, равна

$$A = QU = \frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2}C_1U^2.$$

Так что КПД равен

$$\eta = \frac{\Pi}{A} = \frac{(n+1)^2}{2(2n^2+n+1)}.$$

Чтобы значение η было больше 1/2, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(n+1)^2}{2n^2+n+1} > 1.$$

Отсюда находим, что $n<1$.

Итак, заряжая конденсатор C_1 до напряжения U, мы добиваемся более эффективного использования батареи $\left(\eta > \frac{1}{2}\right)$, если в описанном выше процессе пользуемся дополнительно конденсатором C_2, емкость которого меньше C_1.

Те, кто знаком с методом отыскания экстремумов с помощью производной, могут найти, что в описанном процессе $\eta = \eta_{\max}$ при $n = 1/3$ ($\eta_{\max} \approx 57\%$).

Используя не один, а два, три или больше дополнительных конденсаторов, можно придумать очень много различных способов зарядки. При достаточно большом числе дополнительных конденсаторов можно сделать КПД сколь угодно близким к единице.

II. Опишем еще один способ зарядки, при котором может быть достигнут КПД, близкий к единице.

Соберем цепь, приведенную на рисунке 14. При включении в цепь батареи (ключ K в положении *1*) ток через катушку начнет постепенно возрастать. Подождем определенное время, пока по цепи протечет заряд $\frac{CU}{2}$. За это время батарея совершит работу $\frac{CU^2}{2}$, часть которой — $\frac{CU^2}{8}$ — перейдет в энергию конденсатора, а другая часть будет запасена в магнитном поле катушки. Теперь быстро переведем ключ K в положение *2*. В течение некоторого времени ток через катушку будет продолжать течь в прежнем направлении, постепенно уменьшаясь. Конденсатор при этом будет дозаряжаться. В момент, когда ток в катушке станет равным нулю, быстро переведем ключ K в положение *1*. За то время, пока ключ K находился в положении *2*, энергия магнитного поля катушки перешла в энергию конденсатора. Таким образом, поскольку в этой цепи энергия не рассеивается (мы пренебрегаем сопротивлением катушки, батареи и т. д.), вся энергия $\frac{CU^2}{2}$, потребленная от батареи, перейдет в энергию конденсатора, который, следовательно, зарядится до напряжения U. КПД в таком процессе равен единице. В реальных условиях (при наличии сопротивлений в цепи) конденсатор зарядится до меньшего напряжения, и для дозарядки его придется подключить к батарее; в результате КПД несколько уменьшится.

А. Ходулев

◆

Ф506. *Под поршнем цилиндра находится ртуть, занимающая объем $V_{\text{р}}$, и k молей идеального газа. Площадь поверхности поршня равна S. Поршень и дно цилиндра изготовлены из материала, идеально смачиваемого ртутью. Ртуть под поршнем приняла симметричную относительно оси цилиндра форму, показанную на рисунке 15. На поршень действует сила $\vec{F}$.*

1) Вывести уравнение состояния системы ртуть + газ в форме $p = f(V, T)$, где p — давление, T — абсолютная температура, V — объем части сосуда под поршнем.

2) Найти условие, при котором $p = 0$. Поверхностное натяжение ртути равно σ. Силу тяжести не учитывать. Принять, что объем ртути и ее поверхностное натяжение σ постоянны (то есть не зависят от T и p) и что $h \ll r$.

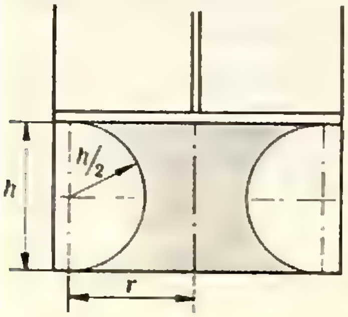


Рис. 15.

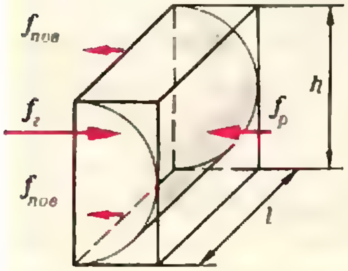


Рис. 16.

Силы, действующие на поршень снизу, — это сила $\vec{F}_{\text{р}}$ давления ртути и сила $\vec{F}_{\text{г}}$ давления газа. $|\vec{F}_{\text{р}}| = p_{\text{р}} S_{\text{р}}$, $|\vec{F}_{\text{г}}| = p_{\text{г}}(S - S_{\text{р}})$, где $p_{\text{р}}$, $p_{\text{г}}$ — давления ртути и газа, $S_{\text{р}}$ — площадь поршня, покрытая ртутью.

Давление газа равно

$$p_{\text{г}} = \frac{kRT}{V_{\text{г}}} = \frac{kRT}{V - V_{\text{р}}},$$

где $V_{\text{г}}$ — объем, занимаемый газом. Поскольку поверхность границы ртуть — газ искривлена, давление «под» этой поверхностью, то есть давление газа, больше, чем давление «над» ней, то есть давление ртути. Найдем давление ртути.

Рассмотрим малый участок поверхности границы ртуть — газ (рис. 16). Поскольку $r \gg h$, можно считать, что эта поверхность — поверхность полуцилиндра. Выделим мысленно параллелепипед, в который вписывается эта поверхность (см. рис. 16). На него действуют сила давления газа $|\vec{f}_{\text{г}}| = p_{\text{г}} s = p_{\text{г}} lh$, сила давления ртути $|\vec{f}_{\text{р}}| = p_{\text{р}} s = p_{\text{р}} lh$ и силы поверхностного натяжения ртути $|\vec{f}_{\text{пов}}| = \sigma l$. Из условия равновесия этого параллелепипеда следует, что

$$p_{\text{г}} lh = p_{\text{р}} lh + 2\sigma l,$$

откуда

$$p_{\text{р}} = p_{\text{г}} - \frac{2\sigma}{h}.$$

Силы, с которыми газ и ртуть давят на поршень, равны

$$|\vec{F}_{\text{г}}| = p_{\text{г}}(S - S_{\text{р}}) = \frac{kRT}{V - V_{\text{р}}}(S - S_{\text{р}}),$$

$$|\vec{F}_{\text{р}}| = p_{\text{р}} S_{\text{р}} = \left(\frac{kRT}{V - V_{\text{р}}} - \frac{2\sigma}{h}\right) S_{\text{р}}.$$

Поскольку $h \ll r$, можно считать, что $S_{\text{р}} = V_{\text{р}}/h$. Учитывая, что $h = V/S$, найдем полную силу, действующую на поршень снизу:

$$|\vec{F}_{\text{г}}| + |\vec{F}_{\text{р}}| = p_{\text{ср}} S = \frac{kRT}{V - V_{\text{р}}} S - \frac{2\sigma V_{\text{р}} S^2}{V^2},$$

где $p_{\text{ср}}$ — среднее давление на поршень снизу. Отсюда

$$p_{\text{ср}} = \frac{kRT}{V - V_{\text{р}}} - \frac{2\sigma V_{\text{р}} S}{V^2}.$$

Среднее давление равно нулю при условии

$$\frac{kRT}{V-V_p}=\frac{2\sigma V_p S}{V^2},$$

то есть $p_{ср}=0$ при

$$T=\frac{2\sigma V_p S\,(V-V_p)}{V^2 kR}.$$

С. Семенчинский

◆

Ф507. *Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин — 3 мм и 9 мм, длины — 1 см и 7 см, диаметры проволок — 0,2 мм и 0,6 мм. Жесткость первой пружины 0,14 Н/см. Найти коэффициент жесткость второй пружины.*

Заметим, что отрезок второй пружины длиной 3 см геометрически подобен первой пружине — все его размеры точно в три раза больше. Посмотрим, как соотносятся жесткости подобных пружин, изготовленных из одного материала.

Жесткость пружины однозначно определяется ее геометрической конфигурацией и упругими свойствами материала, из которого она изготовлена. Будем искать формулу, определяющую жесткость k, справедливую для любой пружины, геометрически подобной первой. Конфигурация такой пружины полностью определена, как только задан какой-либо один ее размер, например, диаметр витка D. Действительно, любой другой размер может быть получен из соответствующего размера первой пружины путем умножения на коэффициент подобия $n=D/D_1$, где D_1 — диаметр первой пружины. А упругие свойства материала характеризуются модулем Юнга E.

Воспользуемся теперь соображениями размерности. Из величин E (размерность $[E]=$ Н/м²) и D (размерность $[D]=$ м) можно составить единственную комбинацию с размерностью k (размерность $[k]=$ Н/м): ED. Значит,

$$k=cED,$$

где c — безразмерная величина, зависящая от параметров пружины, то есть $c=f\left(\frac{l}{D},\ \frac{d}{D}\right)$. Определить значение c методом размерностей невозможно. Однако нам достаточно того факта, что для всех пружин, геометрически подобных первой, значение c одно и то же.

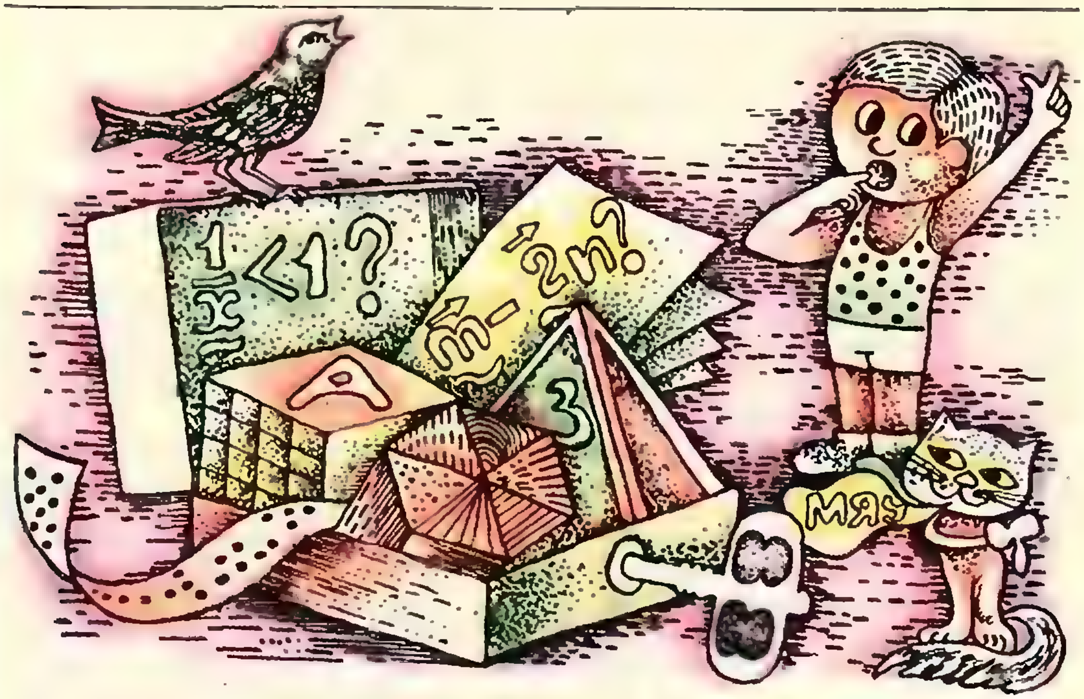
Этот вывод позволяет нам определить жесткость k_3 пружины, геометрически подобной с коэффициентом подобия $n=3$ первой пружине с жесткостью $k_1=0{,}14$ Н/см

$$k_3=3k_1=0{,}42\ \text{Н/см}.$$

Теперь сравним пружину с жесткостью k_3 и вторую пружину из условия задачи, жесткость которой k_2 надо найти. Все их параметры, за исключением длины, одинаковы, так что меньшую из них можно представить в виде трех последовательно соединенных пружин длиной 1 см, а бо́льшую — в виде семи таких пружин. Следовательно, под действием одной и той же силы $\vec{F}$ удлинение $x_3=|\vec{F}|/k_3$ меньшей пружины и удлинение $x_2=|\vec{F}|/k_2$ большей пружины относятся как 3 : 7. Следовательно,

$$k_2=\frac{3}{7}k_3=0{,}18\ \text{Н/см}.$$

А. Кузнецов, С. Кузнецов


1/x < 1?
m-2n?
3
МЯУ

А. Земляков

Еще 17 вопросов

Мы вновь предлагаем читателям проверить себя: из пяти данных на каждый вопрос ответов: а, б, в, г, д — выберите единственный верный. Постарайтесь уложиться в 30 минут.

VIII класс

1. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $\frac{1}{x} < 1$?

а) $]1; +\infty[$, б) $]0; 1[$, в) $]-\infty; 0[$, г) $]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$, д) $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$.

2. Какая из указанных функций является обратной к функции $y=-2x+2$?

а) $y=2x-2$, б) $y=\frac{1}{2}x+1$, в) $y=-\frac{1}{2}x+1$, г) $y=-\frac{1}{2}x-1$, д) $y=-\frac{1}{2}x-2$.

3. При какой наибольшей погрешности измерения стороны a квадратного участка граница относительной погрешности вычисленной затем площади не превосходит 1%, если грубое измерение дало $a \approx 100$ м?

а) 1 м, б) 0,5 м, в) 0,01 м, г) 0,05 м, д) 10 м.

4. Сколько существует бесконечных геометрических прогрессий, 1-й и 17-й члены которых оба равны —1?

а) ни одной, б) одна, в) две, г) четыре, д) бесконечно много.

5. Чему равно значение cos 210°?

а) $\sqrt{3}/2$, б) $-\sqrt{3}/2$, в) $1/2$, г) $-1/2$, д) это значение не определено.

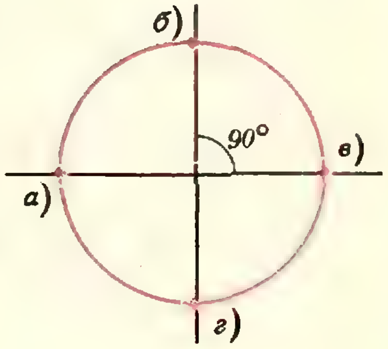


Рис. 1.

6. Какая из указанных на рисунке 1 точек (*а*, *б*, *в*, *г*) является образом точки а при повороте $R_0^{-1890°}$?

а) — г) см. рис. 1, д) нужная точка не указана.

7. Длины трех сторон треугольника равны 2, 3 и 4. Каков вид этого треугольника?

а) тупоугольный, б) прямоугольный, в) остроугольный, г) по длинам сторон определить нельзя, д) такого треугольника не существует.

8. Отношение периметров двух правильных треугольников равно 2. Чему равно отношение площадей этих треугольников?

а) 1, б) 2, в) $\sqrt{2}$, г) 3/2, д) 4.

9. На рисунке 2 заданы векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Какому из указанных на рисунке векторов (*а*, *б*, *в*, *г*) равна разность $\vec{m}-2\vec{n}$?

а) — г) см. рис. 2, д) эта разность равна $\vec{0}$.

IX класс

10. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $|x+1|>1$?

а) $]0; +\infty[$, б) $]0; 2[$, в) $]-2, 0[$, г) $]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$, д) $]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[$.

11. Сколькими способами из 100 деталей можно выбрать партию из 10 штук для контроля качества?

а) P_{10}, б) P_{100}, в) A_{100}^{10}, г) C_{100}^{10}, д) 10^{10}.

12. Чему равен предел функции $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ при $x\to 1$?

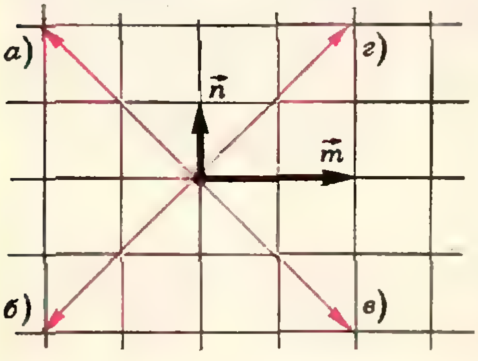


Рис. 2.

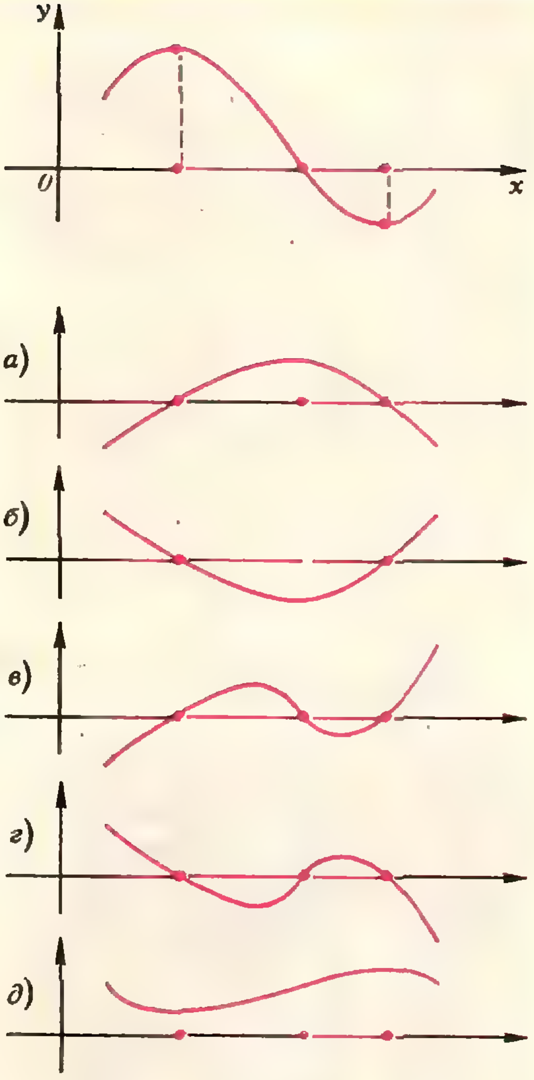


Рис. 3.

а) 0, б) 1, в) 3/2, г) 1/2, д) этот предел не существует.

13. На рисунке 3 сверху изображен график функции $y=f(x)$. Какой из расположенных под ним графиков (а, б, в, г, д) может являться графиком производной функции f, т. е. функции $y=f'(x)$?

14. Сколько существует плоскостей, проходящих через данную точку и параллельных двум данным скрещивающимся прямым?

а) ни одной, б) одна, в) две, г) четыре, д) бесконечно много.

15. Какие из указанных на рисунке 4 фигур 1, 2, 3 могут являться параллельными проекциями куба?

а) все три, б) только 1, в) только 3, г) 2 и 3, д) 1 и 3.

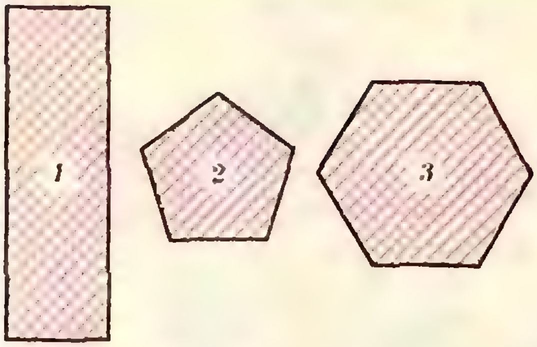


Рис. 4.

16. На рисунке 5 изображен параллелепипед. Каково разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, б) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, в) $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, г) $-\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$, д) нужное разложение не указано.

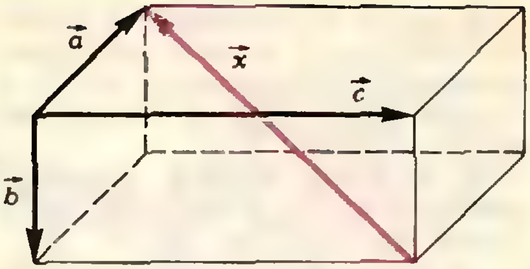


Рис. 5.

17. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны $a=1$, $b=2$. Чему равно скалярное произведение $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$?

а) 0, б) 3, в) 5, г) -3, д) ответ зависит от угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

(*Начало см. на с. 12*)

(Свердловск) 6, 8—4, 5а); *Г. Кисилев* (Татищево Саратовской обл.) 6; *С. Колпаков* (р/п Чернышковский Волгоградской обл.) 9; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) 9, 2; *О. Кравец* (Воронеж) 9; *С. Кузнецов* (Ангарск) 6—9, 0б), в), 1—3; *Е. Кузьмин* (Череповец) 6, 9, 0б), в), 2, 3, 5а); *А. Кулеско* (Донецк) 6, 9, 0б), в), 1, 3; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 9, 0б), в); *Ю. Лапуста* (Тернополь) 6, 8, 9, 0б), в), 3; *В. Лашкин* (Киев) 6, 9; *Л. Левитов* (Москва) 7, 9, 0б), 2, 3, 5а), б); *И. Лещенко* (Херсон) 9; *А. Логинов* (Ташкент) 9; *Д. Людмирский* (Киев) 9; *Г. Манташян* (Ереван) 9; *К. Манукян* (Тбилиси) 3; *С. Мардаев* (Кемерово) 2; *В. Матчишин* (Целиноград) 9, 2, 3, 5а); *В. Машевский* (Одесса) 6, 9; *Р. Мешойрер* (Москва) 6, 9, 3, 5а); *А. Миндлин* (Саратов) 9, 0б), в); *Д. Миндлик* (Ташкент) 6—9; *С. Морейно* (Москва) 9; *В. Морштейн* (Харьков) 6, 9, 0б); *Т. Мынбаев* (Алма-Ата) 6, 9; *Е. Мясников* (Канаш) 6, 9; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 6—9, 0б), в), 1—3, 5а); *С. Новиков* (Херсон) 6, 9, 3, 5а); *А. Новоселя* (Ташкент) 1; *А. Опарин* (Горький) 6, 9, 2, 3; *И. Ориняк* (Бурштын) 9, 0б), в); *С. Осенний* (Киев) 9; *А. Павенис* (п/о Ногале Лат. ССР) 6; *А. Паланджян* (Ереван) 9; *Л. Петрусевич* (д. Козлы Минской обл.) 6, 9; *С. Печенкин* (Алма-Ата) 9; *В. Подстригач* (Львов) 9, 3; *А. Попелюхин* (Киев) 6, 9, 0б), в); *С. Пошехонов* (Энгельс) 7; *В. Прилугов* (Барнаул) 3; *В. Процишин* (с/з Бобровский Павлодарской обл.) 6, 7, 9, 3; *Г. Пуричамиашвили* (Тбилиси) 6, 9; *В. Радченко* (Киев) 6, 9, 0б), в), 3; *З. Райхштейн* (Ярославль) 6, 7, 9, 0б), в); *В. Решетников* (Муром) 1, 2; *И. Ройзман* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 6, 7, 9, 0б); *А. Ролдугин* (Воронеж) 2; *Т. Рыльская* (Москва) 9; *И. Савенков* (р. п. Лысые горы Саратовской обл.) 6, 7, 9, 0в); *С. Сазонов* (Уфа) 9, 1; *С. Севастюк* (Невинномысск) 9; *М. Севрюк* (Москва) 6—5; *П. Селиванов* (Семипалатинск) 6, 0б), в); *А. Сивацкий* (Ленинград) 6, 7, 9, 0б), 3, 4а), б), 5а); *А. Сивенцев* (Свердловск) 6; *С. Сидоренко* (Брянск) 3, 5а); *В. Скричевский* (Киев) 6, 9; *А. Смыслов* (Конаково) 6, 9; *А. Сромин* (Ленинград) 9; *С. Стадниченко* (Пенза) 6, 9, 3, 5а); *М. Стрешинский* (Донецк) 6; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 6, 9; *Ф. Сухочев* (Ташкент) 6—9, 2, 3, 5а); *О. Тавчень* (Минск) 9; *А. Тартаковский* (Москва) 6—3, 4б), 5а); *К. Таталян* (Ереван) 8, 9, 1, 5а); *С. Тихомиров* (Москва) 9; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 6; *В. Трухин* (В. Уфалей) 6, 9; *О. Трушин* (Кострома) 6; *К. Туйтеев* (Ходжейли) 6; *Д. Тураев* (Горький) 1, 3, 5а); *О. Тюрина* (Павлодар) 0б), в); *В. Уманский* (Баку) 6, 9, 1—3, 5а); *Н. Федин* (Омск) 2; *Г. Фирсова* (Ленинград) 6, 9, 1, 3, 5а); *Т. Хайбулин* (Загорск) 6, 9, 2, 5а); *С. Хлебутин* (Москва) 6, 7, 9, 1—3, 4а), б); *С. Хосид* (Алма-Ата) 1—3; *Ю. Церковский* (Москва) 9; *А. Чаплыгин* (Николаев) 7, 9, 1, 3; *П. Чеботарев* (Москва) 6, 9; *И. Черная* (Ленинград) 6, 9, 3; *М. Чикин* (Воронеж) 6, 9, 0б); *В. Шаблинский* (Киев) 9, 0б), в); *А. Шихкеримов* (Сумгаит) 6; *Е. Шкляр* (Гомель) 9, 5а); *А. Ялышев* (Тула) 0б); *Н. Ярошенко* (с. Устивица Полтавской обл.) 9.

Физика

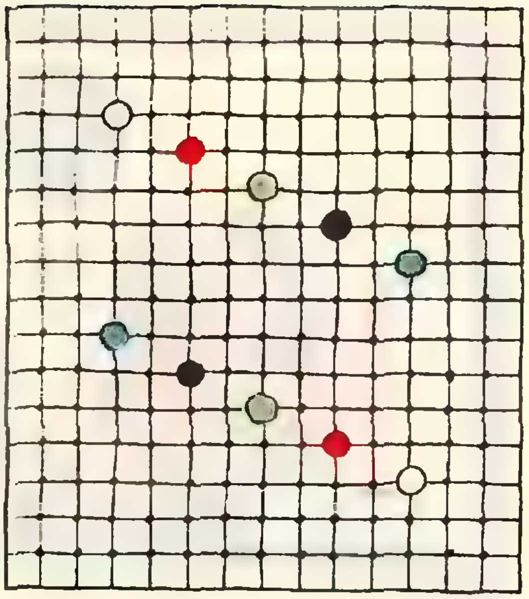
Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф493—Ф507**, справились с задачами **Ф493**, **Ф499** и **Ф504**. Остальные задачи правильно решили: *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) 0; *К. Ако-*

(*Продолжение см. на с. 41*)

«Квант» для младших школьников

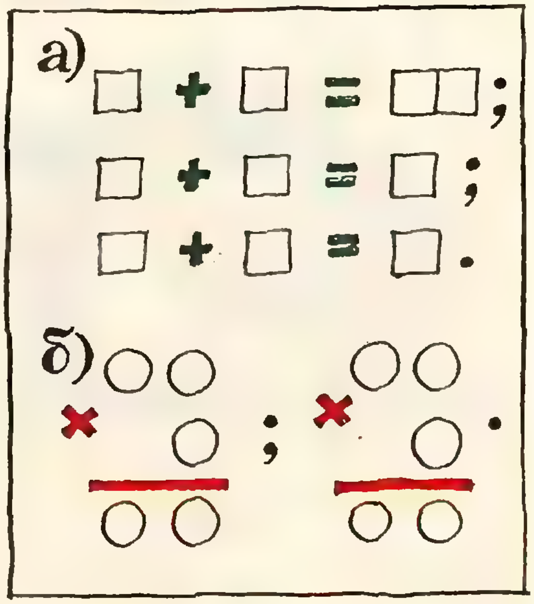
Задачи

1. **Разноцветные точки.** Внутри прямоугольника в узлах сетки расположены разноцветные точки (см. рисунок). Соедините точки одинакового цвета непересекающимися ломаными одинаковой длины так, чтобы звенья ломаных были параллельны сторонам прямоугольника, а длина ломаной — максимальной.



2. **Десять цифр.** а) Впишите в квадратики цифры от 0 до 9 так, чтобы получились три верных примера на сложение.

б) Впишите в кружочки цифры от 0 до 9 так, чтобы получились два верных примера на умножение.



3. Квадрат составлен из $(n+1)^2$ квадратных клеточек. Некоторые клеточки закрашиваются в черный цвет. Докажите, что всегда можно так закрасить $3n$ клеточек, чтобы при любом вычеркивании $n-1$ столбцов и $n-1$ строк квадрата оставалась по крайней мере одна белая клеточка.

4. На пионерском слете выяснилось, что каждый мальчик знаком ровно с n девочками и каждая девочка знакома ровно с n мальчиками. Докажите, что на слет прибыло одинаковое количество девочек и мальчиков.

ПРИВЕТ УЧАСТНИКАМ СЛЕТА!

В. Махров

Старые знакомые

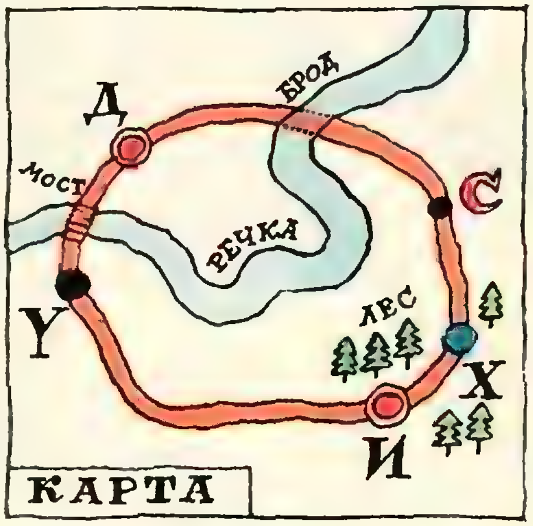
На небольшой площади Города Игрушек собрались пятеро всем известных героев: Винни-Пух, Пятачок, старуха Шапокляк, Крокодил Гена и Ежик. Да-да, тот самый Ежик, который в тумане потерял узелок с банкой варенья.

Еще вчера они договорились навестить Чебурашку, отдыхавшего у бабушки в деревне. Из Города Игрушек в деревню ведут две дороги одинаковой длины: через город X и через город Y. Дорога через город X проходит по лесу, и Ежик предложил пойти по ней. Было лето, и никто не возразил. Растянувшись в цепочку, друзья отправились в путь. Вы, наверное, уже догадались, что с собой они прихватили горшочек меда, воздушный шарик, узелок с банкой варенья, рогатку и, конечно же, гармошку. Правда, немножко странным было то, что каждый путешественник держал в руках совсем не свой предмет. Но все они были большими друзьями и не обратили на это внимания.

Впереди шагал Винни-Пух, за ним почти бежал Пятачок, за ним, не отставая, — старуха Шапокляк. Не теряя из виду Крокодила Гену, последним бежал Ежик.

— Между прочим, — сказал вдруг Пятачок, — по другой дороге (мимо города Y) через речку, которую сейчас нам придется переходить вброд, есть мост.

— Тогда почему же мы не пошли той дорогой? — недовольно проворчала старуха Шапокляк.



— Не ссорьтесь, — пробасил Крокодил Гена. — Лучше помогите мне решить задачу, имеющую отношение к нашему путешествию.

Известно, что дорога из X в Y через Город Игрушек короче, чем через чебурашкину деревню. Кроме того, известно, что город Y ближе к деревне, чем к Городу Игрушек. Нужно выяснить, сколько всего имеется различных по длине участков между тремя городами и деревней, и расположить эти участки в порядке возрастания их длины.

— Я знаю, как решать эту задачу, — сказал Винни-Пух, рисуя на песке кольцевой маршрут YY (см. рисунок). — Обозначим буквой C середину кольцевого маршрута YY, буквой *И* — Город Игрушек, буквой *Д* — деревню. Очевидно, что город X находится на участке *СИ*.

— Мне это вовсе не очевидно, — вновь пробурчала старуха Шапокляк.

Не обращая на нее внимания, Винни-Пух продолжал:

— Буквами a, b, c и d обозначим длины участков, соответственно, между X и *Д*, X и *И*, Y и *Д*, Y и *И*. По условию задачи $c < d$. Нетрудно показать, что участки *СИ* и *ДY* одинаковы по длине. Из того, что X лежит на участке *СИ*, следует, что $b < c$. Мы получаем такую систему:

$$\begin{cases} a+b=c+d, \\ d+b<c+a, \\ c<d, \\ b<c. \end{cases}$$

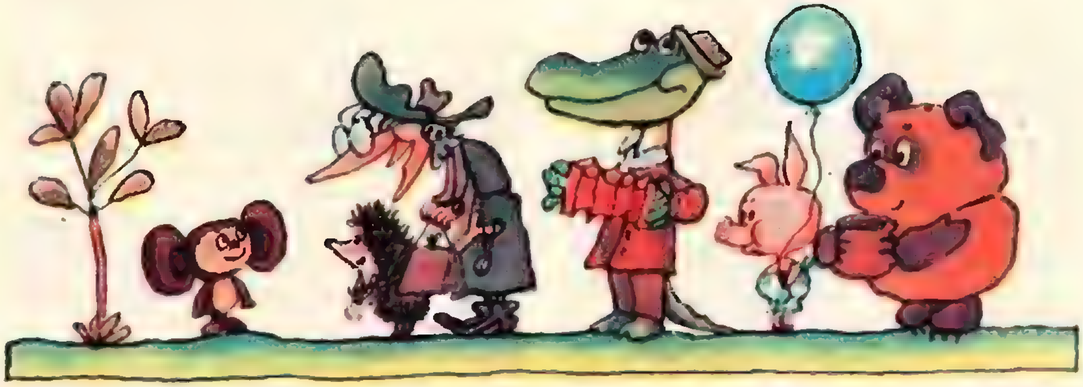
— Дальше можешь не рассказывать, — перебил Винни-Пуха Крокодил Гена. — Я уже могу дорешать эту задачу.

— А почему ты не решаешь задачу? — спросил Пятачок у Ежика.

— Потому что я придумал другую задачу; давайте предложим ее Чебурашке. Послушайте ее условие. Мы скажем Чебурашке, кто за кем шел, но не скажем, кто какие вещи нес. Однако скажем ему, что Гена не нес гармошку, а если я, Ежик, перебегу на новое место и стану между теми из вас, кто несет горшочек меда и узелок с вареньем, то рядом с тем, кто несет варенье, будет тот, кто несет гармошку, а тот, кто несет воздушный шарик, будет точно посередине. Чебурашка должен будет выяснить, какой предмет нес каждый из нас.

Вы прочитали шуточный рассказ про Винни-Пуха, Пятачка и их друзей. Можете ли вы объяснить старухе Шапокляк, почему город X лежит на участке *СИ*, и помочь Чебурашке решить задачу Ежика? Догадались ли вы, как Крокодил Гена должен «дорешать» свою задачу, и какой в ней ответ?

Мы ждем ваших писем.



Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже мы публикуем варианты вступительных письменных экзаменов по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1978 г.

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. Решить уравнение

$$\log_{(2-2x^2)}(2-x^2-x^4)=2-\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}.$$

2. В плоскости даны квадрат $ABCD$ (с последовательно обозначенными вершинами) и точка O. Известно, что

$$|OA|=|OC|=10,\quad |OD|=6\sqrt{2}$$ и

длина стороны квадрата не превосходит 3. Найти площадь квадрата. Где расположена точка O — вне или внутри квадрата?

3. Найти все значения параметра c, при которых система

$$\begin{cases} -4x+cy=1+c,\\ (6+c)x+2y=3+c \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

4. Изготовлено некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на которые умещается по 800 м проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. Если пользоваться только катушками, на которые умещается по 900 м проволоки, то таких катушек понадобится на 3 меньше, а одна катушка снова будет намотана не полностью. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которые умещается по 1100 м, то таких катушек понадобится еще на 5 меньше, но при этом все катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было изготовлено?

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y=5ax-\sin 8x-a\cdot\sin 3x-3x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Найти все корни уравнения

$$|x^2+2x-4|+2x+6=0,$$

удовлетворяющие неравенству $x+\sqrt{18}<1$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине B имеет величину 90°, а диагональ BD является биссектрисой этого угла. Известно, что $\frac{|AB|}{2}=\frac{|BD|}{4\sqrt{2}}$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Решить уравнение

$$\log_{3x}\left(31x-\frac{3}{x}\right)=\frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(3x)}+3.$$

4. Имеется три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй содержит 10% висмута, 40% олова и 50% свинца, третий содержит 30% висмута и 70% свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом новом сплаве?

5. Найти множество всех действительных чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x)=16(b+1)\sin x-\sin 2x-(16b^2+32b-10)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и не имеет критических точек.

Факультет психологии

1. Решить уравнение

$$\left(\log_3\frac{3}{x}\cdot(\log_3 x)-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_3\sqrt{x}.\right.$$

2. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если $|BD|=2$, $|AB|=1$, $\overset{\frown}{ABD}:\overset{\frown}{DBC}=4:3$.

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

4. Найти множество всех таких пар действительных чисел (a, b), для каждой из которых при всех $x\in R$ справедливо равенство

$$a(\cos x-1)+b^2=\cos(ax+b^2)-1.$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x)=ax^2+bx+c,\quad a\neq 0$$

выполнены неравенства

$$f(-1) < 1,\ f(1) > -1,\ f(3) < -4.$$

Определить знак коэффициента a.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, а остальные — юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств юноши второй бригады и члена первой бригады меньше 9 часов. Сколько человек в каждой бригаде?

2. В Изумрудном городе автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000001 до 999999. Школьники называют билет счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, вторые три цифры четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько всего существует различных номеров счастливых билетов?

3. Решить уравнение

$$5\sin x + 6\sin 2x + 5\sin 3x + \sin 4x = 0.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}.$$

5. Пятиугольник $ABCDE$ (вершины обозначены последовательно) вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = 45°$, $\widehat{EBD} = 30°$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

И. Горев

(Начало см. на с. 12, 36)

пян (Ереван) **94, 98, 5—7**; *Е. Александрова* (Глазов) **97, 0**; *В. Антимиров* (Рига) **98, 0**; *А. Атландеров* (Тольятти) **97**; *И. Ахметов* (Димитровград) 98, 0, 3, 7; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **94**; *А. Балашкин* (Киев) **95, 96**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **94, 95, 97, 98, 0—3**; *А. Белов* (Москва) **94, 95, 0**; *А. Беляев* (Витебск) **95**; *В. Болотников* (Харьков) 3, 7; *А. Болтаев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **0**; *С. Бортников* (Крымск) 0; *С. Брехачев* (Таганрог) 95; *А. Бродин* (Киев) **0—3, 6, 7**; *С. Буга* (Москва) **3**; *В. Будников* (ст. Старотитровская Краснодарского кр.) **3, 5**; *Р. Будяшкин* (Свердловск) **0**; *М. Валейко* (Киев) **97**; *А. Винник* (Москва) **0**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **94, 95, 97, 98, 0—3, 5, 7**; *М. Гольцман* (Днепропетровск) **5**; *В. Гревцев* (Таллин) **97**; *Ш. Давлетов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **1**; *С. Долженко* (Донецк) **5**; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) **94, 95, 97, 1**; *И. Дубовой* (Алма-Ата) **97, 0**; *С. Дынник* (Тараклия) **94, 95**; *И. Дятчин* (Москва) **3**; *М. Ермолаев* (Кострома) **5**; *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского кр.) **7**; *В. Жердочкин* (Орск) **1**; *К. Жуков* (Москва) **98, 1, 3, 5, 7**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **94, 0**; *Е. Зудин* (Александров) **98, 5, 7**; *Е. Иванов* (Долгопрудный) **94, 95, 97**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **97**; *С. Калашников* (Рязань) **0**; *А. Карнаухов* (п. Кутана ЯАССР) **95, 97, 98**; *О. Карраш* (Лида) **1**; *В. Кельман* (Москва) **97, 1**; *В. Ковтуненко* (Киев) **97**; *Е. Коган* (Днепропетровск) 3; *Н. Коган* (Харьков) **95, 97**; *Ю. Кокуш* (Тамбов) **98, 0, 1**; *Е. Коломейский* (Винница) **95**; *Д. Коломейцев* (Сумгаит) **1**; *К. Колчев* (с. Андреевка Московской обл.) **1—3**; *В. Комов* (Александров) **94—96, 98**; *К. Кондратьев* (Москва) **98, 0, 1, 3**; *Г. Корчемский* (Кишинев) **95, 98, 0, 1**; *О. Кравец* (Воронеж) **0**; *Р. Криштул* (Бобруйск) **98, 1**; *А. Крупцев* (Курск) **98, 0, 1**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **0**; *А. Куприн* (Москва) **94, 98, 0, 1**; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) **98, 1**; *Т. Кухтина* (Киев) **95, 0, 1**; *А. Кучер* (Донецк) **1**; *Е. Лапин* (Алма-Ата) **97, 98, 1**; *В. Лашкин* (Киев) **94, 95, 97, 98, 5—7**; *А. Лебедев* (Горький) **0**; *А. Левченко* (Свердловск) **95, 98, 1**; *А. Леонович* (Лида) **1**; *В. Линьков* (Калуга) **7**; *Д. Людмирский* (Киев) **94, 97, 98, 1**; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) **0, 1**; *Ф. Махров* (д. Тойшлево ЧАССР) **0**; *С. Медведев* (Москва) **96**; *Р. Мешойрер* (Москва) **95, 98, 1**; *А. Миклева* (Саратов) **97, 0, 1**; *С. Миклова* (Борщовский р-н Тернопольской обл.) **0**; *Н. Миронов* (Кашин) **95**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **97, 98**; *А. Могильнер* (Свердловск) **97, 0, 1**; *А. Молотовщиков* (Тейково) **97, 98, 0, 1**; *И. Молчанов* (Киев) **98, 0, 1**; *М. Морозов* (Ашхабад) **5**; *Д. Мошинский* (Москва) **0**; *Д. Муратов* (с. Дрожжаное ТАССР) **95, 98**; *С. Муртчиев* (Махачкала) **0**; *А. Муромцев* (Москва) **95, 97, 1**; *П. Натанов* (Москва) **97, 98, 0**; *Л. Николаев* (Москва) **95, 97**; *А. Оглоблин* (Иркутск) **98, 0**; *А. Омельчук* (Истра) **2, 3, 5—7**; *И. Омелян* (Львов) **98, 0, 1**; *А. Опарин* (Горький) **95, 97, 98, 0—3, 5, 6**; *В. Остапенко* (Алма-Ата) **98, 0**; *Т. Павелкина* (Киев) **98, 1**; *А. Павлов* (Узловая) **97**; *О. Пензин* (Ленинск-Кузнецкий) **0**; *С. Пермяков* (Раздельная) **97**; *А. Перов* (Москва) **0, 1**; *И. Петренко* (Поти) **98, 1**; *Р. Петренко* (Киев) **95, 97**; *С. Прядкин* (Киев) **97, 0, 1, 5**; *В. Редикульцев* (Москва) **3**; *М. Рейтман* (Москва) **0, 1**; *В. Ре тников* (Муром) **0**; *А. Родин* (Великие Луки) **95, 97**; *И. Романов* (Москва) **94**; *И. Романовский* (Лида) **94, 95, 0**;

(Окончание см. на с. 53)

Л. Табачников

Элементы статики деформируемых тел

При решении задач на статику твердых тел обычно предполагается, что тела абсолютно твердые (не деформируемые). На самом деле все существующие в природе тела под действием приложенных к ним сил деформируются — изменяют свои размеры, а иногда и форму. Оказывается, некоторые положения статики абсолютно твердых тел нельзя применять к деформируемым телам.

Например, в случае абсолютно твердого тела любую силу, не изменяя состояния равновесия тела, можно переносить вдоль линии ее действия. В статике деформируемого тела это недопустимо. Действительно, если сила $\vec{F}$ приложена в точке A (рис. 1, *а*), стержень растянут по всей длине l, при переносе силы в точку B — только по длине l_1 (рис. 1, *б*). Таким образом, хотя равновесие всего стержня сохраняется, удлинение и напряженное состояние стержня при переносе силы $\vec{F}$ вдоль линии ее действия изменяются.

Еще один пример. На рисунке 2 изображен стержень, закрепленный с одного конца. К другому концу приложены две силы, $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, равные по абсолютной величине, противоположные по направлению и лежащие в одной плоскости (их обычно называют *парой сил*). В статике абсолютно твердого тела пару сил, не изменяя состояния равновесия тела, можно переносить в другую плоскость, параллельную плоскости действия пары сил. Для деформируемого тела этого делать нельзя: в первом случае (рис. 2, *а*) пара сил вызывает кручение стержня по всей длине l, а во втором случае (рис. 2, *б*) — лишь по длине l_1.

Кроме деформаций растяжения и кручения на практике встречаются и другие виды деформаций. Ограничимся рассмотрением деформации осевого растяжения (или сжатия).

При рассмотрении условий равновесия деформируемого тела принято все приложенные к телу силы делить на внешние и внутренние (силы упругости). Внешние силы вызывают ускорение одних частей тела относительно других, в

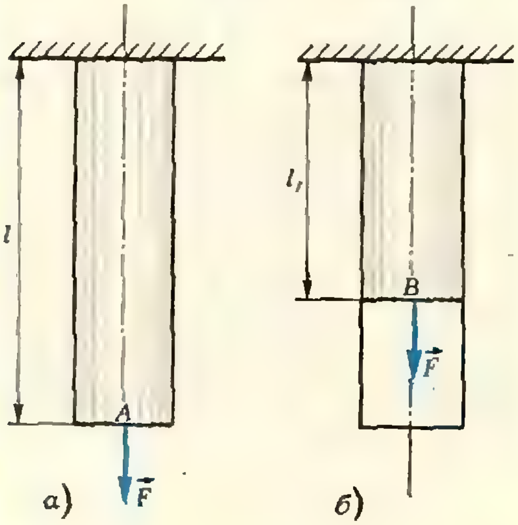


Рис. 1.

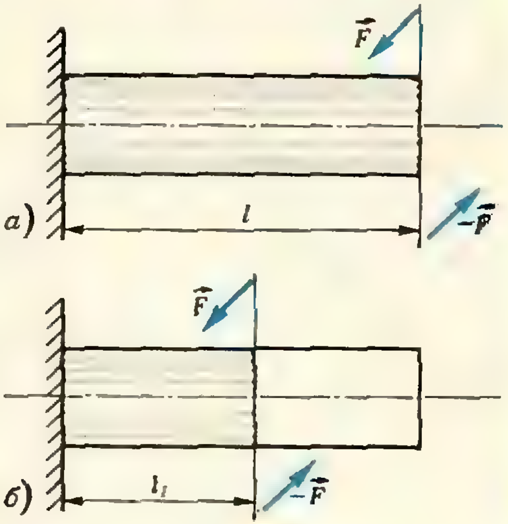


Рис. 2.

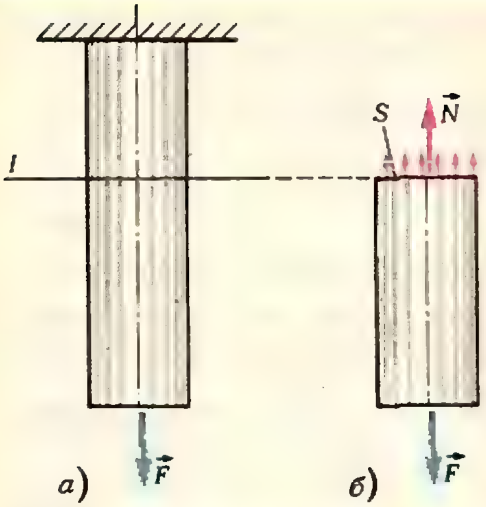


Рис. 3.

результате тело деформируется. Следствием деформации являются силы упругости. Как определить эти силы? Рассмотрим такую задачу:

Задача 1. *К цилиндрическому стержню, закрепленному сверху, в его нижнем сечении приложена сила $\vec F$, направленная вдоль оси стержня (рис. 3, а). Найти внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях стержня. Массой стержня пренебречь.*

Воспользуемся так называемым *методом сечений*. Мысленно рассечем стержень плоскостью I и рассмотрим условие равновесия нижней отсеченной части стержня. Действие верхней части заменим силами реакции, которые и являются внутренними силами.

Обозначим через $\vec N$ равнодействующую всех сил упругости, распределенных по выбранному сечению (рис. 3, *б*). Отсеченная часть стержня находится в равновесии под действием внешней силы $\vec F$ и внутренней силы $\vec N$ (на самом деле для нижней части стержня она является внешней силой):

$$\vec F + \vec N = 0.$$

Проектируя силы $\vec F$ и $\vec N$ на ось, направленную вертикально вверх, получим

$$N + F = 0, \text{ или } N = -F.$$

Если $N>0$, имеет место растяжение, если $N<0$ — сжатие. В данном случае $N>0$ (поскольку $F<0$) — стержень растянут.

* * *

При изучении деформаций растяжения под действием осевых сил (как в рассмотренной задаче) обычно предполагается, что плоские поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси и после деформации. Это позволяет считать, что внутренние силы распределены по всей площади S поперечного сечения тела равномерно. Отношение $\sigma = \frac{|\vec N|}{S}$ называют *напряжением*. Напряжение характеризует внутреннее состояние деформированного тела.

Как показывают опыты, при упругих деформациях (когда деформации исчезают после прекращения действия внешних сил) выполняется закон Гука:

$$|\vec N| = k|\Delta l|,$$

или, в другой форме,

$$\sigma = E|\varepsilon|.$$

Здесь $|\vec N|$ — модуль силы упругости, k — коэффициент упругости, $\Delta l = l - l_0$ — абсолютное удлинение образца (разность между конечной длиной l образца и его начальной длиной l_0), σ — напряжение, E — модуль упругости (модуль Юнга), $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$ — относительное удлинение образца. Модуль упругости E характеризует только материал, из которого сделан образец, а коэффициент упругости k — материал образца и его геометрические размеры.

Для подавляющего большинства материалов закон Гука справедлив только в случае малых деформаций, при увеличении деформации напряжение перестает быть прямо пропорциональным относительному удлинению. При некоторой деформации образец разрушается; соответствующее значение напряжения называют *пределом прочности*. Наибольшее безопасное напряжение, при котором обеспечена прочность образца, называется *допускаемым напряжени-*

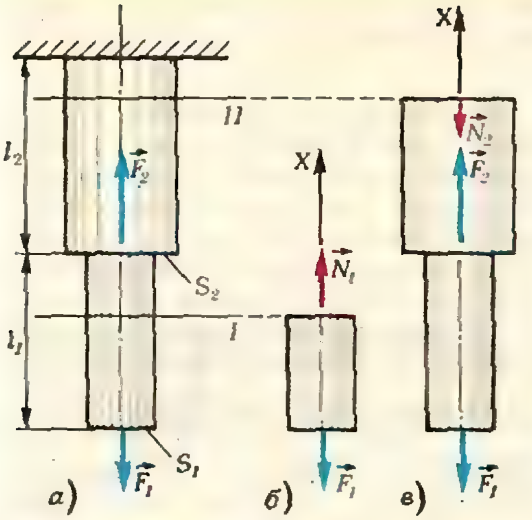


Рис. 4.

ем $\sigma_{доп}$. Допускаемое напряжение определяется опытным путем. Таким образом, условие прочности образца можно записать так:

$$\sigma \leqslant \sigma_{доп}.$$

Решим несколько конкретных задач.

Задача 2. *Определить удлинение стального ступенчатого стержня (рис. 4, а), к которому приложены осевые силы $\vec F_1$ и $\vec F_2$ ($|\vec F_1| = 20$ кН, $|\vec F_2| = 30$ кН). Длины участков стержня равны $l_1=1$ м и $l_2=2$ м, поперечные сечения равны, соответственно, $S_1=1$ см² и $S_2=2$ см², модуль Юнга $E=2\cdot 10^5$ МН/м². Стержень считать невесомым.*

Очевидно, что общее удлинение ступенчатого стержня равно сумме удлинений его участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Для определения Δl_1 и Δl_2 найдем продольные силы упругости $\vec N_1$ и $\vec N_2$, возникающие, соответственно, в нижнем и верхнем участках стержня.

Рассечем стержень плоскостью *I* и запишем условие равновесия отсеченной части стержня в проекциях на ось *X* (рис. 4, *б*):

$$N_1 + F_1 = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = -F_1 = |\vec F_1| = 20 \text{ кН}.$$

Аналогично найдем $\vec N_2$. Проведем плоскость сечения *II* и запишем соответствующее условие равновесия для отсеченной части (рис. 4, *в*):

$$N_2 + F_1 + F_2 = 0,$$

или

$$N_2 = -F_1 - F_2 = |\vec F_1| - |\vec F_2| = -10 \text{кН}.$$

Отрицательный знак у N_2 показывает, что продольная сила $\vec N_2$ направлена вниз; следовательно, в верхнем участке стержень сжат.

В соответствии с законом Гука,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E S_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E S_2},$$

и

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{1}{E}\left(\frac{N_1 l_1}{S_1} + \frac{N_2 l_2}{S_2}\right) = 0{,}5\cdot 10^{-3} \text{ м} = 0{,}5 \text{ мм}.$$

Задача 3. *Груз массы $m=2$ т поддерживают два одинаковых круглых стальных стержня, соединенных шарнирно в узле A и составляющих угол $\alpha=60°$ с вертикалью (рис. 5). Определить диаметр сечения каждого стержня, если допускаемое напряжение для стали $\sigma_{доп}=160$ МН/м².*

Рассмотрим узел *A*. На него действуют три силы: вес груза $\vec{\mathscr P}$ ($|\vec{\mathscr P}| = m|\vec g|$) и силы реакции стержней $\vec R_1$ и $\vec R_2$. Запишем условия равновесия узла *A* в проекциях на оси координат *X* и *Y*:

$$-|\vec R_1|\sin\alpha + |\vec R_2|\sin\alpha = 0,$$

$$|\vec R_1|\cos\alpha + |\vec R_2|\cos\alpha - m|\vec g| = 0.$$

Отсюда

$$|\vec R_1| = |\vec R_2| = |\vec R| = \frac{m|\vec g|}{2\cos\alpha}.$$

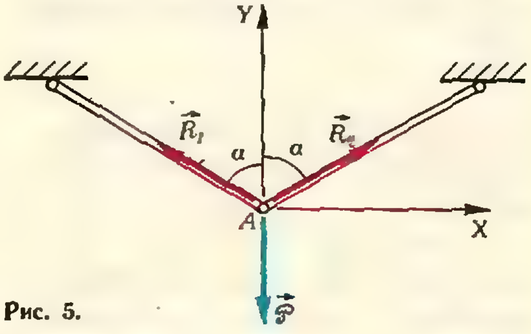


Рис. 5.

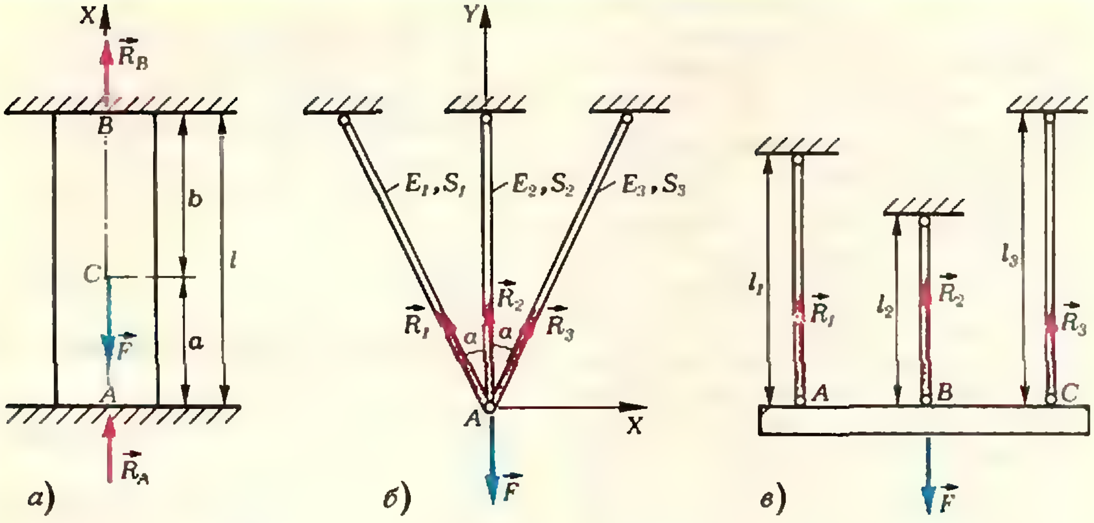


Рис. 6.

Силы упругости $\vec N$, возникающие в каждом стержне, равны по модулю силам реакции:

$$|\vec N| = |\vec R| = \frac{m|\vec g|}{2\cos\alpha}.$$

Из условия прочности стержней следует, что

$$\sigma = \frac{|\vec N|}{S} \leqslant \sigma_{\text{доп}},$$

или

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{|\vec N|}{\sigma_{\text{доп}}} = \frac{m|\vec g|}{2\sigma_{\text{доп}}\cos\alpha}.$$

Тогда диаметр каждого стержня

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \geqslant \sqrt{\frac{2m|\vec g|}{\pi\sigma_{\text{доп}}\cos\alpha}} = 1{,}25\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 1{,}25\ \text{см}.$$

Принимаем $d = 1{,}25$ см.

* * *

В заключение рассмотрим случай, когда задачи статики вообще не могут быть решены, если входящие в системы тела считать абсолютно твердыми. На рисунке 6 приведены примеры трех таких систем. В случае стержня, закрепленного с обоих концов (рис. 6, *а*), для определения двух неизвестных сил реакции $\vec R_A$ и $\vec R_B$ можно записать лишь одно условие равновесия (в проекциях на ось X). В системе, состоящей из трех стержней (рис. 6, *б*), для определения трех сил реакции ($\vec R_1$, $\vec R_2$ и $\vec R_3$) можно записать только два условия равновесия (в проекциях на оси X и Y). Для системы, показанной на рисунке 6, *в*, для определения трех неизвестных сил ($\vec R_1$, $\vec R_2$ и $\vec R_3$) тоже можно записать лишь два условия равновесия (равенство нулю проекций всех сил на вертикальную ось и равенство нулю моментов всех сил относительно, например, точки A).

Такие системы принято называть *статически неопределимыми системами*. Как же в этих случаях найти все неизвестные силы реакции? Оказывается, можно составить дополнительные уравнения, исходя из условий *совместности деформаций*.

Покажем, как решаются подобные задачи.

Задача 4. *В точке C, находящейся на оси цилиндрического стержня, закрепленного с обоих концов, приложена осевая сила $\vec F$ (рис. 6, а). Определить силы реакций опор $\vec R_A$ и $\vec R_B$.*

Запишем условие равновесия стержня в проекциях на ось X:

$$R_A + R_B + F = 0.$$

Для определения двух неизвестных (R_A и R_B) одного уравнения недостаточно. Составим еще одно уравнение — уравнение совместности деформаций (перемещений).

Для этого мысленно освободим стержень от закрепления, например, в нижнем сечении A, и заменим действие закрепления внешней силой $\vec{R}_A$. Обозначим через Δl_1 удлинение стержня (перемещение сечения A) под действием силы $\vec{F}$, а через Δl_2 — удлинение стержня (опять-таки перемещение сечения A) под действием силы $\vec{R}_A$. В действительности стержень не удлиняется (сечение A не перемещается). Следовательно, уравнение совместности деформаций (перемещений) можно записать в виде:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.$$

Значения Δl_1 и Δl_2 найдем из закона Гука (подробнее см. задачу 2), принимая во внимание, что $N_1 = -F = |\vec{F}|$ и $N_2 = -R_A$:

$$\Delta l_1 = \frac{|\vec{F}| b}{ES} \text{ и } \Delta l_2 = -\frac{R_A (a+b)}{ES}.$$

Учитывая, что $a+b=l$, получаем:

$$\frac{|\vec{F}| b}{ES} - \frac{R_A l}{ES} = 0,$$

откуда

$$R_A = |\vec{F}| \frac{b}{l}.$$

Из условия равновесия стержня найдем R_B:

$$R_B = |\vec{F}| - R_A = |\vec{F}| \frac{a}{l}$$

Проекции R_A и R_B положительны; значит, действительные направления сил реакции совпадают с принятыми на рисунке 6, *а*.

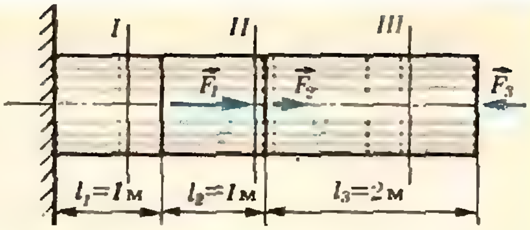


Рис. 7.

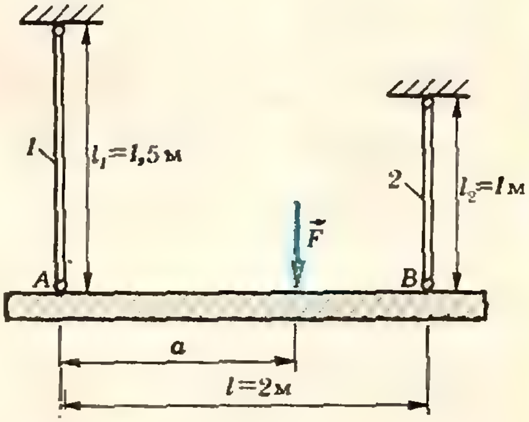


Рис. 8.

Упражнения

1. Определить в сечениях I, II, III напряжения стержня и полное его удлинение, если $|\vec{F}_1| = 40$ кН, $|\vec{F}_2| = 20$ кН, $|\vec{F}_3| = 20$ кН (рис. 7). Стержень стальной ($E=2 \cdot 10^5$ МН/м²), площадь его поперечного сечения $S=10$ см².

2. Жесткий брус AB, деформацией которого можно пренебречь, подвешен горизонтально с помощью стержней 1 и 2 (рис. 8). Стержень 1 — стальной ($E_1 = 2 \cdot 10^5$ МН/м²), его диаметр $d_1 = 2$ см; стержень 2 — медный ($E_2 = 10^5$ МН/м²), его диаметр $d_2 = 2,5$ см. На каком расстоянии a нужно приложить силу $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 30$ кН), чтобы брус остался горизонтальным после деформации стержней? Определить также напряжения в стержнях и высоту, на которую опустится брус AB.

3. Определить силы реакции $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$ статически неопределимой системы, изображенной на рисунке 6, *б*. Принять, что $E_1 S_1 = E_3 S_3$.

(Начало см. на с. 7)

Луноход-1. Изготовлен он был в порядке международного сотрудничества французскими специалистами. Этот отражатель состоит из 14 четырехгранных пирамид, сделанных из плавленого кварца. Отражающие грани каждой призмы покрыты тонким слоем серебра, который предохраняется слоем напыленного кварца; поверхность призм отшлифована с точностью до 0,07 мкм (то есть размеры шероховатостей не превышают 0,07 мкм).

Использование уголковых отражателей, доставленных на Луну, позволило с помощью лазерного лучалокатора измерить расстояние Земля — Луна с очень высокой точностью — до 0,1 м.

Приведенные нами примеры далеко не исчерпывают многообразия применений простого и надежного устройства — уголкового отражателя.

О подготовительных отделениях при вузах

С 1969 года при высших учебных заведениях в соответствии с постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи, демобилизованных воинов Советской Армии.

Ниже мы публикуем статью заведующего подготовительным отделением Московского института электронного машиностроения (МИЭМ) В. Тоняна, рассказывающую о работе этого отделения.

Хорошо известно, что число выпускников средней школы, становящихся непосредственными участниками трудового процесса, растет с каждым годом. Многие выпускники призываются на службу в Вооруженные Силы СССР.

Совершенно очевидно, что несколько лет работы на производстве или службы в армии хотя и формируют характер молодого человека, подготавливают его к сознательному выбору будущей специальности, приводят, тем не менее, к снижению уровня знаний, полученных им в школе. В этом нет ничего страшного и, тем более, зазорного — каждому известно, что без систематического повторения, без постоянной тренировки многие факты забываются, умения и навыки ослабляются и даже совсем утрачиваются.

Поэтому подчас на вступительных экзаменах в вузы рядом оказывались люди совершенно различного социального положения: одни из них уже прошли производственную закалку, сознательно выбрали специальность, зачастую уже поработали по этой специальности, но имеют пробелы в знаниях, другие — вчерашние школьники — имеют свежие, отрепетированные знания, но не слишком глубокие, как правило, представления о выбираемой ими профессии. Следовательно, школьники имели фактически весьма существенные преимущества перед первой категорией поступающих.

Такое положение требовало мер по оказанию реальной помощи при поступлении в вузы молодым производственникам и вчерашним солдатам. Организация подготовительных отделений при вузах преследует именно эту цель.

На подготовительное отделение принимаются лица с законченным средним образованием из числа передовых рабочих, колхозников и демобилизованных из рядов Вооруженных Сил СССР. Рабочие и колхозники, направляемые на подготовительное отделение, должны иметь стаж работы не менее одного года, т. е. полных 12 месяцев ко дню начала занятий. Направленные на подготовительное отделение представляют заявление, направление на подготовительное отделение (подписанное руководителем предприятия или командиром войсковой части), документ о среднем образовании (в подлиннике), характеристику, 6 фотографий (снимок без головного убора, размером 3×4 см^2) и медицинскую справку о состоянии здоровья (форма № 286).

Демобилизованный, не имеющий направления от командования воинской части и вернувшийся работать на то же предприятие, где он работал до призыва в армию, может поступить на подготовительное отделение по направлению этого предприятия, если общий стаж его работы на данном предприятии составляет не менее одного года по совокупности — до службы в армии и после демобилизации.

Очень часто можно столкнуться с мнением, что на подготовительные отделения поступить так же трудно, как и в вузы, что от поступающих требуются знания в объеме программы вступительных экзаменов в вузы. Это совершенно не соответствует действительности. Само существование подготовительных отделений предполагает, что на него принимаются лица, имеющие определенные пробелы в знаниях, и задача подготовительных отделений как раз и состоит в том, чтобы эти пробелы ликвидировать, помочь слушателям восстановить утраченные знания, а также овладеть новым материалом, необходимым для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Прием на подготовительное отделение производится путем индивидуального устного собеседования, целью которого является не столько выяснение объема знаний поступающего на отделение, сколько выявление его потенциальных возможностей, общего уровня развития, выявление степени сознательности выбора им данного вуза. Особо ценится при этом более или менее близкое знакомство с выбранной им специальностью, практическая работа по избранной специальности. Собеседование проводится по двум — трем предметам из числа изучаемых на подготовительном отделении данного института. В МИЭМе, например, такими предметами являются математика и физика.

Расскажем более подробно про подготовительное отделение при нашем институте.

В МИЭМе занятия на подготовительном отделении происходят с отрывом от производства в течение восьми месяцев —с 1-го декабря по конец июля. Форма обучения только дневная. Система занятий максимально приближена к вузовской: для слушателей читаются лекции, проводятся практические занятия; они пишут контрольные работы, сдают зачеты, коллоквиумы. При проведении контрольных мероприятий широко используется современная вычислительная техника, специально сконструированная для этой цели.

Обучение на подготовительном отделении проводится по специально разработанным программам, предусматривающим более глубокое, комплексное изучение школьного курса.

Все слушатели отделения пользуются такими же правами, как и студенты института. Они получают стипендию — такую же, как студенты-первокурсники, пользуются лабораториями института, библиотекой, на них распространяются льготы для проезда по железной дороге и при полетах на самолетах.

Занятия проходят в зданиях института. На отделении изучаются математика, физика, русский язык и литература, предусмотрены также занятия физической культурой.

Студенты нашего подготовительного отделения являются, можно сказать, студентами «нулевого» курса и живут полнокровной студенческой жизнью. А студенческие годы — это не только годы упорного труда в аудиториях, лабораториях, библиотеках, но и время интересных дел, время задорных студенческих песен, романтики строительных отрядов. В летние и зимние каникулы большинство слушателей вместе со студентами института выезжают в спортивно-оздоровительный лагерь института, расположенный на живописном берегу Рузского водохранилища. В лагере проходят тренировки спортсменов — членов сборных команд института.

В конце обучения слушатели сдают выпускные экзамены. Эти экзамены имеют целью выявить уровень усвоения слушателями пройденной программы, определить, насколько они готовы к дальнейшему обучению в вузе. Экзамены коренным образом отличаются от вступительных прежде всего тем, что они не носят конкурсного характера: все, сдавшие выпускные экзамены, зачисляются в институт.

Остановимся теперь более подробно на вступительном собеседовании по математике. Как правило, для решения предлагаемых задач не требуется производить сложные выкладки и не нужно особой «натренированности», «натасканности».

Для их решения нужны, прежде всего, уверенные и точные знания — пусть даже в ограниченном объеме. Если можно так выразиться, поступающий должен «знать то, что он знает», т. е. уметь рассуждать в пределах своих знаний. Именно умение рассуждать лучше всего показывает общий уровень развития человека и определяет его возможности для дальнейшего обучения, для расширения круга его знаний.

Разумеется, поступающий должен знать основные понятия школьного курса и владеть этими понятиями.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные задачи. Одна из групп вопросов, которые часто предлагаются на собеседовании, связана с таким понятием, как дроби. Никто практически не ошибается, если ему предложить сравнить дроби $5/6$ и $7/8$. Однако как поступить, если требуется сравнить $3786/3787$ и $3787/3788$? Неужели перемножать четырехзначные числа? Конечно, тот поступающий, который «честно» и безошибочно проведет соответствующие выкладки, будет прав и покажет свою высокую технику вычислений (а это тоже важно), но взрослый человек должен сообразить, что первой дроби до 1 не хватает $1/3787$, а второй — $1/3788$, и поэтому вторая дробь больше.

Можно привести и более простой пример, когда «взрослое» рассуждение более эффективно: верно ли неравенство $3767/3865<896/875$? Справедливость этого неравенства устанавливается моментально, если заметить, что первое число меньше 1, а второе больше 1.

Разумеется, можно придумать и другие вопросы, связанные с дробями, но уже из рассмотренных вопросов видно, что для ответа достаточно не столько знать какие-то специальные приемы, сколько понимать суть дела.

Большое значение на собеседовании уделяется текстовым задачам, задачам на составление уравнений. Умение решать такие задачи ярко показывает общий уровень развития поступающего. При этом, разумеется, имеются в виду не головоломные задачи, а обычные задачи вполне практического содержания.

От рельса отрезали часть, составляющую 72% его длины. Масса оставшегося куска равна 92,4 кг. Определить массу отрезанной части.

Надо сразу сказать, что для решения этой задачи, грубо говоря, не требуется математического образования — надо лишь понимать, что такое проценты. А тогда ясно, что 92,4 кг составляют 28% длины рельса и поэтому $92{,}4 : 28=3{,}3$ (кг) составляют 1%. Следовательно, масса отрезанной части равна $3{,}3\cdot 72=237{,}6$ кг.

Отметим, что в этой задаче от поступающего требовалось еще провести выкладки с десятичными дробями; однако умение обращаться с дробями — и с простыми, и с десятичными — входит в обязательный минимум.

К сожалению, поступающие часто забывают о таких простых способах рассуждений и — по своим школьным воспоминаниям — в любых, даже самых простых задачах, используют метод составления уравнений. Конечно, это не возбраняется, но, например, в данной задаче решение просто и естественно получается без введения неизвестных и составления уравнений.

С другой стороны, во многих задачах самым разумным является именно составление уравнений. И здесь часто встречается общая «тактическая» ошибка: поступающие часто без всяких размышлений берут в качестве неизвестного обязательно то, что ищется в задаче, хотя это далеко не всегда разумно.

Рассмотрим для примера задачу — одного из самых нелюбимых поступающими типов — на «бассейны»:

К котловану подведены три трубы. Через первую трубу котлован можно наполнить на 5 часов быстрее, чем через вторую, а через первую и вторую вместе — в три раза быстрее, чем через третью. Сколько времени потребуется на заполнение котлована при одновременной работе всех труб, если пропускная способность первой трубы на 80% выше, чем у третьей?

Обозначим через x, y, z пропускные способности каждой из труб, измеренные, например, в м³/ч. Для того чтобы определять время заполнения котлована, нам необходимо знать его объем. Обозначим этот объем через V. Для согласования единиц измерения мы считаем, конечно, что объем измеряется также в м³. Тогда трубы могут заполнить котлован, соответственно, за $\frac{V}{x}$, $\frac{V}{y}$ и $\frac{V}{z}$ и мы получаем соотношения:

$$\frac{V}{x}=\frac{V}{y}-5;\quad 3\frac{V}{x+y}=\frac{V}{z},\quad x=1{,}8z.$$

Мы получили 3 уравнения с 4 неизвестными. Будем решать полученную систему уравнений, не обращая внимания на то, что объем V нам неизвестен. Выражая x и y через z (из 3-го и 2-го уравнений), а затем подставляя полученные значения x и y — в первое уравнение, мы получим равенство

$$\frac{V}{1{,}8z}=\frac{V}{1{,}2z}-5,\quad \text{или}\quad \frac{V}{z}=18.$$

Ну, а как теперь узнать время заполнения? Ясно, что за 1 час через три трубы вместе поступает $(x+y+z)$ м³ и, следовательно, на заполнение котлована уйдет

$$\frac{V}{x+y+z}=\frac{V}{4z}=\frac{9}{2}\text{(ч)}.$$

Значительное внимание на собеседовании уделяется решению уравнений и неравенств. При этом основной упор делается не на проверку техники вычислений и преобразований или владение хитрыми приемами решения, а на сознательное применение известных свойств функций, которые должны входить в багаж знаний как обязательный минимум.

Так, для решения уравнения $|34x^2-7x-22|=-2$ вовсе не требуется выяснять (в соответствии с определением модуля), при каких x выражение $34x^2-7x-22$ положительно или отрицательно, хотя именно с этого, как правило, начинают решение на вступительных экзаменах хорошо «натренированные» абитуриенты. Из известного всем свойства модуля немедленно следует, что это уравнение не имеет решений — ведь модуль любого числа есть число неотрицательное!

При решении неравенства $|\sqrt{x-2}-1|>-1$ не верно немедленно объявлять, что оно выполняется при любом x. В действительности, оно выполняется при любом x, *входящем в его область определения*, т. е. при $x\geqslant 2$. Уравнения и неравенства

$$\sqrt{x-2}+4=0,\quad \sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}\leqslant 2,$$

$$3\sin^2x+\sin^3x<100,$$

$$4\cos^2x+\cos^3x=5$$

решаются сразу же, если хорошо знать и правильно использовать свойства входящих в них функций.

Первое уравнение не имеет решений, так как арифметический квадратный корень по своему определению не может быть отрицательным числом. Первое неравенство также не имеет решений, но по другой причине — его область определения не содержит ни одного значения переменной: в самом деле, первое слагаемое имеет смысл при $x\geqslant 3$, а второе — при $x\leqslant 2$, а эти два условия одновременно не выполнимы. Для решения второго неравенства достаточно сообразить, что синус не может быть больше 1, так что левая часть не может быть больше 4. Поэтому это неравенство выполняется при любом x. Что касается последнего уравнения, то оно решается аналогичным рассуждением, но конец совершенно иной: дело в том, что $4\cos^2x\leqslant 4$, $\cos^3x\leqslant 1$, и поэтому правая часть может быть равна 5 только при $\cos x=1$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $\cos x=1$, т. е. удовлетворяется при $x=2\pi k$, где k — любое целое число.

Разумеется, для успешного прохождения собеседования требуется и умение решать не только «очевидные», но и обычные уравнения и неравенства. В частности, поступающий должен иметь достаточные навыки в решении квадратных уравнений и неравенств, знать формулы решения простейших показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.

Необходимо также знать простейшие формулы и преобразования, логарифмы, свойства показательной функции, формулы сложения тригонометрических функций.

Несколько меньшее внимание уделяется на собеседовании геометрии. Конечно, поступающий должен знать важнейшие геометрические понятия, такие, например, как теорема Пифагора, формула площади круга или теорема о трех перпендикулярах, уметь применять тригонометрию к решению задач, решать несложные задачи на вычисление, скажем, площадей многоугольников.

К собеседованию при приеме на подготовительное отделение надо готовиться. Но не надо терять и приобретенный после школы на производстве или в армии опыт; на собеседовании следует показать себя не школяром, а взрослым человеком.

В. Березин

Стереографическая проекция и астролябия

Стереографической проекцией называется проекция сферы из одного полюса (скажем, южного) на касательную плоскость к другому полюсу (северному). Стереографическая проекция является взаимно-однозначным отображением сферы с выколотой точкой на плоскость. С ее помощью можно получать плоское изображение сферы (например, земной поверхности или «небесной сферы»), и поэтому ею с давних времен пользуются астрономы и картографы.

Вообразим стоящего у Южного полюса S небесной сферы великана (рис. 1), переносящего мысленно звезды по лучам SP с небесной сферы на плоскость, касающуюся ее в Северном полюсе мира N, — «картинную плоскость» стереографической проекции. В результате на плоскости получится карта звездного неба.

Изобретение стереографической проекции обычно приписывают греческому астроному Гиппарху, жившему в 160—125 гг. до н. э.; впоследствии ее использовали навигаторы, кристаллографы, геологи и всесторонне изучали математики. Стереографическая проекция лежит в основе работы астролябии (см. рисунок на второй странице обложки).

Первое свойство сферической проекции — она *сохраняет углы между линиями*. Рассмотрим, например, пересечение линий Γ_1 и Γ_2 на сфере. Угол $(\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})$ измеряется углом между большими окружностями сферы, касающимися кривых Γ_1, Γ_2 в точке их пересечения или углом между касательными к этим окружностям прямыми. Пусть Γ_1 и Γ_2 перешли при проекции в γ_1 и γ_2 (рис. 2). Нам нужно доказать равенство

$$(\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2}) = (\widehat{\gamma_1, \gamma_2}).$$

Не нарушая общности, можно предположить, что Γ_1 проходит через полюсы сферы (см. красную окружность на рисунке 2). Тогда нам нужно доказать равенство углов UPW и $UP'W$ (рис. 3). Для этого рассмотрим плоскость $\beta = (MSV)$, параллельную α и проходящую через полюс S, и плоскость (MPV), касающуюся сферы в точке P. Эти плоскости пересекаются по прямой MV и значит,

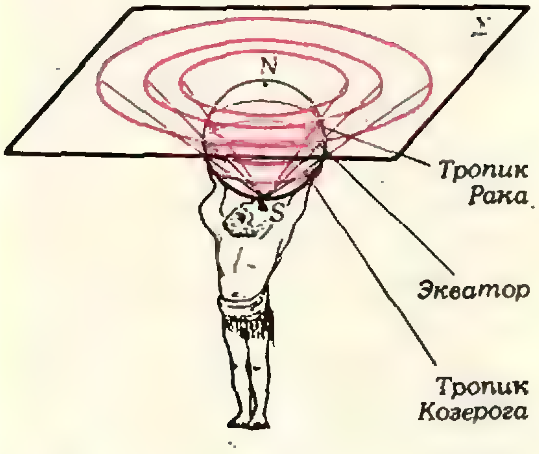


Рис. 1.

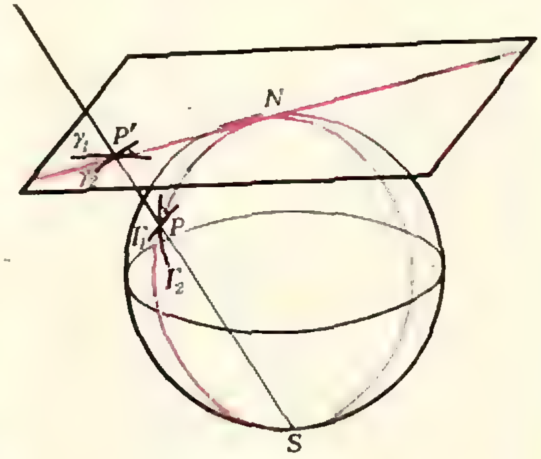


Рис. 2.

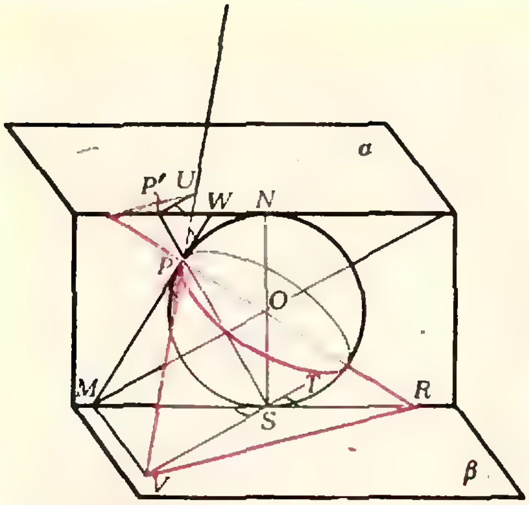


Рис. 3.

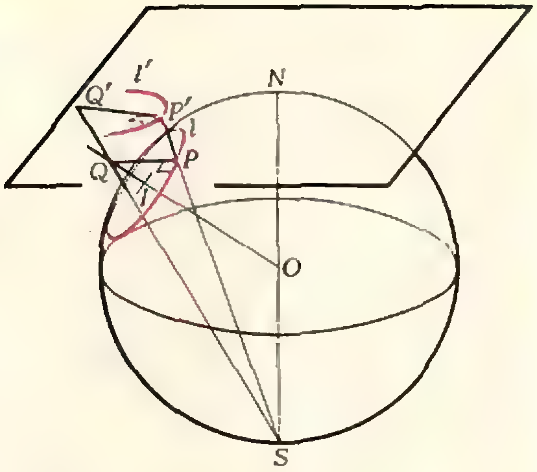


Рис. 4.

они симметричны относительно плоскости MOV (поясните!). Отсюда следует равенство углов UPW и TSR. Но из параллельности плоскостей α и β сразу следует $\angle UP'W = \angle TSR$, откуда $\angle UPW = \angle UP'W$.

Второе свойство стереографической проекции: *окружности на сфере переходят в прямые или окружности на плоскости α*. Сразу видно, что окружность на сфере, проходящая через полюс S, отображается на прямую. Покажем, что все другие окружности на сфере стереографическая проекция переводит в окружности на α. Для этого вспомним (см. «Квант», 1977, № 4, с. 42), что плоская кривая, составляющая прямые углы со всевозможными лучами, исходящими из одной точки, является окружностью.

Пусть окружность l проектируется на кривую l', $P \in l$ и P' — образ P (рис. 4). Пусть Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости окружности l, проходящего через ее центр I, и касательной QP к сфере в точке P. Пусть Q' — точка пересечения SQ с α. Ясно, что $QP \perp l$; значит, по первому свойству, $Q'P' \perp l'$ и в силу замечания из предыдущего абзаца это означает, что l' — окружность.

Третье свойство стереографической проекции: при вращении сферы относительно оси, проходящей через точки S и N, стереографическая проекция произвольной точки P на сфере будет вращаться около (SN). Другими словами, *параллели сферы проектируются в концентрические окружности плоскости α*, и проекция вращающейся по параллели точки станет вращаться по такой окружности.

Четвертое свойство стереографической проекции: если P' — проекция точки P, то $|SP| \cdot |SP'| = d^2$, где $d/2$ — радиус сферы. Доказательство легко получить из подобия прямоугольных треугольников $SP'N$ и SNP (рис. 3).

Стереографическая проекция и ее свойства лежат в основе конструкции и принципа действия астролябии. Название этого прибора в переводе с греческого означает «схватываю звезды». Схватывание это состоит в измерении координат интересующего нас светила. Сам прибор — сложная металлическая конструкция; он состоит из *«паука»*, вращающегося по криволинейной координатной сетке — *«паутине»* (рис. 5).

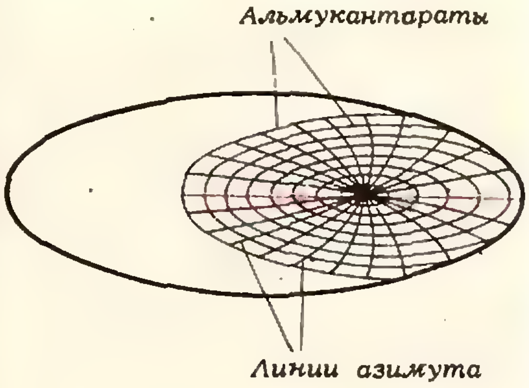


Рис. 5.

Ножки паука (их острия) соответствуют наиболее ярким звездам. На внешнее кольцо паука нанесены градусные деления; по нему вращается длинная прямоугольная пластинка с двумя прорезями (*алидада*) — см. рисунок на второй стр. обложки.

Посмотрим, как с помощью астролябии измеряли координаты звезд — их угловую высоту (над горизонтом) и азимут (угловое отклонение от Севера на Запад или Восток). Рассмотрим Землю как центр O небесной сферы, на которой расположено интересующее нас светило C (рис. 6). На небесной сфере нанесены координатные линии — *альмукантараты* (концентрические окружности с центрами на луче OZ) и перпендикулярные им большие круги сферы — *линии азимута*. При стереографической проекции на экваториальную плоскость*) эта сетка как раз переходит в сетку, подобную паутине; эта «паутина», по второму свойству, состоит из окружностей и дуг окружностей.

Чтобы найти координаты некоторого светила, скажем — Сириуса, астролябию вешали на большой палец, а алидаду поворачивали так, чтобы глаз наблюдателя, Сириус и оба отверстия алидады оказывались на одной прямой. Тогда стрелка алидады показывала на градуированной шкале угловую высоту светила. Узнав высоту, находили, на каком альмукантарате находится светило (рис. 7). После замера высоты паук поворачивался по паутине, пока острие ножки с надписью «Сириус» не оказывалось на найденном альмукантарате. При этом острие указывало на некоторую линию азимута на паутине: этот азимут и был азимутом Сириуса. Далее, т. к. на линиях азимута нанесены часовые деления, можно было узнать время (момент измерения). Более того, пользуясь теперь другими ножками паука, можно было без дополнительных измерений считывать координаты всех других отмеченных на пауке звезд.

Астролябии использовались не только для измерения земных координат светил. Морские и геодезические астролябии использовались как угломерные приборы. Морские астролябии (их изготовляли обычно очень

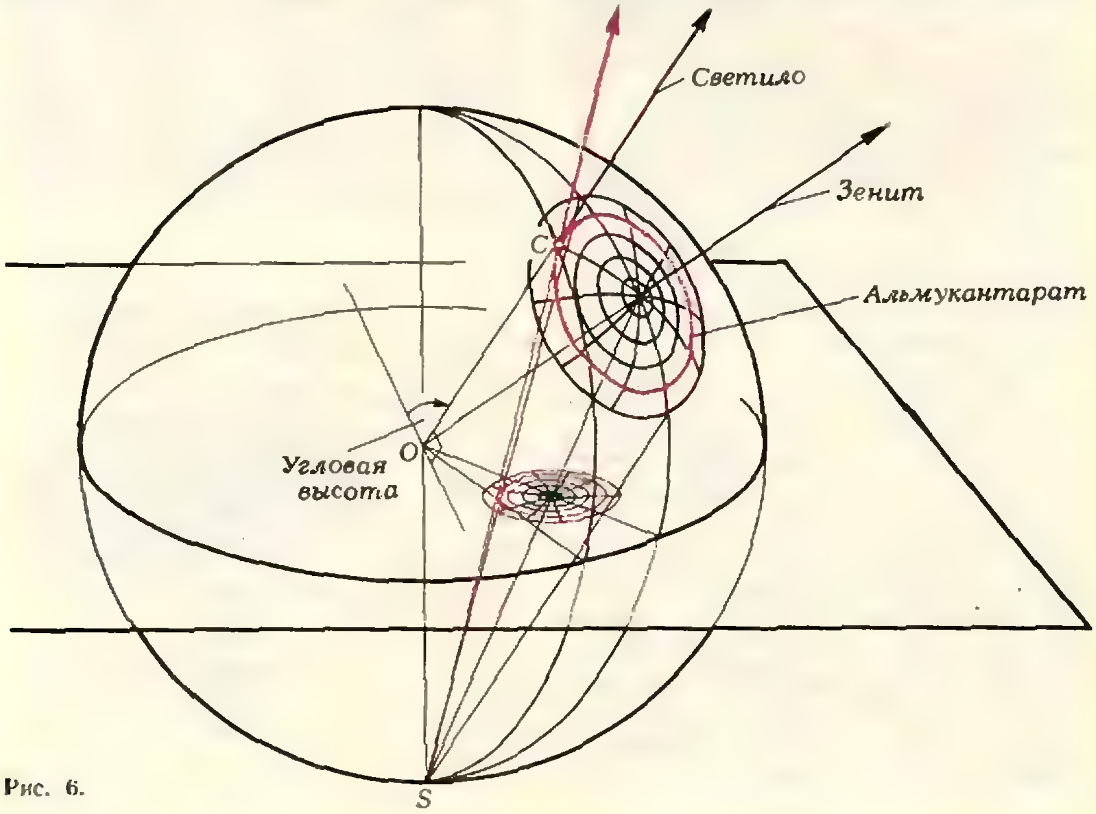


Рис. 6.

---

*) Астрономы обычно пользуются именно такой проекцией. Она отличается от вышеописанной гомотетией с коэффициентом $1/2$.

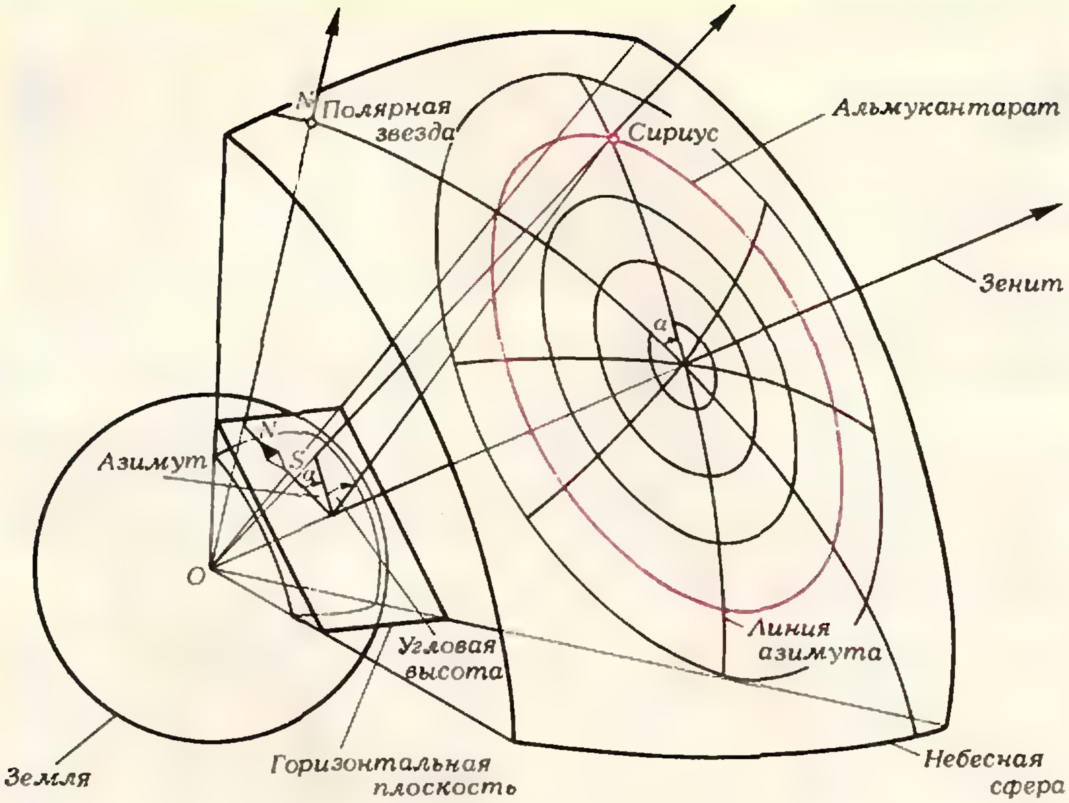


Рис. 7.

тяжелыми, чтобы они не качались во время измерений) служили для грубого определения широты места по высоте Солнца над горизонтом в полдень. В геодезические астролябии, которые служили для измерения горизонтальных углов, обычно вставляли компас — астролябии имели различные конструкции в зависимости от назначения.

(Начало см. на с. 12, 36, 41.)

И. Рузин (Ленинград) 0, 1, 3; *А. Савченко* (Дзержинск Донецкой обл.) 0; *С. Сазонов* (Уфа) 95; *О. Самохин* (Железногорск) 0; *А. Саркисов* (Баку) 0; *С. Сафронюк* (Ровно) 98; *В. Сачков* (Чебоксары) 3; *В. Середа* (Львов) 95, 98, 0, 1; *Г. Сизых* (Ангарск) 94, *П. Сильвестров* (Новосибирск) 95, 97, 1, 3, 5; *Ю. Сиренко* (Киев) 94, 95, 97, 98, 0; *А. Скипер* (п/о Богородицкое Смоленской обл.) 0; *О. Скрипачев* (Казань) 98; *Е. Смирнов* (Новгород) 98; *В. Смышляев* (Ленинград) 94, 95; *Н. Соколов* (Кировоград) 98, 0, 1; *А. Сромин* (Ленинград) 98, 0, 1; *А. Стеканян* (Тбилиси) 98; *А. Стогний* (Рубежное) 1, 2; *С. Тихомиров* (Апатиты) 94; *С. Тихомиров* (Москва) 5; *Б. Торопов* (Москва) 94; *Н. Трифонов* (Канск) 94; *А. Тятюшкин* (Саранск) 94, 95, 98, 0, 1; *А. Фаддеев* (Ленинград) 94; *Н. Федин* (Омск) 94, 95, 98, 0, 1; *А. Федюкович* (Пинск) 94; *С. Хоренко* (Бобруйск) 1; *С. Хосид* (Алма-Ата) 98, 0, 1; *А. Хугаев* (Цхинвали) 98, 1; *В. Целиков* (Череповец) 0, 1; *А. Чекмизов* (Краснодар) 94, 1, 3; *И. Шарипов* (Москва) 98, 0; *В. Швейдель* (Великие Луки) 95, 97; *Н. Шестопал* (Киев) 94, 95, 97, 0; *П. Шибаев* (Москва) 98, 0, 1; *Р. Широков* (Киев) 0, 1, 5—7; *Н. Шитинев* (п. Черноголовка Московской обл.) 95; *С. Шичанин* (Невинномысск) 3, 5; *А. Шишко* (Мурманск) 0; *И. Шляхова* (Лобня) 95; *А. Шостаченко* (Кишинев) 94, 95, 1; *С. Шпилькин* (п. Менделеево Московской обл.) 98, 0, 1; *И. Шульгин* (Ленинград) 1; *М. Эфроимский* (Ленинград) 95, 97, 98, 0, 1.

Будущим создателям космической техники

Какой мальчишка не мечтает стать космонавтом! С годами увлеченность романтической профессией дополняется интересом к научно-техническим основам космонавтики, к конструкциям ракет и космических кораблей, а лучший, самый верный путь приобщения к этой области — моделирование. В свое время авиамодельный спорт привел в научно-исследовательские институты и конструкторские бюро многих известных создателей самолетов и авиационных двигателей. А теперь конструирование моделей ракет и космических кораблей является первичной базой для подготовки будущих инженеров, будущих строителей таких ракетопланов, которые устремятся к далеким мирам. Юным конструкторам моделей ракет и адресована книга польского инженера П. Эльштейна, русский перевод которой выпустило издательство «Мир» *).

Разумеется, для того чтобы строить модели ракет, нужно обладать каким-то научным и практическим багажом. Поэтому автор прежде всего знакомит читателя с основами механики реактивного движения, с законами аэродинамики. В книге описываются простые опыты, которые наглядно демонстрируют некоторые процессы, происходящие при движении ракет, и позволяют провести исследования. Для этих опытов не требуется какой-то специальной аппаратуры. Пластмассовая бутылка из-под шампуня может мчаться по воде, как торпеда; при помощи двух пылесосов нетрудно соорудить аэродинамическую трубу для испытания моделей; в пластмассовом мяче можно создать условия невесомости.

Попутно в книге рассказывается об основных конструктивных элементах ракеты, условиях ее устойчивости, приводятся примеры расчетов и экспериментальной оценки важнейших параметров ракеты. Усвоив эти основные принципы, можно приступить к строительству простейших моделей ракет. Сначала это даже не модели, а макеты — картонные и деревянные, похожие на ракету разве что внешними очертаниями. Постепенно макет становится более совершенным, масштабным, воспроизводящим по крайней мере внешне, — все элементы настоящих ракет.

Следующий этап — изготовление летающих моделей, которые, собственно говоря, и ракетами нельзя назвать, ибо они лишены главного — реактивного двигателя, а запускаются резиновой катапультой наподобие рогатки. Зато именно на этих моделях можно отработать элементы конструкции — правильно подобрать соотношения размеров, установить стабилизаторы, освоить процессы старта, полета и возвращения.

Пройдя эти предварительные этапы, моделист может считать себя достаточно подготовленным, чтобы приступить к строительству и испытанию моделей, снабженных двигателями.

Существенным элементом стартового комплекса является электрическая система зажигания, позволяющая осуществлять дистанционный запуск модели. В главе «Ракетная электротехника» приводятся схемы таких систем.

В отличие от реальных ракет, предназначенных, как правило, для одноразового применения (космическая ракета, выполнив свою роль, сгорает в атмосфере, военная — взрывается), модели желательно использовать многократно, а для этого их необходимо снабжать возвращающим устройством. Спускаются модели на парашютах, а раскрытие их обеспечивается автоматической системой. Автор дает несколько примеров автоматических систем с описанием основных узлов и деталей.

В заключительной главе книги описаны наиболее удачные модели ракет и ракетопланов, созданные моделистами различных стран и выделяющиеся оригинальностью конструкции, совершенством аппаратуры, летными качествами.

Следует отметить одну важную деталь: на протяжении всей книги автор напоминает о необходимости неукоснительного соблюдения мер предосторожности. «Вопросов техники безопасности нельзя недооценивать — пишет П. Эльштейн. — Это не только моральный долг по отношению к себе и окружающим. Виновникам несчастных случаев угрожает уголовная ответственность. Ряд статей Уголовного кодекса предусматривает наказание как за неумышленное нанесение травм и материального ущерба, так и за совершение легкомысленных действий, представляющих угрозу здоровью и жизни людей».

Тому, кто стремится творчески работать в увлекательной области ракетомоделирования, нужны прочные знания и физики, и математики, и техники; необходимо постоянно следить за публикуемыми материалами, знакомящими с достижениями «большой» ракетно-космической техники. Автор дает советы и рекомендации, как отбирать эти материалы, как накапливать и систематизировать знания. Можно не сомневаться, что книга П. Эльштейна станет настольной книгой будущих создателей космической техники.

И. Зорич

---

*) П. Эльштейн. «Конструктору моделей ракет». М., «Мир», 1978, 320 с.

XX Международная математическая олимпиада школьников

XX олимпиада состоялась в июле 1978 года в Бухаресте. В ней приняли участие команды 17 стран. Как обычно, команда каждой страны состояла из 8 школьников. Участникам было предложено 6 задач — по 3 в каждый из двух дней соревнований. За решение каждой из задач жюри выставляло некоторое количество очков. Максимально возможная сумма очков за решение всех задач для отдельного участника равнялась 40, а, значит, для команды в целом — 320 очкам. В неофициальном зачете впереди оказалась команда Румынии (237 очков). Далее следуют команды США (225 очков), Великобритании (201 очко), Вьетнама (200 очков), Чехословакии (195 очков). (Команда СССР в этой олимпиаде не участвовала.)

Четыре задачи XX олимпиады помещены в Задачнике «Кванта» этого номера. Условия всех задач и решения задач, не вошедших в Задачник, мы приводим ниже.

Первый день

1. Пусть m и n — натуральные числа такие, что $n > m \geqslant 1$. В десятичной записи группа из последних трех цифр числа 1978^m совпадает с группой последних трех цифр числа 1978^n. Найти m и n так, чтобы сумма $m+n$ была наименьшей.

2. Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB, PC взаимно перпендикулярны. Пусть Q — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC диагонально противоположная к P. Определить геометрическое место точек Q.

3. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$ и $g(n) = f(f(n)) + 1$ для всех $n \geqslant 1$. Определить $f(240)$.

Второй день

4. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB, AC этого треугольника в точках P, Q, соответственно. Доказать, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Пусть $\{a_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — последовательность различных натуральных чисел. Доказать, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

6. Международное общество состоит из представителей 6 различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, …, 1978.

Доказать, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

Решения

Задача 1. Из условия следует, что $1978^n - 1978^m = 1978^m (1978^{n-m} - 1) = 1000a$, где a — некоторое натуральное число. Отсюда видно, что $m \geqslant 3$: 1978^m должно делиться на 8. Остается найти $n-m$, при которых $A = 1978^{n-m} - 1$ делится на 5^3. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n-m = 4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее $6^k - 1 = (1+5)^k - 1 = k \cdot 5 + \frac{k(k-1)}{2} 5^2 + \cdots$, где опущенные члены делятся на 125. Поэтому $2k + 5(k-1)k = k(5k-3)$ делится на 25, откуда k делится на 25. Следовательно $n-m = 100k$, а $n+m = 100k + 2m$. Ответ: 106.

Задача 5. Легко проверить, что из $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$ следует $x_1y_1 + x_2y_2 > x_1y_2 + x_2y_1$. Отсюда при $k_1 < k_2$ и $a_{k_1} > a_{k_2}$ получаем

$$\frac{a_{k_1}}{k_1^2} + \frac{a_{k_2}}{k_2^2} \geqslant \frac{a_{k_2}}{k_1^2} + \frac{a_{k_1}}{k_2^2}. \qquad (*)$$

Переставим все a_k при $k = 1, \ldots, n$ в порядке их возрастания: $a_{k_1} < a_{k_2} < \ldots < a_{k_n}$. Тогда по $(*)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{k_i}}{i^2}.$$

Учитывая, что $a_{k_i} \geqslant i$ получаем искомое неравенство.

В. Скворцов

Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике

Скоро многие читатели нашего журнала станут участниками различных математических олимпиад 1979 года. Здесь мы помещаем ряд задач, предлагавшихся на предпоследнем республиканском туре; после задачи указан класс и фамилия автора задачи.

1. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел. (8—10)

А. Гейн

2. На плоскости дано 1978 точек. Запишем все попарные расстояния между ними. Доказать, что среди этих чисел не меньше тридцати различных. (7—10)

3. Среди всех четырехугольников с данными длинами диагоналей и данным углом между ними найти четырехугольник наименьшего периметра. (7—10)

Б. Агафонов

4. На клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1) нарисована окружность радиуса больше 2, не проходящая через узлы (вершины клеток). Назовем узел граничным для данной окружности, если хотя бы один из соседних с ним узлов (находящихся на расстоянии 1) лежит по другую сторону от окружности. Найти разность между числом граничных узлов, лежащих вне окружности, и числом граничных узлов, лежащих внутри нее. (8—10).

5. На стороне AD квадрата $ABCD$ дана точка E. Выбрать на сторонах AB и BC по точке M и K так, чтобы отрезок MK был параллелен прямой CE и четырехугольник $CEMK$ имел наибольшую площадь. (8—10)

Э. Готман

6. Известно, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k=0$, m — наименьшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а M — наибольшее. Доказать неравенство $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2 \leqslant -kmM$. (9—10)

7. Доказать, что $e^x \geqslant x^e$ при всех положительных x ($e=2{,}718\ldots$ — основание натуральных логарифмов). (10)

8. Последовательность определяется условиями $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1}$. Доказать, что последовательность $b_n=a_n/2^n$ имеет предел. (9—10)

А. Егоров

9. Дана последовательность (a_n). Построим две последовательности (b_n) и (c_n):

$$b_n=2a_n+a_{n-1},$$
$$c_n=a_n+2a_{n-1}.$$

а) Известно, что $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Можно ли утверждать, что последовательность (a_n) имеет предел?

б) О последовательности (b_n) ничего не известно, но известно, что $c_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c$. Можно ли утверждать, что последовательность (a_n) имеет предел? (9—10)

А. Дороговцев

10. Доказать, что если $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=x_1y_2+x_2y_2+x_3y_3=0$, причем не все x_i и y_i равны 0, то

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=\frac{2}{3}.\ (10)$$

А. Анджан

11. На белой сфере 12% площади поверхности закрашено в черный цвет. Доказать, что существует вписанный в сферу прямоугольный параллелепипед, все вершины которого находятся в белых точках. (10)

А. Альтшулер

12. В клетках шахматной доски произвольным образом расставлены числа 1,2,...,64. Доказать, что найдутся по крайней мере три квадрата 2×2 клетки, сумма чисел в каждом из которых больше 100. (8—10)

13. Запишем число $\frac{1}{p}$, где p — простое, $p>5$, в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

а) Доказать, что сумма цифр в периоде делится на 9.

б) Доказать, что если период содержит mk цифр, то сумма k m-значных чисел, записи которых получаются разбиением периода на k частей по m цифр, делится на число 99...9 из m девяток. Например: $\frac{1}{13}=0{,}0769230\,769230\ldots$; $7+6+9+2+3+0$ делится на 9, $76+92+30$ делится на 99, $769+230$ делится на 999. (9—10)

А. Толпыго

14. Существует ли пирамида, обладающая двумя такими особенностями:

1) в основании пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон;

2) если каждое ребро пирамиды изобразить в виде вектора, поставив стрелку в некотором направлении, то сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору? (9—10)

В. Михайловский

15. Можно ли на поверхности правильного тетраэдра с длинами ребер 1 указать четыре точки так, чтобы до каждой точки поверхности можно было бы дойти от одной из этих четырех, пройдя по поверхности путь не больше 1/2? (10)

Н. Васильев

Еще 17 вопросов

Правильные ответы. VIII *класс.* **1.** г. **2.** в. **3.** б. **4.** в. **5.** б. **6.** б. **7.** а. **8.** д. **9.** в. IX *класс.* **10.** д. **11.** г. **12.** в. **13.** б. **14.** б. **15.** д. **16.** в. **17.** г.

Эти вопросы предлагались на республиканских олимпиадах по математике в 1978 году. Самым трудным оказался вопрос 3 — меньше четверти восьмиклассников нашли правильный ответ на него. Однако рассуждения здесь очень просты: если h — граница погрешности при измерении a, то $a=100\pm h$ и площадь приближенно равна $S=a^2\approx 100^2\pm 200h$; граница относительной погрешности результата должна быть не больше 1%, поэтому

$$\frac{200h}{100^2}\leqslant\frac{1}{100},$$

откуда $h\leqslant 0{,}5$ (м). (Сравните в «Алгебра 8», с. 36.)

Приведем пояснения еще к нескольким вопросам.

4. Знаменатель нужных прогрессий может быть равен 1 или —1.

15. Ребра куба разбиваются на три «четверки» параллельных ребер, поэтому пятиугольник «2» в параллельной проекции получиться не может (у него пять попарно не параллельных сторон). Шестиугольник «3» получается при проектировании параллельно диагонали куба. Прямоугольник же получится, если направление проектирования параллельно одной из граней.

17. Достаточно раскрыть скобки.

Старые знакомые

Задача Крокодила Гены. Поскольку $b<c<d$, из условия $a+b=c+d$ получаем, что $a=d+(c-b)>d$. Окончательно получаем: $b<c<d<a$ — все участки различны по длине.

Задача Ёжика. Винни-Пух несет гармошку, Пятачок — узелок с вареньем, Ёжик — воздушный шарик, старуха Шапокляк — горшочек с медом, Крокодил Гена — рогатку.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. $\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$. **2.** 4. **3.** $c=-4$. **4.** Если проволоки было изготовлено x метров и ее можно намотать на n восьмисотметровых катушек (использовав одну из них не полностью), то, по условию,

$$\begin{cases} 800(n-1)<x<800n, \\ 900(n-4)<x\leqslant 900(n-3), \\ 1100(n-9)=x. \end{cases}$$

Ответ. 25 300 м. **5.** Требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых

$$5a-8\cos 8x-3a\cdot\cos 3x-3>0 \quad (1)$$

при всех $x\in\mathbf{R}$. Неравенство (1) равносильно неравенству

$$a>\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}. \qquad (2)$$

Поскольку неравенство (2) должно выполняться при всех $x\in\mathbf{R}$,

$$a>\max_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}.$$

Найти $\max\limits_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}$ можно без всякого дифференцирования: очевидно, если

$$\begin{cases} \cos 8x_0=1, \\ \cos 3x_0=-1, \end{cases} \qquad (3)$$

то $\max\limits_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}=\frac{8\cos 8x_0+3}{5-3\cos 3x_0}=\frac{11}{2}$. Система (3) имеет решения (например, $x_0=0$). Ответ. $a>\frac{11}{2}$.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $\{-2-\sqrt{2}\}$. **2.** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$. Поэтому $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=|BD|\cdot|BC|\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2|AB|\cdot|BC|$. С другой стороны, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=|AD|\cdot|BC|\cos(\widehat{\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{BC}})$. Поэтому $\cos(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}})=2\frac{|AB|}{|AD|}$. Из ΔABD, применив теорему косинусов, получаем $|AD|=\sqrt{5}\,|AB|$. Ответ. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **4.** Из того, что новый сплав, составленный из x г первого, y г второго и

z г третьего сплава, содержит 15% висмута, получается $3x+y-3z=0$. Значит, $z\neq 0$ и $z\geqslant x$. Процентное содержание свинца в новом сплаве равно

$$5\,\frac{11x+10y+14z}{x+y+z}=\frac{5}{2}\cdot\frac{44z-19x}{2z-x}=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{44-19\dfrac{x}{z}}{2-\dfrac{x}{z}},$$

причем $0\leqslant\dfrac{x}{z}\leqslant 1$. Ответ. 62,5% и 55%.

5. Требуется найти все значения параметра b, при каждом из которых

$$16(b+1)\cos x-2\cos 2x-(16b^2+32b-$$
$$-10)<0$$

или

$$\cos^2 x-4(b+1)\cos x+(4b^2+8b-3)>0,$$

а это означает, что

$$z^2-4(b+1)z+(4b^2+8b-3)>0$$

для всех $z\in[-1;1]$. Ответ. $]-\infty;$
$-\frac{1}{2}(\sqrt{7}+3)[\,\cup\,]\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1);\ +\infty[$.

Факультет психологии

1. $\left\{1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right\}$. 2. $\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=$
$=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

3. Обозначим промежуток времени между «начальным» моментом (когда пешеход и велосипедист находились в одной точке) и моментом, когда мотоциклист настиг пешехода (велосипедиста) через t (T), скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста через $П$, B, M соответственно. Тогда (см. рис. 1)

$$\begin{cases} Mt-Пt=6,\\ MT-BT=6,\\ BT-ПT=3.\end{cases}$$

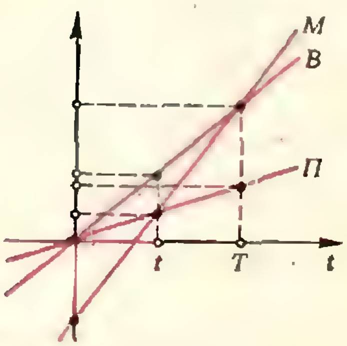


Рис. 1.

Искомое расстояние равно $Bt-Пt=$ $=(B-П)\,t=\dfrac{3}{T}\cdot\dfrac{6}{M-П}$. Из второго и третьего уравнений $MT-ПT=9$. Ответ. 2 км. 4. Ответ. $\{(0;0),(1;0)\}$. Указание. Положить в данном равенстве $x=0$; вывести из полученного равенства $b=0$. В равенстве $a\cdot\cos x-a=\cos ax-1$ положить $x=2\pi$ и $x=\dfrac{2\pi}{a}$. 5. Ответ. $a<0$. Указание.

Сложите неравенства $f(-1)<1$, $-2f(1)<2$ и $f(3)<-4$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. По 9. 2. $A_4^2\cdot 4\cdot 5^2+4A_4^2\cdot 5^3=7200$.

3. $x_1=\dfrac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l$ ($k,l\in\mathbf{Z}$). 4. $\max\limits_{\mathbf{R}} f(x)=\dfrac{3}{4}$,

$\min\limits_{\mathbf{R}} f(x)=-\dfrac{3}{2}$. 5. $1+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

Элементы статики деформируемых тел

1. $\sigma_1=40$ МН/м²; $\sigma_2=0$; $\sigma_3=$ $=20$ МН/м²; $\Delta l=0$.

$$2.\quad a=\frac{l}{1+\dfrac{E_1S_1l_2}{E_2S_2l_1}}=1{,}08\ \text{м};$$

$$\sigma_1=\frac{4|\vec{F}|(l-a)}{\pi d_1^2 l}=44\ \text{МН/м}^2;$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_1E_2l_1}{E_1l_2}=33\ \text{МН/м}^2;$$

$$\Delta l=\frac{\sigma_1l_1}{E_1}=3{,}3\cdot10^{-4}\ \text{м}=0{,}33\ \text{мм}.$$

$$3.\quad |\vec{R}_1|=|\vec{R}_3|=\frac{|\vec{F}|\dfrac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^2\alpha}{1+2\dfrac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^3\alpha};$$

$$|\vec{R}_2|=\frac{|\vec{F}|}{1+2\dfrac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^3\alpha}.$$

Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике

1. Ответ. Числа 2^k ($k=0,1,2,\ldots$). Уравнение $(x+y)(x-y+1)/2=2^kr$, где r — нечетное число, отличное от единицы, всегда имеет решения в натуральных числах x, y, таких, что $x-y\geqslant 2$, а при $r=1$ — не имеет.

2. Рассмотрим любые две точки из нашего набора. Если попарных расстояний

k, то точек не больше $2k^2+2$, поскольку все точки, кроме выбранных, должны лежать в пересечении двух семейств концентрических окружностей, по k окружностей в каждом.

3. Ответ. Искомый четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Пусть $[A_1C_1]$ — образ $[AC]$ при параллельном переносе $\{\overrightarrow{BD}\}$. Тогда периметр $ABCD$ есть сумма расстояний от точки D до вершины четырехугольника ACA_1C_1. Ясно, что наименьшей эта сумма будет в том случае, когда точка D лежит на пересечении диагоналей четырехугольника ACA_1C_1.

4. Четырьмя радиусами, идущими под углом 45° к линиям клетчатой бумаги, разделите окружность на 4 четверти, а затем проведите все вертикальные линии, пересекающие верхнюю и нижнюю четверти, и все горизонтальные линии, пересекающие две другие четверти. Все граничные узлы будут лежать на этих линиях, причем вдоль них легко установить соответствие между внутренними и внешними граничными точками, при котором ровно четырем внутренним точкам будут отвечать по две внешние (остальным — по одной). Ответ. Четыре.

6. Имеем: $\sum\limits_i\left(x_i-\frac{m+M}{2}\right)^2=$

$$=\sum_i x_i^2+k\left(\frac{m+M}{2}\right)^2;$$ так как $m\leqslant x_i\leqslant M$,

то $\left(x_i-\frac{m+M}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{M-m}{2}\right)^2$, откуда

$$\sum_i x_i^2\leqslant k\left(\left(\frac{M-m}{2}\right)^2-\left(\frac{m+M}{2}\right)^2\right)=-kmM.$$

8. Последовательность (b_n) монотонна и ограничена, поскольку

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\sqrt{b_n^2+{}^1/_{2^{2n}}}\right)$$

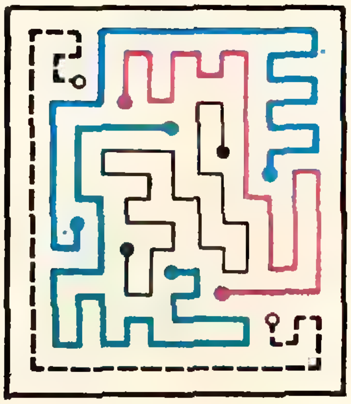


Рис. 2

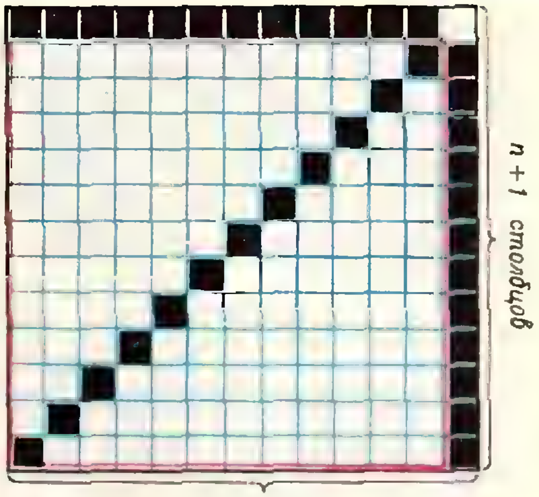


Рис. 3.

и $$b_{n+1}-b_n=\frac{{}^1/_{2^{2n}}}{2\left(b_n+\sqrt{b_n^2+{}^1/_{2^{2n}}}\right)}\leqslant\frac{1}{2^{2n}}.$$

10. Рассмотрите векторы с координатами $(x_1;\ x_2;\ x_3)$, $(y_1;\ y_2;\ y_3)$ и $(1;1;1)$, и воспользуйтесь тем, что сумма квадратов косинусов углов между вектором $(1;0;0)$ и нашими тремя векторами равна 1.

11. Проведите через центр сферы три взаимно перпендикулярные плоскости и рассмотрите образы закрашенного множества при всевозможных композициях симметрий относительно этих плоскостей — они заполнят не более 96% площади сферы.

12. Ни в одном из 49 квадратов 2×2 сумма не больше 250, поэтому если она не больше 100 во всех квадратах, кроме, быть может, двух, то сумма сумм по квадратам должна быть меньше $2\cdot250+47\cdot100=5200$. С другой стороны, в эту сумму сумм угловые числа входят по разу, примыкающие к сторонам — по два, остальные — по 4 раза, поэтому такая сумма не меньше $(64+\ldots+61)+2(60+\ldots+37)+4(36+\ldots$ $\ldots+1)=5242$.

13. б) $10^{mk}-1$ делится на p, а 10^m-1 не делится на p, поэтому отношение этих чисел $1+10^m+10^{2m}+\ldots+10^{(k-1)m}$ делится на p, и сумма k бесконечных десятичных дробей, отвечающих числам $\frac{1}{p}$, $\frac{10^m}{p}$, . . . есть целое число: a, 9999...

15. Условию удовлетворяют середины любых четырех ребер, образующих замкнутую ломаную.

«Квант» для младших школьников

(см. с. 37)

1. См. рисунок 2.
2. а) $4+6=10$, $2+7=9$, $3+5=8$; б) $\begin{array}{r}\times\,15\\4\\\hline 60\end{array}$, $\begin{array}{r}\times\,29\\3\\\hline 87\end{array}$.
3. См. рисунок 3.

4. Изобразим участников слета в виде двух точечных множеств (мальчики — точки одного множества, девочки — другого), а отношение *знакомства* в виде линии, соединяющей точку одного множества с точкой другого. Если одно из множеств содержит k ($k \geqslant n$) точек, то точки этих множеств соединяют kn линий. Так как из каждой точки второго множества выходит ровно n линий, получаем, что оно содержит также k точек.

(см. «Квант» № 11)

1. а) Если исходное число $\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}}$, то новое число — это $\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k+1}}$. Перепишем его так

$$\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = 10^{2k+1}\times \overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} + \overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = (10^{2k+1}+1)\,\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = (10+1)\times 10^{2k}-10^{2k-1}+10^{2k-2}-\ldots-10+1)\,\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = 11\cdot A,$$

что и требовалось доказать.

2. Поскольку $(n^4+n^2+1)=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$, число n^4+n^2+1 (n натуральное) будет простым тогда и только тогда, когда $n^2-n+1=1$, то есть $n=1$.

3. В 1975 году хозяину было 79 лет (рожд. 1896 г.), а гостю 25 лет (рожд. 1950 г). Сыну хозяина в 1961 году было 37 лет (рожд. 1924 г.), а внуку в 1963 году было 13 лет (рожд. 1950 г.), Отцу же хозяина в 1962 году было 109 лет (рожд. 1853 г.).

Собери куб.

(см. «Квант» № 11, 3-я с. обл.).

См. рис. 5

Головоломки на суммы чисел и их квадратов

(см. «Квант» № 11, с. 51)

См. рис. 4.

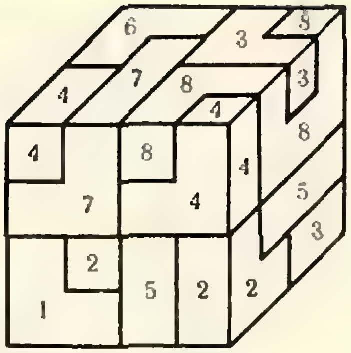


Рис. 5.

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 11)

1. а)
$$\begin{array}{r|l} -\,102 & 96 \\ \cline{2-2} 96 & 1{,}0626; \\ \hline 600 & \\ -\,576 & \\ \hline 240 & \\ -\,192 & \\ \hline 480 & \\ -\,480 & \end{array}$$

б)
$$\begin{array}{r|l} -\,100034 & 11 \\ \cline{2-2} 99 & 9094 \\ \hline 103 & \\ -\,99 & \\ \hline 44 & \\ -\,44 & \end{array}$$

2. а) $482\cdot 5=2110$, $986\cdot 7=6902$;
б) $2\cdot 615=1230$, $9\cdot 768=6912$;
в) $1078:7=154$, $2184:8=273$;
г) $1248:416=3$, $6083:869=7$;
д) $4=1636:409$, $9=8424:936$.

3. 98643865372.

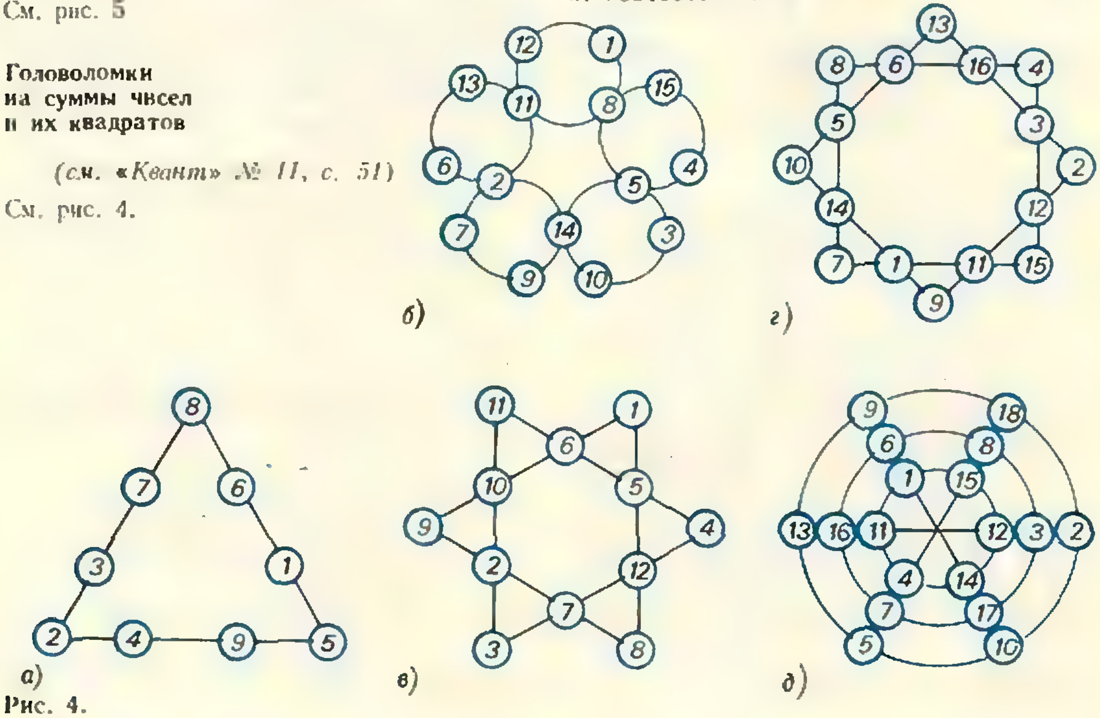


Рис. 4.

BeatriceGloria_personal library

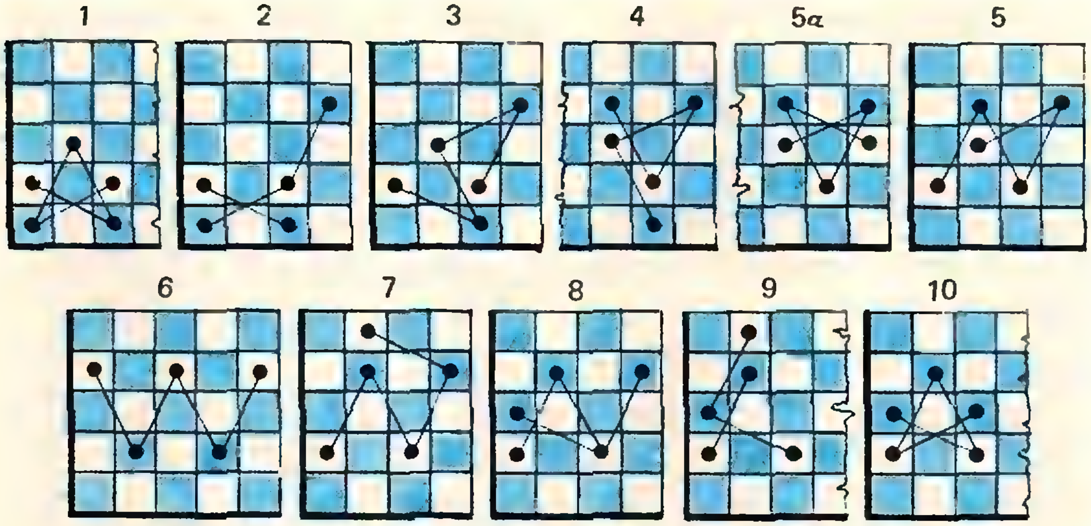


Рис. 2.

Активный эскадрон

(см. «Квант» № 11)

Минимальный активный эскадрон из пяти коней изображен на рисунке 1 а (исходная позиция 1). В самом деле, трех и четырех коней мало (убедитесь в этом самостоятельно — это не так просто). Пять же коней из позиции 1 можно перевести в позиции 5а и 10. Отличие позиций 1 и 10 состоит в том, что одна из них сдвинута относительно другой на одну клетку вертикали. Очевидно, что в вертикальном направлении можно последовательно осуществить бесконечное число таких переходов. Отличие позиций 1 и 5а состоит в том, что одна из них сдвинута относительно другой на одну клетку по вертикали, на одну по горизонтали и повернута на 180°. Таким образом, полигоном перемещения эскадрона из пяти коней, занимающего позицию 1, является вся бесконечная шахматная доска.

Напечатано в 1978 году

Ленинский завет: «Учиться, учиться и учиться!»	4	2
С новым учебным годом!	9	2
150 лет со дня рождения Л. Н. Толстого	10	2

Статьи по математике

Абрамович В. Признаки делимости на *l*	10	25
Антипов И., Шварцбурд С. Удивительный вычислитель	4	23
Башмаков М. Диофантовы уравнения и рациональные точки	8	2
Березин В. Винтовая линия	1	55
Березин В. Сферический эллипс	2	25
Березин В. Вивиания	3	40
Березин В. Циклоиды на плоскости и на сфере	4	13
Березин В. Локсодромия	5	17
Березин В. Гипотрохоиды	7	32
Березин В. Геометрия зубчатой передачи	7	50
Березин В. Стереографическая проекция и астролябия	12	50
Болтянский В. Часто ли степени двойки начинаются с единицы?	5	2
Болтянский В. Три точки на одной прямой	10	14
Виленкин Н. Сравнения и классы вычетов	10	4
Габович Е. Задача коммивояжера	6	11
Гарднер М. Числа Каталана	7	20
Гейн А. На пути к решению	7	9
Геронимус А. Сравнения по простому модулю	11	6
Геронимус А. Диофантовы уравнения по простому модулю	12	2
Гик Е. Ваш рейтинг, гроссмейстер?	10	20
Гик Е. Существует ли бесконечная шахматная партия?	12	10
Залгаллер В. Непрерывно изгибаемый многогранник	9	13
Земляков А. Арифметика и геометрия столкновений	4	14
Литовченко З. Лучший вариант	5	13
Лопшиц А. Площади ориентированных фигур	3	2
Мамикон М. Центр тяжести полушария	11	17

Матиясевич Ю. Модели многогранников 1 8
Семенов С. Рукопись, найденная в Сарагосе 2 10
Строгова А. Метод наименьших квадратов 9 51
Таллер А. Сюрпризы листа Мёбиуса 6 28
Тьмеладзе З. Следствие ведет Ферма 8 18
Яглом И. Поговорим об определениях 6 32

Статьи по физике

Беляков В. Каналирование частиц в кристаллах 9 4
Бланк Е. Линейные и нелинейные физические системы 11 2
Бронштейн М. Необратимость тепловых явлений и статистика 3 11
Гольдин Л. И снова ускорители 8 8
Гродко Л. Бегущая волна и ...автомобильная шина 10 9
Дозоров А. Что это значит — «навести на резкость»? 2 14
Дуков В. Конвекционные токи и токи смещения 7 15
Карцев В. Тайны не разгадывают, их дарят... (к 200-летию со дня рождения Ганса Христиана Эрстеда) 1 2
Кикоин И., Лазарев С. ФЭМ-эффект 1 18
Китайгородский А. Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах 2 2
Кравцов В., Сербин И. Уголковые отражатели 12 7
Лишевский В. Иоганн Кеплер 6 21
Малов Н. Всегда ли отталкиваются противоположно направленные токи? 8 23
Паташинский А., Попов С. Ускорители ИЯФ — метод встречных пучков 5 8
Уолкер Т., Слек А. Откуда взялся «он»? 10 92
Фабрикант В. Что происходит в гелий-неоновом лазере 6 2
Фабрикант В. Сюрпризы зеленого стекла 7 2
Шкловский И. Астрономия невидимого 4 6

Лаборатория «Кванта»

Гегузин Я. Пузырьковая модель кристалла 3 19
Грабовский М. Плавание воскового шарика 5 16
Дозоров А. Демонстрация невесомости 4 22
Канаев П. Простые опыты с мыльными пленками и пузырями 11 11
Лушков А., Лужков Ю. «Звезды» из водяной капли 7 28
Майер В. Изгибная волна в пластинках 8 26
Майер В. Реакция вытекающей и втекающей струй 9 20
Майер В., Мамаева Е. Два физических фокуса 1 23
Майер В., Назаров Н. Автогенератор из угольного сифона 6 36
Мильман В. Почему сгоревшая спичка изогнута? 12 13
Николаев А. Прибор для изучения преломления света 2 18
Пальчиков Е. Какого цвета зеленка? 7 27
Половинка И. Опыты с синтетическими пленками 10 28

Математический кружок

Вавилов В., Мельников И. Касательная 5 18
Гальперин В., Калинников В. Многоугольники на клетчатой бумаге 6 38
Гальперин Г., Кушниренко А. Спутники и задача уплощения 12 15
Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Задача о трех кувшинах 7 29
Кузнецова Л., Скопец З. Седлообразная поверхность 2 20
Курляндчик Л. Высокие степени 11 13
Курляндчик Л., Лисицкий А. Суммы и произведения 10 31
Курляндчик Л., Розенблюм Г. Метод бесконечного спуска 1 24
Софман Л. Суммы длин и минимум энергии 3 25
Тоноян Г., Яглом И. Теорема Морлея 8 28
Тоом А. Решения задач ВЗМШ 9 33

Математический практикум

Вавилов В. Сетчатые номограммы 9 22
Клумова И. Номограммы из выравненных точек 9 30

Задачник «Кванта»

Задачи
М481—М540; Ф493—Ф552 1—12

Решения задач
М436—М454, М456—М487, М489—М493, М495, Ф448—Ф507 1—12

* * *

Фомин С. Билеты и ящики 8 44

* * *

Фамилии решивших 1—7 4,7,10,12
Победители конкурса «Кванта» 3 29
Премии «Кванта» 9 35

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—7, 9—12

* * *

Бартенев Ф. Наблюдения в математике 4 40
Данилов Ю. Стомахион 8 50
Касаткин В. Сообразительная Аня 11 39
Кордемский Б. Спрятанная арифметика 3 42
Махров В. Старые знакомые 12 38
Семенов Е. Доказать можно? — Доказать нельзя! 1 38
Семенов Е. Расстояние Степы Мошкина (из писем другу) 9 48
Стариков А. Необыкновенная девочка 8 49

* * *

Белкин И. Спор о лягушке 2 40
Дозоров А. Куда направлена сила трения? 5 36

Дозоров А. Знакомы ли вы с линзой? 6 48
Дозоров А. Оптика без оптики 7 41
Невгод В. Приключения Гаиса Пфааля и толстяка Пайкрафта 10 58

По страницам школьных учебников

Гейдман Б. Композиция двух осевых симметрий 2 36
Дубровский В. Шесть доказательств теоремы о медианах 4 36
Дубровский В. В поисках определения площади поверхности 5 31
Звонкин А. Анализ помогает алгебре 6 53
Звонкин А. Когда существует предел? 10 54
Звонкин А. Что такое π? 11 28
Земляков А. Как выглядит парабола? 3 38
Земляков А., Орлов В. Трехфазный ток 11 33
Мешойрер Р. Комбинаторные доказательства формулы Ньютона 9 45
Раббот Ж. Знаете ли вы, что $\frac{220\text{ вольт}}{127\text{ вольт}}\approx\sqrt{3}$? 11 32

* * *

Земляков А., Ивлев Б. Вопросы по геометрии 1 36
Земляков А., Ивлев Б. Вопросы по алгебре и анализу 2 34
Земляков А., Орлов В. Вопросы для выпускников 7 44
Земляков А. Еще 17 вопросов 12 34

Практикум абитуриента

Виленкин А. Производная и касательные 5 44
Виленкин А. Производная и задачи на экстремумы 6 60
Габович И., Горнштейн П. Скалярное умножение векторов 1 47
Габович И., Горнштейн П. Вооружившись методом координат 11 42
Зазело А. Множества значений числовых функций 2 49
Литвиненко В., Мордкович А. Пределы 9 53
Овчинников С. Принадлежность точек прямой и плоскости 3 48
Перевалов Г. Что значит «для любого ε»? 10 62
Розов Н. Читатели советуют 4 48

* * *

Асламазов Л. Напряженность, напряжение, потенциал 5 38
Баканина Л. О силах трения 11 48
Кикоин А. Что такое э. д. с.? 4 42
Маринчук М. Первый закон термодинамики 1 42
Орлов В. Парадокс «большого» тела 3 54
Табачников Л. Элементы статики деформируемых тел 12 42
Тарасов Л. Симметрия в задачах по физике 6 65

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

Витебский технологический институт легкой промышленности 6 80
Киевский государственный университет им Т. Г. Шевченко 6 72
Куйбышевский государственный университет 3 44
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 5 51
Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского 7 56
Марийский политехнический институт им. А. М. Горького 7 57
Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского 7 54 7 54
Московский автомеханический институт 6 75
Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева 6 79
Московский инженерно-физический институт 1 53
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии 6 77
Московский институт инженеров землеустройства 7 55
Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова 6 74
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (физический факультет) 6 76
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 7 53
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 46, 3 45
Московский физико-технический институт 4 53
Московский институт химического машиностроения 7 54
Московский институт электронного машиностроения 6 78
Московский энергетический институт 7 52
Новосибирский государственный университет 5 48
Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева 7 58
Уральский государственный университет им. А. М. Горького 6 70
Ярославский политехнический институт 7 56
Ярославский государственный университет 6 73

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 12 40

* * *

Гутенмахер В., Медведев П. Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета МГУ 5 53
Тонян В. О подготовительных отделениях при вузах 12 47

Спрашивайте — отвечаем 2 54

Рецензии, библиография

Клумова И. Памяти Отто Данкела 2 56
Леонидов Ф. Символический язык математики 10 87
Смолянский М. Математика на шахматной доске 9 59
Юшина Ю. Царство смекалки 11 54

* * *

Гегузин Я. Живой рассказ о живой науке 1 54
Зорич И. Красивая физика 4 56
Зорич И. Мир, лишенный очертаний 9 60
Зорич И. Будущим создателям космической техники 12 54
Комаров В. В лаборатории Вселенной 11 57
Шаскольская М. Почему и как исчезает пустота 3 61
И. Р. Новая книга по истории астрономии 5 56

* * *

Новые книги 3, 6, 8, 10

Информация

Всесоюзная неделя науки, техники и производства для детей и юношества 4 58
IX праздник юных математиков в Батуми 10 89

* * *

Раббот Ж. Всесоюзная заочная математическая школа 1 56
Асланян В., Кирьянов А., Чугунова Т. Заочная физико-техническая школа 1 59
Заочная физическая школа 8 61
Вечерняя физическая школа 8 62

* * *

Атласов В. и др. РФМШ при Якутском университете 11 58
Виленкин А. 10 лет Омскому НОУ 11 60

* * *

Башмаков М., Братусь Т., Поздняков С. Математика — будущему рабочему 10 90

* * *

Дагаев М. Полное лунное затмение 8 48
Дагаев М. Возможен звездный дождь! 8 48

Олимпиады

Международные олимпиады

Савин А. XIX олимпиада по математике 2 51
Скворцов В. XX олимпиада по математике 12 55
Слободецкий И. X олимпиада по физике 8 56

XII Всесоюзная олимпиада

Розов Н., Смолянский М. Олимпиада по математике 10 65
Лиманов Л. Задачи олимпиады по математике 10 70
Петрова Т. Олимпиада по физике 10 71
Орлов В. Экспериментальные задачи олимпиады по физике 10 76
Победители XII олимпиады 10 82

* * *

Задачи XL Московской математической олимпиады 2 55
Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике 12 56
Задачи физической олимпиады в Финляндии 6 84

Постройка тракта

Давным-давно от города Мутонвиля по берегу большого озера шел старинный тракт. У самого тракта на равных расстояниях друг от друга были расположены деревни Альбижуа, Бонди, Виланкур, Гарбюзье и, наконец, Дюпре, за которой начинался непроходимый лес (см. рисунок на третьей странице обложки).

Тракт пришел в негодность. Его предстояло выровнять и замостить булыжником, разумеется, за счет жителей этих пяти деревень. Все пятеро деревенских старост собрались в Мутонвиле, чтобы договориться о покупке камня и найме рабочих.

— На постройку тракта требуется 600 луидоров, — резюмировал староста деревни Гарбюзье. — Сразу после сбора урожая наша деревня внесет свои 120 луидоров.

— Если Гарбюзье платит сто двадцать, то мы даем шестьдесят, — заявил староста Бонди. — Ведь участок тракта до нашей деревни ровно вдвое меньше, чем до Гарбюзье.

— В таком случае мы должны внести только 30 луидоров, — сказал староста деревни Альбижуа.

В конце концов старосты договорились, что требуемые 600 луидоров будут уплачены, причем жители каждой деревни участвуют в оплате той части тракта, которой они пользуются, когда везут свои товары в Мутонвиль (расстояние от Мутонвиля до Альбижуа такое же, как и между соседними деревнями).

Сколько же пришлось уплатить жителям каждой из пяти деревень?

А. Халамайзер

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова,
Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, С. Лухин, Э. Назаров,
А. Пономарева, Е. Тенчурина, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

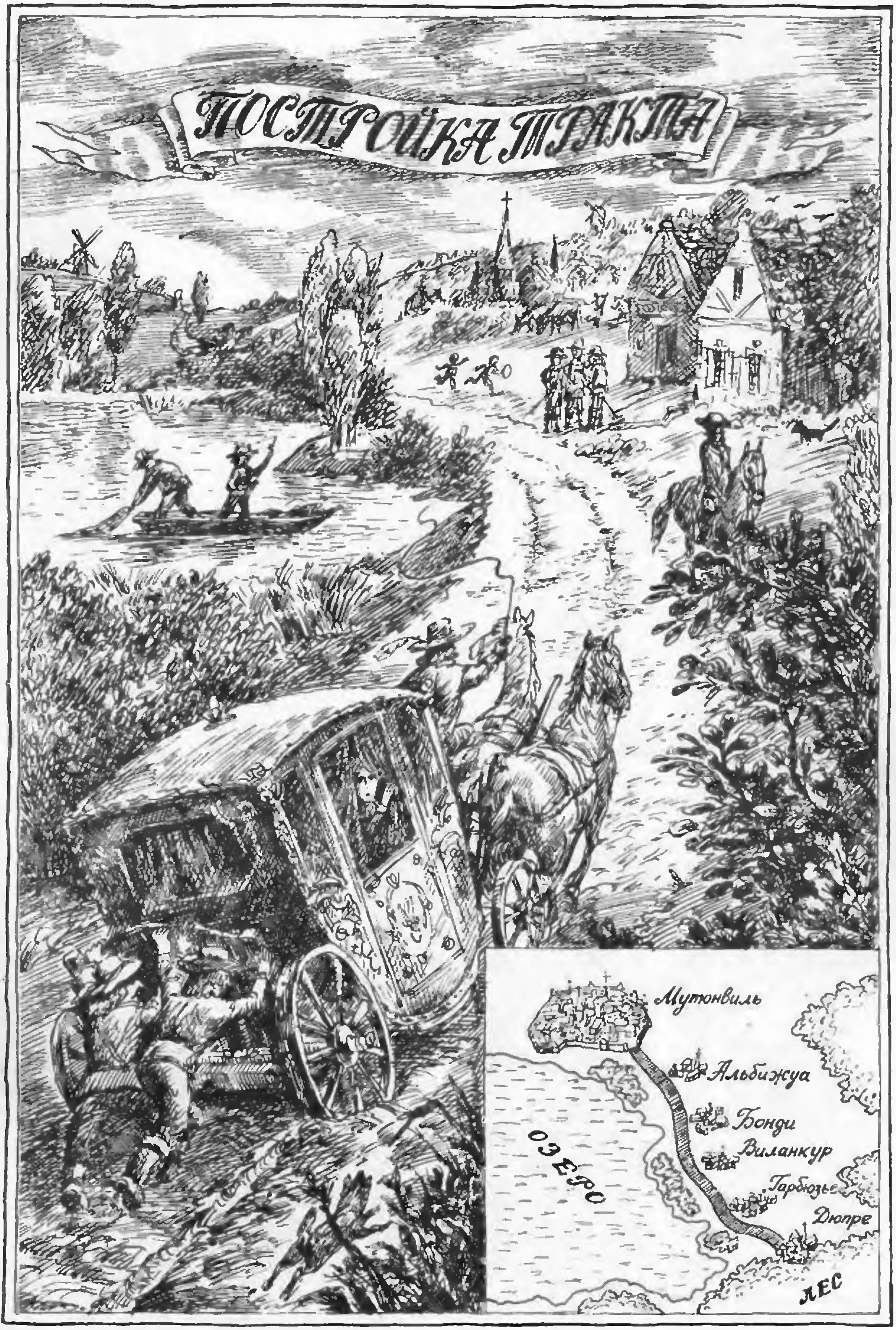
Художественный редактор Т. Макарова

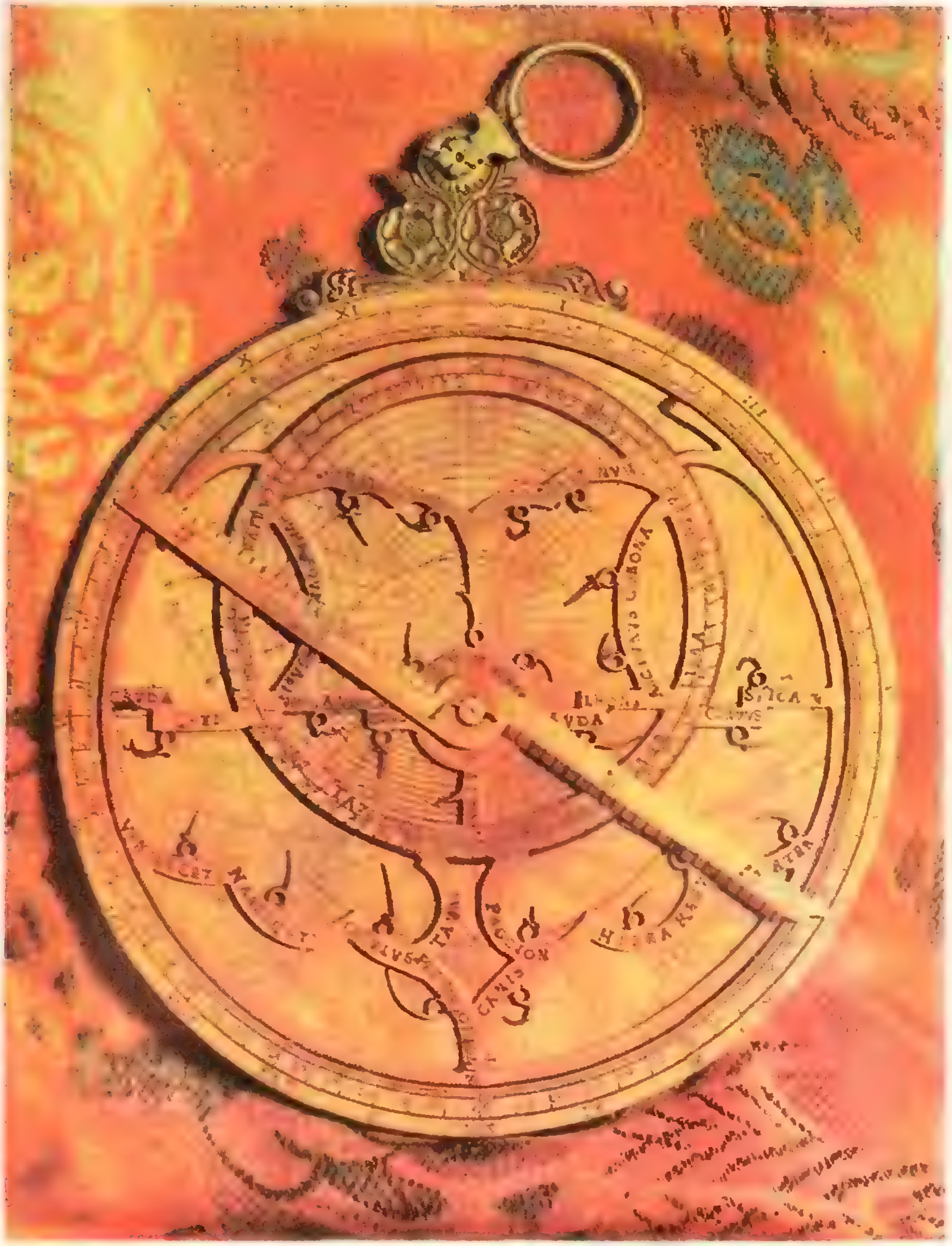
Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/IX—1978.
Подписано в печать 15/XI—1978.
Бумага 70×108 $^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,52 Т-20144
Цена 30 коп. Заказ 2220
Тираж [illegible] экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются


ПОСТРОЙКА ТРАКТА
Мутонвиль
Альбижуа
Бонди
Виланкур
Гарбюзье
Дюпре
ОЗЕРО
ЛЕС



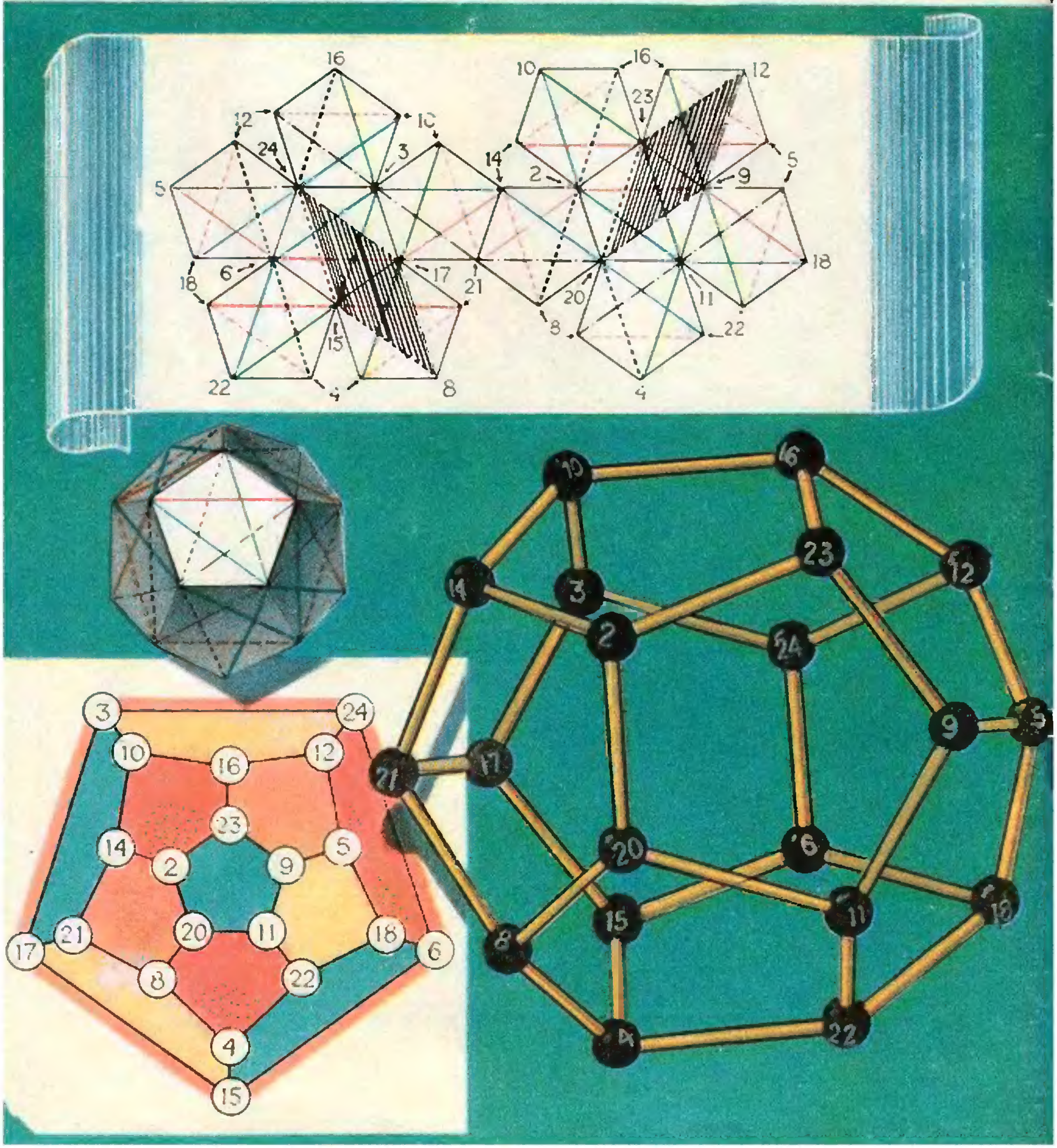
Астролябия — «схватывающая звезды» — более полутора тысяч лет верой и правдой служила человечеству, помогая астрономам и мореплавателям. Устройство этого прибора основано на свойствах так называемой стереографической проекции. Подробнее об этом вы можете прочитать на с. 50.

Астролябия, которую вы видите на этой фотографии, была изготовлена в 1532 году нюрнбергским мастером Г. Хартманом. Сделана она из позолоченной латуни и, как многие старинные приборы, является настоящим произведением искусства. Впрочем, это совершенно не мешало пользоваться ею.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

МАГИЧЕСКИЙ ДОДЕКАЭДР

Если из набора чисел 1, 2,...,25 выбросить числа 1, 7, 13, 19, 25, то оставшиеся двадцать чисел можно расставить в двадцати вершинах додекаэдра так, чтобы суммы чисел, стоящих в вершинах каждой грани, были одинаковы. Одно из таких расположений вы видите на обложке. Любопытно, что при этом расположении есть еще пятерки вершин, дающих ту же магическую сумму 65. На развертке и на модели изображено двенадцать поясков проходящих через такие пятерки вершин, причем каждая пятерка образует правильный пятиугольник, плоскость которого параллельна некоторой грани додекаэдра. Но это еще не все. Есть у нашего расположения чисел и другие закономерности. Постарайтесь найти их самостоятельно.

Е. Кривошеев